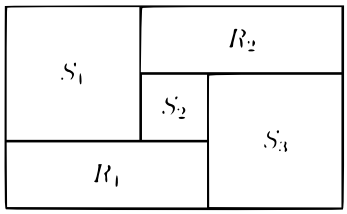
## Младшая лига

1. В числовом ребусе $8 \cdot \overline{\text{ФИЗФИЗФИЗФИЗ}} = \overline{\text{МАТМАТМАТМАТ}}$ разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым буквам одинаковые цифры. Найдите наибольшее возможное значение $\overline{\text{ФИЗ}} + \overline{\text{МАТ}}$. Если такого значения не существует, то в ответе укажите 0.

   Ответ: 1107.

2. Прямоугольники $R_1$ и $R_2$ и квадраты $S_1$, $S_2$ и $S_3$, изображенные на рисунке, образуют прямоугольник шириной 3322 единицы и высотой 2020 единиц. Найдите длину стороны $S_2$.




   Ответ: 651.

3. Для скольких упорядоченных пар $(b; c)$ целых положительных чисел $b, c$ каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$ не имеет двух различных действительных решений? (При $b \neq c$ пары $(b; c)$ и $(c; b)$ считаются различными)

   Ответ: 6.

4. У Ларисы Ивановны в лаборатории 68 колбочек, в каждой из которых масса вещества равна целому ненулевому числу милиграммов. При этом есть хотя бы два вещества разной массы, а средняя масса всех веществ равна 1000 мг. Средняя масса веществ, масса каждого из которых меньше 1000 мг, равна 944 мг. Средняя масса веществ, масса каждого из которых больше 1000 мг, равна 1016 мг. Найдите наименьшую возможную массу (в милиграммах) вещества в колбочке в лаборатории.

   Ответ: 229.

5. Сколько можно составить последовательностей длины 10 с помощью нулей и единиц так, чтобы в этих последовательностях не встречалась группа 011 из подряд идущих символов?

   Ответ: 232.

6. Сейф открывается при введении на цифровой клавиатуре числа $n$, делящегося на 9. Известно, что $n < L$, где $L = 301310231023102310$, а запись $n$ получается вычеркиванием цифр в записи $L$. Найдите наибольшее возможное число $n$ с необходимыми свойствами.

   Ответ: 301310310210210.

7. На доске нарисован выпуклый 12-угольник. Гена начал рисовать его диагонали так, чтобы каждая вновь нарисованная диагональ пересекалась не более чем с одной из уже проведенных диагоналей (пересечения учитывается только во внутренних точках, т.е. отличных от вершин). Какое наибольшее количество диагоналей сможет провести Гена?

   Ответ: 18.

8. В новом здании общежития УрФУ в Новокольцовском 24 этажа. Жилые блоки факультетов расположены на всех этажах, кроме первого, причем на каждом этаже проживает только один факультет и на разных этажах разные факультеты. Вечером, после длинного учебного дня 23 студента (все с разных факультетов) зашли в общежитский лифт, который сломался и теперь может подняться на любой из этажей, но только один раз, а дальше студенты должны идти до своего этажа пешком по лестнице. Каждый студент с раздражением опускается на один этаж вниз по лестнице и с двойным раздражением поднимается на один этаж вверх. На какой этаж следует подняться на лифте студентам, чтобы суммарное раздражение было наименьшим?

   Ответ: 17.

9. Найдите наибольшее $n$, для которого существует представление начального отрезка натурального ряда $\mathbb{N}_{\leq n} = \{1, 2, ..., n\}$ в виде объединения непересекающихся множеств $A$ и $B$, что ни в $A$, ни в $B$ не найдется двух различных чисел, сумма которых является квадратом натурального числа. (Например, для $n = 5$ в качестве $A$ и $B$ подойдут $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.)

   Ответ: 14.

## Старшая лига

1. Каждая чупакабра обладает копытами или крыльями (может быть, и тем и другим). Ньют Саламандер провел учет всех чупакабр и выяснил, что в мире у 20% чупакабр, имеющих копыта, есть и крылья, а у 25% чупакабр, имеющих крылья, есть еще и копыта. Сколько чупакабр всего, если их больше 25 и меньше 35?

   Ответ: 32.

2. Ваня забыл номер телефона Ани, но помнит, что последние шесть цифр номера телефона имеют вид $579abc$, где вместо $a$, $b$, $c$ какие-то цифры, которые Ваня забыл. Дополнительно известно, что шестизначное число $579abc$ должно делиться на 5, 7 и 9. Найдите все возможные комбинации цифр, которые можно поставить вместо букв, в ответе укажите сумму всех чисел $\overline{abc}$, полученных на конце. (При этом если вместо букв можно поставить сначала несколько нулей, к примеру, 005 или 025, то в сумму прибавится соответственно 5 или 25.)

   Ответ: 1800 $(600 + 285 + 915)$.

3. Дан правильный семнадцатиугольник площади 1. На продолжении его стороны $AB$ за точку $A$ выбрана точка $P$, а на продолжении стороны $BC$ этого семнадцатиугольника за точку $B$ выбрана точка $Q$ так, что $AP = BQ$ и $PQ = 11 \cdot AB$. Найдите площадь треугольника $PQB$, в ответе укажите значение $17 \cdot S_{PQB}$.

   Ответ: 120.

4. Саша должен был умножить 66 на бесконечную периодическую дробь $1,(ab) = 1,ababab\ldots$ , где $a, b$ – цифры, но не заметил этого и просто умножил 66 на число $1,ab$. Оказалось, что его ответ на $0,5$ меньше правильного. Найдите число $\overline{ab}$.

   Ответ: 75.

5. Четырехчленная последовательность образуется путем добавления каждого члена четырехчленной арифметической прогрессии положительных целых чисел к соответствующему члену четырехчленной геометрической прогрессии положительных целых чисел (т.е. первый член арифметической прогрессии складывается с первым членом геометрической прогрессии, второй – со вторым, третий – с третьим, а четвертый – с четвертым). Первые три члена полученной четырехчленной последовательности – это 57, 60, и 91. Каков четвертый член этой последовательности?

   Ответ: 206.

6. Корни многочлена $2x^3 - 18x^2 + 5x + 6$ являются действительными числами $x_1$, $x_2$, $x_3$. Новый многочлен третьей степени в качестве корней имеет числа, которые получаются из корней данного увеличением каждого на 2. Чему равно произведение корней нового многочлена?

   Ответ: 46.

7. На прямой $y = x+6$ отметили 100 точек с абсциссами $-3, -2, -1, \ldots, 96$, а на прямой $y = x$ еще 100 точек с абсциссами $0, 1, 2, \ldots, 99$. Сколько равнобедренных треугольников можно выбрать с вершинами в отмеченных точках? (Треугольники считаются разными, если у них не совпадает хотя бы одна вершина.)

   Ответ: 6032.

8. Прямоугольники $ABCD$ и $EFGH$ нарисованы так, что точки $D, E, C, F$ лежат на одной прямой, а точки $A, D, H, G$ а одной окружности. Какова длина $CE$, если $BC = 16$, $AB = 107$, $FG = 17$, $EF = 184$?

   Ответ: 104.

9. На доске нарисован выпуклый 2024-угольник. Алиса начала рисовать его диагонали так, чтобы каждая вновь нарисованная диагональ пересекалась не более чем с одной из уже проведенных диагоналей (пересечения учитывается только во внутренних точках, т.е. отличных от вершин). Какое наибольшее количество диагоналей сможет провести Алиса?

   Ответ: 4042.