Младшая лига

1. Гоша изучал факториалы и написал в тетради выражение

$$2020 + 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \ldots - 2020! \cdot 2022 + 2021!,$$

значение которого он собирался посчитать, но Гоша очень устал и ушел спать, а во сне ему приснился ответ. Найдите число, которое приснилось Гоше.

Ответ: 2021.

2. Петя, Коля и Вася набрали охапки цветов. Петя и Коля сказали Оле, сколько у них цветов: $p = 13$ (у Пети) и $k = 18$ (у Коли), а Вася отказался называть свое количество V. Ребята начали играть в следующую игру. Оля называет два имени мальчиков из трех и те, чьи имена она назвала, отдают Оле по одному цветку (т.е. если она назвала Петю и Васю, то они отдают Оле по одному цветку). Игра продолжается до тех пор, пока хотя бы два человека из трех еще могут вручать Оле цветы. Для скольких значений V Оля сможет забрать себе все цветы у всех мальчиков?

Ответ: 14.

3. Найдите все n, представимые в виде произведения $p \cdot q \cdot r \cdot \ldots \cdot t$ различных простых чисел, которые делятся на $p-1$, $q-1$, $r-1$,..., $t-1$ для всех простых множителей, входящих в произведение (в том числе, допускается произведение из всего одного числа). В ответе укажите сумму всех найденных n.

Ответ: 1856.

4. На прямоугольном бильярдном столе $ABCD$ в точке P находится шар, $AP = 1$, $AB = 5$, $AD = 9$. Постройте точку Q, в которую после удара должен попасть шар, чтобы, отразившись сначала от стороны BC, потом от CD, он попал в лузу X, находящуюся в центре AD. В ответе напишите расстояние BQ.

Ответ: 6.

5. Длина одной из сторон прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами равна 2022. Какую наибольшую длину может иметь его гипотенуза?

Ответ: 1022122.

6. Вася написал на листочке дроби $\frac{1}{4044}$, $\frac{2}{4044}$, $\frac{3}{4044}$, ..., $\frac{4044}{4044}$, затем зачеркнул все дроби, которые можно было сократить и подсчитал количество незачеркнутых дробей. Сколько получилось дробей у Васи?

Ответ: 1344.

7. На уроке математики проводится социологический опрос с вопросом «Как расшифровать аббревиатуру МИ?». Проголосовали 24 человек из присутствующих 24. Вариантов ответа было всего два: «метод интервалов» и «так зовут моего преподавателя». На выходе из аудитории каждого спросили, что он ответил. Людей, сказавших, что они ответили «метод интервалов» вдвое больше, чем тех, кто на самом деле ответил «метод интервалов», а людей, сказавших, что они ответили «так зовут моего преподавателя» вдвое меньше, чем тех, кто на самом деле сказал «так зовут моего преподавателя». Сколько людей реально выбрали «так зовут моего преподавателя»?

Ответ: 16.

8. Незнайка придумал PIN-код для разблокировки экрана своего телефона, представляющий собой последовательность из четырех цифр и посчитанный в виде разности $\overline{abcd} - \overline{dcba}$, четырехзначных чисел, где a, b, c, d – ненулевые цифры, среди которых, возможно, есть повторяющиеся. Незнайка забыл свой PIN-код и начал перебирать комбинации, пользуясь указанными выше сведениями и тем, что не допустим PIN-код из одних нулей (ведущие нули при этом писать нужно, если разность не четырехзначная, например, 0001 вместо 1). С какой попытки в худшем случае Незнайке удастся разблокировать экран?

   Ответ: 144.

9. В межпланетном турнире математических боев принимают участие четыре команды, по одной с Земли, Марса, Венеры и Меркурия. Каждая команда состоит из шести человек: в ней есть капитан, заместитель капитана (это не капитан) и еще четыре других члена команды. Сколькими способами из этих четырех команд можно составить одну просто сборную из шести существ для участия в межгалактическом турнире, если в сборной обязательно должен быть хотя бы один представитель из каждой команды и обязательно пара «капитан – заместитель» хотя бы из одной команды?

   Ответ: 9720.

Старшая лига

1. Найдите наибольшее целое, отличное от нуля, значение параметра a, при котором вершины парабол $y = 2ax^2 + 4x + 3a$ и $y = x^2 + (a+6)x - \frac{3a^2}{4} - a + 7$ лежат по одну сторону от прямой $y = -2x - 1$.

   Ответ: -2.

2. Биссектрисы AD и CE углов при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке K. Центр окружности, проходящей через точки K, D, C, находится на стороне AC. Найдите градусную меру наибольшего из углов треугольника ABC.

   Ответ: 90.

3. Найдите все n, представимые в виде произведения $p \cdot q \cdot r \cdot \ldots \cdot t$ различных простых чисел, которые делятся на $p-1$, $q-1$, $r-1$,..., $t-1$ для всех простых множителей, входящих в произведение (в том числе, допускается произведение из всего одного числа). В ответе укажите наибольшее из всех найденных n.

   Ответ: 1806.

4. Дан многочлен $P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x - 1$, найти значение $P(P(P(...P(-1))))$ (P написана 2022 раза).

   Ответ: 1.

5. Вот уже и год прошел, а юный Каземир с прошлогоднего турнира все продолжает красить квадраты. На этот раз он закрасил некоторые клетки большого листа чистой клетчатой бумаги в черный цвет так, что закрашенные клетки образуют 3000 квадратов со сторонами 1, 2, 3, 4, ..., 3000 (по одному квадрату для каждой натуральной стороны от 1 до 3000), закрашенные квадраты не имеют общих клеток. Затем он перекрасил в белый цвет те квадраты, которые можно было разбить по линиям сетки на несколько (больше одного) равных квадратов с целочисленными сторонами. Сколько черных квадратов осталось у Каземира?

   Ответ: 1.

6. Действительные числа x, y, z, t таковы, что $x + y = -3$, $xy + yz + zx = -4$, $xyz + yzt + ztx + txy = 14$, $xyzt = 30$. Найдите значение выражения $100 \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)$.

   Ответ: 3525.

7. Крокодил Гена придумал универсальный ключ для открытия своего чемоданчика, представляющий собой произвольную перестановку всех натуральных чисел от 1 до 10 включительно. Шапокляк испортила ключ и теперь чемоданчик откроется только если перестановка будет удовлетворять условию, что сумма любых трех подряд идущих чисел в ней делится на 3. С какой попытки бедный Гена, в худшем случае, откроет свой чемоданчик?

   Ответ: 3627073.

8. Найдите наибольшее натуральное n, для которого $1 + 2 + \ldots + 2n = p_1^2 + p_2^2 + \ldots p_k^2$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – все различные простые числа, не превосходящие n.

   Ответ: 18.

9. В алфавите племени Мумбо-Юмбо 17 букв. Вождь каждый день в течение N дней выбирает непустое множество букв алфавита и заставляет племя разговаривать словами, содержащими только эти буквы. Известно так же, что множества букв, которые составлялись в течение прошедших дней, оказались различными, а каждая буква алфавита племени попала ровно в два множества. Найдите наибольшее значение N.

   Ответ: 25.