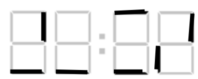
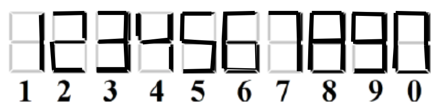
Младшая лига

1. У Алисы есть электронные часы, которые идут точно, но некоторые световые полоски табло перегорели, и теперь на часах видно

ровно через 1 ч и 8 мин Алиса увидела

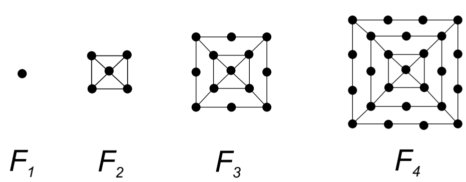


Какое время должно быть реально еще через 1 ч и 8 мин? Ответ укажите в виде числа целого записанного как $\overline{ab}$ для a часов и b минут (например, для времени 05 : 22 следует записать в поле ответа 522, а для 00 : 09 просто 9). Если по данной информации невозможно восстановить время на часах, то в ответе укажите -1. Ниже представлена форма корректной записи всех цифр.



Ответ: 110. (На первом рисунке должно быть 22:54, на втором 00:02.)

2. Фигурки F_1, F_2, F_3, F_4 представляют собой проволочные сетки с шариками, которые расположены, как показано на рисунке. Фигурка F_n для $n \geq 3$ получается из фигурки F_{n-1} по следующим правилам: F_{n-1} окружается новым квадратом, где на каждую сторону внутрь добавляется по одному шарику по сравнению с внешним квадратом в F_{n-1} (так в F_3 внутри каждой стороны внешнего квадрата по 1 шарику, в F_4 – по два и так далее). Количество шариков в решетке F_3 равно 13. Найдите количество шариков в решетке F_{20}.



Ответ: 761.

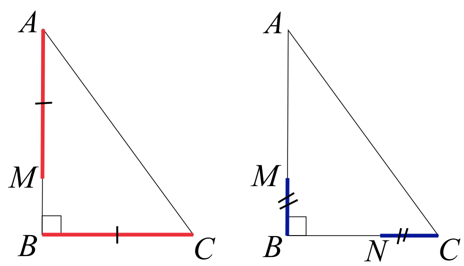
3. В копилке у Малыша нестандартные монеты: каждая монета стоит двузначное число рублей, причем в записи этого числа нет нуля. Среди монет могли быть и монеты одинакового достоинства. Разбив копилку и подсчитав сумму, Малыш насчитал 2970 рублей всего. Всю кучу монет он опрометчиво оставил на столе, когда ушел в гости к Карлсону. Вредная Фрекен Бок увидела монеты и решила заменить каждую монету на другую монету достоинство которой записано теми же цифрами, но в обратном порядке (например, так монету в 61 рубль она бы заменила на монету в 16 рублей, а 23 рубля на 32 рубля). К сожалению, куча монет Малыша была такова, что после манипуляций Фрекен Бок ему досталась наименьшая возможная сумма. Сколько рублей теперь у Малыша?

Ответ: 693.

4. Незнайка задумал пятизначное число n и забыл его. Запомнилось только, что если найти частное и остаток от деления n на 100 (обозначим их через q и r соответственно), то $q+r$ будет делиться нацело на 11. Знайка по этой информации выписал на листочек все возможные значения n и вручил его Незнайке. Сколько чисел выписано?

   Ответ: 8181.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B на катете AB отметили точку M так, что красные отрезки равны, а затем на катете BC точку N так, что синие отрезки равны. Найдите тупой угол между прямыми AN и CM.

   Ответ: 135.

6. Вася написал программу, которая выполняет следующие действия. Для любой тройки (a, b, c) введенных с клавиатуры целых чисел a, b, c программа выводит после завершения работы на экран число, которое однозначно вычисляется по a, b, c. Это число может быть разным для разных троек. Это число не зависит от порядка ввода a, b, c. Если ко всем числам в тройке прибавить одно и то же целое число n, то и к результату прибавится n (если для тройки 9, 10, 20 программа выдала y, то для тройки $8, 9, 19$ выдаст $y-1$). А если все числа в тройке умножить на одно и то же целое число k, то и результат умножится на k (если для тройки 1, 5, 35 программа выдала n, то для 2, 10, 70 получится $2n$). Сколько выдаст программа для тройки 100, 200, 300?

   Ответ: 200.

7. Саша назвал четыре числа $x_1 = 211$, $x_2 = 375$, $x_3 = 420$, $x_4 = 523$. Далее Саша решил не называть числа наугад, а пользоваться общим правилом. Теперь он n-ое число, начиная с пятого, определяет по предыдущим четырем следующим образом: $x_n = x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-3} - x_{n-4}$, например, $x_5 = x_4 - x_3 + x_2 - x_1$, а $x_6 = x_5 - x_4 + x_3 - x_2$. Даше понравились числа под номерами 531, 753 и 975 и она их записала в тетрадь. Найдите сумму записанных Дашей чисел.

   Ответ: 898.

8. В гирлянде, представляющей собой цепочку, находятся 998 лампочек, каждая из которых горит зеленым или красным цветом. Любую лампочку можно выключить отдельно. Вася выбирает любую лампочку от левого края и выключает, затем Вася выключает следующую за этой лампочку или лампочку, расположенную на гирлянде через одну от выключенной. (Например, если Вася выберет третью слева лампочку, то после нее он может выключить четвертую или пятую слева лампочку). Вася повторяет эту операцию несколько раз. В любой момент Вася может прекратить выключать лампочки. Какую наибольшую разность между числом выключенных

красных и зеленых лампочек (по модулю) может получить Вася при любом расположении лампочек в гирлянде?

Ответ: 250.

9. Найдите количество упорядоченных пар целых чисел (m, n), для которых $mn \geq 0$ и выполняется $m^3 + n^3 + 99mn = 33^3$. (При $m \neq n$ пары (m, n) и (n, m) считаются различными.)

Ответ: 35.

Старшая лига

1. Первые четыре члена арифметической прогрессии равны $a_1 = x + y$, $a_2 = x - y$, $a_3 = xy$ и $a_4 = \frac{x}{y}$ для некоторых значений x и y. Найдите $200 \cdot a_5$, где a_5 – пятый член этой прогрессии.

   Ответ: 615.

2. В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 8$, $BC = 9$. На стороне CB отмечена точка H так, что $BH = 6$. Точка E отмечена на стороне AD, причем $DE = 4$. Прямые EC и AH пересекаются в точке G, а F – основание перпендикуляра, проведенного из G к прямой AD. Найдите GF.

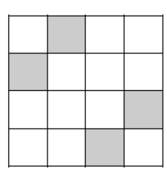
   Ответ: 20.

3. На острове Невезения учитель на уроке геометрии сформулировал и доказал для 11Ы новую теорему. К сожалению, большая часть класса не поняла доказательство (т.е. больше половины, возможно, и весь класс). После перемены один только Лев из класса разобрался в доказательстве. Известно, что в классе не более 30 и не менее 20 человек. Какое наибольшее целое значение может принимать процент так и не разобравшихся в этой теореме учеников?

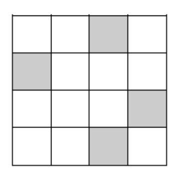
   Ответ: 96.

4. В некоторые клетки доски 4×4 Петя поставил по несколько фишек и передал доску Коле (на рисунке ниже показано количество фишек в каждой клетке). Четверку клеток доски назовем *правильной*, если в ней любые две клетки расположены в разных строках и разных столбцах (см. примеры ниже). Коля может за один ход забрать одинаковое количество фишек с каждой клетки какой-либо одной правильной четверки, где вообще были ещё фишки (например, если в клетках некоторой правильной четверки в какой-то момент оказалось 0, 2, 3 и 5 фишек, то с них можно забрать по одной или по две фишки). За какое минимальное число ходов Коля может убрать все фишки с доски?

4	5	6	0
5	0	4	6
5	5	3	2
1	5	2	7



Пример **правильной** четверки клеток



Пример **неправильной** четверки клеток

   Ответ: 5.

5. В комиссии 36 экспертов, каждый из которых оценил два фильма независимо целыми числами от 0 (совсем не понравился) до 100 (замечательно, стоит посмотреть) включительно. Нецелым числом оценить фильм нельзя. В результате изучения оценок фильмов оказалось, что для каждого фильма средние арифметические всех оценок экспертов за фильм, средние арифметические оценок экспертов, поставивших не менее 39, и средние арифметические оценок экспертов, поставивших менее 39, целые. Первому фильму ровно три эксперта поставили менее 39 каждый. Средняя оценка второго фильма равна $a + 1$, где a – максимально возможная средняя оценка первого фильма. Найдите при этом условии количество n экспертов, оценивших второй

фильм не менее чем на 39. В ответе укажите сумму всех найденных n (если подходит только одно значение n, его и стоит указать в качестве ответа).

Ответ: 69.

6. Известно, что $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, для которого $P(-1) = -2$, $P(2) = 10$, $P(3) = 30$. Найдите наименьшее возможное значение $|P(5)|$.

   Ответ: 14.

7. Пусть для любого натурального $k \leq 100000$ число a_k определяется по формуле

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{100000}.$$

   Найдите $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{100000}^2$.

   Ответ: 200000.

8. Известно, что $\frac{1}{2!17!} + \frac{1}{3!16!} + \frac{1}{4!15!} + \frac{1}{5!14!} + \frac{1}{6!13!} + \frac{1}{7!12!} + \frac{1}{8!11!} + \frac{1}{9!10!} = \frac{N}{1!18!}$. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{N}{100}$. (Напомним, что для натурального n через $n!$ обозначается произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

   Ответ: 137.

9. М.И. сообщила участникам прошлогоднего турнира страшно секретное слово из пяти букв - пароль, позволяющий угадать все ответы и пройти на нынешний турнир без отбора. Поскольку это слово действительно страшно секретное, участники прошлого турнира его зашифровали и теперь вместо слова нужно угадать последовательность пяти чисел, его кодирующих. Буквы в слове закодированы числами согласно таблице ниже.

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

   В результате получилась последовательность $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$. Из числа прошлогодних участников набралась команда «Хиханьки-хаханьки», вот только участники в ней хоть и знали кодировку, последовательность не угадали, поскольку с набором $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ М.И. сделала вот что. Посчитала

$$y_0 = 1 \cdot x_0 + 16 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4,$$

$$y_1 = 2 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4,$$

$$y_2 = 4 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4,$$

$$y_3 = 8 \cdot x_0 + 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 16 \cdot x_4,$$

$$y_4 = 16 \cdot x_0 + 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4.$$

   Затем в полученном новом наборе y_k разделила с остатком на 32 для всех k от 0 до 4 и получила в итоге остатки $(11, 27, 2, 16, 0)$ (из y_0 – 11, из y_1 – 27 и тд). Найдите исходный набор $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. В ответе укажите $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

   Ответ: 40.