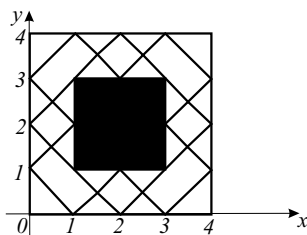


Блиц младшие

1. Чему равно отношение площади черного квадрата на рисунке к суммарной площади белых длинных прямоугольников и квадратов?



Ответ: $2/3$.

Решение. Обозначим через W суммарную площадь белых прямоугольников и квадратов, через B площадь черного квадрата. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1, тогда $B = 4$. Один маленький белый квадрат складывается из двух маленьких белых треугольников, а один длинный прямоугольник из четырех, всего на белый длинные прямоугольники и квадраты нужно $8 + 16 = 24$ маленьких треугольника. При этом из четырех таких треугольников складывается квадрат со стороной 1, значит, $W = \frac{24}{4} = 6$, тогда $\frac{B}{W} = \frac{2}{3}$.

2. Вычислите значение дроби:

$$\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 2025 \cdot 2026}{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2025^2}$$

Ответ: 2.

Решение. Преобразуем числитель так $(0 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) + \dots + (2025 \cdot 2026 + 2025 \cdot 2026) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + \dots + 2025 \cdot 4050$. Это в 2 раза больше знаменателя.

3. Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки часов перпендикулярны друг другу?

Ответ: 44.

Решение. Считаем от 0 ч 0 мин. За половину суток минутная стрелка делает 12 полных оборотов, а часовая – 1 полный оборот. Таким образом, за 12 часов минутная стрелка обгоняет часовую 11 раз, а за сутки – 22 раза. При этом при каждом обгоне найдется два положения, когда угол между стрелками равен 90° , значит, всего таких положений 44.

4. Дима и Максим недавно подружились с Мариной. Они хотят узнать, когда у нее День рождения. Марина выдала им список из десяти возможных дат: 15 мая, 16 мая, 19 мая, 17 июня, 18 июня, 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа, 17 августа. Потом Марина назвала Диме только месяц, а Максиму только число Дня своего рождения. Дима сказал: "Я не знаю, когда День рождения у Марины, но я знаю, что и Максим этого не знает". Максим возразил: "Сначала я не знал, когда День рождения Марины, но теперь я его знаю". Дима сказал: "Тогда я тоже знаю, когда у Марины День рождения". Когда же все-таки День рождения у Марины?

Ответ: 16 июля.

Решение. Максим знает число, ранее он не знал дату, значит, точно не подходит 18 июня и 19 мая. Числа, которые встречаются более одного раза: 14, 15, 16 и 17. Далее вернемся к утверждению Димы. Если бы ему назвали месяц, где есть уникальные числа 18 или 19, то тогда он бы не сказал, что Максим не знает дату. Значит, май и июнь не подходят. Теперь остались даты 14 июля, 16 июля, 14 августа, 15 августа, 17 августа. И так как Максим теперь знает дату Дня рождения, то не подходят 14 июля и 14 августа. Поскольку теперь и Дима знает дату, то остается выбрать из 16 июля, 15 августа и 17 августа дату с уникальным месяцем, значит, подходит 16 июля (а сначала, и правда, не знал, ибо 16 не является уникальным числом в объявленном списке).

Блиц старшие

1. Функция f обладает свойствами: $f(1) = 1$, $f(2n) = n^2 \cdot f(n)$ для любого натурального n . Чему равно $f(2^{2025})$? (Ответ запишите в виде произведения степеней различных простых чисел, т.е. $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$.)

Ответ: $2^{4098600}$.

Решение. $f(2^{2025}) = 2^{2 \cdot 2024} \cdot f(2^{2024}) = \dots = 2^{2 \cdot (2024 + 2023 + \dots + 1 + 0)} \cdot f(2^0) = 2^{2025 \cdot 2024} = 2^{4098600}$

2. Три положительных числа x , y , z удовлетворяют уравнениям

$$xyz = 1, \quad x + \frac{1}{z} = 5, \quad y + \frac{1}{x} = 29.$$

Чему равно $z + \frac{1}{y}$?

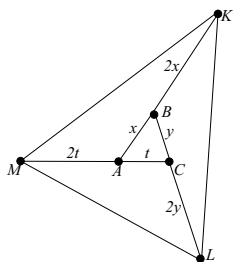
Ответ: $\frac{1}{4}$.

Решение. Из первого уравнения $\frac{1}{z} = xy$, тогда $x + xy = 5 \Leftrightarrow x(1 + y) = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1+y}{5}$, откуда $y + \frac{1+y}{5} = 29$, значит, $y = 24$, находим теперь $x = \frac{1}{5}$ и $z = \frac{1}{xy} = \frac{5}{24}$, тогда $z + \frac{1}{y} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

3. В треугольнике ABC на продолжениях сторон AB (за точку B), BC (за точку C), CA (за точку A) выбраны соответственно точки K , L и M так, что $BK = 2AB$, $CL = 2BC$ и $AM = 2AC$. Чему равно отношение площади треугольника KLM к площади треугольника ABC .

Ответ: 19.

Решение.



Синусы смежных углов равны, поэтому $S_{BKL} = \frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} S_{ABC} = 6S_{ABC}$, аналогично $S_{MAK} = S_{MCL} = 6S_{ABC}$, откуда $S_{KLM} = 19S_{ABC}$.

4. Сколько таких чисел n во множестве $\{1, 2, 3, \dots, 2025\}$, что клетчатый квадрат $n \times n$ клеток можно разрезать на равное число клетчатых квадратов 2×2 и 1×1 клеток?

Ответ: 404.

Решение. Если при разрезании получилось k квадратов 2×2 , то площадь разрезаемого квадрата $5k$. Значит, n кратно 5.

Если $n = 5$, то $k = 5$, но вырезать 5 квадратов 2×2 невозможно.

Если n — четное, то квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 2×2 , а затем пятую часть из них на квадраты 1×1 . Если n нечетно и $n \geq 15$, то площадь квадрата $(n - 1) \times (n - 1)$ больше $4/5$ площади квадрата $n \times n$, поэтому можно его разрезать на квадраты 2×2 , остаток квадрата разрезать на квадраты 1×1 , а затем некоторые из квадратов 2×2 разрезать на квадраты 1×1 .