ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в 10 физ-мат, мат-эк, мат-инф и физ-тех классы

2 мая 2019 года

Вариант 1

Часть 1

К каждому заданию приведите только ответ (впишите его в таблицу)

1. Решите уравнение $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = \sqrt{x^2}$. *Баллов: 2.*

Решение. ОДЗ уравнения задается условием $-x \geq 0$. Применив известные свойства квадратного корня, получим $-x = |x|$. Решением этого уравнения является луч $x \leq 0$; все его точки входят в ОДЗ.

Ответ: $x \leq 0$.

2. В выборах участвовали два кандидата — Иванов и Петров. По итогам обработки 60% избирательных бюллетеней оказалось, что Иванов получил 20% голосов избирателей. Сколько процентов голосов получит Иванов по итогам обработки всех бюллетеней, если во всех осташихся бюллетенях голоса будут отданы за Иванова? *Баллов: 2.*

Решение. Обозначим общее количество бюллетеней буквой x. Обработано $0,6x$ бюллетеней, из них 20% содержат голоса за Иванова. Таким образом, в обработанных бюллетенях за Иванова отдано $0,6x \cdot 0,2 = 0,12x$ голосов. В необработанных бюллетенях за Иванова отдано еще $0,4x$ голосов. Следовательно, всего Иванов получил $0,52x$ голосов.

Ответ: 52%.

3. Решите уравнение $\sqrt[3]{x} - 3 = x - 27$. *Баллов: 2.*

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x} = t$. Применив в правой части уравнения формулу разности кубов, получим $t - 3 = (t-3)\left(t^2 + 3t + 9\right)$ или, после переноса всех членов уравнения в одну часть и вынесения за скобки, $(t-3)\left(t^2 + 3t + 8\right) = 0$. Квадратный трехчлен во второй скобке никогда не обращается в 0 (его дискриминант отрицателен), поэтому единственным решением уравнения является $t = 3$, то есть $x = 27$.

Ответ: 27.

4. Площадь трапеции равна 16, а радиус вписанной в эту трапецию окружности в 9 раз меньше суммы длин боковых сторон трапеции. Найдите сумму длин оснований этой трапеции. *Баллов: 2.*

Решение. Поскольку трапеция является описанной, сумма длин ее оснований совпадает с суммой длин боковых сторон; обозначим эту сумму буквой s. Высота трапеции равна диаметру вписанной в нее окружности и по условию равна $\dfrac{2s}{9}$. Площадь трапеции равна произведению ее высоты на полусумму длин оснований, следовательно, $\dfrac{2s}{9} \cdot \dfrac{s}{2} = 16$, откуда $s = 12$.

Ответ: 12.

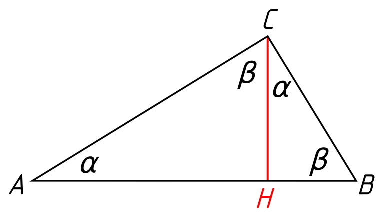
5. В некотором классе учится 26 человек. 5% мальчиков класса обожают селедку. Сколько в классе девочек? *Баллов: 2.*

Решение. 5% — это $\dfrac{1}{20}$. Таким образом, количество мальчиков делится на 20. Поэтому в классе 20 мальчиков и 6 девочек.

Ответ: 6.

6. В треугольнике ABC проведена высота CH, точка H лежит на отрезке AB. Длины отрезков AH, CH и BH (именно в таком порядке) являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите величину угла C. *Баллов: 2.*

Решение. Пусть $AH = b$, $CH = bq$, $BH = bq^2$, тогда $\dfrac{BH}{CH} = \dfrac{CH}{AH}$. Поэтому прямоугольные треугольники AHC и CHB подобны по двум сторонам и углу между ними. У подобных треугольников соответственные углы равны; обозначим величины равных углов одинаковыми буквами (см. рисунок). $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, отсюда $\alpha + \beta = 90^\circ$.



Ответ: 90°.

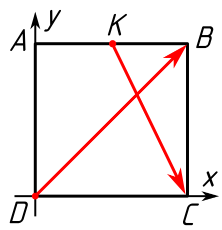
7. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|x| - 1 \le y \le 4 - |x|$. *Баллов: 2.*

Решение. Данная фигура является квадратом, двумя противоположными вершинами которого являются точки $(0, -1)$ и $(0, 4)$. Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали, то есть $\dfrac{1}{2} \cdot 5^2$.

Ответ: 12,5.

8. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Найдите косинус угла между прямыми KC и DB. *Баллов: 3.*

Решение. Угол не зависит от линейных размеров квадрата; пусть длина его стороны равна 2. Введем систему координат как показано на рисунке: $\overrightarrow{DB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{KC} = (1; -2)$, $\left|\overrightarrow{DB}\right| = 2\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{KC}\right| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.



Пусть величина искомого угла равна α, тогда $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{KC}\right|}{\left|\overrightarrow{DB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KC}\right|}$, т. е.

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

9. Ваня исследовал свойства арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью 6. Он записал 2019 ее членов (с первого, по порядку), а затем все записанные числа перемножил. Найдите остаток от деления полученного произведения на 301. *Баллов: 3.*

Решение. Само число 301 членом этой прогрессии не является, зато им является число $2 \cdot 301 = 602$. Поскольку 602 делится на 301, то и всё полученное Ваней произведение делится на 301.

Ответ: 0.

10. Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2 + 2|x + y - 6| + 4y^2 = 4xy$. *Баллов: 3.*

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x - 2y)^2 + 2|x + y - 6| = 0$. Сумма двух неотрицательных чисел может быть равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю, то есть $x - 2y = 0$, $x + y - 6 = 0$. Решив эту систему, получим

Ответ: $(4, 2)$.

11. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ обладает двумя свойствами: для любых x и y выполняется равенство $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и, кроме того, $f(4) = 12$. Найдите a, b и c. *Баллов: 3.*

Решение. По первому свойству $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, то есть $f(0) = 0$, откуда $c = 0$. Далее, $f(1 + 1) = f(1) + f(1)$, то есть $f(2) = 2f(1)$, откуда $4a + 2b = 2(a + b)$, поэтому $a = 0$. Таким образом, функция имеет вид $f(x) = bx$; из второго свойства находим, что $b = 3$.

Ответ: 0, 3 и 0.

Часть 2

Приведите полное решение каждого задания. Условие переписывать **не нужно**

12. Вася написал на доске 106 целых чисел. Петя перемножил все эти числа, а Коля сложил их. У Пети получилось 1, а у Коли 0. Докажите, что кто-то из них ошибся. *Баллов: 5.*

Решение. Предположим, что никто не ошибся. Так как произведение написанных целых чисел равно 1, каждое из них равно либо 1, либо -1. Так как их сумма равна 0, количество положительных чисел должно совпадать с количеством отрицательных, то есть отрицательных чисел должно быть 53. Но тогда произведение всех написанных чисел отрицательно, что противоречит результату Пети.

Критерии оценки. Сделан вывод, что числа равны только ± 1 — **2 балла**. Указано, что из равенства суммы нулю следует равенство количеств положительных и отрицательных чисел — **+1 балл**. Задача решена полностью и правильно — **5 баллов**.

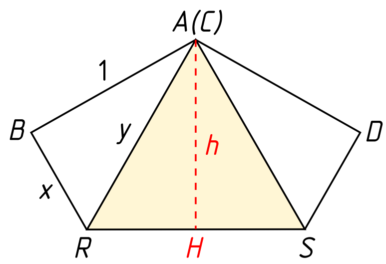
13. Известно, что b — целое число и один из корней уравнения $x^2+33x-11b=0$ — простое число. Найдите b. *Баллов: 6.*

Решение. Запишем уравнение в виде $x(x+33)=11b$ и подставим в него корень x, получим верное равенство. Правая его часть делится на 11, поэтому либо x делится на 11, либо $x+33$ делится на 11. В последнем случае (так как 33 делится на 11) тоже получаем, что x делится на 11. Но x — простое число, поэтому $x=11$. Тогда из уравнения получаем, что $b=44$.

Ответ: 44.

Критерии оценки. Предприняты попытки использовать свойства делимости — **1 балл**. Исследована делимость числа x — **3 балла**. С использованием делимости и простоты найдено число x — **5 баллов**. Задача решена полностью и правильно — **6 баллов**.

14. Бумажный прямоугольник $ABCD$ размерами 1×2 согнули так, что точка A совместилась с точкой C. Найдите площадь треугольника, образованного двойным слоем бумаги. *Баллов: 6.*



Решение. Высота AH получившегося треугольника (см. рисунок) равна, очевидно, половине диагонали AC исходного прямоугольника, то есть $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Введем теперь обозначения, как показано на рисунке. Сумма $x+y$ равна длине большей стороны исходного прямоугольника до его перегибания, то есть $x+y=2$. С другой стороны, по теореме Пифагора имеем $y^2=x^2+1$. Из этих двух уравнений получаем $y=\dfrac{5}{4}$. Тогда по теореме Пифагора $RH=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Поэтому площадь треугольника RAS равна $RH\cdot h=\dfrac{5}{8}$.

Ответ: 5/8.

Критерии оценки. Верно составлены отдельные уравнения для нахождения элементов получившихся фигур — **1 балл**. Верно найдены хотя бы два элемента получившихся фигур — **3 балла**. Всё решение в целом верно, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки — **5 баллов**. Задача решена полностью и правильно — **6 баллов**.

15. Известно, что ни при каком значении x равенство $\dfrac{8x-2}{ax+3}=2$ не является верным. Найдите a. *Баллов: 7.*

Решение. Если $a=-12$, левая часть данного в условии уравнения равна $-\dfrac{2}{3}$ при всех значениях x, кроме $\dfrac{1}{4}$. Таким образом, ни одно значение x решением уравнения не является. Пусть теперь $a \neq -12$. Уравнение в условии равносильно системе $8x-2=2(ax+3)$, $x \neq -\dfrac{3}{a}$. Переписав первое уравнение этой системы в виде $(8-2a)x=8$, заметим, что оно не имеет решений при $a=4$. При $a \neq 4$ первое уравнение системы имеет решение $x=\dfrac{8}{8-2a}$, удовлетворяющее второму уравнению системы при всех a (кроме -12, рассмотренного ранее). *Примечание.* Если вы знаете, как выглядит график дробно-линейной функции $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, задачу можно решить гораздо проще.

Ответ: 4 или -12.

Критерии оценки. Верно исследован только случай пропорциональности коэффициентов и свободных членов числителя и знаменателя — **2 балла** (если при этом допущена арифметическая ошибка — **1 балл**). Верно исследован только случай непропорциональности — **4 балла** (если при этом допущена арифметическая ошибка — **3 балла**). Верно исследованы оба случая, но при этом ответ неверен из-за арифметических ошибок — **6 баллов**. Задача решена полностью и правильно — **7 баллов**.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в 10 физ-мат, мат-эк, мат-инф и физ-тех классы

2 мая 2019 года

Вариант 2

Часть 1

К каждому заданию приведите только ответ (впишите его в таблицу)

1. Решите уравнение $\left(\sqrt{x}\right)^2=\sqrt{(-x)^2}$. *Баллов: 2.*

Решение. ОДЗ уравнения задается условием $x \geq 0$. Применив известные свойства квадратного корня, получим $x=|-x|$. Решением этого уравнения является луч $x \geq 0$; все его точки входят в ОДЗ.

Ответ: $x \geq 0$.

2. Отдел технического контроля проверил 80% изготовленных заводом деталей и обнаружил, что 90% из них качественные, а остальные бракованные. Сколько процентов качественных деталей изготовил завод, если все непроверенные детали качественные? *Баллов: 2.*

Решение. Обозначим общее количество деталей буквой x. Проверено $0,8x$ деталей, из них 90% качественные. Таким образом, среди провереных деталей качественных $0,8x \cdot 0,9=0,72x$ штук. Среди непроверенных деталей качественных еще $0,2x$ штук. Следовательно, всего качественных деталей $0,92x$ штук.

Ответ: 92%.

3. Решите уравнение $2-\sqrt[3]{x}=8-x$. *Баллов: 2.*

Решение. Пусть $\sqrt[3]{x}=t$. Применив в правой части уравнения формулу разности кубов, получим $2-t=(2-t)\bigl(4+2t+t^2\bigr)$ или, после переноса всех членов уравнения в одну часть и вынесения за скобки, $(2-t)\bigl(3+2t+t^2\bigr)=0$. Квадратный трехчлен во второй скобке никогда не обращается в 0 (его дискриминант отрицателен), поэтому единственным решением уравнения является $t=2$, то есть $x=8$.

Ответ: 8.

4. Площадь трапеции равна 25, а сумма длин оснований трапеции в 9 раз больше радиуса вписанной в эту трапецию окружности. Найдите сумму длин боковых сторон этой трапеции. *Баллов: 2.*

Решение. Поскольку трапеция является описанной, сумма длин ее оснований совпадает с суммой длин боковых сторон; обозначим эту сумму буквой s. Высота трапеции равна диаметру вписанной в нее окружности и по условию равна $\frac{2s}{9}$. Площадь трапеции равна произведению ее высоты на полусумму длин оснований, следовательно, $\frac{2s}{9}\cdot\frac{s}{2}=25$, откуда $s=15$.

Ответ: 15.

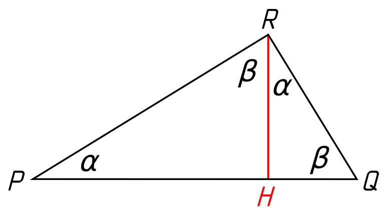
5. В некоторой школе всего 53 учителя. 2% всех учителей-женщин увлекаются волейболом. Сколько в этой школе учителей-мужчин? *Баллов: 2.*

Решение. 2% — это $\frac{1}{50}$. Таким образом, количество женщин делится на 50. Поэтому среди учителей школы 50 женщин и 3 мужчины.

Ответ: 3.

6. В треугольнике PQR проведена высота RH, точка H лежит на отрезке PQ. Длины отрезков PH, RH и QH (именно в таком порядке) являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите сумму величин углов P и Q. *Баллов: 2.*

Решение. Пусть $PH=b$, $RH=bq$, $QH=bq^2$, тогда $\frac{QH}{RH}=\frac{RH}{PH}$. Поэтому прямоугольные треугольники PHR и RHQ подобны по двум сторонам и углу между ними. У подобных треугольников соответственные углы равны; обозначим величины равных углов одинаковыми буквами (см. рисунок). $2\alpha+2\beta=180^\circ$, отсюда $\alpha+\beta=90^\circ$.



Ответ: 90°.

7. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|x|-3\le y\le 6-|x|$. *Баллов: 2.*

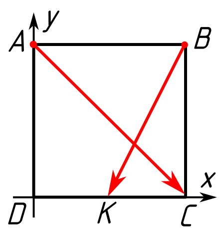
Решение. Данная фигура является квадратом, двумя противоположными вершинами которого являются точки $(0,\,-3)$ и $(0,6)$. Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали, то есть $\frac{1}{2}\cdot 9^2$.

Ответ: 40,5.

8. Точка K — середина стороны CD квадрата $ABCD$. Найдите косинус угла между прямыми AC и BK. *Баллов: 3.*

Решение. Угол не зависит от линейных размеров квадрата; пусть длина его стороны равна 2. Введем систему координат как показано на рисунке: $\overrightarrow{AC}=(2;\,-2)$, $\overrightarrow{BK}=(-1;\,-2)$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{BK}\right|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

Пусть величина искомого угла равна α, тогда $\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BK}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BK}\right|}$, т. е.



$$\cos\alpha=\frac{|2\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2)|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

9. Аня исследовала свойства арифметической прогрессии с первым членом 6 и разностью 8. Она записала 2019 ее членов (с первого, по порядку), а затем все записанные числа перемножила. Найдите остаток от деления полученного произведения на 403. *Баллов: 3.*

Решение. Само число 403 членом этой прогрессии не является, зато им является число $2\cdot 403=806$. Поскольку 806 делится на 403, то и всё полученное Аней произведение делится на 403.

Ответ: 0.

10. Найдите все пары чисел (a, b), удовлетворяющих уравнению $a^2+3|a+b-8|+9b^2=-6ab$. *Баллов: 3.*

Решение. Перепишем уравнение в виде $(a+3b)^2+3|a+b-8|=0$. Сумма двух неотрицательных чисел может быть равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю, то есть $a+3b=0$, $a+b-8=0$. Решив эту систему, получим

Ответ: $(12,\ -4)$.

11. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ обладает двумя свойствами: для любых k и x выполняется равенство $f(kx)=kf(x)$ и, кроме того, $f(3)=21$. Найдите a, b и c. *Баллов: 3.*

Решение. При $k=0$ получим $f(0)=0$, то есть $c=0$. При $k=2$, $x=1$ получим $f(2)=2f(1)$, то есть $4a+2b=2(a+b)$, откуда $a=0$. Таким образом, функция имеет вид $f(x)=bx$; из последнего условия находим, что $b=7$.

Ответ: 0, 7 и 0.

Часть 2

Приведите полное решение каждого задания. Условие переписывать **не нужно**

12. Тамара написала на доске 128 целых чисел. Марина сложила все эти числа, а Кирилл перемножил их. У Марины получился 0, а у Кирилла (-1). Докажите, что кто-то из них ошибся. *Баллов: 5.*

Решение. Предположим, что никто не ошибся. Так как произведение написанных целых чисел равно -1, каждое из них равно либо 1, либо -1. Так как их сумма равна 0, количество положительных чисел должно совпадать с количеством отрицательных, то есть отрицательных чисел должно быть 64. Но тогда произведение всех написанных чисел положительно, что противоречит результату Кирилла.

Критерии оценки. См. первый вариант.

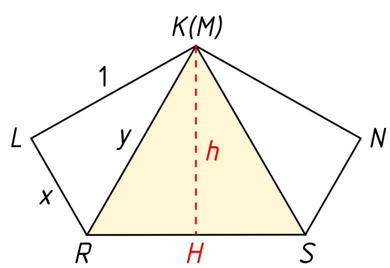
13. Известно, что a — целое число и один из корней уравнения $x^2+35x-7a=0$ — простое число. Найдите a. *Баллов: 6.*

Решение. Запишем уравнение в виде $x(x+35)=7a$ и подставим в него корень x, получим верное равенство. Правая его часть делится на 7, поэтому либо x делится на 7, либо $x+35$ делится на 7. В последнем случае (так как 35 делится на 7) тоже получаем, что x делится на 7. Но x — простое число, поэтому $x=7$. Тогда из уравнения получаем, что $a=42$.

Ответ: 42.

Критерии оценки. См. первый вариант.

14. Бумажный прямоугольник $KLMN$ размерами 1×2 согнули так, что точка K совместилась с точкой M. Найдите периметр треугольника, образованного двойным слоем бумаги. *Баллов: 6.*



Решение. Высота KH получившегося треугольника (см. рисунок) равна, очевидно, половине диагонали KM исходного прямоугольника, то есть $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Введем теперь обозначения, как показано на рисунке. Сумма $x+y$ равна длине большей стороны исходного прямоугольника до его перегибания, то есть $x+y=2$. С другой стороны, по теореме Пифагора имеем $y^2=x^2+1$. Из этих двух уравнений получаем $y=\dfrac{5}{4}$.

Тогда по теореме Пифагора $RH=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Поэтому периметр треугольника

RKS равен $2 \cdot (RH + y) = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Критерии оценки. См. первый вариант.

15. Известно, что ни при каком значении x равенство $\dfrac{5x-1}{bx+2} = 3$ не является верным. Найдите b. *Баллов: 7.*

Решение. Если $b = -10$, левая часть данного в условии уравнения равна $-\dfrac{1}{2}$ при всех значениях x, кроме $\dfrac{1}{5}$. Таким образом, ни одно значение x решением уравнения не является. Пусть теперь $b \neq -10$. Уравнение в условии равносильно системе $5x - 1 = 3(bx + 2)$, $x \neq -\dfrac{2}{b}$. Переписав первое уравнение этой системы в виде $(5-3b)x = 7$, заметим, что оно не имеет решений при $b = \dfrac{5}{3}$. При $b \neq \dfrac{5}{3}$ первое уравнение системы имеет решение $x = \dfrac{7}{5-3b}$, удовлетворяющее второму уравнению системы при всех b (кроме -10, рассмотренного ранее). *Примечание.* Если вы знаете, как выглядит график дробно-линейной функции $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, задачу можно решить гораздо проще.

Ответ: $\dfrac{5}{3}$ или -10.

Критерии оценки. См. первый вариант.