Сборник задач
по математике
для 9 и 10 классов

Екатеринбург 2001

УДК 51(075.3)

Подготовлено на кафедре математики
СУНЦ УрГУ

Печатается по решению Ученого Совета СУНЦ УрГУ: протокол №10 от 20.09.2001г

Сборник задач по математике для 9 и 10 классов. Составитель **Ануфриенко С.А.** Екатеринбург 2001. 59с.

В сборник включены задачи по основным темам программы по математике для поступающих в физико-математический и математико-экономический классы СУНЦ УрГУ. Сборник предназначен для слушателей подготовительных курсов СУНЦ УрГУ, старшеклассников и учителей математики.

Оглавление

Введение

Подготовительные курсы СУНЦ УрГУ существуют уже семь лет. Занятия на курсах ведутся с учащимися 8, 9 и 10 классов школ города и области. Данный сборник предназначен для занятий с группами абитуриентов 9 и 10 классов, поступающих в физико-математический и математико-экономический классы лицея. Он также может быть использован старшеклассниками для самостоятельной подготовки к конкурсным экзаменам.

Первая глава сборника посвящена алгебре. Наряду с традиционными темами (решение основных типов уравнений и неравенств), сборник содержит задачи с параметрами, логические задачи, задачи по элементарной теории чисел. Логически связанным блоком в сборник вошли системы уравнений, задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии и текстовые задачи. Задачи по планиметрии составляют вторую главу сборника. Важно отметить, что практически в каждый параграф первых двух глав включены задачи, предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в СУНЦ УрГУ. Заключительная глава содержит программу по математике для поступающих в физико-математический и математико-экономический классы лицея.

Далее приводится список задачников и методических пособий, использованных при составлении данного сборника.

1. **Ануфриенко С.А., Соколова Е.М.** Задачи вступительных экзаменов по математике в СУНЦ УрГУ (лицей): 1991-98 годы. Екатеринбург: УрГУ, 2000. 196 с.

2. **Расин В.В.** Функции. Графики. Квадратный трехчлен. Екатеринбург: УрГУ, 1997.

3. **Литвиненко В.Н., Мордкрвич А.Г.** Практикум по элементарной математике. М.: Просвещение, 1991. 352 с.

4. **Тынянкин С.А.** 514 задач с параметрами. Волгоград, 1991.
5. **Ткачук В.В.** Математика — абитуриенту. Т. 1–2. М.: ТЕИС, 1995.
6. **Яковлев Г.Н.** Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1985.
7. **Шарыгин И.Ф.** Решение задач: 10 класс. М.,1994.
8. **Шарыгин И.Ф.** Геометрия — 8. М.: РОСТ, МИРОС, 1996. 240 с.
9. **Никольская В.Г.** Факультативный курс по математике: 7 – 9 классы. М., 1989.
10. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. М., 1991. Ч. 1,2.
11. **Мельников И.И., Сергеев Н.Н.** Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М., 1990.
12. **Вавилов В.В. и др.** Задачи по математике: Уравнения и неравенства. М., 1987.
13. **Вавилов В.В. и др.** Задачи по математике: Алгебра. М., 1987.
14. **Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасеченко П.И.** Нестандартные методы решений уравнений и неравенств. М., 1991.

Глава 1

Алгебра

1.1. Функции и графики

В задачах 1–6 найти область определения функций.

1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$. **2.** $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

3. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$. **4.** $y = \sqrt{1-x}$.

5. $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. **6.** $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-4}$.

В задачах 7–12 найти область определения и изобразить графики функций, заданных несколькими условиями.

7. $y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$ **8.** $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2 \\ 2, & 2 \leqslant x < 3. \end{cases}$ **10.** $y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

11. $y = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ x^2, & -1 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2 \\ x, & 2 \leqslant x. \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} x^2 - 5, & x < -2 \text{ или } x > 2, \\ -1, & -2 < x \leqslant -1 \text{ или } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 - 2x^2, & -1 < x < 1. \end{cases}$

В задачах 13–36 построить графики функций (при построении использовать основные способы преобразования графиков функций).

13. $y = x^2 + 2$. **14.** $y = \sqrt{x} - 2$.

15. $y = \sqrt{x+2}$. **16.** $y = x^2 - 4x + 4$.

17. $y = -x^2 + 2x - 1$. **18.** $y = -\sqrt{x+1}$.

19. $y = \sqrt{-x}$. **20.** $y = \dfrac{1}{-x}$.

21. $y = \dfrac{x}{x+1}$. **22.** $y = \dfrac{x}{x-1}$.

23. $y = 1 - \sqrt{x+1}$. **24.** $y = 2 - \sqrt{1-x}$.

25. $y = -\sqrt[3]{x+3} + 1$. **26.** $y = 2 - \sqrt[3]{1-x}$.

27. $y = 2x^2$. **28.** $y = -x^2/2$.

29. $y = |x^2 - 4x + 3|$. **30.** $y = |x^2 - x - 2|$.

31. $y = \left|\dfrac{x+1}{x}\right|$. **32.** $y = \left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|$.

33. $y = x^2 - 4|x| + 3$. **34.** $y = x^2 - |x| - 2$.

35. $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$. **36.** $y = \dfrac{1}{|x| + 1}$.

1.2. Линейная функция

1. Доказать, что графиком функции $y = kx + b$ является прямая линия.

2. Доказать, что для любой прямой l, не параллельной оси Oy, найдется линейная функция $y = kx + b$, графиком которой является прямая l.

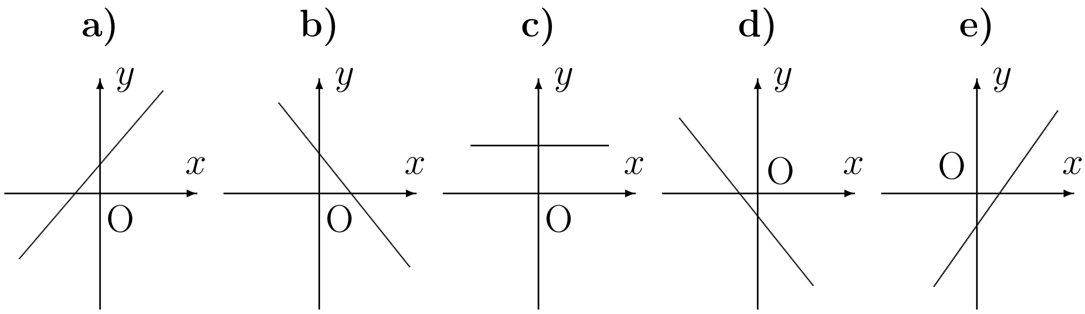
3. Доказать, что при $k > 0$ функция $y = kx + b$ является строго возрастающей.

4. Доказать, что при $k < 0$ функция $y = kx + b$ является строго убывающей.

5. Доказать, что если функция $y = kx + b$ является строго возрастающей, то $k > 0$.

6. Доказать, что если функция $y = kx + b$ является строго убывающей, то $k < 0$.

7. Определить знаки k и b для линейных функций, графики которых изображены на следующих рисунках.



8. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

9. Построить график функции $y = \dfrac{-x^2 + x + 2}{x + 1}$.

10. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2, 3)$ и $B(1, 1)$.

11. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3, 1)$ и $B(4, 6)$.

12. Лежат ли точки $A(1, 2)$, $B(0, 1)$ и $C(80, 82)$ на одной прямой?

13. Лежат ли точки $A(-1, 2)$, $B(1, 1)$ и $C(91, -43)$ на одной прямой?

14. Найти все a, при которых имеет бесконечно много решений система уравнений $\begin{cases} y - 2x = 3, \\ (1 - a)y + 4x = 2a - 12. \end{cases}$

15. Найти все a, при которых не имеет решений система уравнений $\begin{cases} 3y - x = 2, \\ (a-4)y - ax = 5 + a. \end{cases}$

16. На плоскости xOy нарисовали графики функций $y = 2x - 2$ и $y = 5 - x$, а затем стерли ось Oy. Восстановить недостающую ось и масштаб изображения.

17. На плоскости xOy нарисовали графики функций $y = 2x - 1$ и $y = 3 - x$, а затем стерли ось Ox. Восстановить недостающую ось и масштаб изображения.

18. Изобразить на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geqslant 2x - 4$.

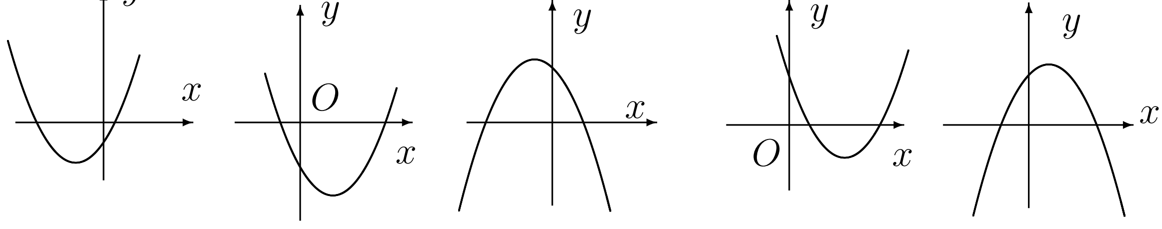
19. Изобразить на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leqslant 3 - 2x$.

20. Найти площадь фигуры, заданной системой $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ y + x \leqslant 1, \\ y + 2 \geqslant 2x. \end{cases}$

21. Найти площадь фигуры, заданной системой $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ 2y + x \leqslant 5, \\ y + 1 \leqslant x. \end{cases}$

1.3. Квадратичная функция

1. Определить знаки a, b и c для квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$, графики которых изображены на следующих рисунках.



2. Построить график функции $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$.

3. Построить график функции $y = \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x+1}$.

4. Известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии функции $y = ax^2-(a+6)x+3$. Постройте ее график.

5. Найти все a, при которых симметричны относительно $x = 1$ корни уравнения $(a^2+1)x^2-4(a+2)x+3 = 0$.

6. Разложить на множители квадратный трехчлен $f(x) = 2x^2-5x+2$.

7. Разложить на множители квадратный трехчлен $f(x) = -3x^2+5x-2$.

Используя теорему Виета найти корни уравнений 9–10.

8. $x^2-8x+7 = 0$. **9.** $x^2-12x+20 = 0$.

10. При каких значениях a корни уравнения $x^2-(1+2a)x+2a = 0$ совпадают между собой?

11. Найти все значения параметра a, при которых единственный корень имеет уравнение $\dfrac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x-2} = 0$.

12. Найти все значения параметра a, при которых единственный корень имеет уравнение $\dfrac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a} = 0$.

13. Известно, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q = 0$. Найти значения следующих выражений:

a) $x_1^2+x_2^2$, **b)** $x_1^2+3x_1x_2+x_2^2$, **c)** $x_1^4x_2+x_2^4x_1$, **d)** $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$,
e) $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$.

14. Используя теорему Виета, определить знаки корней уравнения $x^2-4x+2 = 0$.

15. Используя теорему Виета, определить знаки корней уравнения $x^2+4x+2 = 0$.

16. Найти все значения параметра a, при которых положительны все корни уравнения $x^2+(a+4)x+8 = 0$.

17. Найти все значения параметра a, при которых отрицательны все корни уравнения $x^2+7ax+16 = 0$.

18. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2+12x+3a=0$ имеют разные знаки.

Решить уравнения 20–29.

19. $x^4-4x^2+4=1$. **20.** $x^4-7x^2+6=0$.

21. $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

22. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.

23. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

24. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

25. $x^3+2x-3=0$. **26.** $(1+x)(1-x)(1+x^2)=-15$.

27. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=5$. **28.** $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$.

29. Найти корни уравнения $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$.

Решить неравенства 31–36.

30. $x^2+2x-3>0$. **31.** $2x^2-3x+1\geqslant 0$.
32. $1-3x^2+4x>0$. **33.** $(x-2)(2x+1)<1-x+x^2$.
34. $x^2-6x+9\leqslant 0$. **35.** $7x^2+5<0$.

36. Решить неравенство $\dfrac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a}\leqslant 0$.

Решить методом интервалов неравенства 38–45.

37. $(x+1)^7(x-2)^4(x+3)^3\leqslant 0$. **38.** $(2x+1)^2(x+1)(x+2)\leqslant 0$.

39. $\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+1)^2}\leqslant 0$. **40.** $\dfrac{x^2(x-1)^3}{x+2}\geqslant 0$.

41. $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2}\geqslant 0$. **42.** $\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2+2x-3}\leqslant 0$.

43. $\dfrac{x^2+7x+6}{x}<2$. **44.** $\dfrac{2-x^2}{1-x}\leqslant x$.

45. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $8x^2-6xy+y^2=0$.

46. Найти количество точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = 2x - 2$.

47. При каких значениях k графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = kx - 2$ пересекаются в одной точке?

48. Записать уравнение прямой, не параллельной оси Oy, касающейся графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ в точке с абсциссой $x = 9$.

1.4. Уравнения и неравенства с модулем

Решить уравнения 1–14.

1. $|x - 1| = 3.$ **2.** $|x^2 - 1| = 1.$

3. $\Big||x - 1| - 2\Big| = 3.$ **4.** $\Big|||x + 2| - 3| + 1\Big| = 1.$

5. $|x| = -3x - 5.$ **6.** $|x + 1| = -2x - 2.$

7. $|x - 1| + |x - 3| = 2.$ **8.** $|x + 2| + |x - 1| = 3.$

9. $|3 - x| + |x + 2| - |x - 4| = 3$.

10. $|x - 3| + |2x + 4| - |x + 1| = 2x + 4$.

11. $|x^2 - 4| + |9 - x^2| = 5.$ **12.** $|x^2 - 2x| + |x - 3| = 3.$

13. $\Big||2x - 1| - 5\Big| + x = |6 - x|.$ **14.** $\Big|x - |4 - x|\Big| - 2x = 4.$

Решить неравенства 15–20.

15. $x^2 + |6x - 5| > 0.$ **16.** $2|x + 1| > x + 4.$

17. $x^2 - 5|x| + 6 < 0.$ **18.** $x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 > 0.$

19. $|x^2 - 2x - 3| > 3x - 3.$ **20.** $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geqslant 0.$

Решить методом интервалов неравенства 21-26.

21. $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > 3.$ **22.** $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4.$

23. $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0.$ **24.** $\dfrac{2x-|3-x|}{|3-x|+2} < 1.$

25. $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x.$ **26.** $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geqslant 2.$

Решить системы уравнений 27–30.

27. $\begin{cases} |x+1| = 4y-4, \\ |y-1|+|x+1| = 5. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} |x^2-2x|+y=1, \\ x^2+|y|=1. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} |xy-4| = 8-y^2, \\ xy = 2+x^2. \end{cases}$

Построить графики функций в задачах 31–32.

31. $y = \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x^2+4x+4}}.$ **32.** $y = \sqrt{\dfrac{(x^2+x-6)(x^2-6x+8)}{x^2-x-12}}.$

Изобразить на плоскости xOy множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям задач 33–36.

33. $\dfrac{y^2-3y}{|y|} - |x+1| \leqslant 1.$ **34.** $\dfrac{2x^2+x-6}{|x+2|} + |y| \leqslant 0.$

35. $y + \dfrac{2x^2+x-10}{|x-2|} \leqslant 0.$ **36.** $|y| + \dfrac{2x^2+x-10}{|x-2|} \leqslant 0.$

37. Пусть $f(x) = \begin{cases} 4x+1, & \text{если } x < -1, \\ -2x-5, & \text{если } x \geqslant -1. \end{cases}$

(a) Решить неравенство $f(x) \leqslant x-5$.

(b) Найти значения a, b, c таким образом, чтобы при всех значениях x было выполнено равенство $f(x) = ax+b-|3x+c|$.

38. При каком значении параметра a существует и симметрично относительно $x_0 = 1$ решение неравенства $|2x-4|+x-1 \leqslant a$?

39. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x^4+4x^3+4x^2}}{|x|}=2\,.$

40. Изобразить график функции $y=\dfrac{\sqrt{x^4+4x^3+4x^2}}{|x|}.$

41. Построить график функции $y=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}-\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}\,.$

42. Построить график функции $y=\dfrac{x^2-2|x|+1}{|x|-1}\,.$

43. $g(x)=|x-1|\,.$ Функция $f(x)$ определяется следующим образом: $f(x)=\begin{cases} x+a, & x<1; \\ -x^2+x+a, & x\geqslant 1. \end{cases}$ Найти все значения параметра a, при которых на отрезке $[0,2]$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.

1.5. Иррациональные уравнения и неравенства

Решить уравнения 1–13.

1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=1.$ **2.** $\sqrt{x-2}=1-x.$

3. $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2\,.$

4. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4\,.$

5. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$ **6.** $\sqrt{x^2+32}+\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

7. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6.$

8. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$ **9.** $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2.$

10. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4.$ **11.** $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

12. $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1\,.$

13. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2\,.$

14. При всех значениях параметра a решить уравнение $\sqrt{x+a}=x\,.$

15. При всех значениях параметров a и b решить уравнение $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x+b}=1$.

Решить неравенства 16–19.

16. $\sqrt{x^2-x-12}<x$. **17.** $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x+4$.

18. $\sqrt{3x^2-22x}>2x-7$. **19.** $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

Решить методом интервалов неравенства 20–28.

20. $\dfrac{x\sqrt{x+2}}{x+3}\geqslant 0$. **21.** $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\leqslant 0$.

22. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$. **23.** $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\leqslant 3$.

24. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$. **25.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>\dfrac{1}{2-x}$.

26. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

27. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

28. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\geqslant\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

29. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$.

30. Найти все значения параметров a и b, при которых решением неравенства $\sqrt{x-a}>\sqrt{2x-b}$ является промежуток $1\leqslant x<5$.

31. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{9+6p+p^2}-\sqrt{9-6p+p^2}}{\sqrt{9+6p+p^2}+\sqrt{9-6p+p^2}}$.

32. Имеет ли корни уравнение $x^2+5x-8\sqrt{x}+20=0$?

33. Пусть $f(x)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^2$.

(a) Найти область определения функции $y=f(x)$.

(b) Построить график функции $y=f(x)$.

34. Доказать, что разность

$$\sqrt{|2\sqrt{2}-3|}-\sqrt{2\sqrt{2}+3}$$

является целым числом. Найти это число.

35. Построить график функции

$$y=\frac{1}{2}\Bigl(1+\sqrt{9-x^2}+\Bigl|1-\sqrt{9-x^2}\Bigr|\Bigr).$$

1.6. Метод интервалов

Решить неравенства 1–22.

1. $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \geqslant 0\,.$

2. $(x+1)^7(x-2)^4(x+3)^3 \leqslant 0\,.$

3. $(3x^2-13x+4)(4x^2+12x+9) \leqslant 0\,.$

4. $(2x-5)(x^2-4)(x^3+8) \leqslant 0\,.$

5. $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-6x+5} > 0$

6. $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3} \geqslant x$

7. $(x^2-2x)(2x-2)-\dfrac{18x-18}{x^2-2x} \leqslant 0\,.$

8. $(x^2+3x)(2x+3)-16\dfrac{2x+3}{x^2+3x} \geqslant 0\,.$

9. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) \leqslant 9\,.$

10. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(2+x)^2} \leqslant \dfrac{10}{9}.$ **11.** $|x+1|+|x+2| \geqslant 2.$

12. $|x-2| \geqslant \dfrac{9}{|x-5|-3}.$ **13.** $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1} \leqslant 1.$

14. $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x\,.$

15. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

16. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \geqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

17. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} \geqslant 1$. **18.** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x-2|} \geqslant 1$.

19. $(\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x) < 0$.

20. $\dfrac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{x} \leqslant 1$.

21. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x} \leqslant 1$. **22.** $\dfrac{\sqrt{x^2-5x-24}}{x+2} \geqslant 1$.

1.7. Системы уравнений

Решить системы 1–23.

1. $\begin{cases} x+4=y^3, \\ x^2-y^6=8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x^2+y^3=28. \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+y=2, \\ x+ay=2a. \end{cases}$

4. $\begin{cases} (3+a)x+2y=3, \\ ax-y=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-x+y=2, \\ 2x^2-2x-y=-2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+2y=-5, \\ 2x^2+3y^2=29. \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x^2y+xy^2=2, \\ xy+x+y=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2y+y^2x=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{36}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} y^2 - 1 = 4x^2 + 4x, \\ 4x^2 + y^2 - 3xy = 1. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x + y = -1, \\ 16x^2 - y^4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0, \\ \sqrt{x+y+2} + x + y = 4. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} 4x^2 - 3xy - y^2 = 0, \\ 32x^2 - 36xy + 9y^2 = 6. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 4, \\ 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 3. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x + y + z = 7, \\ x + 2y + z = 8, \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + y + 2z = 7, \\ 2x + 3y + z = 2. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dfrac{yz}{x} = \dfrac{10}{3}, \\ \dfrac{zx}{y} = \dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{xy}{z} = \dfrac{6}{5}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} + \sqrt{x - \sqrt{y}} = 2, \\ \sqrt{y + \sqrt{x}} - \sqrt{y - \sqrt{x}} = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 5, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+a}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x+a}} = 2, \\ x + y = xy + a. \end{cases}$

24. При каких значениях a единственное решение имеет система $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

25. При каких значениях a единственное решение имеет система $\begin{cases} y - ax = 0, \\ y - x^2 + 4x - 3 = 0. \end{cases}$

26. При каких a имеет 3 решения система $\begin{cases} y + x^2 = 1, \\ y + |x| = a. \end{cases}$

27. Найти все значения параметра b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = b + 2, \\ x - y = b, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x^2 + xy \leqslant 0$.

28. Определить все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

29. При каких значениях a не имеет решений система
$\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2. \end{cases}$

30. При каких значениях a два решения имеет система

$$\begin{cases} |x + y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

31. Найти прямую $y = kx + b$, проходящую через точку $(1, -1)$ и касающуюся графика функции $y = x^2 - 4x + 3$.

32. При каком значении параметра a уравнения

$$x^2 - (a - 2)x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (3a - 4)x + 3 = 0$$

имеют общий корень? Найти этот корень.

1.8. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия. Натуральные числа k, l, m и n таковы, что $k + l = m + n$. Доказать, что $a_k + a_l = a_m + a_n$.

2. Вывести из предыдущей задачи, что для любых натуральных $k < n$ и для любой арифметической прогрессии $\{a_n\}$ выполняется равенство $\dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n$.

3. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и S_n — сумма первых ее n членов (т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$). Доказать, что

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\Big(2a_1 + (n-1)d\Big)}{2}.$$

4. Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия. Натуральные числа k, l, m и n таковы, что $k + l = m + n$. Доказать, что $b_k b_l = b_m b_n$.

5. Вывести из предыдущей задачи, что для любых натуральных $k < n$ и для любой геометрической прогрессии $\{b_n\}$ выполняется равенство $\sqrt{b_{n-k} b_{n+k}} = b_n$.

6. Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия и S_n — сумма первых ее n членов (т.е. $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$). Доказать, что

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

7. Сумма первого и пятого члена арифметической прогрессии равна $5/3$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $65/72$. Найти сумму семнадцати первых членов прогрессии.

8. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 2, а сумма квадратов этих чисел равна $14/9$. Найти эти числа.

9. В арифметической прогрессии дано: $a_p = q$, $a_q = p$ $(p \neq q)$. Найти формулу общего члена прогрессии.

10. Найти сумму всех четных двузначных чисел.

11. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

12. Решить уравнение $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x} = 3$.

13. Найти сумму $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1$.

14. Найти сумму девятнадцати первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

15. Найти $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$, если известно, что $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и

$$a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{16} = 147.$$

16. Длины сторон четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли в него вписать окружность?

17. В арифметической прогрессии сумма m первых ее членов равна сумме n ее первых членов ($m \neq n$). Доказать что в этом случае сумма первых ее $n+m$ членов равна нулю.

18. Пусть $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — члены арифметической прогрессии, ни один из которых не равен нулю. Доказать, что справедливо тождество

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

19. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти эти числа.

20. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

21. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести ее первых членов рана 1820.

22. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, $S_3 = 13$. Найти S_4.

23. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов ее членов равна $153\frac{3}{5}$. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

24. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

25. Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму периметров этих квадратов.

26. Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

27. Заданы две геометрические прогрессии. Первый член и знаменатель первой из них равны соответственно 3 и 32, первый член и знаменатель второй — 48 и 8. В этих условиях решить следующие задачи. Найти наименьшее число, которое одновременно является членом первой и второй прогрессии. Среди первых 1000 членов первой и второй прогрессии сколько общих членов? Найти сумму этих общих членов.

1.9. Текстовые задачи

1. На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 минут меньше, чем второй. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 7 часов, если первый за это время обрабатывает на 8 деталей больше второго?

2. Одинаковые детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей за смену было обработано каждым станком, если первый работал в эту смену 6 часов, второй — 7 часов, а вместе они обработали 616 деталей?

3. В сосуде было 10 литров соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили тем же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде остался 64%-й раствор соляной кислоты?

4. Соотношение металлов в первом сплаве $1:3$, а во втором — $3:2$. Сколько нужно взять того и другого (в соотношении), чтобы в получившемся сплаве металлов было поровну?

5. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m и n кг, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

6. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

7. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

8. Три насоса, качающие воду для поливки, начали работать одновременно. Первый и третий насосы закончили работать одновременно, а второй — через 2 часа после начала работы. В результате первый насос выкачал 9 м^3 воды, а второй и третий вместе 18 м^3. Какое количество воды выкачивает за час каждый насос, если известно, что третий насос выкачивает на 3 м^3 больше, чем первый, и что три насоса, работая вместе, выкачивают за час 14 м^3?

9. Из А в В вышла машина с почтой. Чрез 20 мин по тому же маршруту выехала вторая машина, скорость которой 45 км / ч. Догнав первую машину, шофер передал пакет и немедленно поехал обратно с той же скоростью (время, затраченное на остановку и разворот, не учитывается). В тот момент, когда первая машина прибыла в пункт В, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до пункта А. Найти скорость первой машины, если расстояние между А и В равно 40 км.

10. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 с. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 с. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

11. Пешеход и велосипедист отправляются из пункта А в пункт В одновременно. В пункте В велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта А, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдет путь от А до В?

12. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B (двигаясь с постоянной скоростью) и повернул обратно. При этом четверть пути автомобиль ехал с той же скоростью, что и вперед, а затем увеличил скорость на

30 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на один час меньше. Найти первоначальную скорость автомобиля, если известно, что расстояние от пункта A до B равно 240 км.

13. Из двух пунктов реки навстречу друг другу плывут две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Скорость течения реки равна 2 км/ч. До встречи лодка, идущая по течению, шла $0,9$ ч, а другая — 1 ч. Найти собственную скорость лодок, если лодка, идущая по течению, прошла на 2 км больше другой.

14. Катер проходит путь от A до B по течению реки за a часов, плот проплывает тот же путь за b часов. Сколько часов будет плыть катер от B до A? Предполагается, что собственная скорость катера постоянна в течение всего времени движения.

15. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла $1,5\,\%$?

16. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

17. В результате плохо организованного хранения влажность некоторой массы ягод в начале хранения составляет 99%, а в конце — 98%. Как изменилась масса хранимого продукта, если в начале хранения ягоды имели массу m?

18. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки больше скорости плота на 12 км / ч?

19. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На сколько процентов в результате снизилась цена этого продукта?

20. Зарплата лаборанта в 1985 году составила 100 рублей в месяц. После двух последовательных повышений на одно и то же число процентов она составила 121 рубль. На сколько процентов повысилась зарплата?

21. Найти все трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, полученным из него перестановкой двух его последних цифр, неотрицательна и делится на 81.

22. Два судна движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В начальный момент времени положение судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник стал прямоугольным. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени, если в момент прибытия первого судна в порт второму осталось пройти 120 км.

1.10. Функции целой и дробной части

1. Найти целую часть π, 10π, $-\pi$.

2. Доказать, что для любого действительного x выполняется $[x] \leqslant x < [x]+1$, где $[x]$ — целая часть x.

3. Доказать, что равенство $[x]=x$ выполняется тогда и только тогда, когда x — целое число.

4. Доказать, что для любого действительного x и целого m выполняется $[x+m]=[x]+m$.

5. Найти дробную часть 3.14, -5.1.

6. Доказать, что для любого действительного x выполняется $0 \leqslant \{x\} < 1$, где $\{x\}$ — дробная часть x.

7. Доказать, что равенство $\{x\}=0$ выполняется тогда и только тогда, когда x — целое число.

8. Доказать, что для любого действительного x и целого m выполняется $\{x+m\}=\{x\}$.

Построить графики функций в задачах 9–12.

9. $y=\{x-1.5\}+1$. **10.** $y=\{2x\}$.

11. $y=\{x/2\}$. **12.** $y=\{x^2\}$.

Решить уравнения 13–24.

13. $[x-2]=1$. **14.** $[x-1/2]=-1$.

15. $\{x\}=x/3$. **16.** $\{x\}=x/4$.

17. $[x]=4x+5$. **18.** $[x]=2x-4$.

19. $\{x/2\}=\{x/3\}$. **20.** $[x]=3x-1$.

21. $3\{x\}+[x+1/7]=2$. **22.** $7\{x\}+3[x]=10$.

23. $\left\{\dfrac{1}{x^2+x+1}\right\}=\dfrac{1}{3}$. **24.** $[x]\cdot(x^2+x+1)=4$.

Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям задач 25–30.

25. $[x]=[y]$. **26.** $\{x\}=\{y\}$.

27. $[x]\leqslant[y]$. **28.** $\{x\}\geqslant\{y\}$.

29. $\{x^2+y^2\}=0$. **30.** $[x^2+y^2]=0$.

1.11. Расположение корней квадратного трехчлена

1. Найти все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2-ax+a+7=0$ равна 10.

2. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите: а) ${x_1}^2+{x_2}^2$, б) ${x_1}^3+{x_2}^3$, в) $\dfrac{1}{q-x_1}+\dfrac{1}{q-x_2}$, г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$, д) $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$.

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$ имеет корни и определить знаки корней.

4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$ имеет корни и определить знаки корней.

5. При каком значении параметра a корни уравнения $(a+2)x^2-ax-a=0$ симметричны относительно $x=1$?

6. Найти все значения параметра a, при которых квадратный трехчлен

$$(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$$

положителен для любого x.

7. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$(1+a)x^2-3ax+4a=0$$

больше единицы.

8. Найдите все значения a, при которых все корни уравнения $x^2+x+a=0$ больше a.

9. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ больше 1?

10. Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что корни x_1, x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ удовлетворяют неравенству $x_1, x_2 < d$.

11. При каком значении параметра a корни x_1, x_2 квадратного уравнения $x^2+4ax+1-2a+4a^2=0$ удовлетворяют неравенству $x_1, x_2 < -1$?

12. При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x>1$?

13. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2+x+1=0$ больше 2, а другой меньше 2.

14. При каком значении параметра a один корень уравнения $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ больше 1, а другой меньше 1?

15. Найти все значения a, для которых один корень уравнения $2ax^2-2x-3a-2=0$ больше 1, другой меньше 1?

16. При каких значениях a существует единственный корень уравнения $x^2-ax+2=0$, удовлетворяющий условию $1<x<3$?

17. При каких значениях параметра a уравнение $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0<x<3$?

18. При каких a уравнение $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ имеет два корня x_1 и x_2, причем $x_1<a<x_2$?

19. При каких a все корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ расположены на отрезке $[-2, 6]$?

20. Сколько решений в зависимости от a имеет система $4x^2 - 2x + a = 0$, $|x| \leqslant 1$?

21. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$4x^2 - 2x + a = 0$$

имеет два корня, каждый из которых принадлежит интервалу $(-1; 1)$.

22. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат интервалу $(0; 3)$?

23. При каких a все корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 2 = 0$ расположены на отрезке $[2, 5]$?

24. Сколько решений в зависимости от a имеет система $x^2 - 2ax - 1 = 0$, $|x| < 2$?

25. При каких значениях параметра a для всех x, таких, что $1 < x < 2$, выполняется неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$?

26. При каких a из $x < 1$ следует, что $1 - ax^2 \geqslant 0$?

27. Для каких a неравенство $\dfrac{x^2 + a^2}{a(x+6)} \geqslant 1$ выполняется для всех x, таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$?

28. Для каких a неравенство $x^2 + ax - 7a < 0$ выполняется при всех $1 < x < 2$?

29. При каких a, если выполняется неравенство

$$x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0,$$

то выполняется неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$?

30. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$ удовлетворяют также неравенству $x^2 \leqslant 9$?

31. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + (a + 1)x - 3 < 0$ выполняется при любом x меньше 2?

32. Найти все значения a, для которых неравенство $x^2 - ax + a > 0$ верно при всех $|x| < 1$.

33. Для каких a неравенство $(x-3a)(x+2a+1)<0$ выполняется для всех x, таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$?

1.12. Задачи с параметрами

1. При всех значениях параметра a решить уравнение $(a-2)x^2-(2a+4)x+a+2=0$.

2. При всех значениях параметра a решить уравнение $(a^2-1)x=a+1$.

3. При всех значениях параметра a решить уравнение $2a(a-2)x=a-2$.

4. Решить неравенство $ax>1$.

5. Найти все значения параметра a, при которых единственное решение имеет уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)}-\frac{2}{x+2}=\frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}.$$

6. Решить неравенство $|x+2a|<\dfrac{8a^2}{|x-2a|}$.

7. Решить неравенство $|x-3a|-|x+a|<2a$.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$x=\frac{2a}{|x-2|}$$

имеет единственное решение?

9. Найдите такое число $a>0$, чтобы неравенство

$$\frac{12}{x}+\frac{x}{12}\geqslant a$$

выполнялось при всех положительных x. Найдите наибольшее из всех таких чисел.

10. Решить при $a<1$ неравенство $\dfrac{ax+1}{x}>1$.

11. При каком значении параметра a решение неравенства

$$|2x-4|+x-1 \leqslant a$$

существует и симметрично относительно $x_0 = 1$?

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a}=0$$

имеет только один корень? Указать все значения параметра, удовлетворяющие этому условию.

13. При каких a уравнение

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=a$$

имеет хотя бы одно решение?

14. $g(x)=|x-1|$. Функция $f(x)$ определяется следующим образом: $f(x)=\begin{cases} x+a, & x<1; \\ -x^2+x+a, & x \geqslant 1. \end{cases}$ Найти все значения параметра a, при которых на отрезке $[0,2]$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.

15. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x}=a$.

16. Известно, что $f_1(x)=\sqrt{x^2-2ax+a^2}+x$ и $f_2(x)=6x-x^2-6$. а) Постройте график функции $f_1(x)$ при $a=1$. б) При каком значении a графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют единственную общую точку?

1.13. Нестандартные задачи

1. Доказать, что если при некоторых целых значениях a, b и c число $3a+5b+c$ делится нацело на 7, то и число $11a+9b+13c$ также делится на 7.

2. Доказать, что если при некоторых целых значениях a, b и c число $6a+12b+11c$ делится нацело на 17, то и число $a+2b-c$ также делится на 17.

3. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

4. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

5. Доказать, что трехзначное число $\overline{aaa}$ делится на 37.

6. Доказать, что сумма трех трехзначных чисел $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}$ делится на 37 и на 3.

7. Доказать, что при делении квадрата целого числа на 3 в остатке никогда не может получиться 2.

8. Найти все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ также простые.

9. Найти все такие простые числа p, что числа $2p+1$ и $4p+1$ также простые.

10. Можно ли число 133 представить в виде суммы некоторых различных натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел было равно 133?

11. Какой цифрой оканчивается число $54^{35}+28^{21}$?

12. Докажите, что n^5+4n делится на 5 при любом натуральном n.

13. Докажите, что n^3-n делится на 24 при любом нечетном n.

14. Докажите, что число $12^{42}+9^{42}$ делится на 15.

15. Докажите, что если p — простое число больше 3, то p^2-1 делится на 24.

16. Найти все натуральные числа, на которые может быть сократима дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$.

17. Докажите, что дробь $\dfrac{12+1}{30n+2}$ несократима ни при каком натуральном n.

18. Докажите, что уравнение $x^5y=xy^5+1987$ не имеет решений в целых числах.

19. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2=79+y^2$.

20. Найти все целочисленные решения уравнения $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$.

21. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

22. Садовник должен рассадить деревья, число которых меньше 1000. Если он посадит их рядами по 37 штук, то у него останется 8 лишних деревьев; если же он посадит по 43 дерева в ряд, то у него останется 11 лишних деревьев. Сколько деревьев должен рассадить садовник?

23. Имеется две кучки камней: в одной — 1998, в другой — 2000. За ход разрешается убрать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Докажите, что при игре вдвоем первый имеет выигрышную стратегию (т.е. для делающего первый ход можно написать конечный набор правил, следуя которым он обязательно выиграет).

24. В урне лежали белые и черные шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу черных как $3 : 2$. После того, как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных равно $4 : 3$. Сколько шаров лежало в урне?

25. Дано двузначное число. Если сумму квадратов его цифр разделить на сумму его цифр, то получится 4 и в остатке 1. Число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, составляет 208% данного числа. Найти данное число.

26. На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек, причем число ирушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили на 1 игрушку больше, то прежнего количества игрушек не хватило. Сколько игрушек было подарено детям, если число детей на празднике было нечетным?

27. Двое выкладывают на круглый стол пятикопеечные монеты так, чтобы монеты не перекрывали друг друга. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход (т.е. на столе не осталось места для монеты). Докажите, что у первого игрока есть выиграшная стратегия.

Глава 2

Геометрия

2.1. Вписанные углы, касательные, хорды

1. Пусть AB — диаметр окружности ω. Доказать, что точка C лежит на окружности ω (но не совпадает с точками A и B) тогда и только тогда, когда $\widehat{C} = 90^\circ$.

2. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

3. Из точки A, лежащей вне окружности, выходят лучи AB и AC, пересекающие эту окружность. Выразить величину угла BAC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

4. Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Выразить величину угла BAC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричному ему относительно вершины A.

5. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Доказать, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

6. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Доказать, что CO — биссектриса угла ACB.

7. Доказать, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

8. Доказать, что во всяком треугольнике точки, симметричные с точкой пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

9. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

10. В окружность радиуса 1 вписан угол ABC, равный 30°. Чему равна хорда AC?

11. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

12. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Доказать, что AC параллельна BD.

13. Через середину C дуги AB проводят две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D, E и хорду AB — в точках F и G. Доказать, что четырехугольник $DEGF$ может быть вписан в окружность.

14. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

15. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Доказать, что длины отрезков касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

16. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. Доказать, что радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $1/2(a + b - c)$.

17. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $(a + b + c)/2$.

18. Докажите, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

19. Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром в точке O (B и C — точки касания). Выбирается произвольная точка X дуги BC. Через X проведена касательная, пересекающая AB и AC в точках M и N. Доказать, что периметр треугольника AMN не зависит от выбора точки X.

20. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Точки A, C и D расположены на окружности, касающейся AB и CB. Угол ABC равен 120°, а высота в треугольнике ACD, опущенная на строну AD, равна 1. Найти длину отрезка CD.

21. В равнобедренный треугольник с основанием 12 см вписана окружность, и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три малых треугольника. Сумма периметров малых треугольников равна 48 см. Найти боковую сторону данного треугольника.

22. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4 см. Найти основание треугольника.

23. В треугольник со сторонами 6, 10, 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две бо́льшие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

24. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол. К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Обозначим точки пересечения этой касательной со сторонами угла через A_1 и A_2, а точки касания — через B_1 и B_2. Доказать, что $A_1B_1 = A_2B_2$.

25. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол. Через две точки касания окружностей со сторонами угла, лежащие на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Доказать, что эта прямая высекает на окружностях хорды равной длины.

26. Центр O данной окружности радиуса R соединен с точкой C, произвольно взятой на хорде AB. Доказать, что

$$OC^2 + AC \cdot BC = R^2.$$

27. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Окружность, проходящая через середины гипотенузы и меньшего катета, касается другого катета. Найдите длину хорды этой окружности, высекаемой на меньшем катете.

2.2. Вписанная и описанная окружности. Теорема Пифагора. Теорема синусов

1. Доказать, что множеством всех точек плоскости, находящихся внутри угла BAC и равноудаленных от его сторон является биссектриса этого угла. Выведите отсюда существование и единственность вписанной в данный треугольник окружности.

2. Доказать, что множеством всех точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка AB является серединный перпендикуляр этого отрезка. Выведите отсюда существование и единственность описанной около данного треугольника окружности.

3. Доказать основное тригонометрическое тождество.

4. Найти значения $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$.

5. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 60°. Длина стороны BC равна 12. Найти длину стороны AB и радиус описанной около ABC окружности.

6. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 30° и 45°. Длина стороны BC равна 3. Найти длину стороны AB и радиус описанной около ABC окружности.

7. В треугольнике ABC известно: $AB = BC = a$ и $AC = b$. Найти радиус описанной около ABC окружности.

8. На основании AC равнобедренного треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD равны.

9. Пусть M — середина стороны AB треугольника ABC. Докажите, что $CM = AB/2$ тогда и только тогда, когда $\widehat{ACB} = 90^\circ$.

10. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC и острым углом при вершине B, CD — биссектриса угла C. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе CD. Эта прямая пересекает продолжение основания AC в точке E. Докажите, что $AD = EC/2$.

11. В треугольнике ABC высота AH равна медиане BM. Найти угол MBC.

12. Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстояниях $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ от сторон угла. Найти расстояние от этой точки до вершины угла.

13. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найти радиус большей окружности.

14. Из точки P, лежащей внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\dfrac{a \cdot PA}{2R}$, $\dfrac{b \cdot PB}{2R}$, $\dfrac{c \cdot PC}{2R}$.

15. Даны квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше, чем 225. Найти длину стороны квадрата.

16. Найти катеты прямоугольного треугольника, в котором один из острых углов равен 15°, а гипотенуза равна 1.

17. Три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равны a, b, c. Найти длину диагонали этого параллелепипеда.

2.3. Равенство и подобие треугольников. Медианы треугольника

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

2. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

3. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P. Докажите, что треугольники ABP и BDP подобны.

4. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне BC. Выразите длину стороны квадрата через a и h_a.

5. На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка K. Средняя линия треугольника, параллельная AC, пересекает отрезок BK в точке L. Найти отношение $BL : LK$.

6. Основания трапеции равны a и b. а) Найти длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии. б) Найти длину отрезка, высекаемого боковыми сторонами трапеции на прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям.

7. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

8. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60°. На этой дуге взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

9. Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

10. Доказать, что две медианы делят друг друга в отношении $2:1$, начиная от вершины.

11. Доказать, что медианы пересекаются в одной точке.

12. Доказать, что медиана делит площадь треугольника пополам.

13. Доказать, что медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.

14. Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

15. Из произвольной точки A, лежащей вне окружности ω проведены касательная AB и секущая AD (точки B и D лежат на ω). Секущая AD пересекает ω еще в одной точке — C. Доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

16. Через произвольную точку O, лежащую внутри окружности ω проведены прямые AB и CD (точки A, B, C и D лежат на ω). Доказать, что $AO \cdot OB = OC \cdot OD$.

17. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Доказать, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

18. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, на которой взяты точки K и L, делящие полуокружность на равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

19. Пусть две стороны и два угла одного треугольника равны двум сторонам и двум углам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

20. Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Доказать, что длина биссектрисы угла между ними не больше 12.

21. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Доказать, что угол KLD прямой.

22. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что $\widehat{PBA} = \widehat{PAB} = 15^\circ$. Доказать, что CPD — равносторонний треугольник.

23. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислить сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

2.4. Площадь треугольника. Формула Герона

1. Пусть a, b, c — соответственно длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, $p = (a+b+c)/2$, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной около ABC окружностей. Доказать, что площадь S треугольника ABC может быть вычислена по одной из следующих формул:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C = \frac{abc}{4R} = pr.$$

2. На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Доказать, что отношение площадей треугольников ABD и CBD равно $\frac{AD}{DC}$.

3. Площадь треугольника ABC равна 30. На стороне AC выбрана точка D так, что $AD : DC = 2 : 3$. Длина перпендикуляра DE, проведенного на сторону BC, равна 9. Найти BC.

4. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C имеют общий угол C. Известно, что $AC = b$, $BC = a$, $A_1C = b_1$ и $B_1C = a_1$. Найти отношение площадей треугольников ABC и A_1B_1C.

5. В треугольнике ABC точка L делит пополам отрезок BC, а точка K делит пополам отрезок BL. Из точки A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника ABC отрезки $LD = AL$ и $KF = AK/3$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $KLDF$.

6. В равнобедренном треугольнике основание равно 16, а боковая сторона равна 10. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

7. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

8. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 60° и 45°. Найти площадь треугольника.

9. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника равен 15, а радиус вписанной окружности равен 6. Найти стороны треугольника.

10. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\phi$, где d_1 и d_2 — длины его диагоналей, а ϕ — угол между ними.

11. Внутри равностороннего треугольника ABC произвольно выбрана точка X. Докажите, что сумма расстояний от точки X до сторон треугольника ABC не зависти от выбора точки X.

12. Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{ADX} + S_{BCX}$.

13. Многоугольник описан около окружности радиуса r. Докажите, что его площадь равна pr, где p — полупериметр многоугольника.

14. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ произвольно выбраны точки X и Y. Отрезки BX и AY пересекаются в точке K, а отрезки CX и DY — в точке L. Докажите, что $S_{AKX} + S_{DLX} = S_{BKY} + S_{CLY}$.

15. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ ($(AD)\|(BC)$) пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников AOB и COD.

16. Доказать, что длина отрезка AK, где K — точка касания со стороной AB вписанной в треугольник ABC окружности, равна $p-a$, где p — полупериметр треугольника ABC и a — длина стороны BC.

17. Доказать, что длина отрезка AL, где L — точка касания с лучом $[AB)$ вневписанной окружности треугольника ABC, равна p, где p — полупериметр треугольника ABC.

18. Пусть r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC, p — его полупериметр. Доказать, что $pr = r_a(p-a)$.

19. Пусть r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC, p — его полупериметр. Доказать, что
$rr_a = (p-b)(p-c)$.

20. Докажите формулу Герона для треугольника ABC

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

21. Медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC равны соответственно 24 и 18, а сторона AC равна 20. Найти площадь треугольника ABC.

22. Медианы треугольника ABC равны 12, 15 и 21. Найти площадь треугольника ABC.

23. Найти площадь треугольника ABC, если $|AB| = 3$, $|BC| = 7$ и длина медианы BM равна 4.

24. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники со сторонами S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

2.5. Биссектрисы. Высоты. Теорема косинусов

1. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$ проведена биссектриса CC_1. Доказать, что

$$\text{a)}\quad \frac{S_{CBC_1}}{S_{ACC_1}} = \frac{a}{b}, \qquad \text{b)}\quad \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}.$$

2. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$ проведена биссектриса CC_1, длина которой равна l_c. Доказать, что $l_c = \dfrac{2ab\cos\left(\widehat{C}/2\right)}{a+b}$.

3. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Определить площадь треугольника.

4. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне треугольника. Найти отрезки, на которые центр окружности делит бóльшую сторону треугольника.

5. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.

6. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти углы треугольника.

7. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

8. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$, $BC = 12$ и $AC = 18$. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C.

9. Дан равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b. Найти в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании треугольника.

10. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

11. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $72°$, а биссектриса этого угла равна m. Найти длины сторон этого треугольника.

12. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

13. Найти величину $\cos 36°$.

14. В прямоугольном треугольнике с катетами 6 и 8 из вершины прямого угла проведена биссектриса CM. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM, касаются отрезка CM в точках K и L. Найти длину отрезка KL.

15. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке L, проходит через вершину C и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AB и AC, если известно, что $CQ = 9$, $QB = 3$, $AP = 4$ и CL является биссектрисой угла C.

16. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, окружность, проходящая через вершину C, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $BQ = 2$ и CL является биссектрисой угла C.

17. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен исходному треугольнику.

18. Пусть h — длина высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, a_c, b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу c.

Докажите, что $h^2 = a_c \cdot b_c$, $a^2 = c \cdot a_c$, и $b^2 = c \cdot b_c$.

19. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

20. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

21. Найти длины сторон равнобедренного треугольника, если длины его высот, проведенных к основанию и к боковой стороне, соответственно равны m и n.

22. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCD и ACD равны 4 и 3 соответственно. Найти расстояние между их центрами.

23. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AB = a$, $AD = b$ и $\widehat{A} = 60^\circ$. Найти длины диагоналей параллелограмма.

24. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC известно, что $\widehat{B} = 30^\circ$ и $AB = 2$. Найти длину AC и радиус описанной около ABC окружности.

25. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M — сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Доказать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

26. Доказать, что длина медианы треугольника ABC, проведенной к стороне AB равна $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

27. В равностороннем треугольнике ABC со стороной $AB = a$ проведена средняя линия MN, параллельная AC. Точка K делит отрезок MN в отношении $MK : KN = 2 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке E. Найти длину отрезка AE.

28. В равностороннем треугольнике ABC со стороной $AB = a$ проведена средняя линия MN, параллельная AC. Точка K делит отрезок MN в отношении $MK : KN = 1 : 2$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке E. Найти длину отрезка AE.

29. В треугольнике ABC известны длины высот $CD = 7$ и $AE = 6$. Точка E делит сторону BC в отношении $BE : EC = 3 : 4$. Найти длину стороны AB.

2.6. Теоремы Чевы и Менелая

1. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Доказать, что отношение площадей треугольников AOB и AOC равно BA_1/CA_1.

2. На отрезке AB выбраны точки X и Y так, что $AX : XB = AY : YB$. Доказать, что $X = Y$.

3. (Теорема Чевы). На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

4. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

6. Доказать, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

7. В треугольнике проведены три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой касания вписанной в треугольник окружности с противоположной стороной. Доказать, что эти отрезки пересекаются в одной точке.

8. Пусть точки X и Y лежат на прямой (AB), но не принадлежат отрезку $[AB]$. Доказать, что если $BX : XA = BY : YA$, то $X = Y$.

9. (Теорема Менелая). На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и C_1, а на продолжении стороны AC

выбрана точка B_1. Доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

10. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и B_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ и $AB_1 : B_1C = 2 : 1$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. а) Найти отношение $B_1O : OB$. б) Найти площадь треугольника AOB_1, если площадь треугольника ABC равна 6.

11. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 3$ и $AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. а) Найти отношение $AO : OA_1$. б) Найти площадь четырехугольника BC_1OA_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

12. Отрезок BM является медианой треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 2 : 5$ и $BQ : QC = 10 : 1$. Отрезок PQ пересекает BM в точке R. Найти отношение $BR : RM$.

13. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны $AC = 4$ и $BC = 3$. В треугольнике проведены биссектриса CD и медиана AM. Они пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника CEM.

14. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1C = 1 : 2$. Точки P, Q, R являются попарным пересечением отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Найти отношение площади треугольников ABC и PQR.

2.7. Параллелограмм. Ромб

1. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

2. Доказать, что площадь ромба равна пролупроизведению длин его диагоналей.

3. Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол равен 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.

4. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ — $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

5. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла на сторону DA, делит ее в отношении $5:3$, считая от вершины D. Найти отношение $AC:BD$, если $AD:AB=2$.

6. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

7. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.

8. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

9. Через точки R и E принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$ и такие, что $AR=(2/3)AB$, $AE=(1/3)AD$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

10. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK:KB=1:2$, $BL:LC=1:3$, $CM:MD=1:1$ и $DN:NA=1:1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

11. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK:KB=3:1$, $BL:LC=2:3$, $CM:MD=1:2$ и $DN:NA=1:1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

12. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

13. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

14. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n (m считать от вершины острого угла). Определить диагонали ромба.

15. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружностей.

16. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении 2:3. Диагонали ромба равны m и n. Найти стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

17. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

18. Точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна $100\,\text{см}^2$.

19. В ромб со стороной a и острым углом 60° вписана окружность. Определить площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба.

20. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Определить сторону ромба.

21. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

22. Диагональ BC параллелограмма $ABCD$ равна 2, а угол CAD равен 30°. Прямая CD является касательной к окружности, описанной около треугольника ABD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

2.8. Трапеция

1. Доказать, что трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

2. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

3. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

4. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

5. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

6. Найти длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

7. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

8. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

9. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

10. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найти отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

11. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), если длины ее оснований относятся как $5:3$ и площадь треугольника ADM равна 50 см^2, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

12. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

13. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

14. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

15. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b.

16. Найти площадь трапеции, если ее диагонали равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

17. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

18. Около окружности описана равнобедренная трапеция, у которой одно основание в три раза больше другого. Найти отношение радиуса окружности, описанной около трапеции, к радиусу окружности, вписанной в трапецию.

19. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 8 см^2. Определить стороны трапеции, если ее угол при основании равен 30°.

20. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

21. Длина основания AD трапеции $ABCD$ равна 5, а длина боковой стороны CD — 3. Известно, что диагональ AC перпендикулярна CD, а диагональ BD делит угол D пополам. Найти площадь трапеции.

22. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из боковых сторон и перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой.

23. Площадь трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) равна S. Найти площадь треугольника KLC, где KL — средняя линия трапеции.

24. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

25. Равнобедренная трапеция, у которой угол при основании равен 60°, описана около окружности. В каком отношении прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, делит площадь трапеции?

26. Отрезок AE является биссектрисой угла A трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$ и точка E лежит на прямой BC). Окружность, вписанная в треугольник ABE касается сторон AB и BE в точках K и L. Найти величину угла $\angle BAC$, если $KL = 1$ а боковая сторона AB равна 2.

27. В трапеции $PQRN$ ($PN \| QR$) проведена высота RH. Известно, что $PH = 8$, $QR = 4$, $PQ = \sqrt{28}$, $\widehat{PNR} = 60^\circ$. На основании PN выбрана точка M так, что отрезок RM делит площадь трапеции пополам. Найти длину отрезка RM.

28. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = a$ и $BC = b$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM отсекает от площади трапеции $1/4$ ее часть. Найти длину отрезка CM.

29. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка CM.

30. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

2.9. Декартова система координат. Векторы

1. Даны точки $A(1,2)$ и $B(-3,4)$. Найти координаты середины отрезка AB.

2. Даны точки $A(-1,-4)$, $B(3,-2)$, $C(-1,2)$, $D(11,x)$. При каком x AB и CD являются коллинеарными?

3. Даны точки $A(3,2)$, $B(5,4)$, $C(-3,x)$. При каком x точка C лежит на прямой AB?

4. Даны точки $A(-1,2)$ и $B(17,-13)$. Найти координаты такой точки С отрезка AB, что $AC:CB=2:1$.

5. Пусть точка C лежит на отрезке AB и $AC:CB=1:3$. Разложить вектор $\overrightarrow{OC}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

6. Точка P является серединой диагонали BC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразить вектор $\overrightarrow{AP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

7. Даны точки $A(1,2)$, $B(12,-4)$, $C(7,2)$. Известно, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Найти координаты точки D.

8. Вычислить скалярное произведение векторов $\overrightarrow{v}=(1,-2)$ и $\overrightarrow{u}=(2,4)$.

9. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{v}=(-1,3)$ и $\overrightarrow{u}=(2,1)$.

10. Даны точки $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(-3,6)$. Определить вид треугольника ABC.

11. Известно, что $|\overrightarrow{a}|=3$, $|\overrightarrow{b}|=4$ а угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равен $2\pi/3$. Вычислить скалярное произведение $(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$.

12. Дана окружность $x^2+y^2=9$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат и точку $A(1,0)$ и касающуюся данной окружности.

13. На прямой $5x - 2y + 9 = 0$ найти точку A, равноудаленную от точек $B(-2, -3)$ и $C(4, 1)$ и вычислить площадь треугольника ABC.

14. Даны вершины треугольника $A(-2, -3)$, $B(3, -1)$ и $C(4, 1)$. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный и составить уравнение прямой, содержащей высоту, проведенную из вершины A.

15. Составить уравнения касательных, проведенных к окружности $x^2 + y^2 = 9$ из точки $M(5, 0)$.

16. Точки $A(1, -9)$, $B(5, 3)$ и $C(7, -3)$ отметили на координатной плоскости. Координатные оси и начало координат стерли. Можно ли только с помощью циркуля и линейки восстановить координатные оси и начало координат? Можно ли восстановить масштаб измерения?

17. На координатной плоскости нарисовали график функции $f(x) = x^2 - 6x + 10$ и прямую $x = 4$. Затем координатные оси стерли. Восстановите координатные оси, используя только циркуль и линейку.

2.10. Геометрические места точек. Задачи на построение

1. Найти геометрическое место точек, удаленных от данной точки на расстояние R.

2. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от концов данного отрезка.

3. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от сторон данного угла и находящихся внутри этого угла.

4. Найти геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под углом α.

5. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от пересекающихся прямых a и b.

6. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых a и b есть величина постоянная, равная s.

7. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B, равна s.

8. Какую линию описывает вершина прямого угла C прямоугольного треугольника ABC, если точки A и B двигаются по координатным осям (A лежит на Ox, а B — на Oy).

9. Даны две непересекающиеся окружности. Найти геометрическое место точек, касательные из которых к этим окружностям равны по длине.

10. Из данной точки A, лежащей вне окружности ω, провести касательную к окружности ω.

11. К двум данным окружностям провести общую касательную.

12. Даны две параллельные прямые a и b и точка X. Через точку X провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между прямыми a и b, равнялся данному отрезку.

13. Между сторонами данного угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он отсекал от сторон угла равные отрезки.

14. Через точку X внутри данного угла ABC провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри угла, делился бы точкой X пополам.

15. Разделить прямой угол на три равные части.

16. Построить прямоугольный треугольник по острому углу и противолежащему катету.

17. Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

18. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, опущенной на нее.

19. Построить треугольник по сторонам a, b и высоте h_a.

20. Построить треугольник по углу B и высотам h_a, h_c.

21. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

22. Построить треугольник по стороне b, медиане m_b и высоте h_b.

23. Построить треугольник по сторонам a, c и медиане m_b.

24. Построить треугольник по трем его медианам.

25. Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

26. Построить трапецию по данным основаниям и диагоналям.

27. Построить квадрат по сумме диагонали и стороны.

28. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. На прямой a найти такую точку X, что сумма $XA + XB$ минимальна.

29. Пункты A и B расположены по разные стороны от реки с параллельными берегами. В каком месте реки нужно построить мост (перпендикулярный реке) так, чтобы путь из A в B был бы кратчайшим?

Глава 3

Программа по математике

Фактов всегда достаточно —
не хватает фантазии.

Д. Блохинцев

3.1. Алгебра

1. Преобразование арифметических выражений. Формулы сокращенного умножения $((a \pm b)^2, a^2 - b^2, a^3 \pm b^3, (a \pm b)^3)$. Признаки делимости. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного натуральных чисел. Деление с остатком.

2. Числовые функции, область определения и множество значений функции, ее график. Способы преобразования графиков функций. Основные свойства функций: четность и нечетность, монотонное возрастание и убывание, периодичность.

3. Линейная функция и ее свойства. Системы линейных уравнений.

4. Квадратичная функция и ее свойства. Корни квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного уравнения. Квадратичное неравенство.

5. Обратно пропорциональная зависимость $y = k/x$, ее свойства, график.

6. Модуль числа. Свойства модуля. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Преобразования графиков функций, содержащих знак модуля.

7. Арифметический квадратный и кубический корни. Их свойства. Преобразования арифметических выражений, содержащих знаки корней (выделение полного квадрата, умножение на сопряженное, избавление от иррациональности в знаменателе). Иррациональные уравнения и неравенства.

8. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена прогрессий, суммы первых членов.

9. Целая и дробная части чисел. Графики функций $[x], \{x\}$.

10. Решение неравенств. Метод интервалов.

11. Решение уравнений. Основные способы преобразования уравнений: приведение подобных, возведение в степень, разложение на множители, замена переменной.

12. Системы уравнений. Основные способы преобразования систем: метод подстановки, линейное преобразование, переход к совокупности нескольких систем, замена переменных.

13. Уравнения и неравенства с параметрами. Аналитический и графический способы решения.

14. Решение текстовых задач. Логические задачи. Основные задачи на проценты.

3.2. Геометрия

1. Неопределяемые понятия в геометрии. Основные определения. Аксиомы и теоремы в геометрии.

2. Треугольник. Основные теоремы о треугольнике: теорема Пифагора, теорема о сумме углов в треугольнике, теорема синусов и косинусов, свойства равнобедренного треугольника. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Средняя линия треугольника и ее свойства. Вычисление площади треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты в треугольнике. Их свойства. Вписанная и описанная окружности.

3. Четырехугольник. Вычисление его площади через диагонали и угол между ними. Вписанный и описанный четырехугольник.

4. Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Вычисление площади параллелограмма.

5. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства.

6. Трапеция, вычисление площади трапеции. Средняя линия трапеции и ее свойства.

7. Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Секущая к окружности и ее свойства. Измерение вписанных углов. Вычисление длины окружности и площади круга.

8. Прямоугольная система координат на плоскости. Нахождение расстояния между двумя точками. Уравнение прямой и окружности.

9. Векторы. Операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

10. Задачи на построение. Основные геометрические места точек: множество точек, равноудаленных от концов данного отрезка; множество точек, равноудаленных от сторон данного угла; множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

3.3. Основные математические навыки

1. Приводить полные обоснования решений задач, используя теоретические сведения.

2. Решать текстовые задачи.

3. Решать простейшие логические задачи.

4. Выполнять арифметические действия с числами (точными и приближенными).

5. Выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений.

6. Вычислять приближенные значения функций с использованием калькулятора.

7. Выражать функциональную зависимость между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

8. Строить графики функций, указанных в программе.

9. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, указанных в программе видов.

10. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы на чертеже.

11. Применять алгебраические и тригонометрические формулы, векторный и координатный методы к решению геометрических задач.

Сборник задач по математике для 9 и 10 классов

Компьютерный набор и верстка С.А. Ануфриенко

Подписано в печать 24.09.2001. Формат 60×84 1/16 .
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд.л. 3. Усл. печ. л. 3,4. Зак. . Тираж 200 экз.
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького

Отпечатано на ризографе в СУНЦ УрГУ.

Екатеринбург, ул. Н. Зверева, 30.