Младшая лига

1. Докажите, что если x, y, z — попарно различные числа, то сумма

$$\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+xz}$$

не может равняться нулю.

Решение. Приводя к общему знаменателю, получим $\frac{x-y}{1+xy}+\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+xz}=$

$$\frac{(x-y)(1+xz+yz+xyz^2)+(y-z)(1+xz+xy+yzx^2)+(z-x)(1+xy+yz+xzy^2)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}=$$

$$\frac{x^2z-x^2y+xy^2-zy^2+yz^2-xz^2}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}=\frac{z(x^2-y^2)-xy(x-y)-z^2(x-y)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}=$$

$$\frac{(x-y)(zx+zy-xy-z^2)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)}=\frac{(x-y)(z-y)(x-z)}{(1+xy)(1+yz)(1+xz)},$$

что не может быть равно нулю, поскольку числа x, y, z попарно различные.

2. Найдите все пары (m, n) натуральных чисел m и n, для которых разность НОК(m, n) и НОД(m, n) равна $\frac{mn}{3}$. (При неравных m и n пара (m, n) считается отличной от пары (n, m).)

Ответ: $(2, 6)$ и $(6, 2)$.

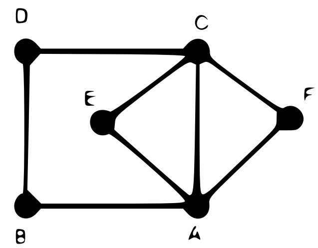
Решение. Пусть НОД$(m, n) = d$, тогда существуют m' и n', что $m = m'd$, $n = n'd$, причем НОД(m', n')=1. Отсюда НОК$(m, n) = \frac{mn}{\text{НОД}(m,n)} = m'n'd$ и по условию получаем $m'n'd - d = \frac{m'n'd^2}{3} \Leftrightarrow 3m'n' - 3 = m'n'd \Leftrightarrow m'n'(3-d) = 3$. Поскольку m', n', d натуральные числа, то $3-d|3$ и $3-d>0$, откуда единственный возможный вариант $d = 2$ и $m'n' = 3$, значит, $m' = 1, n' = 3$, либо $m' = 3, n' = 1$. Получаем все возможные пары: $(2, 6)$ и $(6, 2)$.

3. Участники личной олимпиады I Открытого математического турнира писали олимпиаду в двух аудиториях. Ни в одной из аудиторий не было трех тёзок. У 105 участников были два тёзки в другой аудитории. У 158 участников было хотя бы по одному тёзке в каждой аудитории. У скольки участников было ровно по одну тёзке в каждой аудитории? (Тёзками называются люди с одинаковыми именами)

Ответ: у 106 участников.

Решение. Понятно, что на олимпиаде не могло быть группы более чем из четырех тезок, иначе нашлось бы трое тёзок в одной аудитории. Если у участника не было тёзок или был всего один тёзка, то этот участник не входит в число 105 или 158 участников из условия. Если на олимпиаде было четыре тёзки, то они сидели по две человека в разных аудиториях и каждый из них входит и в состав групп из 105 и 158 человек из условия. Если было на олимпиаде три тёзки, то один из них сидел в одной аудитории, а двое других – в другой, тогда один участник из этой тройки входит в число 105 человек из условия, а двое других – в число 158 участников. Поэтому вторая сумма больше первой как раз на число троек тезок, которое равно $158 - 105 = 53$. Но ровно по одному тёзке в обеих аудиториях было только у двоих участников из каждой тройки. Следовательно, таких участников было $2 \cdot 53 = 106$.

4. Каземир на листе бумаги нарисовал сложную конструкцию из отрезков и подписал точки, как показано на рисунке. Серёжа и Саша очень любят всякое абстрактное творчество и, обнаружив рисунок, начали играть в игру. На точку А положили фишку. Ходят по очереди. За один ход можно передвинуть фишку с точки, на которой она лежит, в одну из названных на рисунке точек, соединенную с нею отрезком. Этот отрезок, по которому двигается фишка, стирается. Таким образом, по тому же отрезку фишку передвинуть больше нельзя. Кто не может сделать ход, проигрывает. Начинает Сережа. Кто выигрывает при правильной игре обеих сторон?



Ответ: Саша.

Решение. Будем рассматривать этот рисунок как граф. Заметим, что игра должна закончиться в вершине А. Действительно, степень вершины А в начале была 4, в конце стала 0, поэтому изменилась на чётное число, из чего немедленно вытекает, что мы должны закончить именно в ней. Докажем, что к концу игры все рёбра были пройдены. Действительно, из А никаких рёбер остаться не должно. Степени всех вершин были чётны, закончили мы там же, где и начинали, поэтому степени всех вершин остались чётны. Ребра AB нет, поэтому степень вершины B равна 0, поэтому ребра BD нет, поэтому степень вершины D равна 0. Аналогично степени вершин E и F равны 0. Значит, рёбра из C никуда вести не могут, и её степень также равна 0. Так как всего рёбер чётное число, закончит игру второй игрок и выиграет Саша.

5. Натуральное число N имеет ровно 16 натуральных делителей, включая 1 и само число. Этих делителей пронумеровали по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{16} = N$. Найдите все возможные значения N, если $d_9 - d_8 = 2$, $d_{13} - d_4 = 245$.

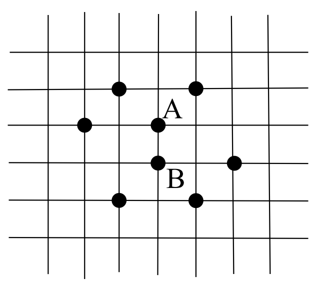
Ответ: 2024

Решение. Так как количество делителей числа четное, это число не является квадратом натурального числа. Если N нечетное, значит, любой его делитель нечетный, но тогда равенство $d_{13} - d_4 = 245$ невозможно, поэтому N – четное. Пусть N разложено по степеням простых чисел в виде $N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$. Поскольку у N всего 16 делителей, а количество делителей считается по формуле $\tau(N) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_s+1)$, то либо $N = 2^{15}$, что не подходит, либо каждый простой делитель входит в разложение N в степени 1, 3 или 7 (так как 16 делится только на числа вида 2^n). По условию $d_9 - d_8 = \frac{N}{d_8} - d_8 = 2$, откуда $N = a(a+2)$, где $a = d_8$, $d_{13} - d_4 = \frac{N}{d_4} - d_4 = 245$, откуда $N = d_4(d_4 + 245)$. Так как N четное, то a тоже четное, значит, N делится на 8 и среди его делителей есть 2, 4, 8. Так как $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4$, то $d_2 = 2$ и $4 \leq d_4 \leq 8$. При $d_4 = 4$ получим $N = 4 \cdot 249 = 2^2 \cdot 3 \cdot 83$ – не подходит. При $d_4 = 5$ получим $N = 5 \cdot 250 = 2 \cdot 5^4$ – не подходит. При $d_4 = 6$ получим $N = 6 \cdot 251 = 2 \cdot 3 \cdot 251$ – не подходит. При $d_4 = 7$ получим $N = 7 \cdot 252 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 3^2$ – не подходит. При $d_4 = 8$ получим $N = 8 \cdot 253 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 = 2024$ – подходит.

6. На клетчатом листе бумаги Марина отмечает каким-то образом в узлах сетки 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Юля считает количество R всех выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках (четырехугольники, отличающиеся наборами вершин, считаются различными) и среди них находит количество P четырехугольников, которые являются параллелограммами, и вычисляет отношение $\frac{P}{R}$. Могла ли Марина поставить точки так, что $\frac{P}{R} > \frac{1}{5}$? (Напомним, что параллелограммом называется четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно равны и параллельны.)

   Ответ: да (пример см. в решении).

   Решение. Четыре точки из восьми нарисованных можно выбрать $C_8^4 = 70$ способами. Подсчитаем, сколько из этих четверок не являются вершинами выпуклого четырехугольника. Такое возможно тогда и только тогда, когда одна из отмеченных точек лежит внутри треугольника, образованного тремя другими точками. Существует ровно 11 троек точек, образующих треугольник с точкой A внутри и столько же троек точек, образующих треугольник с точкой B внутри. Причем точки A и B не могут одновременно попасть внутрь какого-то из этих треугольников. Значит, выпуклых четырехугольников всего $R = 70 - 2 \cdot 11 = 70 - 22 = 48$. Найдем теперь P. На данном рисунке можно выбрать три группы по четыре отрезка и шесть групп по два отрезка так, что отрезки в каждой группе попарно равны и параллельны. Поэтому среди отрезков, соединяющих нарисованные точки, есть $3 \cdot C_4^2 + 6 = 24$ пары равных и параллельных отрезков. Каждая из таких пар образует параллелограмм, а один и тот же параллелограмм содержит две такие пары, поэтому $P = 24/2 = 12$, откуда $\frac{P}{R} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$.



Старшая лига

1. На доске выписали все натуральные числа подряд от 1 до 2025 включительно, в итоге получилось очень длинное число 123...20242025. Женя делит это число в произвольном месте на две части, а Тамара записывает на доску сумму чисел в этих частях (ведущие нули в начале записи второго числа при этом отбрасываются, например, если в качестве второго числа получилось 00101102...2025, то Тамара возьмёт просто 101102...2025). Процесс продолжается до тех пор пока на доске не останется только одна цифра, т.е. Жене нечего будет разрезать. Женя выигрывает, если получилась нечетная цифра. Тамара побеждает, если осталась четная цифра. Кто победит в итоге?

   Ответ: Женя.

   Решение. Число дает такой же остаток от деления на 9, что и сумма его цифр, поэтому после каждого шага Тамары получается число, сравнимое с предыдущим по модулю 9. Действительно, пусть до разрезания число имело вид $\overline{ab}$, где k – длина числа b после разрезания получили $a+b$, тогда $a+b \equiv_9 S(a+b) \equiv_9 S(a)+S(b) \equiv_9 S(a)\cdot 10^k + S(b) \equiv a\cdot 10^k + b = \overline{ab}$. Найдем остаток от деление исходного числа на 9: $123...20242025 \equiv_9 1+2+3+\ldots+2025 = 2025\cdot 1013 = 2051325 \equiv_9 2+5+1+3+2+5 = 18 \equiv 90$. Однако на любом шаге на доске остается натуральное число, а поскольку оно должно давать остаток 0 при делении на 9, оно равно 9.

2. Найдите все пары (m,n) натуральных чисел m и n, для которых разность НОК(m,n) и НОД(m,n) равна $\frac{mn}{6}$. (При неравных m и n пара (m,n) считается отличной от пары (n,m).)

   Ответ: $(5,30)$, $(30,5)$, $(10,15)$, $(15,10)$, $(4,12)$, $(12,4)$, $(3,6)$, $(6,3)$.

   Решение. Пусть НОД$(m,n)=d$, тогда существуют m' и n', что $m=m'd$, $n=n'd$, причем НОД(m',n')=1. Отсюда НОК$(m,n) = \frac{mn}{\text{НОД}(m,n)} = m'n'd$ и по условию получаем $m'n'd - d = \frac{m'n'd^2}{6} \Leftrightarrow 6m'n' - 6 = m'n'd \Leftrightarrow m'n'(6-d) = 6$. Поскольку m', n', d натуральные числа, то $6-d|6$ и $6-d>0$, откуда возможные варианты: $d=5$, $d=4$, $d=3$. При $d=5$ получим $m'n'=6$, у этого уравнения с точностью до перестановок два решения: $(1,6)$ и $(2,3)$. При $d=4$ получим $m'n'=3$, у этого уравнения два решения: $(1,3)$ и $(3,1)$. При $d=3$ получим $m'n'=2$, у этого уравнения два решения: $(1,2)$ и $(2,1)$.

3. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих членов, может быть в бесконечной последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ...? Ответ: два.

   Решение. Пусть $P(x) = Ax^2+Bx+C$, найдем возможное количество натуральных n, для которых $P(n) = P(n-1)+P(n-2) \Leftrightarrow An^2+Bn+C = An^2-2An+A+Bn-B+C+An^2-4An+4A+Bn-2B+C \Leftrightarrow An^2+n(B-6A)+5A-3B+C=0$. Данное квадратное уравнение имеет не более двух натуральных корней. Подберем пример коэффициентов, для которых получится уравнение $n^2-10n+24=0$ (с корнями 4 и 6). Берем $A=1$, $B=-4$, $C=7$.

4. Для треугольника ABC построены три вневписанные окружности с центрами I_b, I_c и I_a. Окружность с центром I_c касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB за точки A и B соответственно, точка касания этой окружности с прямой AC обозначена через D. Окружность с центром I_a касается стороны CB и продолжений сторон AC и AB за точки C и B соответственно, точка касания этой окружности с прямой AC обозначена через R. Окружность с центром I_b касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC за точки A и C соответственно, точка касания этой окружности с прямой AB обозначена через L, а с прямой BC через K. Точка пересечения прямых DL и KR обозначена через X. Докажите, что прямые BX и AC перпендикулярные.

   Решение. Пусть BH – высота $\triangle ABC$, $X' = (BH)\cap(DL)$. По теореме Менелая для $\triangle ABH$: $\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AD}{DH}\cdot\frac{HX'}{X'B} = 1$, откуда $\frac{HX'}{X'B} = \frac{AL}{BL}\cdot\frac{HD}{DA}$. Пусть p – полупериметр $\triangle ABC$, a, b, c – его стороны, лежащие напротив вершин A, B, C соответственно, тогда $\frac{HX'}{X'B} = \frac{p-c}{p}\cdot\frac{HD}{p-b}$. Пусть $X'' = (BH)\cap(RK)$. По теореме Менелая для $\triangle CBH$: $\frac{HR}{RC}\cdot\frac{CK}{KB}\cdot\frac{BX''}{X''H} = 1$, откуда $\frac{HX''}{X''B} = \frac{CK}{BK}\cdot\frac{HR}{RC} = \frac{p-a}{p}\cdot\frac{HR}{p-b}$. Достаточно теперь доказать $\frac{HX''}{X''B} = \frac{HX'}{X'B}$, поскольку из этого равенства мы получим, что $X''=X'$, что и влечет перпендикулярность BX и AC. $\frac{HX''}{X''B} = \frac{HX'}{X'B} \Leftrightarrow \frac{HR}{p-b}\cdot\frac{p-a}{p} = \frac{DH}{p-b}\cdot\frac{p-c}{p} \Leftrightarrow \frac{HR}{DH} = \frac{p-c}{p-a}$. В трапеции $DI_cI_aR : I_cD \parallel I_aR \parallel BH$, откуда $\frac{HR}{HD} = \frac{BI_a}{BI_c}$. Отметим, что $BI_b \perp I_aI_c$, так как I_aI_c – внешняя биссектриса $\triangle ABC$. Аналогично $I_aA \perp I_bI_c$, $I_cC \perp I_bI_a$. Из перпендикулярности получаем, что

$\angle I_cAI_a = \angle I_cCI_a = 90^\circ$, значит, I_cACI_a – вписанный четырехугольник. Пусть F – проекция точки I_b на AC. Из вписанности I_cACI_a следует, что $\triangle ACI_b \sim \triangle I_aI_cI_b$, тогда I_bF и I_bB – соответственные высоты в подобных треугольниках, значит, $\frac{I_aB}{I_cB} = \frac{AF}{FC} = \frac{p-c}{p-a}$, то есть $\frac{HR}{HD} = \frac{p-c}{p-a}$, что и требовалось доказать.

5. Назовем действительное число *специальным*, если в его десятичной записи присутствуют только цифры 0 и 7. Например, $77,0077$ и $\frac{700}{99} = 7,(07) = 7,0707\ldots07\ldots$ – специальные числа. Найдите наименьшее n, для которого 1 можно представить в виде суммы n специальных чисел (слагаемые в представлении могут быть равными).

   Ответ: 8.

   Решение.

   Назовем *почти специальным* такое число, в десятичной записи которого используются только цифры 0 и 1. Тогда задача эквивалентна нахождению количества n почти специальных чисел, необходимо для представления $\frac{1}{7} = 0,(142857)$ в виде суммы этих чисел. Заметим, что $\frac{1}{7}$ можно представить в виде суммы 8 почти специальных чисел: $0,(111111)$, $0,(011111)$, $0,(010111)$, $0,(010111)$, $0,(000111)$, $0,(000101)$, $0,(000101)$, $0,(000101)$, $0,(000100)$. Теперь, рассуждая от противного, предположим, что можно представить $\frac{1}{7}$ в виде суммы меньшего числа почти специальных чисел. Тогда при складывании этих чисел, поскольку их меньше 10 штук, не будет перехода через разряд и цифра на каждой позиции после запятой в десятичном представлении $\frac{1}{7}$ равна количеству 1 на этой же позиции в складываемых числах. Но если складывается меньше 8 почти специальных чисел, то после запятой нигде не получится 8. Противоречие.

6. Целой частью числа t называется наибольшее целое число, не превосходящее t, обозначается она через $[t]$ (например, $[-1,2] = -2$, $[1,8] = 1$). Вещественное число $x \geqslant 1$ таково, что все числа $[x^2]$, $[x^3]$ и $[x^4]$ — точные квадраты (т.е являются квадратами некоторых целых чисел). Обязательно ли $[x]$ — точный квадрат? (*Примечание.* Если вы десятиклассник, участвовавший в турнире в 2024 году в составе команды старшей лиги, и вам кажется, что такая задача уже была, то вам только кажется.)

   Ответ: да, обязательно.

   Решение.

   Пусть $[x^2]$,$[x^3]$,$[x^4]$ — точные квадраты. Пусть a — такое натуральное число, что $a^2 = [x^2]$, тогда $a^2 \leqslant x^2 < a^2 + 1$, Следовательно, $a^4 = (a^2)^2 \leqslant x^4 < (a^2+1)^2$. Тогда $a^4 \leqslant [x^4] \leqslant x^4 < (a^2+1)^2$. При этом $[x^4]$ точный квадрат. Значит $a^4 = [x^4]$ и $a^4 \leqslant x^4 < a^4 + 1$. Из этого неравенства следует, что $a \leq x < a + \frac{1}{4a^3}$, что проверяется от противного. Возведя в куб, получим

$$a^3 \leqslant x^3 < a^3 + \frac{3}{4a} + \frac{3}{16a^5} + \frac{1}{64a^9} \leqslant a^3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64} < a^3 + 1.$$

   Следовательно, $a^3 = [x^3]$, а, значит, a^3 и a — точные квадраты. Но в силу равенства $a \leq x < a + \frac{1}{4a^3}$ имеем $a = [x]$.