

7 класс

1. В квадратную таблицу 3×3 вписаны девять чисел таким образом, что сумма чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали, равна -3 . Какое число стоит в центральной клетке этой таблицы?

Ответ: -1 .

Решение. Просуммируем две диагонали, центральную строчку и центральный столбец и вычтем сумму трех столбцов, получим утроенное число, стоящее в центре. Оно равно -1 .

2. В прямоугольном треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BK , пересекающиеся в точке I . Прямая a проходит через точку I , делит угол DIB пополам и отсекает от $\triangle ABC$ треугольник, который оказался равнобедренным. Найдите острые углы ABC .

Ответ: 45° и 45° , 18° и 72° , $\frac{270^\circ}{7}$ и $\frac{360^\circ}{7}$.

Решение. Первый случай: проведены биссектрисы острых углов. Обозначим через P точку пересечения a и катета AC , а через T точку пересечения a и катета BC . Пусть $\angle DAB = \alpha$, $\angle KBA = \beta$, тогда $\angle KIA = \alpha + \beta = 45^\circ$, $\angle KIP = \angle PIA = 22,5^\circ$, $\angle KPI = 22,5^\circ + \alpha$. По условию треугольник CPT – равнобедренный и в данном случае $\angle C = 90^\circ$, значит, $\angle KPI = 45^\circ$, что равно также $22,5^\circ + \alpha$, откуда $\alpha = 22,5^\circ$ и $\angle CAB = 45^\circ = \angle CBA$.

Второй случай: проведена биссектриса острого угла и прямого угла. Будем считать, что прямым оказался угол B . Обозначим через P точку пересечения a и гипотенузы AC , а через T точку пересечения a и катета BC . Пусть $\angle DAB = \alpha$. В данном случае $\angle KBA = 45^\circ$, тогда $\angle KIA = \alpha + 45^\circ$, $\angle KIP = \angle PIA = \angle TID = \angle TIB = 22,5^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $\angle KPI = 22,5^\circ + \frac{3\alpha}{2}$. По условию треугольник CPT – равнобедренный и в данном случае $\angle C = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle ITD = 45^\circ + 22,5^\circ + \frac{\alpha}{2} = 67,5^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Возможны три варианта, какие углы из $90^\circ - 2\alpha$, $67,5^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $22,5^\circ + \frac{3\alpha}{2}$ могли оказаться равными в $\triangle CPT$. Рассмотрим их все.

1 вариант: $90^\circ - 2\alpha = 22,5^\circ + \frac{3\alpha}{2}$, откуда $\alpha = \frac{135^\circ}{7}$, $\angle CAB = \frac{270^\circ}{7}$, $\angle BCA = \frac{360^\circ}{7}$.

2 вариант: $90^\circ - 2\alpha = 67,5^\circ + \frac{\alpha}{2}$, откуда $\alpha = 9^\circ$, $\angle CAB = 18^\circ$, $\angle BCA = 72^\circ$.

3 вариант: $22,5^\circ + \frac{3\alpha}{2} = 67,5^\circ + \frac{\alpha}{2}$, откуда $\alpha = 45^\circ$, $\angle CAB = 90^\circ$ – противоречие с тем, что $\angle BAC$ – острый.

3. Аня, Боря, Вова, Галя и Дима собираются на пикник, но Аня и Боря еще не решили куда они пойдут в кино вдвоем или на пикник с друзьями. Дима готовит на всех перекус из булки хлеба и куска колбасы, которые он хочет порезать заранее. Дележ еды друзья сочтут справедливым, если каждому достанется поровну хлеба, поровну колбасы и одинаковое число кусков еды. На какое минимальное число кусков Дима должен порезать хлеб и колбасу, чтобы, независимо от решения Ани с Борей он смог на пикнике провести справедливый дележ еды?

Ответ: на 15.

Решение. Поскольку каждому достается одинаковое число кусков, число кусков должно делиться и на 3 и на 5. А, значит, кусков не меньше 15.

Пример на 15 кусков.

Хлеб делим на части: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{1}{15}$ и $\frac{1}{15}$. (Куски x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 и x_7 , соответственно.)

Колбасу делим на части: $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{15}$. (Куски $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ и k_8 , соответственно.)

Если друзья будут втроем, то справедливый дележ такой:

$\{x_1, x_4, k_3, k_4, k_6\}, \{x_2, x_5, k_1, k_7, k_8\}, \{x_3, x_6, x_7, k_2, k_5\}$.

Если друзья будут пятером, то справедливый дележ такой:

$\{x_1, k_3, k_6\}, \{x_2, k_4, k_7\}, \{x_3, k_5, k_8\}, \{x_4, x_6, k_1\}, \{x_5, x_7, k_2\}$.

8 класс

1. Ответственный чиновник работал без перерывов и выходных с самого начала года, с 1 января. Каждый день он подписывал от 80 до 90 документов. При этом в каждую нечётную дату он подписывал одинаковое количество документов; в каждую чётную — тоже одинаковое, но другое их количество. Однажды вечером он почувствовал, что очень устал, и взял отпуск за свой счёт на две недели (начиная со следующего дня). Какого числа и какого месяца чиновник вышел из отпуска, если известно, что за январь он подписал ровно 2025 документов? (Известно, что находясь в отпуске, чиновники документов не подписывают.)

Ответ: 7 февраля.

Решение. Пусть в нечётную дату чиновник подписывал x документов, в чётную — y (ясно, что числа x и y — целые), и проработал в январе n дней. Тогда за январь он подписал документов от $80n$ до $90n$. Из двойного неравенства $80n \leq 2025 \leq 90n$ с учётом того, что число n — натуральное, находим, что $23 \leq n \leq 25$. Значит, чиновник пошёл в отпуск в последней декаде января (и вышел из отпуска в первой половине февраля). При этом возможны три случая.

Случай 1. $n = 23$. Тогда по условию $12x + 11y = 2025$. Отсюда число $a = 11(x + y) = 2025 - x$ кратно 11, поэтому число x при делении на 11 даёт в остатке 1. Так как $80 \leq x \leq 90$, отсюда следует, что $x = 89$. Тогда $x + y = \frac{2025 - 89}{11} = 176$, а $y = 87$.

Случай 2. $n = 24$. Тогда по условию $12x + 12y = 2025$. Это уравнение не имеет решений в целых числах (2025 не кратно 12).

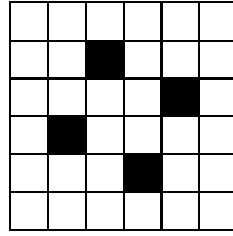
Случай 3. $n = 25$. Тогда по условию $13x + 12y = 2025$. Отсюда число $a = 2025 - x$ кратно 12, поэтому число x при делении на 12 даёт в остатке 9. Так как $80 \leq x \leq 90$, отсюда следует, что $x = 81$. Тогда $x + y = \frac{2025 - 81}{12} = 162$, и $y = 81$. Противоречие с тем фактом, что чиновник в чётную и нечётную дату подписывал разное количество документов.

Значит, единственно возможная ситуация такова: чиновник проработал 23 дня, а с 24 января взял отпуск. Добавим к этой дате 14 дней отпуска, получим 7 февраля. Это и есть дата выхода на работу ответственного чиновника.

2. В клетчатом квадрате 6×6 вырезали 4 клетки. Какой наибольшей площади клетчатый прямоугольник из него гарантированно можно теперь вырезать?

Ответ: 6 клеток.

Решение. Поскольку вырезов меньше, чем строк, найдется строка без вырезов. Таким образом прямоугольник площади 6 всегда можно вырезать.



Расставим вырезы как показано на рисунке.

Непосредственно проверяется, что наибольшая площадь прямоугольника, не содержащего вырезов, 6 клеток. Причем имеется два вида прямоугольников площади 6: прямоугольники 2×3 в углах и прямоугольники 1×6 , тремя сторонами примыкающие к границе квадрата.

3. Докажите, что уравнение $x^4 = 2y^2 + 1$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение. От противного, пусть решения есть. Тогда из $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 2y^2$ получим нечетность x , т.е. $x = 2k + 1$, откуда

$$(k^2 + k) \left(2(k^2 + k) + 1 \right) = \left(\frac{y}{2} \right)^2.$$

Теперь из уравнения следует, что должно быть четным, т.е. $y = 2l$ и

$$(k^2 + k) \left(2(k^2 + k) + 1 \right) = l^2.$$

Учитывая, что выражения в скобках взаимно простые (если у этих выражений существует общий простой делитель p , то и 1 делится на p , противоречие), оба они являются полными квадратами, так как их произведение – квадрат. Значит, $k^2 + k = t^2$ и $2(k^2 + k) + 1 = m^2$, откуда $k(k + 1) = t^2$, снова применим рассуждение о взаимно простоте и получим, что $k = s^2$ и $k + 1 = q^2$ для некоторых неотрицательных целых q, s , откуда $1 = (q - s)(q + s)$, что возможно только в случае $q - s = 1 = q + s$, откуда $s = 0$, $q = 1$, $k = 0$, $x = 1$, $y = 0$ – противоречие, так как ищем решения только в натуральных числах.

9 класс

1. У многочлена $f(x)$ степени 2024 все коэффициенты являются нечетными целыми числами. Докажите, что не имеет рациональных корней уравнение $f(x) = 0$.

Решение. Предположим, что есть несократимая дробь p/q , для которой $f(p/q) = 0$, а $f(x)$ пусть имеет вид $f(x) = a_0x^{2024} + a_1x^{2023} + \dots + a_{2024}$. Приводя $f(p/q) = a_0\left(\frac{p}{q}\right)^{2024} + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{2023} + \dots + a_{2024}$ к общему знаменателю, замечаем, что числитель дроби является нечетным числом, поэтому в ноль не обращается, т.е. $f(p/q) = 0$ невозможно.

2. В ромбе $ABCD$: $\angle B = 120^\circ$, $BD = 8$. На стороне CD отметили точку F такую, что $\angle DAF = 15^\circ$. Найдите расстояние от точки F до прямой AD .

Ответ: $6 - 2\sqrt{3}$

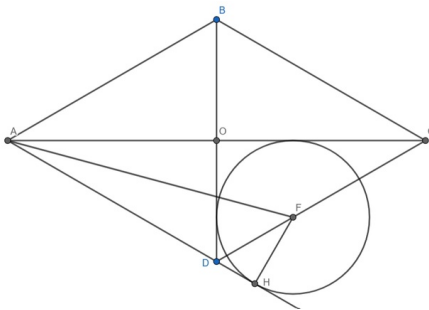
Решение. Пусть диагонали пересекаются в точке O и пусть точка H – основание перпендикуляра, опущенного из точки F на прямую AD . Так как $ABCD$ – ромб, то $\angle B = \angle D = 120^\circ$ и $\angle HDF = 60^\circ$. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, значит, $\angle OAD = 30^\circ$, $\angle ODF = 60^\circ$. Следовательно, AF – биссектриса $\angle OAD$, DF – биссектриса $\angle ODH$. Получаем, что F – центр вневписанной окружности $\triangle OAD$.

Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, значит, $OD = 4$. $\triangle OAD$ – прямоугольный, $\angle OAD = 30^\circ \Rightarrow AD = 8$. По теореме Пифагора $AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$. Тогда $S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$.

Теперь воспользуемся формулой площади треугольника через радиус вневписанной окружности: $S_{\triangle OAD} = (p - OD)r_{OD}$, где p – полупериметр треугольника OAD , r_{OD} – радиус вневписанной окружности, касающейся стороны OD . Тогда $p = \frac{OA + OD + AD}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 4 + 8}{2} = 6 + 2\sqrt{3}$, $p - OD = 6 + 2\sqrt{3} - 4 = 2 + 2\sqrt{3}$. Значит, $S_{\triangle OAD} = (2 + 2\sqrt{3}) \cdot r_{OD}$.

Вычислили площадь двумя способами, приравняем: $8\sqrt{3} = (2 + 2\sqrt{3})r_{OD} \Rightarrow r_{OD} = \frac{8\sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{12 - 4\sqrt{3}}{2} = 6 - 2\sqrt{3}$.

Осталось заметить, что так как радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $r_{OD} = FH$.



3. Дан клетчатый прямоугольник 2024×2025 . Верно ли, что каждое его плотное покрытие доминошками 1×2 можно переделать в другое плотное покрытие так, что ни одна доминошка не окажется на месте какой-то доминошки исходного покрытия? (Плотным называется покрытие, при котором все клетки покрываются по одному разу доминошками.)

Ответ: неверно.

Решение. Приведем пример такого разбиения клетчатого прямоугольника 2024×2025 на домино, которое имеет хотя бы одно общее домино с любым другим разбиением. Будем считать, что сторона длины 2025 – горизонтальная, а сторона длины 2024 – вертикальная. Разобьем прямоугольник 2024×2025 на сонаправленные вертикально расположенные домино (это возможно, так как 2024 – четное число). Назовем это разбиение “разбиением А”.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение прямоугольника 2024×2025 на домино, которое назовем “разбиением В”. Докажем, что разбиения А и В имеют общее домино. Рассмотрим все домино разбиения В, которые прилегают к нижней стороне исходного прямоугольника. Если бы все они были расположены горизонтально, то нижняя сторона имела бы четную длину. Но ее длина – 2025. Значит, хотя бы одно домино разбиения В, прилежащее к нижней стороне прямоугольника 2024×2025 , расположено вертикально. Но это домино есть и в разбиении А, то есть оно является общим для разбиений А и В.

10 класс

1. Незнайка утверждает, что обнаружил три таких различных квадратных трехчлена $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, что параболы $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются в точках с абсциссами 1 и 2023, параболы $y = f_1(x)$ и $y = f_3(x)$ пересекаются в точках с абсциссами 2 и 2024, параболы $y = f_2(x)$ и $y = f_3(x)$ пересекаются в точках с абсциссами 3 и 2025. Может ли он в этом случае не врать?

Ответ: нет, он врет.

Решение. По теореме Безу

$$f_1(x) - f_2(x) = A \cdot (x - 1)(x - 2023),$$

$$f_3(x) - f_1(x) = B \cdot (x - 2)(x - 2024),$$

$$f_2(x) - f_3(x) = C \cdot (x - 3)(x - 2025).$$

Складывая эти равенства, получим, что при любом x верно равенство:

$$0 = A \cdot (x - 1)(x - 2023) + B \cdot (x - 2)(x - 2024) + C \cdot (x - 3)(x - 2025).$$

В частности при $x = 3$ и $x = 2025$ получаем $-4040A - 2021B = 0$ и $4048A + 2023B = 0$. Решая эту систему получаем $A = B = 0$, тогда и $C = 0$, иначе равенство не будет возможно при любом x . Следовательно, трехчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ совпадают.

2. В плоскости α лежит отрезок XY (X и Y – различные точки) и точка O , не совпадающая с концами этого отрезка. Из всех точек этого отрезка опускаются перпендикуляры на всевозможные прямые в плоскости α , которые проходят через точку O . Фигура Φ состоит из оснований всех проведенных таким образом перпендикуляров.

а) Опишите фигуру Φ .

б) Чему равна площадь фигуры Φ , если $Y \in (OX)$, $OY = 2R \geq 2r = OX$?

Ответ: а) симметрическая разность кругов, построенных на OX и OY как на диаметрах, включая границы этих кругов, б) $\pi(R^2 + r^2)$ или $\pi(R^2 - r^2)$.

Решение. а) Строим две окружности ω_1 и ω_2 как окружности на диаметрах OX и OY соответственно. Пусть S_1 , S_2 – круги с границами ω_1 и ω_2 . Покажем, что $\Phi = S_1 \setminus S_2 \cup S_2 \setminus S_1 \cup \omega_1 \cup \omega_2$. Обозначим это множество пока через Ω . Ясно, что

окружности ω_1 и ω_2 содержатся в искомой фигуре, поскольку основания перпендикуляров, проведенных из точки X на всевозможные прямые описывают ω_1 , а основания перпендикуляров, опущенных из точки Y на всевозможные прямые, описывают ω_2 . Обозначим через H основание перпендикуляра, проведенного из точки O к прямой XY . Ясно, что H – общая точка ω_1 и ω_2 , также их общей точкой является O . Теперь рассмотрим четыре случая.

1 случай: $O \notin (XY)$ и H лежит на отрезке XY . Возьмем точку M на отрезке XY . Основания перпендикуляров, проведенных из M на всевозможные прямые, проходящие через O , описывают окружность ω с диаметром MO . Ясно, что $H, O \in \omega$. Если $M \in \{H, X, Y\}$, то $M \in \Psi$. Если M лежит между X и H , то дуга HMO лежит внутри $S_1 \setminus S_2$, так как M на отрезке XH , который является хордой ω_1 и при этом содержится в $S_1 \setminus S_2$, а концы дуги совпадают с общими точками ω_1 и ω_2 . Берем теперь точку P на «меньшей» дуге HO окружности ω , тогда из вписанности HMP получаем, что $\angle HPO = 180^\circ - \angle HMO < 180^\circ - \angle HXO = \angle HLO$, где L – точка на дуге HO окружности ω_1 . Поскольку $\angle HLO$ вписан в ω_1 , а $\angle HPO$ меньше этого угла и P с L по одну сторону от HO , заключаем, что P вне ω_1 . С другой стороны, $\angle HPO = 180^\circ - \angle HMO > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ > \angle HYO$, но Y и P лежат по одну сторону от HO , а $\angle HYO$ вписан в ω_2 , тогда P внутри ω_2 . Итак, $\omega \subset \Psi$. Если M лежит между H и Y , рассуждения аналогичны. В силу произвольности выбора M получаем, что $\Phi \subseteq \Psi$. Теперь берем M' вне отрезка XY (для определенности, пусть Y лежит между X и M'). Множество оснований перпендикуляров, проведенных из M' на всевозможные прямые, проходящие через O , описывает окружность с диаметром $M'O$. Теперь $\angle HM'O < \angle HYO$, но $\angle HYO$ вписан в ω_2 и M' с Y по одну сторону от прямой HO , тогда поскольку M' вне ω_2 , дуга $HM'O$ окружности ω' с диаметром $M'O$ вне ω_2 и вне S_2 . Берем теперь точку P' на «меньшей» дуге HO окружности ω' , тогда из вписанности $HM'OP'$ получаем, что $\angle HP'O = 180^\circ - \angle HM'O > 180^\circ - \angle HYO = \angle HEO$, где L – точка на дуге HO окружности ω_2 . Поскольку $\angle HEO$ вписан в ω_2 , а $\angle HP'O$ больше этого угла и P' с E по одну сторону от HO , заключаем, что P' внутри ω_2 . С другой стороны, $\angle HP'O = 180^\circ - \angle HM'O > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ > \angle HXO$, но X и P' лежат по одну сторону от HO , а $\angle HXO$ вписан в ω_1 , тогда P' внутри ω_1 . Итак, ни одна точка ω' не принадлежит Ψ . Тем самым показано, что для точек вне отрезка XY основания перпендикуляров не принадлежат Ψ , значит, $\Phi = \Psi$.

2 случай: $O \notin (XY)$ и H вне отрезка XY рассматривается аналогично.

3 случай: O на отрезке XY , тогда проекции точек отрезка XO описывают круг с диаметром XO , т.е. S_1 , а проекции точек на отрезке OY описывают S_2 , в данном случае S_1 и S_2 касаются внешним образом, поэтому $\Phi = S_1 \cup S_2$.

4 случай: $O \in (XY)$, но O не на отрезке XY (для определенности X лежит между O и Y), тогда проекции точек отрезка XO описывают S_1 , а проекции точек на отрезке OY описывают S_2 , в данном случае S_1 и S_2 касаются внутренним образом, поэтому $\Phi = S_2 \setminus S_1 \cup \{O\}$.

б) Необходимо рассмотреть два случая: $O \in [XY]$ и $O \notin [XY]$. В первом случае из пункта (а) получаем, что площадь фигуры равна сумме площадей кругов, т.е. $\pi(R^2 + r^2)$. Во втором случае построенные круги касаются внутренним образом и из пункта (а) получим, что площадь равна разности площадей этих кругов, т.е. $\pi(R^2 - r^2)$.

3. Натуральные двузначные числа x и y получаются друг из друга перестановкой цифр, а их разность квадратов равна квадрату натурального числа m . Чему может быть

равно $x + y + m$?

Ответ: только 154.

Решение. Пусть $x^2 - y^2 = m^2$, где $x = 10a + b$, $y = 10b + a$. Из первого равенства следует $x > y$, откуда $a > b$. Из условия также следует, что a и b ненулевые числа. Подставим в первое равенство выражение для x и y , получим $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (9a - 9b)(11a + 11b) = 99(a^2 - b^2) = m^2$. Так как m^2 — квадрат натурального числа, то степени вхождения всех простых чисел в произведение $99(a^2 - b^2)$ должны быть четными. Заметим, что $99 = 3^2 \cdot 11$, значит, $a^2 - b^2$ делится на 11 в нечетной степени. Поскольку $1 \leq a - b \leq 9$, число $a - b$ взаимно просто с 11, тогда $a + b$ делится на 11. Наибольшее значение $a + b$ равно 17, значит, единственный возможный случай: $a + b = 11$, откуда $33^2(a - b) = m^2$. Теперь $a - b$ должно быть точным квадратом некоторого натурального числа, значит, возможные значения $a - b$: 1, 4, 9, поскольку $0 < a - b < 10$. При этом $a - b = 9$ возможно только при $a = 9$, $b = 0$, что не подходит. При $a - b = 1$, учитывая, что $a + b = 11$, получаем: $a = 6$, $b = 5$, $x = 65$, $y = 56$, $m = 33$, $x + y + m = 154$. При $a - b = 4$ с учетом $a + b = 11$ получаем $a = \frac{15}{2}$, что не подходит.