Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Специализированный
учебно-научный центр

А. М. ГОЛЬДИН

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для учащихся 10–11 классов

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

А. М. Гольдин

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для учащихся 10–11 классов

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
Университетское издательство
2019

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я72-1
Г631

Печатается по решению ученого совета СУНЦ УрФУ
(Протокол Ученого совета СУНЦ УрФУ от 15.11.2019 № 1)

Рецензенты:
А. В. Осипов, зав. сектором топологии Отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, д-р физ.-мат. наук;
С. С. Кумков, старший научный сотрудник ИММ УрО РАН, канд. физ.-мат. наук

Гольдин, А. М.
Г631 Математика : учеб. пособие для учащихся 10–11 классов / А. М. Гольдин. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та ; Университетское изд-во, 2019. — 208 с.

ISBN 978-5-7996-2936-6 (Изд-во Урал. ун-та)
ISBN 978-5-9903496-7-4 (Университетское изд-во)

Пособие составлено в соответствии с программой учебного предмета «Математика» для математико-экономических классов СУНЦ УрФУ и содержит план изучения каждой темы с задачами для решения в классе и дома. К наиболее сложным задачам приведены указания.

Предназначено для учащихся 10–11-х классов с углубленным изучением математики.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я72-1

ISBN 978-5-7996-2936-6
ISBN 978-5-9903496-7-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие **9**

1 Элементы теории множеств **11**
Лекция 1 11
Лекция 2 12
Лекция 3 12
Лекция 4 12
Практика 1 12
Практика 2 14
Практика 3 16
Практика 4 17

2 Натуральные числа **18**
Лекция 1 18
Лекция 2 19
Лекция 3 19
Практика 1 20
Практика 2 21
Практика 3 22
Практика 4 24

3 Целые числа **24**
Лекция 1 25
Лекция 2 25
Лекция 3 28
Лекция 4 29
Практика 1 31
Практика 2 33
Практика 3 35
Практика 4 36

Практика 5 36

4 Комбинаторика и теория вероятностей **37**
Лекция 1 37
Лекция 2 37
Практика 1 39
Практика 2 40

5 Числовые функции **43**
Лекция 1 43
Лекция 2 43
Практика 1 44
Практика 2 46
Практика 3 47

6 Многочлены **48**
Лекция 1 49
Лекция 2 50
Практика 1 50
Практика 2 51

7 Комплексные числа **52**
Лекция 1 52
Практика 1 56
Практика 2 57

8 Рациональные уравнения и неравенства **57**
Лекции 1 и 2 57
Лекция 3 58
Лекция 4 59
Лекция 5 60
Лекция 6 60
Практика 1 61
Практика 2 63
Практика 3 64
Практика 4 66
Практика 5 66
Практика 6 68

9 Иррациональные уравнения и неравенства **68**
Лекция 1 68
Практика 1 69
Практика 2 70
Практика 3 71

10 Показательная и логарифмическая функции... **71**
Лекции 1–2 71
Лекция 3 72
Лекция 4 73
Практика 1 73
Практика 2 74
Практика 3 75
Практика 4 75
Практика 5 76
Практика 6 77
Практика 7 78
Практики 8–10 78

11 Тригонометрия **79**
Лекции 1–2 79
Лекция 3 81
Лекция 4 81
Лекция 5 82
Лекция 6 83
Практики 1–2 84
Практики 3–5 86
Практики 6–7 87
Практика 8 88
Практика 9 88
Практика 10 89

12 Пределы **90**
Лекция 1 90
Лекция 2 91
Практика 1 91
Практика 2 93

13 Производная **93**
Лекция 1 94
Лекция 2 94
Лекции 3-4 95
Практика 1 95
Практика 2 97
Практики 3—4 98

14 Интеграл **100**
Лекция 1 100
Лекция 2 100
Практика 1 100
Практика 2 101
Практика 3 103

15 Планиметрия **104**
Лекция 1 104
Лекция 2 105
Лекция 3 106
Лекция 4 109
Лекция 5 110
Практика 1 113
Практика 2 115
Практика 3 117
Практика 4 119
Практика 5 120
Практика 6 122
Практика 7 125
Практика 8 127

16 Преобразования плоскости **129**
Лекция 1 129
Лекция 2 130
Лекция 3 131
Практики 1—3 131

17 Параллельность **133**

Лекция 1 134
Лекция 2 135
Лекция 3 (1 час) 135
Лекция 4 136
Практика 1 136
Практика 2 138
Практика 3 140
Практика 4 142
Практика 5 143
Практика 6 145

18 Перпендикулярность 146
Лекция 1 147
Лекция 2 149
Практика 1 151
Практика 2 153
Практики 3—4 155

19 Векторы и координаты 161
Лекция 1 161
Лекция 2 162
Лекция 3 162
Практика 1 163
Практика 2 164
Практика 3 165
Практика 4 166
Практика 5 168

20 Движения пространства 169
Лекция 1 169

21 Многогранники и тела вращения 170
Лекция 1 170
Лекция 2 170
Лекция 3 171
Практика 1 171
Практика 2 172

Практика 3 173
Практика 4 173
Практика 5 174
Практика 6 175
Практика 7 177

22 Повторение планиметрии **178**
Практика 1 178
Практика 2 179
Практика 3 181

Календарный план изучения курса **183**

Вопросы для проведения промежуточной аттестации **187**
Коллоквиум (середина первого семестра 10 класса) 187
Зимняя сессия, 10 класс 189
Летняя сессия, 10 класс 193
Зимняя сессия, 11 класс 197

Критерии оценивания **202**
Текущая оценка контрольных и домашних работ 202
Отметка за полугодие 203
Оценивание устного ответа на экзамене по математике 203
Итоговая отметка за семестр 204
Итоговая отметка за учебный год 204

Предисловие

Настоящее пособие возникло из материалов, использовавшихся автором при преподавании математики в 10—11 математико-экономических классах Специализированного учебно-научного центра Уральского федерального университета (СУНЦ УрФУ, до 2011 года — СУНЦ УрГУ) в 2007—2019 годах. С 2015/16 учебного года программа по математике для этих классов была несколько модифицирована (в частности, исключена аксиоматика планиметрии и добавлен ряд планиметрических фактов, не изучающихся в основной школе). Программа никак не учитывает экономическую составляющую профиля класса; она рассчитана на 8 уроков в неделю (из них 4 часа лекций и 4 часа практических занятий, на которых класс делится на две подгруппы).

Подбор задач к каждой теме носит весьма условный характер: некоторые задачи (в зависимости от уровня класса и других обстоятельств) в какие-то учебные годы не решаются и заменяются другими. Тем не менее основной массив задач, некое «ядро», остается неизменным; именно эти задачи и включены в настоящее пособие. Если текст задачи начинается с символа *, это означает, что чуть ниже (после списка всех задач к данному занятию) имеется указание. К некоторым задачам приведены решения и ответы. Окончание доказательства теоремы отмечается знаком □.

Понятно, что включенные в пособие задачи не являются оригинальными, а «кочуют» из учебника в учебник. Большинство задач (и в гораздо меньшей степени — теоретический материал) позаимствованы из следующих источников:

1. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. — Москва : Мнемозина, 2014. — 344 с.

2. *Виленкин Н. Я.* Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. — Москва : Мнемозина, 2014. — 312 с.

3. Геометрия. 10–11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — Москва : Просвещение, 2013. — 255 с.

4. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии : учебное пособие / В. В. Прасолов. — Москва : МЦНМО, 2006. — 640 с.

5. *Расин В. В.* Лекции по алгебре : Элементы теории множеств. Натуральные и целые числа. Неравенства. Отображения множеств. Числовые функции : учебное пособие / В. В. Расин ; Специализированный учебно-научный центр Уральского государственного университета им. А. М. Горького. — Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, 2005. — 150 с.

6. *Расин В. В.* Лекции по геометрии : Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости : учебное пособие / В. В. Расин ; Специализированный учебно-научный центр Уральского государственного университета им. А. М. Горького. — Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, 2006. — 164 с.

7. Сборник задач по алгебре и началам анализа / Специализированный учебно-научный центр Уральского государственного университета им. А. М. Горького ; составители С. А. Ануфриенко, А. М. Гольдин, С. В. Гулика [и др.]. — Екатеринбург, 2008. — 219 с.

8. Сборник задач по геометрии / Специализированный учебно-научный центр Уральского государственного университета им. А. М. Горького ; составители С. А. Ануфриенко, А. М. Гольдин, С. В. Гулика [и др.]. — Екатеринбург, 2008. — 199 с.

9. *Шарыгин И. Ф.* Математика для поступающих в вузы : учебное пособие / И. Ф. Шарыгин. — Москва : Дрофа, 2006. — 479 с.

Автор выражает признательность учащимся математико-экономического класса СУНЦ УрФУ (выпуск 2019 года) И. Давыдову, А. Костенко и другим за замечания, способствовавшие улучшению настоящего пособия. Связаться с автором можно по электронной почте a@goldin.su.

Тема 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Лекция 1

1.1. Георг Кантор (1845–1918) родился и до 11 лет жил в Санкт-Петербурге, затем переехал в Германию. Имел 6 детей. Теория Кантора первоначально натолкнулась на резкую критику со стороны математиков-современников (Кронекер, Пуанкаре, Вейль, Брауэр). Так, Пуанкаре называл его идеи «тяжелой болезнью», поражающей математическую науку, а в публичных заявлениях и личных выпадах Кронекера мелькали иногда такие эпитеты, как «научный шарлатан», «отступник» и «развратитель молодёжи». Десятилетия спустя после смерти Кантора Витгенштейн с горечью отмечал, что математика «истоптана вдоль и поперёк разрушительными идиомами теории множеств», которую он отклоняет как «шутовство», «смехотворное» и «ошибочное». Резкой критике противостояли всемирная известность и одобрение. В 1904 году Лондонское королевское общество наградило Кантора медалью Сильвестра, высшей наградой, которую оно могло пожаловать. В своё время Давид Гильберт смело заявил: «Никто не изгонит нас из рая, который основал Кантор».

1.2. Понятие множества. Отношение принадлежности. Подмножества, отношение включения. Способы задания множеств: перечислением, указанием характеристического свойства. Операции пересечения, объединения, разности; дополнение подмножества. Диаграммы Эйлера — Венна (в качестве материала для иллюстрации удобно взять следующую задачу: A — множество всех четырехугольников, B — множество всех трапеций, C — множество всех параллелограммов, D — множество всех прямоугольников, E — множество всех квадратов. Какие из этих множеств являются подмножествами других?)

1.3. Свойства операций. Законы де Моргана.

1.4. Конечные множества. Формула включений и исключений (иллюстрируется на примере следующей задачи: в классе 30 учащихся, 16 из них занимаются музыкой, 17 увлекаются теннисом, а 10 занимаются и музыкой и теннисом. Есть ли в классе ученики, равнодушные и к музыке, и к теннису, и если есть, то сколько их?)

Лекция 2

1.5. Упорядоченные пары. Теорема: из $(a,b)=(c,d)$ следует $a=b$ и $c=d$.

1.6. Прямое произведение множеств. Примеры. $\mathbb{R}^2$.

1.7. Функция. Способы задания функции. Естественная область определения функции, заданной аналитически.

1.8. Отображение. Композиция отображений. Сюръекции, инъекции, биекции. Обратимые отображения.

Лекция 3

1.9. Булеан множества. Число элементов в булеане конечного множества.

1.10. Бесконечные множества. Равномощные множества. Равномощность бесконечного множества собственному подмножеству. Равномощность интервала и числовой прямой.

1.11. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества всех действительных чисел.

Лекция 4

1.12. Понятие отношения. Рефлексивность, симметричность, транзитивность, антисимметричность.

1.13. Отношения эквивалентности, их связь с разбиениями множеств.

1.14. Отношения порядка; упорядоченные множества. Линейный порядок. Наибольший и наименьший элементы; супремум и инфимум. Вполне упорядоченные множества.

Практика 1

В классе (10 номеров)

1. Известно, что $\{a,b\} \subseteq \{c\}$. Что можно сказать об элементах этих множеств?
2. Опишите все случаи (с доказательством), когда $A \times B = B \times A$.

Равны ли множества (№ **3, 4**)? Ответ обоснуйте.

3. $P = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x-2} < 1\right\}$, $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$.

4. $A = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \mid x \ \&\ 15 \mid x\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 20 \mid x \ \&\ 30 \mid x\}$.

5. Сколько элементов содержит множество людей, знающих определение множества?

6. *Найдите $\{2m+1 : m \in \mathbb{Z}\} \cap \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$.

7. Докажите, что $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) = C \setminus (A \cap B)$.

8. Докажите, что $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

9. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, английский и немецкий — 8, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

10. (Веселая задача Л. Кэрролла). В неравном бою из 100 пиратов 90 потеряли руку, 80 — ногу, 70 — глаз. Найдите минимальное количество «счастливчиков», потерявших одновременно и руку, и ногу, и глаз.

Дома (19 номеров)

11. Докажите, что $A \cap B \subseteq A \cup B$.

12. В каком случае $A \cup B = A \cap B$? Опишите все такие случаи.

Равны ли множества (№ **13–19**)? Ответ обоснуйте.

13. $A = \{\{1,2\},3\}$, $B = \{\{1\},\{2,3\}\}$.

14. $A = \{1,2\}$, $B = \{\{1,2\}\}$.

15. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$.

16. $A = \{2,1,3\}$, $B = \{3,1,2,1\}$.

17. $A = \{\varnothing,1\}$, $B = \{1\}$.

18. $A = \{\varnothing\}$, $B = \varnothing$.

19. $A = \{x \in \mathbb{Z} : 8 \mid x \ \&\ 6 \mid x\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 12 \mid x\}$.

20. Принадлежит ли $\varnothing$ множествам: $\{\varnothing,1\}, \varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$?

21. Пусть $A = [1;6]$, $B = [2;7]$, $C = [-1;3]$, $D = [2;5]$. Найдите множества: **а)** $A \cup B \cup C \cup D$; **б)** $A \cap B \cap C \cap D$; **в)** $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; **г)** $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; **д)** $A \cup B \cap C \cup D$.

Докажите равенства (№ **22–24**):

22. $A \cap (A \cup B) = A$; $A \cup (A \cap B) = A$.

23. $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

24. $\overline{A \backslash B} = \overline{A} \cup B$.

25. На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Указания, ответы

6. Если некоторое число x принадлежит сразу двум данным множествам, то существуют m и n такие, что $x = 2m+1 = 3n+2$. Выразите n через m и подумайте, по какому множеству «пробегает» n. *Ответ:* $\{6k+5 : k \in \mathbb{Z}\}$.

10. *Ответ:* 40.

Практика 2

В классе (7 номеров)

26. Докажите, что $A \cap \mathbb{Z} = \varnothing$, если $A = \left\{ \dfrac{2n^2+1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

27. Дано: $A_k = \left(\dfrac{k-1}{k}, \dfrac{2k+1}{k} \right)$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

28. Даны множества $A_k = \left[\dfrac{1}{k}, \dfrac{2k-1}{k} \right]$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

29. Дано: $A_k = \left[\dfrac{1-k}{2k}, \dfrac{2k-1}{3k} \right]$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

30. Найдите $\{4k+1 : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4k+3 : k \in \mathbb{Z}\}$.

31. Найдите множество всех $a \in \mathbb{R}$ таких, чтобы $A \cap B = \varnothing$, если $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3x + ay = 5\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a+6)x + 3y = 7\}$.

32. *Задайте множество в виде промежутка числовой прямой: $\left\{a \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R}) \left(a = \dfrac{x+1}{x^2+1}\right)\right\}$.

Дома (6 номеров)

33. Докажите, что $\left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

34. Даны множества $A_k = \left[\dfrac{2k-1}{2k}, 1\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

35. Дано: $A_k = \left(\dfrac{1-k}{k}, \dfrac{k+1}{3k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

36. Дано: $A_k = \left[\dfrac{1+k}{2k}, \dfrac{3+2k}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Найдите $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

37. Найдите множество всех действительных чисел a таких, чтобы $A \cap B = \varnothing$, если $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x + ay = 5\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (a+6)x + 2y = 7\}$.

38. Задайте множество в виде промежутка числовой прямой: $\{a \in \mathbb{R} : (\exists x \in \mathbb{R})(3x^2 + 2ax + a < 0)\}$.

Указания, ответы

32. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, тогда искомое множество — это множество значений данной функции, то есть множество таких a, при которых уравнение $a = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет корни.

Ответ: $a \in \left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Практика 3

В классе (10 номеров)

39. Запишите все подмножества множества $A = \{1, 2, \{3\}\}$.

40. Запишите все подмножества множества
$A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

41. Найдите $2^{A\times B}$, если $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$.

42. Являются ли взаимно обратными функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные формулами:

а) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad g(x) = \dfrac{x}{1-x}$;

б) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = (1-x)^3$;

в) $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$?

Докажите (№ **43, 44**), что для любого отображения f:

43. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

44. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

45. *Постройте пример, что $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

46. *Докажите, что если множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ равномощны, то множества A и B тоже равномощны.

Дома (6 номеров)

47. Запишите все подмножества множества $\{1, \{1\}\}$.

48. Запишите все подмножества множества $\{\varnothing, \{1\}, \{1, \{\varnothing\}\}\}$.

49. Являются ли взаимно обратными функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные формулами $f(x) = g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$?

50. Обратима ли функция $y = 2x - 1$? Если да, задайте обратную функцию формулой.

51. Докажите, что для любого отображения f выполняется равенство $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

52. *Постройте пример: множества A и B равномощны, а множества $A \setminus B$ и $B \setminus A$ не равномощны.

Указания, ответы

45. Рассмотрите, например, четную функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и подмножества области определения, «симметричные» относительно 0.

46. Требуется продолжить имеющуюся биекцию $A \setminus B \to B \setminus A$ на все множество A.

52. Подберите два счетных множества так, чтобы одна из разностей была конечна, а вторая бесконечна.

Практика 4

В классе (11 номеров)

53. Определите свойства и виды отношения $\star$. Если это отношение эквивалентности, постройте разбиение указанного множества:

а) на множестве людей $x \star y \Leftrightarrow x$ с y родились в один год;

б) на множестве людей $x \star y \Leftrightarrow x$ не старше y;

в) на множестве многоугольников $x \star y \Leftrightarrow x$ и y имеют одинаковое количество сторон;

г) на множестве прямых $x \star y \Leftrightarrow x$ пересекает y;

д) на множестве $\mathbb{Z}$ $x \star y \Leftrightarrow x \cdot y \leqslant 0$;

е) на множестве $\mathbb{N}$ $x \star y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$;

ж) на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $x \star y \Leftrightarrow x$ делит y;

з) на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $x \star y \Leftrightarrow x + y \in M$;

и) на множестве A^2, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $(x, y) \star (u, v) \Leftrightarrow xv = yu$;

к) на множестве $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $x \star y \Leftrightarrow x + y = 8$;

л) на множестве A^2, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $(x, y) \star (u, v) \Leftrightarrow x + v = y + u$.

Дома (11 номеров)

54. Определите свойства и виды отношения $\star$. Если это отношение эквивалентности, постройте разбиение указанного множества:

а) на множестве людей $x \star y \Leftrightarrow x$ дружит с y;

б) на множестве людей $x \star y \Leftrightarrow x$ является родителем y;

в) на множестве геометрических фигур $x \star y \Leftrightarrow x$ равна y;

г) на множестве многоугольников $x \star y \Leftrightarrow x$ и y имеют соответственно равные углы;

д) на множестве $\mathbb{Z}$ $x \star y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$;

е) на множестве $\mathbb{Z}$ $x \star y \Leftrightarrow x - y$ — нечетное число;

ж) на множестве $\mathbb{N}$ $x \star y \Leftrightarrow x + y$ — четное число;

з) на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $x \star y \Leftrightarrow x + y = 8$;

и) на множестве $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $x \star y \Leftrightarrow x - y \in M$;

к) на множестве $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $x \star y \Leftrightarrow x$ делит y;

л) на множестве $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $x \star y \Leftrightarrow x + y \in M$.

Тема 2
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Лекция 1

2.1. Аксиомы Пеано. Метод математической индукции. Джузеппе Пеано (1858–1932). $\mathbb{N}$ — это множество с отображением в себя («взятие следующего», удобно обозначать $x \to x'$), удовлетворяющее аксиомам: 1) существует 1, ни для кого не следующая; 2) если следующие равны, то и исходные числа равны (инъективность); 3) индукция.

Теорема. *Любое число либо равно 1, либо для него существует предыдущее (по второй аксиоме оно единственно).*

Доказательство. По индукции. $\square$

2.2. Пример метода математической индукции: сумма первых k нечетных чисел равна k^2. Геометрический пример: доказать, что для каждого $n \geqslant 4$ существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

Лекция 2

2.3. Сложение натуральных чисел определяется индукцией по второму слагаемому (шаг: $m+n' = (m+n)'$).

2.4. Ассоциативность по индукции: база, когда последнее число 1, затем шаг для последнего числа со штрихом легко получается.

2.5. Следствие: $n'+1 = n+1'$.

2.6. Коммутативность: сначала коммутирование с единицей по индукции (шаг следует из вышеприведенного следствия; база очевидна), затем коммутирование с n'.

2.7. Сократимость легко доказывается по индукции.

2.8. Определение разности. Существование разности $n-m$ или $m-n$ — читать самостоятельно (предложения 2.3 и 2.4 в пособии В. В. Расина).

2.9. Умножение определяется по индукции.

2.10. Коммутативность и ассоциативность умножения, сократимость, дистрибутивность — доказать самостоятельно.

2.11. Определение порядка (существует p такое, что...). Нетрудно видеть, что это линейный порядок (нестрогий).

2.12. Доказательство полной упорядоченности $\mathbb{N}$. Докажем от противного: пусть есть подмножество Q, не имеющее наименьшего элемента. По индукции докажем, что оно пусто, т. е. никакое натуральное число ему не принадлежит.

Лекция 3

2.13. Системы счисления. Понятие о системе счисления с данным основанием.

2.14. Перевод чисел из десятичной системы в систему с произвольным основанием и обратно. Двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, перевод из одной в другую.

Практика 1

В классе (7 номеров)

Докажите для всех $n \in \mathbb{N}$ (№ **55 — 59**):

55. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

56. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

57. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

58. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

59. $^*\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}, \quad n > 1$.

60. *Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

61. *Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ число $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

Дома (6 номеров)

Докажите ля всех $n \in \mathbb{N}$ (№ **62 — 65**):

62. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

63. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

64. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

65. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$.

66. *Докажите, что любое целое число рублей, большее 7, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 рублей.

67. Докажите, что для всех $n \in \mathbb{N}$ число $3^{3n+3} - 26n - 27$ делится на 169.

Указания, ответы

59. Для того, чтобы получить A_{k+1} из A_k, нужно отнять одно слагаемое «спереди» и прибавить два слагаемых «сзади».

60. Выразите A_{k+1} через A_k, после чего разложите разность кубов на множители.

61. При доказательстве индукционного шага прибавьте и вычтите $11 \cdot 12^{2k+1}$.

66. «Шагать» нужно с шагом 3, а не с шагом 1.

Практика 2

В классе (5 номеров)

68. Докажите, что $6^{2n-1} + 1$ кратно 7 для всех $n \in \mathbb{N}$.

69. *Докажите *неравенство Бернулли*[1]*:* $(1 + h)^n > 1 + nh$ для любых $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ и $h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0$.

70. *Докажите, что для любого натурального n число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n.

71. *Известно, что $x + 1/x$ является целым числом. Докажите, что при любом натуральном n число $x^n + 1/x^n$ — тоже целое.

72. *Докажите, что $4^n + 15n - 1$ кратно 9 для всех $n \in \mathbb{N}$.

Дома (4 номера)

73. Докажите, что $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ кратно 11 для всех $n \in \mathbb{N}$.

74. Докажите для всех $n \in \mathbb{N}$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ неравенство

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

75. *Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 2.$

---

[1] Якоб Бернулли (1655–1705) — профессор Базельского университета (Швейцария). Он был членом знаменитой семьи Бернулли (только в Петербургской Академии наук пятеро академиков были из этой семьи, а всего в науке и культуре известно более 30 ее представителей). В математике, кроме Якоба, известны также его младший брат Иоганн, внук Якоба Даниил и племянник Даниила Якоб II.

76. Докажите, что $7^{2n}-1$ кратно 48 для всех $n \in \mathbb{N}$.

Указания, ответы

69. Для реализации индукционного шага домножьте обе части верного неравенства $(1+h)^k > 1+kh$ на положительное число $1+h$.

70. Число, записанное 3^{k+1} единицами (обозначим его y), можно представить как три подряд записанных числа, каждое из которых записано 3^k единицами (обозначим каждое такое число буквой x). Теперь поделите y на x столбиком.

71. Доказательство основывается на тождестве

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)=\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{x^{n-1}}+x^{n-1}\right).$$

72. При реализации шага индукции прибавьте и вычтите выражение $45n-18$.

75. Сначала методом математической индукции докажите, что $n! > 2^n$ при $n > 3$; далее замените все слагаемые, начиная с четвертого, суммой геометрической прогрессии.

Практика 3

В классе (4 номера)

77. *На плоскости даны n прямых. Докажите, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так закрасить двумя красками[2], что никакие две соседние (то есть области, соприкасающиеся по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

78. *Из квадратной доски размера 1024×1024 вырезали произвольным образом клетку. Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки, состоящие из трех клеток каждый.

---

[2] В 1852 году южноафриканским математиком Ф. Гутри была сформулирована *гипотеза четырех красок:* любую карту на сфере можно раскрасить не более чем четырьмя красками. Эту гипотезу удалось доказать только в 1976 году американцам К. Аппелю и В. Хакену.

79. *Докажите, что для всех натуральных $n > 5$ квадратный торт можно разрезать на n квадратных (не обязательно равных между собой) кусков[3].

80. Докажите, что для всех натуральных n, больших 1, выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

Дома (3 номера)

81. *Несколько прямых делят плоскость на части. Каждая прямая «заштрихована» с одной стороны. Докажите, что у одной из частей все границы заштрихованы изнутри.

82. *Кусок бумаги можно рвать на четыре или шесть кусочков. Докажите, что по таким правилам его можно порвать на любое количество кусочков, большее девяти.

83. *На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый блин n прямолинейными разрезами?

Указания, ответы

77. При добавлении $(n+1)$-й прямой надо как-то перекрасить все или некоторые области.

78. Докажите данное утверждение для квадратной доски со стороной 2^k индукцией по k. Для осуществления индукционного шага разбейте доску со стороной 2^{k+1} на четыре доски со стороной 2^k каждая.

79. Шаг индукции легко осуществляется «с шагом 3». Остается доказать три утверждения для доказательства базы.

81. Шаг индукции: рассмотрим $(n+1)$-ю прямую. Возможны два случая: она не пересекает (в геометрическом смысле) «правильную» часть плоскости, либо делит ее на две части.

82. Сначала проверьте базу индукции для 9, 10 и 11 кусочков.

---

[3] Значительно более трудна задача о разрезании квадрата на попарно неравные квадраты; она обсуждается в знаменитой книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (глава 32, «Квадрирование квадрата»).

83. *Ответ:* $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$. Очевидно, что число частей будет максимальным, если любые две линии разреза пересекаются и никакие три линии не пересекаются в одной точке. Легко заметить, что при добавлении n-й линии разреза число кусков блина увеличивается на n (потому что новая линия имеет со всеми предыдущими $n-1$ точку пересечения). Найдите формулу для количества кусков методом неопределенных коэффициентов среди квадратных трехчленов.

Практика 4

В классе (7 номеров)

Найдите x, y (пользуясь напрямую алгоритмами перевода из одной системы счисления в другую, а не результатами предыдущих задач, и без помощи калькулятора, конечно; № **84–89**). Индексы обозначают основания систем счисления.

84. $111111110000_2 = x_{10}$, $1010001110101001_2 = y_{10}$.

85. $3927_{10} = x_2$, $2011_{10} = y_2$.

86. $111111110000_2 = x_{16}$, $1010001110101001_2 = y_{16}$.

87. $1c34_{16} = x_2$, $ddd_{16} = y_2$.

88. $3927_{10} = x_{16}$, $2011_{10} = y_{16}$.

89. $1c34_{16} = x_{10}$, $ddd_{16} = y_{10}$.

90. Составьте таблицу умножения в 7-ричной системе и умножьте 25 на 34 столбиком.

Дома (7 номеров)

Найдите x, y (№ **91–96**):

91. $10011010101_2 = x_{10}$, $10000110110101101_2 = y_{10}$.

92. $1848_{10} = x_2$, $1000_{10} = y_2$.

93. $10011010101_2 = x_{16}$, $10000110110101101_2 = y_{16}$.

94. $baba7_{16} = x_2$, $1000_{16} = y_2$.

95. $1848_{10} = x_{16}$, $1000_{10} = y_{16}$.

96. $baba7_{16} = x_{10}$, $1000_{16} = y_{10}$.

97. Составьте таблицу умножения в 6-ричной системе и умножьте 25 на 34 столбиком.

Тема 3
ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Лекция 1

3.1. Элементы общей алгебры: бинарная операция, универсальная алгебра, группоид, полугруппа, нейтральный и обратный элементы, группа, абелева группа. Алгебры с двумя операциями: кольцо, ассоциативное кольцо с единицей, поле. Примеры универсальных алгебр.

3.2. Построение множества целых чисел. Порядок, операции. Оно является кольцом.

Лекция 2

3.3. Деление с остатком: определение. Пример: $(-7):(-3)$.

Теорема о делении с остатком. *Для любого целого m и ненулевого целого n существуют такие единственные целые d и r, что $m = dn + r$ и $0 \leqslant r < |n|$.*

Доказательство. Сначала доказываем для натуральных чисел. Если $n \geqslant m$ — очевидно. Если нет — вычитаем до посинения. Дальше рассматриваем всякие случаи с разными знаками (сначала делим модули а потом, возможно, неполное частное изменяем на 1). Затем доказываем единственность: если $k_1n + r_1 = k_2n + r_2$, то $|n| \cdot |k_1 - k_2| = |r_1 - r_2|$. Если $k_1 \neq k_2$, то левая часть больше $|n|$, а правая меньше. Противоречие. □

3.4. Отношение делимости на $\mathbb{Z}$ (определение). Отношение «делить» является отношением (нестрогого) порядка на $\mathbb{N}$ (антисимметричность доказывается на основе простого наблюдения: на $\mathbb{N}$ если $a \mid b$, то $a \leqslant b$). Делимость на n линейной комбинации чисел, каждое из которых делится на n.

3.5. Определения НОД и НОК («наибольший» и «наименьшее» — по отношению делимости, а не естественного порядка). Заметим, что положительный наибольший общий делитель по отношению делимости является наибольшим и по отношению естественного порядка.

Взаимно простые числа (определение).

3.6. ***Теорема.*** *Если НОД существует, то он единственен.*

Доказательство. От противного: если бы их было два, каждый был бы больше или равен другому. $\square$

3.7. *Лемма Безу (Etienne Bezeout).* *Для любых натуральных m и n существует $d = (m, n)$ и, кроме того, существуют такие целые x и y (коэффициенты Безу), что $d = xm+yn$ (соотношение Безу).*

Доказательство. Положим $d = \min M$, где множество M определяется как $M = \{s \in \mathbb{N} : (\exists x)(\exists y)(s = xm + yn)\}$, и докажем, что $d = (m, n)$.

Проверим сначала, что d делит каждое из чисел m и n. Докажем более общий факт: d делит *любой* элемент M (очевидно, m и n принадлежат M). Пусть $s = xm + yn$, докажем, что $d \mid s$. Разделим s на d с остатком, пусть $s = kd+r$, тогда $r = s-kd$. Но s и d принадлежат M и поэтому являются линейными комбинациями m и n, а, значит, r тоже является линейной комбинацией m и n. Следовательно, $r \in M$. Но по определению деления с остатком $r < d$, что противоречит выбору d как наименьшего элемента M. Поэтому $r = 0$.

Осталось доказать, что d делится на любой другой общий делитель m и n. Это очевидно из того, что $d = xm + yn$. $\square$

3.8. *Следствие (критерий взаимной простоты).* *Числа m и n взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие x и y, что $xm + yn = 1$.*

Доказательство. Необходимость прямо следует из леммы Безу. Достаточность доказывается от противного: если какое-нибудь d делит m и n, то оно делит 1, а поэтому равно 1. $\square$

3.9. *Теорема.* *Операция взятия наибольшего общего делителя коммутативна и ассоциативна.*

Доказательство. Коммутативность очевидна (по определению). Докажем ассоциативность: $((m, n), k) = (m, (n, k))$.

Пусть $d = ((m, n), k)$. Тогда d делит все три числа m, n и k и поэтому делит m и (n, k), то есть d — их общий делитель. Пусть теперь d' — любой общий делитель чисел m и (n, k). Тогда d' делит все три числа и, следовательно, делит (m, n) и k, а поэтому делит и d. $\square$

3.10. *Теорема.* *Операция взятия наибольшего общего делителя дистрибутивна: $(km, kn) = |k| \cdot (m, n)$ при $k \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $d = (m, n)$, докажем, что тогда $|k|d = (km, kn)$. В самом деле, так как d делит оба числа m и n, то, очевидно, $|k|d$ делит оба числа km и kn. Докажем теперь, что $|k|d$ делится на любой другой общий делитель чисел km и kn. По лемме Безу существуют x и y такие, что $d = xm + yn$, тогда $|k|d = |k|xm + |k|yn$. Любой общий делитель чисел km и kn делит правую часть этого равенства, а поэтому делит и левую. □

3.11. ***Теорема о делимости числа на произведение своих взаимно простых делителей.*** *Если* $(m, n) = 1$, $m \mid s$ *и* $n \mid s$, *то* $mn \mid s$.

Доказательство. По лемме Безу существуют x, y такие, что $xm + yn = 1$. Домножая это равенство на s, получим $xms + yns = s$. По условию $s = k_1 m = k_2 n$, отсюда $xmk_2 n + ynk_1 m = s$, то есть $s = mn(xk_2 + yk_1)$. □

3.12. ***Теорема о делимости произведения.*** *Если* $n \mid ab$ *и при этом* $(a, n) = 1$, *то* $n \mid b$.

Доказательство. По лемме Безу существуют такие x, y, что $xa + yn = 1$. Домножая обе части этого равенства на b, получим $xab + ynb = b$. Левая часть по условию делится на n, поэтому правая тоже делится на n. □

3.13. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел (была доказана еще Евклидом в его «Началах»).

3.14. Каноническое разложение натурального числа, большего 1. Существование очевидно; единственность доказывается от противного (записываем два разложения на простые возможно повторяющиеся множители и постепенно сокращаем).

3.15. Алгоритм Евклида. Пусть $n > m$ и мы ищем (m, n). Будем выполнять деление с остатком; поскольку остатки монотонно убывают, процесс когда-нибудь закончится (то есть при последнем делении остаток станет равным 0). Получим цепочку равенств:

$$\begin{array}{rcl} n &=& k_1 m + r_1; \\ m &=& k_2 r_1 + r_2; \\ r_1 &=& k_3 r_2 + r_3; \\ & \dots & \\ r_{n-2} &=& k_n r_{n-1} + r_n; \\ r_{n-1} &=& k_{n+1} r_n. \end{array}$$

Докажем, что $(m, n) = r_n$ (последнему ненулевому остатку). Сначала докажем, что r_n — общий делитель m и n. Поскольку r_n делит правую часть последнего равенства, он делит и его левую часть, то есть r_{n-1}. Поэтому он делит правую часть предпоследнего равенства, а, значит, делит и r_{n-2}. Поднимаясь таким образом по цепочке равенств, получим, что r_n делит m и n.

Пусть теперь d — какой-нибудь общий делитель m и n. Спускаясь по цепочке равенств вниз, последовательно получаем, что он делит $r_1, r_2, \ldots, r_n$, что и требовалось доказать.

Пример: $(5967, 689) = 13$. Разложение на простые множители — очень долгий алгоритм, а деление с остатком — очень быстрый.

Лекция 3

3.16. Сравнения. Два эквивалентных определения сравнимости чисел по модулю n (одинаковые остатки либо делимость разности на n).

3.17. Свойства сравнений: рефлексивность, симметричность, транзитивность, возможность сложения и умножения сравнений, домножения всего (в том числе и модуля!) на натуральный множитель, сокращения (только сравниваемых чисел!) на число, взаимно простое с модулем, сокращения всего (в том числе и модуля) на общий множитель.

3.18. Определение вычета по модулю n (как класса эквивалентности). Полная система вычетов, приведенная система вычетов. Определения (необходимость доказательства корректности!) и примеры действий с вычетами. Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$. Примеры делителей нуля (например, 3 и 4 по модулю 12 при умножении дают 0). Кольцо вычетов при простом n (без доказательства).

3.19. Функция Эйлера: определение ($\varphi(1) = 1$, при других n — количество чисел, меньших n и взаимно простых с ним), примеры. Мультипликативность функции Эйлера для взаимно простых множителей (без доказательства), примеры.

3.20. ***Теорема Эйлера.*** *Если* $(x, n) = 1$, *то* $x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Доказательство. Поскольку у нас имеется $\varphi(n)$ чисел, меньших n и взаимно простых с ним, мы можем обозначить их $k_1, k_2, \ldots k_{\varphi(n)}$. Рассмотрим остатки от деления xk_i на n; обозначим их r_i.

Докажем, что все r_i различны и взаимно просты с n. В самом деле, если бы какие-нибудь r_i и r_j совпали, то $0 = r_i - r_j = (xk_i - an) - (xk_j - bn)$ при каких-то a и b, откуда следует, что

$x(k_i - k_j)$ делится на n. Но этого быть не может, так как в данном произведении x взаимно просто с n, а скобка меньше n. Далее, если какое-нибудь r_i было бы не взаимно просто с n и, например, имело бы с ним общий делитель c, то (по определению r_i) произведение xk_i также делилось бы на c, чего быть не может в силу того, что оба множителя этого произведения взаимно просты с n.

Таким образом, множества $\{k_i\}$ и $\{r_i\}$ совпадают, поэтому $\prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)} k_i = \prod\limits_{i=1}^{\varphi(n)} r_i$. Рассмотрим теперь равенства $xk_i \equiv r_i \pmod{n}$ и перемножим их все почленно, получим:

$$x^{\varphi(n)} \prod_{i=1}^{\varphi(n)} k_i \equiv \prod_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \pmod{n}.$$

Сокращая на равные произведения (они, очевидно, взаимно просты с модулем, поэтому сокращать можно), получим требуемое. □

3.21. ***Следствие (малая теорема Ферма).*** *Для x, взаимно простого с простым числом p, выполняется* $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Очевидно, так как для простого p $\varphi(p) = p - 1$. □

3.22. Великая теорема Ферма. Пьер Ферма (1601–1665), советник парламента в Тулузе (Франция), по профессии юрист. Теорема сформулирована им в 1637 году, доказана в 1994 году профессором Принстонского университета (США) Эндрю Уайлсом (Andrew Wiles). Доказательство опубликовано в 1995 году и содержит 129 страниц.

Лекция 4

3.23. Линейные диофантовы уравнения. Рассмотрим уравнение $ax + by = c$. Очевидно, что наибольший общий делитель чисел a и b должен делить c (в противном случае уравнение решений не имеет), поэтому все уравнение можно сократить на этот наибольший общий делитель. Таким образом, можно рассматривать лишь случай, когда a и b взаимно просты.

Итак, пусть a и b взаимно просты. Тогда легко доказать, что если (x_0, y_0) — частное решение, то общее решение ищется как $x = x_0 + tb$, $y = y_0 - ta$ $(t \in \mathbb{Z})$. Других решений нет. В самом деле, если (x, y) — любое решение уравнения, то вычитая почленно два верных равенства, получим: $a(x - x_0) = -b(y - y_0)$. Но поскольку a и b взаимно просты, то a делит $x - x_0$. Дальнейшее очевидно.

Поиск частного решения проиллюстрируем на примере диофантова уравнения $7x + 19y = 13$ (хотя в большинстве практических случаев оно находится подбором). Выразим переменную с наименьшим по модулю коэффициентом (в нашем случае это x) через другую переменную и выделим целую часть:

$$x = \frac{13 - 19y}{7} = 2 - 2y - \frac{1 + 5y}{7}.$$

Очевидно, последняя дробь — целое число; обозначая ее k_1, получим:

$$k_1 = \frac{1 + 5y}{7}; \;\; 7k_1 = 1 + 5y; \;\; y = \frac{7k_1 - 1}{5} = k_1 + \frac{2k_1 - 1}{5}.$$

Продолжая этот процесс далее (до тех пор, пока коэффициент перед переменной в числителе не станет равным 1, а это непремено произойдет, так как коэффициенты монотонно убывают), получим:

$$k_2 = \frac{2k_1 - 1}{5}; \;\; 5k_2 = 2k_1 - 1; \;\; k_1 = \frac{5k_2 + 1}{2} = 2k_2 + \frac{k_2 + 1}{2}.$$

Коэффициент перед k_2 в числителе последней дроби равен 1 — это означает, что процесс закончился. Обозначим последнюю дробь t, тогда, подставляя значения переменных в обратном направлении, получим $t = \dfrac{k_2 + 1}{2}$, $k_2 = 2t - 1$, $k_1 = 5t - 2$, $y = 7t - 3$, $x = 10 - 19t$. Таким образом, мы нашли не только частное решение $(10, -3)$, но и общее: $\{(10 - 19t, 7t - 3) : t \in \mathbb{Z}\}$.

3.24. Сравнения первой степени. Рассмотрим сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$. Если a взаимно просто с n, то из частного решения x_0 общее решение получается по формуле $x_0 + tn$, $t \in \mathbb{Z}$ (доказательство очевидно), причем других решений нет. В самом деле, если x — произвольное решение, то, вычитая почленно соответствующие сравнения для x и x_0, получим, что n делит $x - x_0$, то есть $x = x_0 + tn$.

Если $(a, n) = d > 1$, и у сравнения есть решение, то $d \mid b$. В самом деле, если x — какое-то решение, то $b = ax - tn$, но поскольку d делит правую часть, то оно делит и левую. Таким образом, если a не взаимно просто с n, то все сравнение можно сократить на их наибольший общий делитель (включая модуль, конечно). Если же число b на этот наибольший общий делитель не делится, то у сравнения решений нет.

Осталось понять, как же найти частное решение сравнения с взаимно простыми a и n. Специального метода для решения этой задачи не требуется, так как, очевидно, наше сравнение равносильно (в смысле совпадения множества решений x) диофантовому уравнению $ax + yn = b$.

Практика 1

В классе (14 номеров)

98. Пусть $a \in \mathbb{Z}$ и $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

99. Пусть $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если $5k + 2l + 8m$ делится на 13, то $8k + 11l + 5m$ также делится на 13.

Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел (№ **100 — 103**):

100. 49896 и 26460. **101.** 525 и 231.

102. 527 и 136. **103.** 4913 и 2057.

104. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

105. Докажите, что никакое четное число, не кратное четырем, нельзя представить как разность квадратов двух натуральных чисел.

106. Верно ли, что три произвольных попарно различных рациональных числа всегда могут рассматриваться как члены некоторой арифметической прогрессии?

Пусть n — произвольное натуральное число. Какие могут получиться остатки от деления (№ **107 — 109**):

107. n на p ($p \in \mathbb{N}$). **108.** n^2 на 3. **109.** n^3 на 7.

110. Докажите, что квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

111. Докажите, что сумма трех трехзначных чисел $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}$ делится на 3 и на 37.

Дома (13 номеров)

112. Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$ и $2+a$, $35-b$ делятся на 11. Докажите, что $a+b$ делится на 11.

113. Пусть $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если $3k+7l+10m$ делится на 11, то $2k+l+3m$ также делится на 11.

Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел (№ **114 — 117**):

114. 48000 и 171. **115.** 15435 и 152.

116. 624 и 51. **117.** 7115 и 120.

118. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

119. *Докажите, что если уравнение с целыми коэффициентами имеет целый корень, то свободный член уравнения делится на этот корень.

Пусть n — произвольное натуральное число. Какие могут получиться остатки от деления (№ **120 — 121**):

120. n^2 на 4. **121.** n^3 на 9.

122. *Пусть натуральные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x^2+y^2=z^2$. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.

123. Докажите, что трехзначное число $\overline{aaa}$ делится на 37.

124. *Докажите, что число $n^2+5n+16$ ни при каком целом n не делится на 169.

Указания, решения, ответы

119. Перенесите свободный член в правую часть, а в левой части вынесите за скобки x.

122. Используйте тот факт, что точные квадраты при делении на 3 могут давать остатки лишь 0 или 1.

124. Простым перебором остатков от деления на 13 (удобнее взять систему остатков от -6 до 6) получите, что данный трехчлен делится на 13 тогда и только тогда, когда n при делении на 13 дает остаток r (найдите это r); таким образом, $n = 13k + r$. Выразите теперь квадратный трехчлен через k и убедитесь, что он не делится на 169.

Практика 2

В классе (8 номеров)

125. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что $a+b$ и a также взаимно простые.

126. Докажите, что если p — простое число и $p > 3$, то $p^2 - 1$ делится на 24.

127. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то $p^2 - q^2$ делится на 24.

128. Докажите, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом целого числа.

129. Известно, что k является квадратом целого числа. Докажите, что последняя цифра k равна 6 тогда и только тогда, когда предпоследняя цифра k — нечетное число.

130. Найдите наибольший общий делитель $2^{63} - 1$ и $2^{91} - 1$.

131. Верно ли, что если число делится на 81, то сумма его цифр также делится на 81? Верно ли обратное утверждение?

132. p, $p + 10$, $p + 14$ — простые числа. Найдите p.

Дома (5 номеров)

133. Может ли сумма квадратов трех нечетных чисел быть квадратом целого числа?

134. *Известно, что дробь $(a+b)/(a-b)$ сократима (a, b — целые числа, $b \neq 0$, $a \neq b$). Сократима ли дробь a/b?

135. *Найдите наибольший общий делитель $2^{19} - 1$ и $2^{86} - 1$.

136. *Докажите, что произведение n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

137. p, $2p + 1$, $4p + 1$ — простые числа. Найдите p.

134. *Ответ:* нет (найдите пример).

135. *Ответ:* 1.

136. Для доказательства того, что $(k+1)(k+2)\ldots(k+n)$ делится на $n!$, достаточно доказать, что $\dfrac{(k+n)!}{k!\,n!}$ — целое число. Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. $[x+y] \geqslant [x]+[y]$ *(квадратными скобками обозначена, как обычно, целая часть числа).*

Доказательство. Пусть $x = [x] + \alpha$, $y = [y] + \beta$, причем α, $\beta \in [0; 1)$. Тогда, очевидно, $x + y = [x] + [y] + (\alpha + \beta)$, причем $\alpha+\beta \geqslant 0$. Таким образом, $[x]+[y]$ не превосходит $x+y$. Но целая часть числа $x + y$ — это *наибольшее* целое, не превосходящее $x+y$, поэтому $[x + y] \geqslant [x] + [y]$. □

Лемма 2. *Количество элементов множества* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *кратных числу* p, *равно* $[n/p]$.

Доказательство. Собственно, этот факт почти очевиден. На отрезке натурального ряда, состоящего из p подряд идущих чисел, встречается в точности одно число, кратное p. Если такие отрезки брать последовательно, начиная с 1, то на каждом отрезке число, кратное p, будет последним. Поэтому общее количество чисел, кратных p, будет равно количеству полных отрезков длины p, умещающихся на отрезке $\{1, 2, \ldots, n\}$, а их, естественно, $[n/p]$. □

Приступим, наконец, к решению нашей задачи. Разложим числитель и знаменатель в каноническое разложение и рассмотрим некоторый простой множитель p. Докажем, что в числитель он входит с равным или более высоким показателем, чем в знаменатель, что, собственно, нам и требуется. Показатель, с которым множитель p входит в разложение $(k + n)!$, по лемме 2 равен

$$\left[\frac{k+n}{p}\right] + \left[\frac{k+n}{p^2}\right] + \left[\frac{k+n}{p^3}\right] + \ldots$$

Но по лемме 1 значение этого выражения больше или равно, чем

$$\left(\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \ldots\right) + \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots\right).$$

Остается заметить, что последнее — это и есть показатель степени, с которым p входит в каноническое разложение знаменателя.

Практика 3

В классе (9 номеров)

138. Докажите, что числа $2k+1$ и $9k+4$ взаимно простые при любых целых значениях k.

139. Докажите, что если каноническое представление числа n имеет вид $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, то

$$\varphi(n) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(p_m^{k_m} - p_m^{k_m-1}\right).$$

140. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

Сравнимы ли числа (№ **141 — 143**):

141. 2142 и 47 по модулю 3, 5, 7?

142. $2^8 3^9 7^{12}$ и $2^9 3^7 8^{15}$ по модулю 88?

143. $17^{19} 13^8 7^{21}$ и $3^{132}(11^5+1)$ по модулю 11?

144. Докажите, что число $2^{41}-5$ является составным.

145. Делится ли число $3^{132}-1$ на 10?

146. Делится ли число $2^{50}+1$ на 125?

Дома (7 номеров)

147. *Докажите, что в трехзначном числе, делящемся на 37, всегда можно переставить цифры так, что новое число также будет делится на 37.

148. Найдите $\varphi(5040)$, $\varphi(1294700)$.

Сравнимы ли числа (№ **149 — 150**):

149. 512 и 11^7 по модулю 7?

150. $2^{32} 7^{16} 9^8$ и $3^{71} 11^{68}$ по модулю 5?

151. *Докажите, что число $19 \cdot 8^n + 17$ является составным.

152. Делится ли число $7^{162}-4$ на 5?

153. Делится ли число $2^{48}-1$ на 105?

Указания, решения, ответы

147. Пусть число $x = 100a + 10b + c$ делится на 37; докажите, что тогда число $y = 100c + 10a + b$ также делится на 37. Для этого рассмотрите выражение $10y - x$.

151. *Указание.* При четном n данное число делится на 3, при $n = 4k + 1$ оно делится на 13, а при $n = 4k + 3$ оно делится на 5.

Практика 4

В классе (4 номера)

154. Найдите остаток от деления 171^{2147} на 52.

155. Известно, что $n, m \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $n^2 + m^2$ делится на 3, то оно делится и на 9.

156. Найдите остаток от деления $1989 \cdot 1990 \cdot 1991 + 1992^2$ на 7.

157. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

Дома (3 номера)

158. Найдите остаток от деления 126^{1020} на 138.

159. Найдите остаток от деления 9^{100} на 8.

160. *Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

Указания, решения, ответы

160. *Указание.* $43 \equiv -23 \pmod{66}$.

Практика 5

В классе (9 номеров)

Решите уравнения (№ **161 — 164**):

161. $x^2 - y^2 = 91$. **162.** $13x - 7y = 6$. **163.** $3x + 5y = 7$.

164. $3x - 12y = 7$.

Решите сравнения (№ **165 — 168**):

165. $24x \equiv 6 \pmod{3}$. **166.** $5x \equiv 4 \pmod{17}$.

167. $7x \equiv 2 \pmod{11}$. **168.** $58x \equiv 87 \pmod{47}$.

169. Найдите две последние цифры числа 3^{1993}.

Дома (8 номеров)

Решите уравнения (№ **170 — 173**):

170. $x^2 - y^2 = 1998$. **171.** $27x - 9y = 15$. **172.** $1990x - 173y = 11$.
173. $21x + 48y = 6$.

Решите сравнения (№ **174 — 177**):

174. $34x \equiv 6 \pmod{10}$. **175.** $7x \equiv 5 \pmod{19}$.
176. $17x \equiv 3 \pmod{10}$. **177.** $111x \equiv 75 \pmod{322}$.

Тема 4

КОМБИНАТОРИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекция 1

4.1. Предмет комбинаторики. Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения. Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества.

4.2. Факториал. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений.

4.3. Бином Ньютона для натурального n, комбинаторное доказательство. Свойства биномиальных коэффициентов: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$; $C_n^k = C_n^{n-k}$. Треугольник Паскаля.

Лекция 2

4.4. Вероятностное пространство: современные определения (общее и дискретное).

Дано непустое множество (или *пространство*) элементарных событий (исходов) Ω и отображение $P\colon 2^\Omega \to [0, 1]$, удовлетворяющее следующим аксиомам (*аксиомы Колмогорова*): 1) $P(\Omega) = 1$; 2) аддитивность. Любое[1] подмножество Ω называется *событием*;

[1] На самом деле может быть и не совсем любое, а лишь подмножество, принадлежащее некоторому семейству подмножеств, называемому *сигма-алгеброй*. Поскольку множество всех подмножеств (булеан) Ω является сигма-алгеброй,

функция P — *вероятностной мерой*, значение $P(A)$ — *вероятностью* события A.

Пустое множество называется *невозможным* событием, всё Ω — *достоверным* событием, дополнение — *противоположным* событием, непересекающиеся события называются *несовместными*. События, для которых $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, называются *независимыми*. Пересечение событий называется их *произведением* (одновременным наступлением), объединение — *суммой*.

Конечно-дискретное определение применяется, если $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, тогда вероятностную меру удобно определять как $P\colon \Omega \to [0,1]$ с единственной аксиомой $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. Вероятность любого события определяется тогда как сумма вероятностей входящих в него элементарных событий.

4.5. Классическое определение вероятности. Статистическая частота наступления события. Геометрическая вероятность, пример с бросанием точки в квадрат.

4.6. Вероятность суммы событий (формула включений и исключений; доказать для двух событий). Вероятность противоположного события.

4.7. Независимость событий. Пример с попаданием в мишень двух стрелков: два способа решения (по формуле включений и исключений или путем перехода к противоположным событиям:

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}).$$

4.8. Условная вероятность. Пусть $P(A|X)$ — вероятность наступления события A, если событие X точно наступило. Понятно, что нам необходимо как-то переопределить вероятностную меру на множестве $X \subset \Omega$, чтобы аксиомы продолжали выполняться. Очевидно, что для этого надо «старую» вероятность события $A \cap X$ (в пространстве Ω) поделить на вероятность события X в пространстве Ω, т. е. положить $P(A|X) = \dfrac{P(A \cap X)}{P(X)}$. Отсюда получаем формулу условной вероятности: вероятность одновременного наступления событий A и X равна произведению вероятности X на вероятность A при условии X.

мы для простоты изложения рассматриваем частный случай, когда вероятностная мера определяется на всем булеане.

Пример: в физмате 20 мальчиков и 5 девочек, а в гумклассе — 20 девочек и 5 мальчиков. Вася Пупкин сначала кидает кубик для выбора класса (если выпадает 1 — идет в физмат, а если выпадает другая цифра — в гум), а потом наугад выбирает человека в классе. Какова вероятность того, что Вася Пупкин выберет гуманитарную девочку?

4.9. Формула полной вероятности (без доказательства).

Если $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$, то $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(X_i) \cdot P(A|X_i)$.

Пример: Аня Пупкина с вероятностью p_i гуляет с i-м мальчиком, а с вероятностью q_i выходит за него замуж (при условии, что она с ним гуляет), при этом Аня гуляет только с одним мальчиком. Какова вероятность, что Аня выйдет замуж?

Практика 1

В классе (9 номеров)

178. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может встречаться в записи числа несколько раз?

179. *Сколькими способами можно посадить за круглый стол 7 мужчин и 7 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

180. *Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из них?

181. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая цифра может повторяться несколько раз?

182. *Каких чисел от 1 до 10^7 больше: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

183. *Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку?

184. *Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове «парабола»?

185. Раскройте скобки: $(2a - b)^5$.

186. Раскройте скобки: $(a^3b - ab^2)^6$.

Дома (7 номеров)

187. *Сколькими способами можно переставить буквы в слове «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

188. *В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть лицом по ходу движения, а трое — спиной. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

189. *Имеется 14 пар различных конфет. Найдите количество различных (в том числе и пустого) подарков, которые можно из них составить (учитывается только состав каждого подарка, порядок конфет в нем не важен).

190. Сколькими способами можно посадить рядом трех англичан, трех французов и трех турок так, чтобы никакие три соотечественника не сидели рядом?

191. *Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

192. Раскройте скобки: $(x - 3y)^4$.

193. Раскройте скобки: $(2x^3y^2 - x^2y)^5$.

Указания, ответы

179. $2 \cdot (7!)^2$ или $(7!)^2/7$. **180.** 3^6. **182.** Первых. **183.** $\frac{52!}{(4!)^{13}}$.
184. $\frac{8!}{3!}$. **187.** 144. **188.** $3 \cdot (5!)^2$. **189.** 3^{14}. **191.** $\frac{3 \cdot 32!}{(16!)^2}$.

Практика 2

В классе (11 номеров)

194. *Из мешка с 33 жетонами, на которых написаны русские буквы, вытаскивают один за другим 4 жетона и выкладывают их слева направо на столе. Какова вероятность того, что получится слово «барс»? Как изменится ответ, если жетоны достают все вместе, после чего разрешается выкладывать их на стол в нужном нам порядке?

195. Бросаются две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков будет больше их произведения.

196. *Из пяти отрезков с длинами 1, 3, 5, 7, 9 наудачу выбирают три. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

197. *Какова вероятность того, что в январе наудачу выбранного года окажется пять воскресений?

198. В ящике лежат 12 белых и 8 черных носков, одинаковых на ощупь. Вася в полной темноте достает 8 носков, после чего включает свет. Какова вероятность того, что из вынутых им носков ровно три черных?

199. Вася пришел на стадион. С вероятностью 0,3 он хочет купить билет на футбол, с вероятностью 0,4 — на баскетбол, с вероятностью 0,2 — на волейбол. Какова вероятность того, что Вася попадет на соревнование, а не уйдет домой?

200. *В условиях предыдущей задачи какова вероятность того, что Вася попадет на соревнование, в котором запрещена игра ногой?

201. Бросили монету и игральную кость. Докажите, что события «выпал герб» и «выпало четное число очков» независимы.

202. *Три охотника одновременно стреляют в зайца. Заяц умирает, если в него попала хотя бы одна пуля. Первый охотник попадает с вероятностью 0,8, второй — 0,75, третий — 0,7. Найдите вероятность смерти зайца.

203. *В ящике лежит 12 красных, 8 зеленых и 10 синих носков, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимается один носок. Известно, что он не синий. Какова вероятность того, что он красный?

204. *Три человека угадывают пол кошки, сидящей в мешке. Первый и второй угадывают правильный ответ с вероятностью p, а третий просто бросает монетку. Затем они определяют пол кошки простым голосованием. Какова вероятность, что они угадают правильно?

Дома (8 номеров)

205. Что вероятнее при бросании двух монет — выпадение обеих «решек» или «орла» и «решки»?

206. Бросили две монеты. Какова вероятность того, что на одной выпал «орел», а на другой «решка»?

207. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков, после чего наудачу взяли один из них. Найдите вероятность того, что он имеет ровно две окрашенные грани.

208. *В ящике лежат 13 зеленых, 10 красных и 7 синих носков, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимается 8 носков. Найдите вероятность того, что вынули 3 зеленых, 2 красных и 3 синих носка.

209. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность поломки первого станка в течение одной смены равна 0,1, а второго — 0,2. Какова вероятность того, что в течение всей смены оба станка проработают без поломки?

210. В условиях предыдущей задачи какова вероятность того, что оба станка сломаются?

211. Машина состоит из n блоков. Надежность (вероятность безотказной работы за данный промежуток времени) k-го блока равна p_k. Блоки выходят из строя независимо друг от друга; при выходе из строя хотя бы одного блока машина дальше работать не может. Какова надежность всей машины?

212. *По самолету производится три последовательных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,5, при втором — 0,6, при третьем — 0,8. При одном попадании самолет сбивается с вероятностью 0,3, при двух попаданиях — с вероятностью 0,6, при трех попаданиях самолет сбивается наверняка. Какова вероятность сбить самолет?

Указания, ответы

194. *Указание.* Используйте формулы для числа размещений и числа сочетаний. **196.** 0,3. **197.** 3/7. **200.** *Указание.* Будем считать, что в волейболе запрещена игра ногой. **202.** 0,985. **203.** 0,6.

204. Рассмотрите три случая: первый и второй дали верный ответ; первый дал неверный ответ, а второй верный; первый дал верный ответ, второй неверный. Найдите вероятность верного определения пола кошки в каждом случае, а потом сложите эти вероятности.

208. $\left(C_{13}^{3} \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{7}^{3}\right) : C_{30}^{8}$. **212.** 0,594.

Тема 5
ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

Лекция 1

5.1. Способы задания числовых функций. Кусочно заданные функции. График функции. График числовой функции как подмножество $\mathbb{R}^2$. Обратная функция.

5.2. Свойства числовых функций (ограниченность, монотонность, четность, нечетность, периодичность). Нули функции. Связь между свойствами функции и свойствами ее графика.

5.3. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований. Прием деления графиков.

Лекция 2

5.4. Функции $y = kx+b$, $y = |x|$, $y = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$, $y = k/x$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики.

5.5. Дробно-рациональная функция. Понятие асимптоты.

5.6. Задачи на расположение корней квадратного трехчлена.

1. Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственное решение уравнение $\dfrac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x-2} = 0$ (найдя предварительно ОДЗ, необходимо воспользоваться теоремой Виета).

2. Найдите все значения параметра a, при котором корни уравнения $x^2+4x+2a = 0$ существуют и отрицательны (необходимо записать условие неотрицательности дискриминанта и применить теорему Виета).

3. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ больше 2, а другой меньше 2.

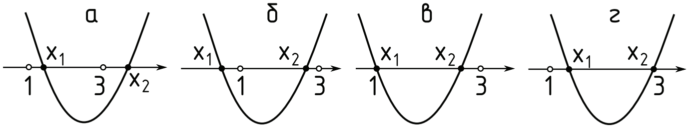
4. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше 1.

5. При каких значениях параметра a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?

Решение. Указанное в условии требование выполняется, если либо корень только один и он лежит в интервале $(1, 3)$, либо корня два, но только один из них лежит в данном интервале.

Уравнение имеет один корень, если $a^2 - 8 = 0$, то есть $a = \pm 2\sqrt{2}$. Находя в каждом случае корень, убеждаемся, что подходит только значение $a = 2\sqrt{2}$.

В случаях, когда уравнение имеет два корня, нам подходят только варианты расположения корней, указанные на рисунке.



Легко заметить, что варианты *а* и *б* имеют место тогда и только тогда, когда $f(1) \cdot f(3) < 0$, где $f(x)$ — левая часть уравнения. Это условие равносильно $a \in \left(3, \frac{11}{3}\right)$.

Осталось исследовать варианты *в* и *г*, соответствующие $a = 3$ и $a = \frac{11}{3}$. Находя в каждом из этих двух случаев второй корень уравнения, легко находим, что случай *г* невозможен, так как при $a = \frac{11}{3}$ второй корень не лежит в $(1, 3)$.

Ответ: $a \in \{2\sqrt{2}\} \cup \left[3, \frac{11}{3}\right)$.

Практика 1

В классе (13 номеров)

213. Найдите области определения функций f_1, f_2, $f_1 + f_2$, если $f_1(x) = \sqrt[4]{3-x}$, $f_2(x) = \sqrt{x+1}$.

Найдите множество значений функции (№ **214–217**):

214. $f(x) = |x-1|, \ x \in [0; 5]$.

215. $f(x) = x + \operatorname{sign} x, \ x \in \mathbb{R}$.

216. $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}, \ x \in (-\infty; 0)$.

217. $f(x) = \sqrt[4]{x^2-1}$.

Найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ и укажите их области определения (№ **218–219**):

218. $f(x) = x^2, \ g(x) = \sqrt{x}$.

219. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, +\infty); \\ 0, & x \in (-\infty, 0); \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty); \\ x^2, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

220. Являются ли взаимно обратными функции
$f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \ g(x) = \dfrac{x}{1-x}$?

221. Являются ли взаимно обратными функции
$f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$?

Среди указанных функций укажите обратимые (обратные функции задайте формулами) (№ **222–225**):

222. $y = 2x - 1$.

223. $y = 1/x^3$.

224. $y = \sqrt[3]{x^5}$.

225. $y = \operatorname{sign} x$.

Дома (12 номеров)

226. Найдите области определения функций f_1, f_2, $f_1 + f_2$, если
$f_1(x) = x + \sqrt{x-1}, \ f_2(x) = x - \sqrt{x-1}$.

Найдите множество значений функции (№ **227–229**):

227. $f(x) = 5 - 12x - 2x^2, \ x \in [-4; 1]$.

228. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \ x \in \mathbb{R}$.

229. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$.

230. Найдите композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ и укажите их области определения, если $f(x) = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

231. Являются ли взаимно обратными функции $f(x) = g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$?

232. Являются ли взаимно обратными функции $f(x) = g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$?

Среди указанных функций укажите обратимые (обратные функции задайте формулами) (№ **233–236**):

233. $y = |x|$.

234. $y = x^2 + 2x - 3$.

235. $y = \sqrt{x-1}$.

236. $y = x^2 \cdot \operatorname{sign} x$.

237. При каких условиях на a, b, c, d функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ обратна самой себе?

Практика 2

В классе (4 номера)

238. Докажите, что строго монотонная функция инъективна. Приведите пример, что обратное утверждение неверно.

239. Докажите, что композиция двух строго возрастающих (убывающих) функций является строго возрастающей функцией.

240. Найдите все значения параметра a, при которых один корень уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ больше 2, а другой корень меньше 2.

241. Найдите все значения параметра a, при которых корни (или корень, если он один) уравнения $(1+a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ больше единицы.

Дома (5 номеров)

242. При каких a обратима функция

$$y = (a-1)|x-1| + (a+1)|x+1| + x \ ?$$

243. Докажите, что сумма двух строго возрастающих (убывающих) функций, заданных на одном и том же множестве, является строго возрастающей (убывающей) функцией на данном множестве.

244. При каком значении параметра a один корень уравнения $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ больше 1, а другой меньше 1?

245. При каких значениях параметра a корни (или корень, если он один) уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ больше 1?

246. При каких a оба корня (или корень, если он один) уравнения $x^2-ax+2=0$ принадлежат интервалу $(0;3)$?

Практика 3

В классе (11 номеров)

Определите, какие из указанных функций четные, какие нечетные, а какие общего вида (№ **247–250**):

247. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^5}$, $x\in(-1;1)$. **248.** $f(x)=\begin{cases}x^4, & x>0;\\ x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$

249. $f(x)=|x+1|$. **250.** $f(x)=|10-x|-|10+x|$.

Определите, являются ли функции ограниченными, ограниченными только сверху/снизу, неограниченными (№ **251–252**):

251. $y=\dfrac{x^3}{x^4+1}$. **252.** $y=\dfrac{x^2-1}{|x^3-1|}$.

253. Докажите, что если функция $f(x)$ является периодической с периодом T, то функция $f(ax+b)$ при $a\neq 0$ является периодической с периодом T/a.

254. Исследуйте на периодичность (с нахождением основного периода, если он существует) функцию Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

255. *График функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ симметричен относительно каждой из прямых $x = a$ и $x = b$, $a \neq b$. Докажите, что $y = f(x)$ — периодическая функция и найдите ее период.

256. *Приведите пример функции, определенной на отрезке и неограниченной в любой окрестности каждой точки этого отрезка.

257. Для каких a неравенство $x^2 + ax - 7a < 0$ выполняется при всех $1 < x < 2$?

Дома (7 номеров)

Определите, какие из указанных функций четные, какие нечетные, а какие — общего вида (№ **258–260**):

258. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^4}$. **259.** $f(x) = \dfrac{x^6}{x^2 + 1}$.

260. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

261. Определите, является ли функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1; 1)$ ограниченной, ограниченной только сверху/снизу или неограниченной.

262. Исследуйте на периодичность (с нахождением основного периода, если он существует) функцию дробной части числа $y = \{x\}$.

263. График функции $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ симметричен относительно точки $A(a, b)$ и прямой $x = c$ $(c \neq a)$. Докажите, что $y = f(x)$ — периодическая функция и найдите ее период.

264. Найдите все значения a, для которых неравенство $x^2 - ax + a > 0$ верно при всех $|x| < 1$.

Указания

255. Так как при каждой осевой симметрии график функции отображается сам в себя, то он отобразится сам в себя и при композиции этих осевых симметрий.

256. В окрестности любой точки есть рациональные точки со сколь угодно большим знаменателем.

Тема 6
МНОГОЧЛЕНЫ

Лекция 1

6.1. Многочлены от одной переменной. Операции над многочленами.

6.2. Разложение многочлена на множители. Формулы сокращенного умножения: квадрат алгебраической суммы нескольких слагаемых, разность n-х степеней, сумма n-х степеней при нечетном n.

6.3. Деление многочленов с остатком. Корни многочлена. Основная теорема алгебры.

6.4. ***Теорема о рациональных корнях многочлена.*** *Если p/q — несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $\sum\limits_{i=n}^{0} a_i x^i$, то $p \mid a_0$, $q \mid a_n$.*

Доказательство. Подставим рациональный корень в многочлен и домножим обе части на q^n. □

6.5. ***Теорема Безу (Etienne Bezout).*** *Если $P(x)$ — многочлен, то $P(x) \equiv P(a) \pmod{(x-a)}$.*

Доказательство. По определению деления с остатком получим, что $P(x) = Q(x)(x-a) + R$, где R — число (многочлен нулевой степени). Подставляя в это равенство a вместо x, получим то, что и требовалось доказать. □

6.6. ***Следствие 1.*** *Если a — корень $P(x)$, то $(x-a) \mid P(x)$.*

Доказательство. По теореме Безу остаток от деления равен $P(a) = 0$. □

6.7. ***Следствие 2.*** *Если x_i — корни $P(x)$, то*

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

Доказательство. Поскольку после каждого деления на $x - x_i$ степень частного будет понижаться на 1, в результате n делений мы получим многочлен нулевой степени, то есть число. Очевидно, оно будет равно a_n. □

6.8. ***Следствие 3.*** *Если p/q — рациональный несократимый корень многочлена $P(x)$, то $P(1)$ делится на $p-q$, а $P(-1)$ делится на $p+q$.*

Доказательство. По следствию 1 из теоремы Безу $P(x)$ делится без остатка на $x-\dfrac{p}{q}$. Подставляя в это равенство вместо x числа 1 и -1, легко получаем требуемое. $\square$

Лекция 2

6.9. Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены от двух переменных. Симметрические многочлены от трех и большего числа переменных. Однородные многочлены.

6.10. Симметрические многочлены от корней данного многочлена.

Теорема Виета (Francois Viete). *Если σ_i — симметрические многочлены от корней приведенного многочлена $P(x) = \sum\limits_{i=n}^{0} a_i x^i$ (у которого $a_n = 1$), то $a_i = (-1)^{n-i}\sigma_{n-i}$.*

Доказательство. Разложим многочлен на линейные множители, пусть $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$, где x_i — корни многочлена. Одночлены с буквенной частью x^i получаются перемножением i «штук» множителей x и $n-i$ «штук» множителей x_k, причем перед всеми множителями вида x_k стоят минусы. Далее все такие одночлены (подобные между собой) складываются; очевидно, что коэффициент перед результатом будет равен $(-1)^{n-i}\sigma_{n-i}$, но он должен быть равен a_i. $\square$

Правило для запоминания знаков: σ_1 всегда с минусом, далее знаки чередуются. Пример для приведенного многочлена третьей степени.

Теорема Виета для неприведенного многочлена.

Практика 1

В классе (6 номеров)

265. Какую кратность имеет корень $x = 2$ многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

266. Найдите целые корни многочлена $x^5-2x^3-8x^2+13x-24$.

267. Найдите целые корни многочлена $x^4+2x^3-12x^2-38x-24$.

268. Разложите на множители $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

269. *Решите уравнение $x^4+(1-x)^4=a$.

270. Решите уравнение $x^4+5x^3+4x^2-5x+1=0$.

Дома (8 номеров)

271. Чему равен коэффициент a, если остаток от деления многочлена $x^4-ax^3+4x^2-x+1$ на $x-2$ равен 7?

272. Найдите целые корни многочлена $x^5-15x^4+76x^3-140x^2+$ $+75x-125$ и определите их кратность.

273. Найдите целые корни многочлена $x^5-2x^4-4x^3+4x^2-5x+6$.

274. Найдите целые корни многочлена $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

275. Разложите на множители $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

276. Решите уравнение $x^2+\dfrac{1}{x^2}+2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\frac{142}{9}$.

277. Решите уравнение $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$.

278. Разложите на множители x^4+4.

Указания, решения, ответы

269. Выполните замену $y=x-\frac{1}{2}$, после чего примените формулу бинома Ньютона. *Ответ:* при $a<\frac{1}{8}$ решений нет, при $a=\frac{1}{8}$ $x=0,5$, при $a>\frac{1}{8}$ два решения (следует получить явную формулу).

Практика 2

В классе (4 номера)

279. *Выразите через элементарные симметрические многочлены $x^5+6x^4y-10x^3y^2-10x^2y^3+6xy^4+y^5$.

280. *Разложите на множители $2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4$.

281. Решите уравнение $x^3 - 6x + 9 = 0$.

282. Найдите сумму коэффициентов многочлена, получающегося после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1 - 3x + 2x^2)^{743} \cdot (1 + 3x - 2x^2)^{744}$.

Дома (4 номера)

283. Выразите через элементарные симметрические многочлены $x^3 + 4x^2y + 4xy^2 + y^3$.

284. Разложите на множители $10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$.

285. Решите уравнение $x^3 + 45x - 48 = 0$.

286. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^3 + 2x - 3 = 0$.

Указания, решения, ответы

279. Группируем слагаемые симметрично по два (первое с последним и т. п.) Из суммы $x^5 + y^5$ выделяем множитель $x + y$, к сумме $x^4 + y^4$ добавляем и вычитаем $2x^2y^2$.

280. Без ограничения общности разложение можно искать методом неопределенных коэффициентов в следующем виде: $(x^2+bxy+y^2)(2x^2+exy+2y^2)$. *Ответ:* $(x^2+2,5xy+y^2)(2x^2+2xy+2y^2)$ или $(x^2 + xy + y^2)(2x^2 + 5xy + 2y^2)$ (это, как легко заметить, одно и то же).

Тема 7
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Лекция 1

7.1. *Комплексным числом* называется упорядоченная пара вещественных чисел (x, y). Множество комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. *Порядок* на множестве $\mathbb{C}$ не вводится; *сложение и умножение* комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Несложно проверить, что множество $\mathbb{C}$ с определенными таким образом операциями является *полем*; роль нуля (нейтрального элемента по сложению) и единицы (нейтрального элемента по умножению) играют соответственно $(0,0)$ и $(1,0)$.

Можно считать, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, если вещественные числа отождествить с комплексными числами вида $(x,0)$, то есть положить $x = (x,0)$. Кроме того, если обозначить число $(0,1)$ символом i (число $i = (0,1)$ называется *мнимой единицей*), то, как нетрудно заметить, получим $(x,y) = x + yi$. Именно в такой форме и записываются обычно комплексные числа; для комплексного числа $z = (x,y)$ вещественное число x называется *действительной частью* и обозначается $\operatorname{Re}(z)$, вещественное число y называется *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im}(z)$. Комплексное число с вещественной частью, равной нулю, называется *чисто мнимым*.

Легко заметить, что $i^2 = (-i)^2 = -1$. Поэтому, с учетом сказанного выше о свойствах операций над комплексными числами, их можно складывать, вычитать и умножать, как обычные алгебраические выражения, имея при этом в виду, что $i^2 = -1$, например:

$$(1+2i)(4-5i) = 4-5i+8i-10i^2 = 4+3i-10\cdot(-1) = 14+3i.$$

Отметим, что бытующее до сих пор в некоторых учебниках для технических вузов определение комплексного числа как «числа вида $x + yi$, где $i = \sqrt{-1}$» является столь же неверным, сколь и непонятным, поскольку $\sqrt{-1}$ попросту не существует.

Поскольку комплексное число — это упорядоченная пара вещественных чисел, множество комплексных чисел можно представлять себе как плоскость (ее называют *комплексной плоскостью*, или плоскостью Аргана[1]). Ось абсцисс обычно обозначается Re, а ось ординат — Im; каждое комплексное число z соответствует точке комплексной плоскости с координатами $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$.

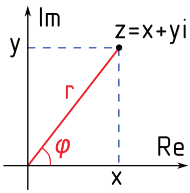
7.2. *Деление* комплексных чисел производится с помощью нехитрого приема, называемого «домножение на сопряженное знаменателю». *Сопряженным* числу $z = x + yi$ называется число

[1] Интересно, что Жан-Роберт Арган (Jean-Robert Argand, 1768–1862) не был профессиональным математиком; он работал управляющим книжным магазином в Париже.

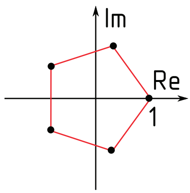
$\overline{z} = x - yi$ (очевидно, что и первое число является сопряженным для второго, поэтому эти числа называют *сопряженными*); в рассмотренном ниже примере мы увидим, что произведение сопряженных чисел является вещественным числом, на чем и основан рассматриваемый прием деления. Поделим, например, $14+3i$ на $1+2i$, для чего домножим числитель и знаменатель полученной дроби на $\overline{1+2i} = 1-2i$:

$$\frac{14+3i}{1+2i} = \frac{(14+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{14-28i+3i-6i^2}{1^2-(2i)^2} =$$
$$= \frac{20-25i}{1+4} = \frac{20-25i}{5} = 4-5i.$$

7.3. Поскольку комплексные числа можно рассматривать как точки комплексной плоскости, число $z = x + yi$ можно задать не только декартовыми координатами (x, y), но и *полярными* координатами (r, φ), где неотрицательное число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ равно длине отрезка — расстоянию от начала координат до точки, соответствующей z, а φ — угол между положительной полуосью Ox и упомянутым отрезком (в некоторых учебниках считается, что $\varphi \in (-180°, 180°]$, а в других — что $\varphi \in [0, 360°)$ — это вопрос договоренности). Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$, а число φ — *аргументом* и обозначается $\arg z$.



Тригонометрическая форма записи комплексного числа



Корни 5-й степени из 1

Нетрудно понять, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, поэтому можно записать $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Оказывается, в тригонометрической форме очень удобно умножать комплексные числа и возводить их в степень. При умножении двух чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (по модулю 360°). Для возведения комплексного числа в степень используется *формула Муавра*[2]:

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

7.4. *Корнем n-й степени из комплексного числа z* называется такое комплексное число q, что $z = q^n$. Никакого специального обозначения для корней из комплексных чисел, вроде $\sqrt[n]{z}$, не существует.

Используя формулу Муавра, нетрудно понять, что для любого комплексного числа z существует в точности n корней n-й степени; множество всех корней из числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно задать следующим образом:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+360^\circ k}{n} + i\sin\frac{\varphi+360^\circ k}{n}\right) : k \in \{0,\ldots,n-1\}\right\}.$$

На рисунке (см. выше) изображены все корни 5-й степени из 1; они располагаются в вершинах правильного пятиугольника.

7.5. Леонарду Эйлеру принадлежит еще одна формула, связанная с комплексными числами (и называемая, естественно, *формулой Эйлера*), а именно $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Здесь e — константа, примерно равная $2,71828\ldots$; φ должен быть выражен в радианах. Таким образом, существует еще одна форма записи комплексного числа — *показательная*: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Заметим, что формула Эйлера дает нам мистическую связь между знаменитыми константами π, e и мнимой единицей (тождество Эйлера): $e^{i\pi} = -1$.

[2] Абрахам де Муавр (Abraham de Moivre, 1667–1754) — английский математик. Работал, как бы сегодня сказали, репетитором, зарабатывал на жизнь частными уроками.

Практика 1

В классе (12 номеров)

Вычислите (№ **287–292**):

287. i^5.
288. i^{111}.
289. i^{2024}.
290. $1/i$.
291. $(5i)/(2+i)$.
292. $(1+i)^8$.

293. Выполните действия: $\frac{1}{i^7}\left(i^7 - \frac{1}{i^7}\right)$.

Решите уравнения (№ **294–296**):

294. $z^4 - 16 = 0$.
295. $z^2 + z + 5 = 0$.
296. $z^2 = (\overline{z})^2$.

297. Разложите многочлен $z^4 + 1$ на линейные множители.
298. Решите уравнение $z^6 - z^3 - 2 = 0$.

Дома (11 номеров)

Вычислите (№ **299–304**):

299. i^8.
300. i^{231}.
301. $1/i^7$.
302. $(1+i)/(2i+1)$.
303. $(2i)^3$.
304. $(1-i)^9$.

305. Выполните действия: $\frac{2-i}{2+i} + \frac{2+i}{2-i}$.

Решите уравнения (№ **306–308**):

306. $z^3 - 27 = 0$.
307. $z^2 + 3z + 4 = 0$.
308. $\overline{z} = -4z$.

309. Решите уравнение $z^8 + 2z^4 + 1 = 0$.

Практика 2

В классе (5 номеров)

Найдите модуль и аргумент комплексного числа (№ **310–312**):

310. $-i$. **311.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **312.** $(i+1)(i-2)$.

313. Запишите число $-4-4i$ в тригонометрической форме.

314. Изобразите на комплексной плоскости все точки z, удовлетворяющие условию $|z-2i-1|=2$.

Дома (5 номеров)

Найдите модуль и аргумент комплексного числа (№ **315–317**):

315. $\frac{1}{i+1}$. **316.** $2-i$. **317.** $\frac{3+i}{4-i}$.

318. Запишите число $\frac{1-i}{3+i}$ в тригонометрической форме.

319. Изобразите на комплексной плоскости все точки z, удовлетворяющие условию $2\leqslant|2z+i|<3$.

Тема 8
РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Лекции 1 и 2

8.1. Понятие об уравнении с одним неизвестным. ОДЗ уравнения. Системы и совокупности уравнений и неравенств. Следование. Равносильность. Рациональные уравнения и неравенства с одним неизвестным. Целые уравнения.

8.2. Методы решения рациональных уравнений и неравенств: замена переменной, разложение на множители, тождественные преобразования.

Не спешить решать в лоб, искать замены, проявить фантазию. Не забывать о проблеме посторонних корней и возможной потере корней (при умножении и делении на что-либо, при сокращении дробей).

Пример. $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}=\dfrac{1}{6}$.

Делим числитель и знаменатель каждой дроби на x.

8.3. Возвратное уравнение нечетной степени — корень $x=-1$. Возвратное уравнение четной степени:

$$10x^4-29x^3+30x^2-29x+10=0.$$

Обобщенное возвратное нечетной степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+kcx^2+k^3bx+k^5a=0, \text{ корень } x=-k.$$

Обобщенное возвратное четной степени:

$$6x^4+5x^3-38x^2-10x+24=0.$$

8.4. Однородные уравнения, на примере

$$2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2=0.$$

8.5. Двучленное уравнение 4-й степени $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ решается заменой $y=x+\dfrac{a+b}{2}$, например $(x+3)^4+(x+5)^4=16$ (сводится к биквадратному).

8.6. Использование ограниченности и монотонности функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Идеи четности/нечетности, $f(g(x))=f(q(x))$.

Использование ограниченности:

1) $(x-2)^8+8x^4=0$ $(\varnothing)$; 2) $\cos x=x^2+1$.

Использование монотонности (или, более общо, инъективности): $(x-2)^7=-x$ (единственный корень $x=1$).

Лекция 3

8.7. Системы рациональных уравнений с несколькими неизвестными. Методы решения систем рациональных уравнений.

1. Если одно уравнение однородное, находим x/y и подставляем во второе:

$$\begin{cases} x^2+3xy-y^2=3, \\ 3x^2-xy+y^2=3. \end{cases}$$

Вычитаем первое уравнение из второго и получаем однородное уравнение.

2. Симметричные системы решаются заменой $u=x+y$, $v=xy$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3-y}=2. \end{cases}$$

Пусть $u=x+y$, $v=xy$, тогда левая часть второго уравнения приобретает вид

$$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3-y}=\frac{3-y+3-x}{9+xy-3(x+y)}=\frac{6-u}{9+v-3u}.$$

3. Прием «решить одно из уравнений как квадратное»:

$$\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-6x+3y=0, \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0. \end{cases}$$

Каждое решаем как квадратное и каждую левую часть раскладываем в произведение двух множителей.

Лекция 4

8.8. Уравнения с модулем: теория (рассмотрение случаев с раскрытием модуля, сведение к системе/совокупности, хитрые методы типа $|a|+|b|=|a+b| \Leftrightarrow ab \geqslant 0$). Примеры: $|x-4|+|x+4|=2x$, $||x^2-3x|-5|=x+1$, примеры на хитрые методы.

8.9. Уравнения с параметром: 3 метода (аналитический, *Oxa*, *yxO*). Первые два на примере $a=x/(x+1)$, *yxO* на примере: сколько корней имеет уравнение $|x|=ax+1$.

Еще пример: $|x^2-5x+4|=a$.

Лекция 5

8.10. Определения средних: арифметического, геометрического, гармонического, квадратичного (для двух и для n положительных чисел). Пример для чисел 4 и 9. Квадратный ящик, арбуз, груша, гормоны.

8.11. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (доказательство для двух чисел).

8.12. Неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим (доказательство для двух чисел).

8.13. Неравенство (рассказать про авторов) Коши — Буняковского — Шварца: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (доказательство для двумерного случая, обсуждение для n-мерного). Вид неравенства для n-мерного случая: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

8.14. Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным. Доказательство: применим неравенство Коши — Буняковского — Шварца к векторам $(a_1, \ldots, a_n)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

8.15. Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geqslant 1+xn$, где $n \geqslant 2$, $x > -1$ (равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x = 0$). Доказательство по индукции (в доказательстве шага домножим обе части на положительное число $x+1$). Справедливость неравенства для вещественных n (без доказательства).

Лекция 6

8.16. Неравенства с двумя переменными: что значит решить неравенство. Простейшие примеры типа $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

8.17. Неравенства с модулем: теория (сведение к системе/совокупности). Метод областей (на примере $|x^2 + y| \geqslant x$).

8.18. Неравенства с параметром: $|x^2 + a| \geqslant x$, $ax > 1/x$ (аналитически и методом Oxa), $\dfrac{x^2 + 4a^2}{xa} \geqslant 5$.

Практика 1

В классе (8 номеров)

Решите уравнения:

320. * $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$. **321.** * $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{40}{9}$.

322. * $118x^2+1389x-1507=0$.

323. * $\dfrac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\dfrac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}$.

324. * $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+5}{x-5}=\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+4}{x-4}$.

325. * $112+19\left(\dfrac{8-3x}{x+3}+\dfrac{3-2x}{x+7}\right)=17\left(\dfrac{15-x}{x+4}+\dfrac{31+2x}{x+6}\right)$.

326. $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$.

327. * $\dfrac{x^2+1}{3x^2+2}=\dfrac{4x^2-5}{x^2+6}$.

Дома (5 номеров)

Решите уравнения:

328. $x^2+2103x+2102=0$.

329. * $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x-4}=0$.

330. * $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

331. * $\dfrac{3x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=4$.

332. * $\dfrac{1}{6x^2-7x+2}+\dfrac{1}{12x^2-17x+6}=4x^2-5x$.

Указания, решения, ответы

320. *Указание*. Разделите числитель и знаменатель левой части на x^2. *Ответ*. 2 и $1/2$.

321. *Указание.* Поскольку в левой части стоит сумма двух квадратов, можно попробовать дополнить ее до квадрата суммы или разности. Срабатывает прием дополнения до квадрата разности. *Ответ.* 2 и $-\frac{2}{3}$.

322. Легко заметить, что один из корней равен 1. Далее применяем теорему Виета.

323. *Указание.* Пусть a и b — числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части, тогда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a+4}{b+4}$, откуда $a = b$.

Ответ. -4 и 2.

324. *Указание.* Перенесите дробь с 3 в левую часть, а дробь с 5 в правую, после чего выполните вычитание в обеих частях.

Ответ. 0 и $7 \pm 2\sqrt{3}$.

325. *Указание.* Выделите целую часть в каждой дроби (так, чтобы в числителях дробей остались только числа). *Ответ.* -5.

327. *Ответ.* $\pm\sqrt{2}$.

329. *Указание.* Сгруппируйте первую дробь с последней, а вторую с третьей. *Ответ.* $\dfrac{11}{2}$ и $\dfrac{11 \pm \sqrt{5}}{2}$.

330. *Указание.* $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1} = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Преобразуйте таким образом каждую дробь, после чего получившееся уравнение запишите в виде $\dfrac{4}{x+4} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x+1}$. Далее выполните действия в левой и правой частях.

Ответ. 0 и $-\frac{5}{2}$.

331. *Ответ.* $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ и $\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

332. *Указание.* Разложите знаменатели на множители, преобразуйте левую часть уравнения к виду $\dfrac{2}{8x^2 - 10x + 3}$, после чего выполните замену $y = 4x^2 - 5x$. *Ответ.* $\dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$.

Практика 2

В классе (6 номеров)

Решите уравнения:

333. * $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+3)^2} = 16.$

334. * $\dfrac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{625}{112}.$

335. * $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right).$

336. * $10x^2(x-2)^2 = 9(x^2 + (x-2)^2).$

337. * $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 + 2x + 2) = 30x^2.$

338. * $\dfrac{1}{6x^2 - 7x + 2} + \dfrac{1}{12x^2 - 17x + 6} = 8x^2 - 6x + 1.$

Дома (5 номеров)

Решите уравнения:

339. * $x(x+4) + \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} + 4\right) = 0.$

340. * $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right).$

341. * $\dfrac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{2}{9}.$ **342.** * $x^4 + 5x^2(x+1) = 6(x+1)^2.$

343. * $\dfrac{2x}{x^2 - 4x + 2} + \dfrac{3x}{x^2 + x + 2} + \dfrac{5}{4} = 0.$

Указания, решения, ответы

333. $1 \pm \sqrt{7}.$

334. *Указание.* Выполните замену $y = x + \dfrac{1}{x}$. *Ответ.* $7; \dfrac{1}{7}.$

335. $\sqrt{2} \pm 1;\ -\sqrt{2} \pm 1.$

336. *Указание.* Выполните замену $y = x^2 - 2x$. *Ответ.* $-1; 3.$

337. *Указание.* Поделите обе части уравнения на x^2 и выполните замену $y = x + \frac{2}{x}$. *Ответ.* $-2 \pm \sqrt{2}; \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

338. *Указание.* Левая часть преобразуется к виду

$$\frac{2}{8x^2 - 10x + 3} = \frac{2}{2(2x-1)^2 - (2x-1)},$$

а правая — к виду $2(2x-1)^2 + (2x-1)$. *Ответ.* $\dfrac{2 \pm \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}}}{4}$.

339. $\dfrac{-2 - \sqrt{6} \pm \sqrt{6 + 4\sqrt{6}}}{2}$.

340. *Указание.* Выполните замену $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$.

Ответ. $-2; 6; 3 \pm \sqrt{21}$.

341. *Указание.* Выполните замену $y = x + \frac{1}{x}$.

Ответ. $2; \frac{1}{2}; 2 \pm \sqrt{3}$.

342. $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; -3 \pm \sqrt{3}$.

343. *Указание.* Поделите числитель и знаменатель первых двух дробей на x и выполните замену $y = x + \frac{2}{x}$. *Ответ.* $1; 2; -2 \pm \sqrt{2}$.

Практика 3

В классе (6 номеров)

Решите уравнения:

344. * $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$.

345. * $||x+3| - |x-1|| = 2 - x^2$.

346. * $||x^2 - 3x| - x + 1| = 2x^2 + x - 1$.

Решите системы:

347. * $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y} + \dfrac{x+2y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x-2y} + \dfrac{x-2y}{xy} = 4. \end{cases}$

348. * $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ |x-2y| = 2. \end{cases}$

349. * $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5, \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155. \end{cases}$

Дома (5 номеров)

Решите уравнения:

350. * $|x-1| + |x-3| = 2x - 4.$

351. * $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1.$

352. * $(1+x) \cdot |x+2| + x|x-3| = 6x + 2.$

353. * $||x^3 + x^2 - 1| - 4| = x^3 - x^2 + 3.$

354. * Решите систему $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y} + \dfrac{2}{3x-2y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x-3y} - \dfrac{4}{3x-2y} = 1. \end{cases}$

Указания, решения, ответы

344. $-\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{5}$. **345.** 0 и $1-\sqrt{5}$. **346.** 1 и $\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}$.

347. $\left(2 \pm 2\sqrt{3}; 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. **348.** $(0;-1)$ и $\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

349. *Указание*. Выполните замену $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. *Ответ*. $(\pm 3; \pm 2)$ и $(\pm 2; \pm 3)$.

350. $x \geqslant 3$. **351.** $\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{-5+\sqrt{113}}{4}$. **352.** $-2 \leqslant x \leqslant 3$. **353.** $0; 1; 2$.

354. $(4; 2)$.

Практика 4

В классе (5 номеров)

355. Решите уравнение $a^2(a+1)(a-1) = x^2(x+1)(x-1)$.

356. При каких a уравнение $|x+2| - |2x+8| = a$ имеет единственное решение?

357. Решите уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$.

358. Сколько решений имеет система $\begin{cases} 4x^2 - 2x + a = 0, \\ |x| \leqslant 1\,? \end{cases}$

359. Сколько решений имеет уравнение $a = ||x^2 - 4| - 1|$?

Дома (4 номера)

360. При каких a уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ имеет более 3 решений?

361. Решите уравнение $x|2 + 2a| + 1 + a = 0$.

362. Решите уравнение $a|x+3| + 2|x+4| = 2$.

363. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 - 2ax - 1 = 0, \\ |x| < 2\,? \end{cases}$

Практика 5

В классе (8 номеров)

364. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c и d выполняется неравенство $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

365. Докажите, что для любого положительного числа a выполняется неравенство $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $a = 1$.

366. Докажите, что для любого множества вещественных чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ выполняется неравенство

$$\min\{a_i\} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \max\{a_i\}.$$

Докажите неравенства:

367. $4(a^3 + b^3) \geqslant (a + b)^3$, $a, b > 0$.

368. $a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$, $a, b, c \geqslant 0$.

369. $a^2 + \dfrac{1}{a^2 + 1} \geqslant 1$.

370. *Докажите, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10}$ (a_i — произвольные вещественные числа), то $\dfrac{a_1 + \cdots + a_6}{6} \leqslant \dfrac{a_1 + \cdots + a_{10}}{10}$.

371. *Докажите, что если $a + 2b + 3c \geqslant 14$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

Дома (6 номеров)

372. Докажите, что для любых чисел a и b выполняется неравенство $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

373. *Докажите, что для любых неотрицательных чисел a, b, c выполняется неравенство $\dfrac{a + b + c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

374. Докажите, что для любых чисел $a > 1$ и $b < 1$ выполняется неравенство $a + b > 1 + ab$.

375. Докажите, что для всех чисел a, b, c таких, что $b < c < a$, выполняется неравенство $a^2 + b^2 > c^2 + (a + b - c)^2$.

376. Докажите, что для всех $a, b > 0$ выполняется неравенство $(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

377. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c) - 3$.

Указания, решения, ответы

370. Неравенство, которое нам требуется доказать, легко сводится к виду $2(a_1 + \cdots + a_6) \leqslant 3(a_7 + \cdots + a_{10})$. Но в каждой части этого неравенства одинаковое количество слагаемых, при этом любое слагаемое правой части больше или равно любого слагаемого левой части.

371. *Указание*. Примените неравенство Коши — Буняковского — Шварца к векторам (a, b, c) и $(1, 2, 3)$.

373. Положите $d = \dfrac{a+b+c}{3}$ и воспользуйтесь результатом задачи № 364.

Практика 6

В классе (5 номеров)

Решите неравенства:

378. $|x-a|+|x+a|>4$.

379. $x^2+a^2 \geqslant 2(|x|-|a|)$.

380. $xa \geqslant 1$ (ср. с № 384!).

381. $|1-|x|| < a-x$.

382. $|x+2a| < \dfrac{8a^2}{|x-2a|}$.

Дома (6 номеров)

Решите неравенства:

383. $x^2+2x+a^2-4a-4 \geqslant 0$.

384. $a \geqslant 1/x$ (ср. с № 380!).

385. $|x^2-5x+4| < a$.

386. $\dfrac{x-1}{a-1}+x < \dfrac{1}{1-a}$.

387. $x^2-5xa+6a^2>0$.

388. $a+\dfrac{4a^2}{|x-2a|} \geqslant 0$.

Тема 9
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Лекция 1

9.1. Представление рациональных чисел бесконечными периодическими десятичными дробями.

9.2. Определение действительного числа. Порядок на множестве действительных чисел. Операции над действительными числами. Степень положительного действительного числа с произвольным показателем. Свойства степеней.

9.3. Степенная функция, ее свойства и график.

9.4. Иррациональные уравнения и неравенства: сведение к системам/совокупностям, метод интервалов.

Практика 1

В классе (7 номеров)

Решите уравнения:

389. * $\sqrt{5+2x} = 5-x.$

390. * $\sqrt{5-x} = \sqrt{3}+2-x.$

391. * $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 7.$

392. * $\sqrt{x^2-7x+1} = \sqrt{2x^2-15x+8}.$

393. * $x+\sqrt{\dfrac{x^2+4x}{x-2}} = 0.$

394. * $\dfrac{\sqrt{4+x}}{2+\sqrt{4+x}} = \dfrac{\sqrt{4-x}}{2-\sqrt{4-x}}.$

395. * $\sqrt{5x+7} - \sqrt{x+4} = 4x+3.$

Дома (5 номеров)

Решите уравнения:

396. * $\sqrt{5x-34} = x-7.$

397. * $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4.$

398. * $\dfrac{1-x}{1+x}\sqrt{\dfrac{1+3x}{1-3x}} = 0.$

399. * $\sqrt{5-x} + \sqrt{8+2x} = 2.$

400. * $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x-6}} = \dfrac{x}{6}.$

Указания, решения, ответы

389. 2. **390.** 2. **391.** 481. **392.** 7. **393.** 0; -1. **394.** $2\sqrt{3}$.

395. *Указание.* Домножьте обе части на сумму радикалов, затем примените идею о монотонности. *Ответ.* $-\frac{3}{4}$.

396. $\dfrac{19+\sqrt{29}}{2}$. **397.** -1. **398.** $-\frac{1}{3}$. **399.** $\varnothing$. **400.** 6.

Практика 2

В классе (5 номеров)

Решите неравенства:

401. * $\sqrt{x^2-3x-3}<5-x$.

402. * $3\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\sqrt{x+1}$.

403. * $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}<3$.

404. * $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}\geqslant 0$.

405. * $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{x^2+3x-4}}>x+\dfrac{1}{2}$.

Дома (8 номеров)

Решите неравенства:

406. * $\sqrt{7+x}\geqslant 7-2x$.

407. * $2x-13\leqslant\sqrt{1+7x-x^2}$.

408. * $\sqrt{3x+1}\leqslant x+1$.

409. * $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$.

410. * $\sqrt{5+x^2-\sqrt{x-2}}\geqslant x+1$.

411. * $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$.

412. * $(9-x^2)\sqrt{x+4}\geqslant 0$.

413. * $\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{14x^2+23x+8}\leqslant\sqrt{17x^2+25x+8}$.

Указания, решения, ответы

401. $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{21}}{2};4\right)$.

402. Подкоренное выражение в левой части равно $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2$.

403. $[-2;-1)\cup(2;3]$. **404.** $\{-1\}\cup[3;+\infty)$.

405. $(-\infty;-4]\cup\left[1;\frac{65}{56}\right)$. **406.** $x\geqslant 2$. **407.** $\left[\dfrac{7-\sqrt{53}}{2};7\right]$.

408. $\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup[1;+\infty)$. **409.** $(-\infty;0)\cup[1;2]$. **410.** 2.

411. $[1;2)$. **412.** $[-3;3]\cup\{-4\}$. **413.** $-\frac{8}{7};0$.

Практика 3

В классе (6 номеров)

Решите неравенства:

414. * $|2-\sqrt{x+2}| > x-2$.

415. * $|\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}| \leqslant 1$.

416. $\sqrt{a-x-1} < \sqrt{2-x}$.

417. $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$.

418. * $x+4a > 4\sqrt{ax}$.

419. * $\dfrac{(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2)(|2x+3|-|3x+2|)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{5+x}+1-x)(x^{99}-1)} \leqslant 0$.

Дома (4 номера)

Решите неравенства:

420. * $\sqrt{5-|x+1|} \leqslant 2+x$.

421. * $\dfrac{(x^2-1)(\sqrt{3+x^2}+2x)}{|x-2|-4x+3} \geqslant 0$.

422. $a\sqrt{x+1} < 1$.

423. $\sqrt{a-x^2} > x+1$.

Указания, решения, ответы

414. $[-2;2)$. **415.** $[-2;+\infty)$. **418.** Выделите полный квадрат. **419.** $[-5;-1]\cup\{0\}\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$. **420.** $[0;4]$. **421.** -1.

Тема 10

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Лекции 1–2

10.1. Показательная функция. Теорема о возрастании/убывании (опирается на теорему о возведении неравенства с положительными частями в положительную или отрицательную степень: возводим неравенство $a>1$ в степень x_2-x_1).

10.2. Классы и методы решения показательных уравнений:

1) сведение к одному основанию (не забыть в заклинании упоминать про инъективность!):

$$0,6^x \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^3;$$

2) сведение к одному показателю: $3^x = 5^{2x}$;

3) вынесение за скобку (условие, когда это возможно!):

$$25 \cdot 3^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2} = 36;$$

4) комбинация 2 и 3: $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} + 11 \cdot 2^{3-x}$;

5) замена: $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

6) однородные уравнения: $25^x + 13 \cdot 10^x = 7 \cdot 2^{2x+1}$;

10.3. Показательные неравенства. Учет возрастания/убывания. Заклинание! 1) $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leqslant 624$; 2) $0,4^x - 2,5^{x+1} > 1,5$.

Лекция 3

10.4. Определение логарифма. Основное логарифмическое тождество.

10.5. Основные свойства логарифмов. Доказательство, например, формулы для логарифма произведения:

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy = a^{\log_a xy};$$

из равенства степеней и оснований следует равенство показателей.

10.6. Дополнительные свойства.

1) Формула перехода к новому основанию: логарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ по основанию c и все получается.

2) Следствие 1: $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$.

3) Следствие 2: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

4) Формула $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$. Для доказательства берем формулу перехода к новому основанию $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$, получаем из нее $\log_b c = \log_a c \cdot \log_b a$, а потом основание a возводим в степень, равную левой и правой частям.

10.7. Примеры преобразований логарифмических выражений:

1) $\dfrac{\log_7 14 - \frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30 - \frac{1}{2}\log_6 150}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

Лекция 4

10.8. Логарифмическая функция, ее свойства. Доказательство возрастания/убывания. Докажем, например, возрастание функции при $a > 1$: от противного, если существуют $x_1 < x_2$ такие, что $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то, используя свойство возрастания функции a^t, получим $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$, то есть $x_1 > x_2$.

Показательная и логарифмическая функции — взаимно обратные. График логарифмической функции.

10.9. Логарифмические уравнения и неравенства.

1) $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$. 2) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$.

3) $\log_{1/3} x < \frac{1}{3}$. 4) $1 - \dfrac{1}{5 - \lg x} < \dfrac{2}{1 + \lg x}$.

Практика 1

В классе (12 номеров)

Решите уравнения:

424. $(0,4)^{x-1} = (6,25)^{6x-5}$.

425. $(2/3)^x\,(9/8)^x = 27/64$.

426. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{5/x}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{-4}$.

427. $2^{\sqrt{x+1}} = 16\cdot\sqrt{(0,25)^{3-0,25x}}$.

428. $5^{2x+1} - 3\cdot 5^{2x-1} = 550$.

429. $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1}$.

430. $5^{2x} - 2\cdot 5^x = 15$.

431. $4\cdot 2^{2x} - 6^x = 18\cdot 3^{2x}$.

432. $8^x + 18^x = 2\cdot 27^x$.

433. $5\cdot 2^{3x-3} - 3\cdot 2^{5-3x} = -7$.

434. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$.

435. Решите систему $\begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 512000, \\ x + y = 7. \end{cases}$

Дома (7 номеров)

Решите уравнения:

436. $\left(1/625^2\right)^{-x} = \sqrt{0,04}.$

437. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^{8/x}} = \dfrac{9}{16}.$

438. $13^{2x} + 5 = 6 \cdot 13^x.$

439. $\sqrt{3^{x-54}} - 7\sqrt{3^{x-58}} = 162.$

440. $4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}.$

441. $28^x \cdot \sqrt{343^x} = \left(\sqrt{7}\right)^{5x} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{5-2x}.$

442. $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4}.$

Практика 2

В классе (9 номеров)

Решите неравенства:

443. $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leqslant (0,1)^{2x-3}.$

444. $x^2 \cdot 7^x - 7^{x+2} \leqslant 0.$

445. $3^{72} \cdot (1/3)^x \cdot (1/3)^{\sqrt{x}} > 1.$

446. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x \leqslant 0.$

447. $\left(\dfrac{1}{121}\right)^{1-x} - \left(\dfrac{1}{169}\right)^{1-x} + 11^{2x-3} + 13^{2x-3} > 0.$

448. $3^{2x-1} > 11^{3-x}.$

449. $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} \leqslant 5.$

450. $3 \cdot 7^{2x} + 37 \cdot 140^x \leqslant 26 \cdot 20^{2x}.$

451. $\sqrt{9^x + 3^x - 2} \geqslant 9 - 3^x.$

Дома (7 номеров)

Решите неравенства:

452. $25^x > 125^{3x-2}.$

453. $5^{\sqrt{x+2}} > 3125.$

454. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} + 5^{x+2}.$

455. $5^{x+2} + 5^{x+1} - 5 \cdot 5^{x-2} + 5 \cdot 5^{x-3} - 5 \cdot 5^{x-4} \geqslant 18645.$

456. $\sqrt{0,9}\cdot(0,9)^{x-1} > \dfrac{10^{3x/4}}{10\sqrt{10}}.$

457. $5\cdot 25^{1/x}+3\cdot 10^{1/x}\geqslant 2\cdot 4^{1/x}.$

458. $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^x-2^x}\leqslant 1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x.$

Практика 3

В классе (3 номера)

459. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

460. Для всех значений параметра a решите неравенство

$$a^2-9^{x+1}-8a\cdot 3^x>0.$$

461. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $4^{x^2}+2(2a+1)\cdot 2^{x^2}+4a^2-3>0$ выполняется для любых x.

Дома (2 номера)

462. Для всех значений параметра a решите уравнение

$$4^x-12\cdot 2^x-|4^x+2^{x+1}+a|-a+12=0.$$

463. Для всех значений параметра a решите неравенство

$$a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0.$$

Практика 4

В классе (7 номеров)

464. Вычислите $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}.$

465. Вычислите $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}.$

466. Если $\log_a 27=b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$?

Вычислите:

467. $\dfrac{5^{\log_3 7}}{7^{\log_3 5}} + 49^{\frac{1}{\log_5 7} + \log_7 \sqrt{3}}$. **468.** $-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n\ \text{корней}}$.

469. $\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4$.

470. $\dfrac{\log_a b - \log_{\sqrt{a}/b^3} \sqrt{b}}{\log_{a/b^4} b - \log_{a/b^6} b} : \log_b (a^3 b^{-12})$.

Дома (5 номеров)

Вычислите:

471. $2^{\log_{2\sqrt{2}} 15}$. **472.** $\left(\dfrac{16}{25}\right)^{\log_{\frac{125}{64}} 3}$. **473.** $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

474. Найдите $\lg 56$, если $\log_2 7 = a$ и $\lg 2 = b$.

475. Найдите $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2 = a$ и $\lg 13 = b$.

Практика 5

В классе (10 номеров)

Решите уравнения:

476. $\log_{1/3}(-1/x) = -0{,}5$. **477.** $\log_{x-1} 3 = 2$.

478. $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 = 6 \log_x 10$.

479. $\log_3 \dfrac{x+1}{x} = \log_3 \dfrac{x}{2-x}$. **480.** $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

481. $\log_{x^2+1} \dfrac{2x^2 - 54}{x+3} = \log_{x^2+1}(x-4)$.

482. $\log_{x^3+x}(x^2 - 4) = \log_{4x^2-6}(x^2 - 4)$.

483. $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + 0{,}5$.

484. $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$. **485.** $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}} \cdot \log_7 x = -1$.

Дома (10 номеров)

Решите уравнения:

486. $1 - \lg 5 = 0,(3) \cdot \left(\lg \dfrac{1}{2} + \lg x + \dfrac{1}{3} \lg 5\right)$. **487.** $\log_{\log_3 x} 3 = 2$.

488. $\dfrac{1}{5 - 4\lg x} + \dfrac{4}{1 + \lg x} = 3$. **489.** $\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$.

490. $\log_3 (x^2 - 4x + 3) = \log_3 (3x + 21)$.

491. $\log_{x^2-1} (x^3 + 6) = \log_{x^2-1} (4x^2 - x)$.

492. $0,5 \log_5 (x + 5) + \log_5 \sqrt{x - 3} = 0,5 \log_5 (2x + 1)$.

493. $\lg 2x = 2\lg (4x - 15)$. **494.** $\lg x = 0,5 \lg (x + 1)$.

495. $\log_3 (x - 2) + \log_3 x = \log_3 8$.

Практика 6

В классе (7 номеров)

Решите неравенства:

496. $\log_{0,5} \dfrac{x - 4}{x + 3} \leqslant -2$.

497. $\dfrac{\lg 7 - \lg (-8x - x^2)}{\lg (x + 3)} > 0$.

498. $\log_3^2 (2 - x) \leqslant 0,25$.

499. $\log_{x^2} (2 + x) < 1$.

500. $\log_x \left(\dfrac{4x + 5}{6 - 5x}\right) < -1$.

501. $\dfrac{1}{\log_{2x-3/4} x} \geqslant 2$.

502. $\log_{5x-4x^2}(4^x - 2) \geqslant 0$.

Дома (8 номеров)

Решите неравенства:

503. $\lg(x^2 - 2x - 3) > 0$.

504. $\log_{0,1(6)} \dfrac{2 - 3x}{x} \geqslant -1$.

505. $\log_7 \dfrac{x - 2}{x - 3} < 0$.

506. $\dfrac{\sqrt{x - 5}}{\log_{\sqrt{2}} (x - 4) - 1} \geqslant 0$.

507. $\log_2 \dfrac{5 - 12x}{12x - 8} + \log_{0,5} x \leqslant 0$.

508. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.

509. $\log_x \dfrac{2x+0,4}{5(1-x)} > 0.$

510. $\log_x \dfrac{2x+0,4}{5(1-x)} \geqslant 0.$

Практика 7

В классе (4 номера)

Решите неравенства:

511. $x\log_{1/2}\left(\dfrac{5}{2}-2^{1/x}\right) \geqslant 1.$

512. $3\log_{2x^2} x^2 - \log_{4x^4} x^2 - 1 > 0.$

513. $\dfrac{\log_x\Big((x-2)(x-3)\Big)}{\log_x 2} \leqslant \log_2 x.$

514. $\log_2(x^2-3x+2)+\log_{1/2}(5-x) < 0.$

Дома (3 номера)

Решите неравенства:

515. $\dfrac{2^x+2^{4-x}-10}{\sqrt{4-\log_x^2 5}} \leqslant 0.$

516. $\log_{x/3}(3x)+2\log_{1/3} x+1 \geqslant 0.$

517. $\log_{3x+2}(9x^2-17|x|+8) \geqslant 2.$

Практики 8–10

В классе (6 номеров)

518. *Решите уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1)-(x-4)\log_2(x-1)=\frac{8}{3}\log_2(x^2-1).$$

519. *Постройте фигуру, задаваемую неравенством

$$\log_{1-x^2-y^2-2x}(y-|x+1|) \geqslant 0.$$

520. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\log_{2ax+4}(x^2+2x+1)$$

имеет единственное решение?

521. При каких значениях параметра a уравнение $\log_2(4^x - a) = x$ имеет единственное решение?

522. Найдите все значения z, при которых сумма кубов корней уравнения $\log_5(x^2 - 4x + \log_5 z + 1) = 0$ больше 76.

523. Найдите все a, при которых неравенство $\log_{1-x/2}(x - a) > 1$ не имеет решений.

Дома (3 номера)

524. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\sqrt{3ax+5}}(2x^2 + x + 1) = \log_{3ax+5}(x^2 - 2x + 1)$$

имеет единственное решение?

525. Найдите все a, при которых уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет ровно два различных корня.

526. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x^2 - 6x + 5)\log_2(ax + 4) = 0$ имеет два различных корня.

Указания, решения, ответы

518. Заметим, что при логарифмировании правой части ОДЗ не сужается. *Ответ:* $\frac{4}{3}$; 3.

519. Решается стандартно методом областей; заметим, что

$$1 - x^2 - y^2 - 2x = -(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2) = 2 - (x + 1)^2 - y^2.$$

Тема 11
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Лекции 1–2

11.1. Радианная мера угла. Тригонометрический круг.

11.2. Определения тригонометрических функций в треугольнике и на тригонометрическом круге. Области определения и множества значений, знаки, четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций. Значения тангенса и котангенса на тригонометрическом круге.

11.3. Значения тригонометрических функций для углов $30°$, $45°$, $60°$.

11.4. Формулы приведения. Два правила для их запоминания («кивок лошади» и правило определения знака результата). Доказательства формул приведения (сначала для синуса и косинуса).

1) Для углов, кратных $90°$ — «в лоб».

2) Для $\alpha \in (0°;\ 90°)$ — через конгруэнтные треугольники.

3) Если $\alpha \in (90°;\ 180°)$, пусть $\alpha' = \alpha - 90°$, тогда, очевидно, $\alpha' \in (0°;\ 90°)$. Имеем, например:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin(180° - (\alpha' + 90°)) = \sin(90° - \alpha') = \cos\alpha'.$$

С другой стороны,

$$\sin\alpha = \sin(\alpha' + 90°) = \cos\alpha',$$

что и доказывает требуемую формулу.

4) Аналогично для $\alpha \in (180°;\ 270°)$, $\alpha \in (270°;\ 360°)$.

5) Для остальных углов — через периодичность; для тангенса и котангенса — через синус и косинус.

11.5. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него (связь между синусом и косинусом; между тангенсом и секансом; между котангенсом и косекансом).

11.6. Формулы сложения (сначала доказательство для косинуса через поворот, затем для синуса через формулу приведения, затем для тангенса путем деления числителя и знаменателя на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, аналогично для котангенса). Формулы двойного угла.

11.7. Формулы половинного угла (понижения степени; две формы записи). Формула тангенса половинного угла (в числителе под корнем домножаем на сопряженное знаменателю, либо наоборот):

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

11.8. Формулы преобразования суммы синусов/косинусов в произведение (обозначим полусумму и полуразность новыми буквами, и будет нам счастье). Метод «сдвиг по фазе» при преобразовании в произведение суммы синуса и косинуса.

11.9. Формулы преобразования произведения синусов/косинусов в сумму (просто работаем с правой частью).

11.10. Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad \text{(известно)};$$

$$\cos\alpha = 2\cos^2(\alpha/2) - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

Перемножая почленно эти два тождества, получим

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}.$$

11.11. Сужение/расширение ОДЗ при применении тригонометрических тождеств.

Лекция 3

11.12. Обратные тригонометрические функции: определения, области определения и множества значений.

11.13. Формулы $\arcsin(-a)$, $\arccos(-a)$, $\operatorname{arctg}(-a)$.

11.14. Решение элементарных тригонометрических уравнений $f(x) = a$ при $|a| > 1$, $a \in \{0, 1, -1\}$.

11.15. Общие формулы для решения элементарных тригонометрических уравнений $f(x) = a$.

11.16. Отбор корней тригонометрических уравнений.

Лекция 4

11.17. Метод замены при решении тригонометрических уравнений (напомнить про универсальную тригонометрическую подстановку): 1) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{4}\sin 2x$ (перейти к $2x$ в левой части).

11.18. Разложение на множители: 1) $\cos 3x + \sin 5x = 0$ (лучше все свести к косинусам); 2) $(\operatorname{tg} x)(\sin x - 1) = 0$ (хитрая ловушка с ОДЗ).

11.19. Однородные и сводящиеся к ним уравнения: 1) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos 2x + 3\sin 2x = 3$.

11.20. Линейные тригонометрические уравнения. Два способа решения: ополовинивание угла и введение вспомогательного аргумента (на примере уравнения $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$).

11.21. Хитрые приемы решения тригонометрических уравнений: 1) $\sin x \cdot \sin 5x = 1$ (либо оба равны 1, либо оба равны -1); 2) $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$ (понятно, что $|\sin x| = 1 \vee |\cos x| = 1$ является решением. Докажем, что других решений нет. Пусть $\sin^2 x = a$. Наше уравнение приобретает вид $a^5 + (1-a)^5 = 1$ или, после раскрытия пятой степени по биному Ньютона,

$$a(a^3 - 2a^2 + 2a - 1) = 0.$$

Разложим на множители выражение в скобках в левой части:

$$a((a-1)(a^2 + a + 1) - 2a(a-1)) = a(a-1)(a^2 - a + 1).$$

Таким образом, других решений, кроме $a = 0$ и $a = 1$, наше уравнение не имеет).

Лекция 5

11.22. Тригонометрические неравенства.

11.23. Системы тригонометрических неравенств. Метод концентрических окружностей: $\begin{cases} \sin\alpha > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\alpha < \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

11.24. Системы тригонометрических уравнений с одним неизвестным: использование диофантовых уравнений для нахождения пересечения множеств корней: $\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 5x = 0. \end{cases}$ Очевидно, решение данной системы сводится к нахождению пересечения двух множеств $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right\}$ и $\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right\}$, то есть к решению диофантова уравнения $5+20k=3+6n$, или $3n-10k=1$. Частное решение $n=7$, $k=2$ находим подбором, после чего можно записать общее решение $n=7+10t$, тогда $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi(7+10t)}{5}=\frac{3\pi}{2}+2\pi t$.

Конечно, в случае, когда каждое уравнение системы имеет две серии решений, а не одну, как в данном примере, ситуация несколько усложняется: придется использовать формулу

$$(A\cup B)\cap(C\cup D)=(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D),$$

решать 4 диофантовых уравнения и в ответе записывать объединение получившихся серий.

Лекция 6

11.25. Графики тригонометрических функций и обратных к ним.

11.26. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=a$. Путем возведения основного тригонометрического тождества в квадрат легко получить, что $\sin^4 x+\cos^4 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x$, дальнейшее очевидно.

2) $\sin^{10} x+\cos^{10} x=a$. Воспользуемся приемом понижения степени (это можно было сделать и в предыдущем примере); уравнение примет вид

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5=a.$$

После использования формулы бинома Ньютона все нечетные степени косинусов сократятся, получим

$$1+10\cos^2 2x+5\cos^4 2x=16a.$$

Пусть теперь $\cos^2 2x=t$; получим уравнение $5t^2+10t+1-16a=0$, для которого нам надо найти решения, лежащие на отрезке $[0,1]$.

Практики 1–2

В классе (11 номеров)

Вычислите, не пользуясь калькулятором:

527. $\sin 15^\circ$, $\operatorname{tg} 7^\circ 30'$, $\cos 67^\circ 30'$. **528.** $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

529. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{3\pi}{7}$. **530.** * $\cos\dfrac{\pi}{35}\cos\dfrac{2\pi}{35}\cos\dfrac{3\pi}{35}\ldots\cos\dfrac{17\pi}{35}$.

531. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и угол α лежит в третьей четверти. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha/2)$.

532. *Вычислите $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

533. *Докажите равенство $\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$.

534. Докажите тождество $\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

535. *Пусть α, β, γ — внутренние углы треугольника. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$.

536. Докажите, что неравенство $-4 \leqslant \cos 2x + 3\sin x \leqslant \frac{17}{8}$ верно для любого x.

537. Определите знак числа $\sin 355$.

Дома (9 номеров)

Вычислите, не пользуясь калькулятором:

538. * $\sin 18^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\sin 42^\circ$. **539.** $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg}\ 80^\circ$.

540. * $\sin\dfrac{\pi}{10}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{10}$.

541. * $\cos 2^\circ + \cos 38^\circ + \cos 74^\circ + \cos 110^\circ + \cos 146^\circ + \ldots + \cos 326^\circ$.

542. Известно, что $2\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha + 3 = 0$. Найдите $\sin 2\alpha$.

543. Докажите равенство $\dfrac{1 - 4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ$.

544. Докажите тождество $\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$.

545. Докажите, что $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{1}{3}$, если $\alpha + \beta = 60^\circ$.

546. Сравните числа $\sin 1,5$ и $\sin 1,6$.

530. Умножьте и разделите данное выражение на 2^{17} и на произведение синусов, после чего в числителе многократно применяется формула синуса двойного угла. «Четные» множители числителя сокращаются со знаменателем сразу, а «нечетные» — после применения формул приведения. *Ответ:* 2^{-17}.

532. Домножьте и разделите выражение на синус полуразности прогрессии, образованной аргументами, то есть на $\sin\frac{\pi}{7}$, затем раскройте скобки и каждое произведение разложите в сумму.

533. Разложите разность косинусов в произведение синусов, домножьте и разделите его на $\cos\frac{\pi}{10}$, после чего в числителе два раза примените формулу синуса двойного угла, а в знаменателе — формулу приведения, превратив косинус в синус.

535. Имеем:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqslant$$

$$\leqslant\cos\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 1=\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Рассмотрим теперь функцию $y=-2t^2+2t+1$. Вершина соответствующей параболы имеет координаты $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

538. Для нахождения $\cos 36^\circ$ рассмотрите равнобедренный треугольник с углом при вершине 36° и проведите биссектрису угла при основании. «Нижний» треугольник будет подобен исходному; кроме того, можно записать свойство биссектрисы.

После нахождения $\cos 36^\circ$ легко находим $\sin 18^\circ$, после чего можно заметить, что $42^\circ=60^\circ-18^\circ$.

540. См. решение задачи № 533.

541. Воспользуйтесь уже известным вам стандартным приемом: домножьте и разделите выражение на синус полуразности прогрессии, образованной аргументами, то есть на $\sin 18^\circ$. После этого в числителе раскройте скобки и преобразуйте каждое произведение в сумму.

Практики 3–5

В классе (10 номеров)

Вычислите (№ **547–550**):

547. $\arcsin(\sin 15)$.

548. $\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} - \arccos\dfrac{12}{13}\right)$.

549. $\operatorname{tg}\left(3\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

550. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

551. Докажите тождество: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; $x \in [-1; 1]$.

Докажите равенства (№ **552–554**):

552. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

553. $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} + \arcsin\dfrac{16}{65} = \dfrac{\pi}{2}$.

554. $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

555. Сравните числа $\arcsin\dfrac{2}{3} + \arcsin\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{\pi}{2}$.

556. Сравните числа $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\pi}{5}$.

Дома (6 номеров)

Вычислите (№ **557–559**):

557. $2\operatorname{arctg}\dfrac{55}{37} + 3\operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$.

558. $\arccos(\cos 26)$.

559. $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{x}$.

560. Докажите, что $3\arcsin\dfrac{1}{4} + \arccos\dfrac{11}{16} = \dfrac{\pi}{2}$.

561. Докажите, что $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23} = \dfrac{\pi}{4}$.

562. Сравните числа $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ и $\dfrac{\pi}{5}$.

Практики 6–7

В классе (14 номеров)

Решите уравнения:

563. $(1-\sin x)\cdot(\operatorname{tg}^2 x-3)=0.$

564. $\cos^2 4x+\sin^2 3x=1.$

565. $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=\dfrac{1}{8}.$

566. $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x.$

567. $\log_2\sin x+\log_2\cos x=-2.$

568. $\lg\sin x=\lg\cos x.$

569. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0.$

570. $\cos^4 x+\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0.$

571. * $\sin x-2\cos 2x=3.$

572. $\cos x+\sin x=\cos^3 x+\sin^3 x.$

573. $3\cos^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-2\cos x=4.$

574. $8\cos^6 x=3\cos 4x+\cos 2x+4.$

575. $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x.$

576. Найдите все корни уравнения $\cos x-3\sin x=2$, расположенные на отрезке $[2\pi;\,4\pi]$.

Дома (11 номеров)

Решите уравнения:

577. $\sin 3x\cos 2x\operatorname{tg} 7x=0.$

578. $\sin 4x=-\cos 5x.$

579. $\sin 17x=-\sin 13x.$

580. $\operatorname{tg} 5x=-\operatorname{ctg} 7x.$

581. $\sin^2 x-10\sin x\cos x+21\cos^2 x=0.$

582. $\sin^2 x\cdot\cos^2 x-10\sin x\cdot\cos^3 x+21\cos^4 x=0.$

583. $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x.$

584. $\sin x+\sin 3x+\cos x+\cos 3x=0.$

585. $\cos 6x\cos 3x-\cos 7x\cos 4x=0.$

586. $2\sin x-9\cos x=7.$

587. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}.$

Указания, решения, ответы

571. Используйте ограниченность функции.

Практика 8

В классе (6 номеров)

Решите неравенства:

588. $\sin(2\pi\cos x) < 0.$

589. $|\cos x| < 0,5\sqrt{3}.$

590. $\sin 2x > \cos 2x.$

591. $\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0.$

592. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geqslant 0.$

593. $4\cos x - \dfrac{5}{\cos x} > 8.$

Дома (5 номеров)

Решите неравенства:

594. $\cos(0,5\pi\sin x) > \frac{1}{2}.$

595. $\left|\operatorname{tg}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| < \sqrt{3}.$

596. $\cos x - \sin x \leqslant 1.$

597. $2\cos^2 x - 7\sin x > 5.$

598. $\dfrac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$

Практика 9

В классе (5 номеров)

Решите системы:

599. $\begin{cases} 2x - y = 2\pi, \\ 2\sin x + \sin y = 0. \end{cases}$

600. * $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y. \end{cases}$

601. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = -3/4, \\ 3\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} y. \end{cases}$

602. $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4, \\ \sin y \cdot \cos x = 3/4. \end{cases}$

603. $\begin{cases} \cos 13x = \cos x, \\ \cos 2x + \sin 5x = 1, \\ |x| < 3. \end{cases}$

Дома (4 номера)

Решите системы:

604. $\begin{cases} x - y = \pi/2, \\ 2\cos^2 x - 3\cos^2 y = -1/2. \end{cases}$

605. * $\begin{cases} \sin x - \sin y = 1/2, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}/2. \end{cases}$

606. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 1,5. \end{cases}$

607. $\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 2, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 1/2. \end{cases}$

Указания, решения, ответы

600. Сложите уравнения системы.

605. Разложив в каждом уравнении системы сумму в произведение и выполнив замену $a = \frac{x+y}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$, получим

$$\begin{cases} \cos a \sin b = 1/4, \\ \cos a \cos b = \sqrt{3}/4. \end{cases}$$

Заметим, что во втором уравнении получившейся системы значения a и b, при которых $\cos a = 0$ или $\cos b = 0$, решением системы не являются. Поделим первое уравнение на второе, получим $\operatorname{tg} b = 1/\sqrt{3}$. Дальнейшее очевидно.

Практика 10

В классе (2 номера)

608. Решите уравнение $\sin x \cdot \operatorname{tg} x + 2\cos x = a$.

609. Найдите все значения a, при которых на отрезке $[0; \pi]$ лежат ровно три корня уравнения

$$2\cos^2 x + (2a+1)\sin x - a - 2 = 0.$$

Дома (1 номер)

610. При каких значениях a на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ лежат ровно четыре корня уравнения

$$\sin^2 4x + (a^2 - 3)\sin 4x + a^2 - 4 = 0 \ ?$$

Тема 12

ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Лекция 1

12.1. Числовые последовательности. Способы задания, рекуррентные соотношения.

12.2. Окрестность точки. Предел последовательности. Единственность предела. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

12.3. Число e.

1) Задача Якоба Бернулли о годовом доходе при непрерывной капитализации процентов.

2) Неравенство Я. Бернулли для вещественного показателя степени: $(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x$ ($x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ или $\alpha < 0$).

3) Ограниченность последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$. Для начала заметим, что согласно неравенству Бернулли

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n/2} > 1+\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Возводя это неравенство в степень -2 (и не забыв при этом поменять знак неравенства), получим $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} < 4$.

4) Докажем теперь монотонное возрастание последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, для чего докажем, что $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Имеем:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\frac{\dfrac{n+1}{n}}{1} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{(n^2+2n+1)-1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \{\text{применим н-во Бернулли}\} >$$

$$> \left(1 - \frac{n+1}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Лекция 2

12.4. Пределы и арифметические операции (доказать теорему о переходе к пределу в сумме).

12.5. Переход к пределу в неравенстве (доказательство от противного). Теорема о двух полицейских (о двух милиционерах, о двух карабинерах, о двух жандармах, о двух городовых, о сэндвиче).

12.6. Предел функции в точке (определение по Гейне), его единственность. Пределы и арифметические операции, переход к пределу в неравенстве, теорема о двух полицейских.

12.7. Левые и правые пределы.

12.8. Окрестность бесконечности. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы.

12.9. Непрерывность функции в точке и на множестве. Разрывы нулевого, первого и второго рода. Непрерывность и арифметические операции.

Практика 1

В классе (8 номеров)

611. Докажите ограниченность последовательности $\dfrac{2n^2-1}{2+n^2}$.

612. Докажите, что последовательность $(-1)^n \cdot n$ не является ограниченной.

613. Докажите, что последовательность $\dfrac{n+1}{2n-1}$ монотонна, начиная с некоторого номера.

614. Используя определение предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

615. Используя определение предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

Найдите пределы:

616. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$. **617.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$.

618. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + 2 + \ldots + 2^n}{1 + 5 + \ldots + 5^n}$.

Дома (8 номеров)

619. Докажите ограниченность последовательности $\dfrac{n + (-1)^n}{3n - 1}$.

620. Докажите, что последовательность $n^2 - n$ не является ограниченной.

621. Докажите, что последовательность $\dfrac{100n}{n^2 + 16}$ монотонна, начиная с некоторого номера.

622. Используя определение предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

623. Используя определение предела последовательности, докажите, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2 - n}{2 + n} = -1$.

Найдите пределы:

624. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^5$. **625.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$.

626. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)$.

Практика 2

В классе (6 номеров)

Найдите пределы:

627. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. **628.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-1}$. **629.** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

630. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

631. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и в любой окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения. Найдите $f(x_0)$.

632. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции также разрывная функция? Постройте пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

Дома (5 номеров)

Найдите пределы:

633. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. **634.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-1}$.

635. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. **636.** * $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

637. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Сформулируйте, используя кванторы $\exists$ и $\forall$, утверждение, что $f(x)$ не является непрерывной в x_0.

Указания, решения, ответы

636. Используйте тот факт, что $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ *(первый замечательный предел)*.

Тема 13

ПРОИЗВОДНАЯ

Лекция 1

13.1. Производная функции в точке, ее механический смысл.

13.2. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцируемые и недифференцируемые функции (примеры). Производная функция.

13.3. Правила вычисления производных (для производной суммы — с доказательством).

13.4. Примеры вычисления производной по определению: x^2 и $\sin x$. Таблица производных элементарных функций.

13.5. Производная композиции функций (правило и примеры).

Лекция 2

13.6. Касательная к кривой (интуитивное определение). Касательная к графику функции в точке.

13.7. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции.

13.8. Теоремы Ролля и Лагранжа (геометрическая и аналитическая формулировки). Доказательство теоремы Лагранжа, исходя из теоремы Ролля (рассмотрим $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ и применим к ней теорему Ролля).

13.9. Производная и исследование функции на монотонность.

13.10. Экстремумы функции. Стационарные и критические точки функции. Теорема Ферма. Достаточные условия экстремума.

13.11. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке и на интервале. Совпадение точек экстремума функций $f(x)$ и $f^n(x)$, где $f(x) \geqslant 0$.

Примеры. 1) $x^3 + \dfrac{3}{x}$ на $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. 2) $\dfrac{1}{x} + \ln x$ на $(0, 2)$.

Лекции 3-4

13.12. Выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$. Выпуклость и вогнутость функции на промежутке (два эквивалентных определения). Вторая производная и исследование функции на выпуклость и вогнутость. Точки перегиба.

13.13. Горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты, способы их нахождения.

13.14. Исследование функций и построение графиков с помощью производной.

Примеры. 1) $-x^3 + 4x^2 - 4x$. 2) $\dfrac{x^3 - 1}{(x-1)^3}$. 3) $\dfrac{x^2}{x-2}$.

13.15. Экстремальные задачи, решаемые с помощью производной.

1) Докажите, что среди всех прямоугольников, вписанных в окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

2) Из трех одинаковых досок и торцевых фанерных стенок строят корыто для воды, поперечное сечение которого имеет форму трапеции или квадрата. При каком угле между доской-основанием и досками-боковыми стенками объем корыта будет наибольшим?

Практика 1

В классе (25 номеров)

Существует ли $f'(0)$, если:

638. $f(x) = |x|$. **639.** $f(x) = \sqrt{|x|}$. **640.** $f(x) = \operatorname{sign}(x)$.

Продифференцируйте функции:

641. $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

642. $f(x) = \dfrac{\ln 3}{x} + e^2$.

643. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

644. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

645. $f(x) = 5x\cos x$.

646. $f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x + 2$.

647. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

648. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

649. $f(x) = \log_x 2$.

650. $f(x)=x^5e^{-x}$.

651. $f(x)=(2x-1)^9$.

652. $f(x)=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

653. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

654. $f(x)=\sin 3x$.

655. $f(x)=\operatorname{tg} x^2$.

656. $f(x)=\sin\cos^2 x\cdot\cos\sin^2 x$.

657. $f(x)=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$.

658. $f(x)=2^{\sin x^2}$.

659. $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$.

660. $f(x)=\log_2\log_3\log_4 x$.

661. $f(x)=\ln\ln\ln x^2$.

662. * $f(x)=x^x$.

Дома (22 номера)

Существует ли $f'(0)$, если:

663. $f(x)=x\cdot|x|$. **664.** $f(x)=x\cdot\operatorname{sign}(x)$.

Продифференцируйте функции:

665. $f(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

666. $f(x)=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x^3}+\dfrac{c}{x^4}$.

667. $f(x)=x^{\sqrt{5}}-\left(\sqrt{5}\right)^x$.

668. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2}}$.

669. $f(x)=(x+1)\operatorname{tg} x$.

670. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{ctg} x}$.

671. $f(x)=x^3\ln x$.

672. $f(x)=2^x\log_2 x$.

673. $f(x)=\log_x 2^x$.

674. $f(x)=e^x\operatorname{tg}^2 x$.

675. $f(x)=\cos 2x$.

676. $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$.

677. $f(x)=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

678. $f(x)=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

679. $f(x)=a\sin bx-b\cos ax$.

680. $f(x)=\cos^n x\cdot\cos nx$.

681. $f(x)=\dfrac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)$.

682. $f(x)=3^{\cos^2 x}$.

683. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

684. $f(x)=x^{x^x}$.

Указания, решения, ответы

662. Воспользуйтесь тождеством $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$ $(f(x)>0)$.

Практика 2

В классе (8 номеров)

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

685. $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$. **686.** $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 1$.

687. $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $x_0 = -1$.

На графике функции $f(x)$ найдите точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс, если:

688. $f(x) = x(x-4)^3$. **689.** $f(x) = (3 - x^2)e^x$.

690. В каких точках касательная к графику функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$$

образует с осью Ox угол $45°$?

691. Составьте уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2, -5)$. Сделайте чертеж.

692. Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \cos x$?

Дома (8 номеров)

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

693. $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $x_0 = \pi/3$. **694.** $f(x) = x(\ln x - 1)$, $x_0 = e$.

695. $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_0 = 0$.

На графике функции $f(x)$ найдите точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс, если:

696. $f(x) = \cos 2x - 5\cos x$. **697.** $f(x) = \dfrac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$.

698. Найдите все точки, в которых касательная к графику функции $f(x) = (x+2)/(x-2)$ образует с осью Ox угол $135°$.

699. Составьте уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 5x + 6$, проходящих через точку $M(1, 1)$. Сделайте чертеж.

700. Под каким углом пересекаются кривые $y = e^{x/2}$ и $x = 2$?

Практики 3–4

В классе (15 номеров)

Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

701. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$. **702.** $f(x) = xe^{-3x}$.

Найдите точки максимума и минимума функции:

703. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$. **704.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

705. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$.

706. *Сравните числа e^{π} и π^{e}.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке:

707. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; $[-1; 2]$. **708.** $f(x) = \dfrac{9}{x} + \dfrac{25}{1 - x}$; $(0; 1)$.

Постройте график функции:

709. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. **710.** $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$.

711. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$. **712.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x}$.

713. Число 18 разбейте на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

714. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 24 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть длины сторон прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

715. Найдите наибольший объем цилиндра, периметр осевого сечения которого равен a.

Дома (12 номеров)

Найдите интервалы возрастания и убывания функции:

716. $f(x) = x^2e^{-x^2}$. **717.** $f(x) = x^2 - 10\ln x$.

Найдите точки максимума и минимума функции:

718. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

719. $f(x) = (x+2)^2(x-3)^3$. **720.** $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

721. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке: $f(x) = x^4 - 8x^2$, $x \in [-1; 2]$.

Постройте график функции:

722. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

723. $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$. **724.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$.

725. Найдите число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное число.

726. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют одинаковые длины — по 50 см. Найдите размер ее большего основания, при котором площадь трапеции будет наибольшей.

727. Найдите наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R.

Указания, решения, ответы

706. Найдите промежуток возрастания функции $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Тема 14

ИНТЕГРАЛ

Лекция 1

14.1. Первообразная. Основное свойство первообразной. Таблица первообразных элементарных функций.

14.2. Правила вычисления первообразных: первообразная суммы функций и произведения функции на число, замена переменной (в том числе линейная), интегрирование по частям (на примере $f(x) = \ln x$).

14.3. Интеграл Римана от непрерывной функции на отрезке. Формула Ньютона-Лейбница.

Лекция 2

14.4. Криволинейная трапеция. Площадь криволинейной трапеции. Площади фигур, ограниченных графиками функций.

Примеры. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$. 2) $y = 2 - x^2$, $y = x^3$, $x = 0$.

14.5. Тело вращения. Объем тела вращения (в качестве примеров — объем конуса и объем шара).

Практика 1

В классе (11 номеров)

Вычислите:

728. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2 - \sqrt[3]{x} + 1}{x\sqrt{x}}\,dx.$

729. $\displaystyle\int \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}\,dx.$

730. $\displaystyle\int \frac{x^7 - 7x^2 + x + 1}{x^2}\,dx.$

731. $\displaystyle\int \sin^2 3x\,dx.$

732. $\displaystyle\int \sin 2x \cos 2x\,dx.$

733. $\displaystyle\int\limits_1^4 (x^2 - 1)\,dx.$

734. $\int\limits_{-1}^{1} (x^2+4)^3\, dx.$

735. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = x^2 + 2x - 8$.

736. Найдите площадь фигуры, органиченной графиками функций $y = x^2/2$ и $y = \sqrt{2x}$.

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

737. $y = -\frac{32}{x^2}$, $y = -x^3$, $x = 1$.

738. $y = 2\cos x$, $y = 1, -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

Дома (8 номеров)

Вычислите:

739. $\int x^3 \sqrt[4]{x}\, dx.$

740. $\int \frac{x^4 + 6x^3 + 3x + 4\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x}} dx.$

741. $\int \cos^2 4x\, dx.$

742. $\int \cos 8x \sin 6x\, dx.$

743. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2x\, dx.$

744. $\int\limits_{0}^{2} (x^4 + 2x^2 + 4)\, dx.$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

745. $y = \frac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $x = 1$.

746. $y = x^4 - 13x^2 + 36$, $y = 0$.

Практика 2

В классе (9 номеров)

747. Для функции $f(x) = x^4$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(-1, 2)$.

748. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{5x+6}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(-1, 1)$.

749. Найдите все такие функции $f(x)$, что $f''(x) = -1$, $f(0) = f(2) = 0$.

Вычислите:

750. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$ **751.** $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \cos^2 x\,dx.$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

752. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 2$.

753. $2y = x^2 + x - 6$, $2y = -x^2 + 3x + 6$.

754. Докажите, что площадь параболического сегмента, заключенного между параболой $y = x^2$ и произвольной прямой, параллельной оси абсцисс, равна $2/3$ площади прямоугольника с вершинами в точках пересечения прямой с параболой и основаниями перпендикуляров к оси абсцисс, опущенных из точек пересечения.

755. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 8 - 0,5x^2$, касательной к нему в точке с абсциссой $x = -2$ и прямой $x = 1$.

Дома (9 номеров)

756. Для функции $f(x) = \sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $(0, 1)$.

757. Найдите функцию $F(x)$, если $F'(x) = 4x^3 - 3x^2$ и $F(1) = 3$.

Вычислите:

758. $\displaystyle\int x^2(5-x)^4\,dx.$ **759.** $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$ **760.** $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx.$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

761. $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

762. $y = 16/x^2$, $y = 2x$, $x = 4$.

763. $y = |x^2 - 1|,\ y = 5 + |x|$.

764. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -1$, $y = 2,5 + 2x - 0,5x^2$ и касательной к параболе, проведенной через ее точку с абсциссой $x = 3$.

Практика 3

В классе (6 номеров)

765. В каком отношении делится площадь квадрата параболой, проходящей через две его соседние вершины и касающейся одной стороны в ее середине?

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

766. $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$.

767. $y = 2x,\ y = x + 3,\ x = 0,\ x = 1$.

768. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

769. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнением $|y| = 1 - x^2$.

770. Однородный стержень длиной 20 м площадью поперечного сечения 4 см^2 и плотностью 8 г/см^3 вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец, с угловой скоростью 10π с$^{-1}$. Найдите кинетическую энергию стержня.

Дома (5 номеров)

771. Найдите площадь каждой из фигур, на которые прямая $y = x + 4$ делит фигуру, ограниченную линиями $y = 0,5x^2$ и $y = 8$.

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

772. $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$.

773. $y = x + 2,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 2$.

774. Сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 8 см?

775. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -3x^2 - |x| + 3$ и $y = 0$.

Тема 15
ПЛАНИМЕТРИЯ

Лекция 1

15.1. Основные понятия и аксиомы планиметрии. Луч, отрезок, полуплоскость. Сонаправленность лучей на прямой. Угол. Прямой угол, перпендикулярность прямых. Измерение отрезков и углов.

15.2. Пятый постулат Евклида (аксиома параллельности). Абсолютная геометрия, геометрии Лобачевского и Римана, их модели в евклидовой геометрии.

15.3. Сонаправленность лучей на плоскости. Направление на плоскости.

15.4. Окружность, круг, дуга, хорда, сектор, сегмент, секущая, касательная. Центральные и вписанные углы. Величина дуги. Теоремы об углах и хордах:

1. Величина угла между двумя секущими, между секущей и касательной.

2. Квадрат касательной равен произведению секущей...

3. Четыре точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда произведения частей пересекающихся отрезков равны.

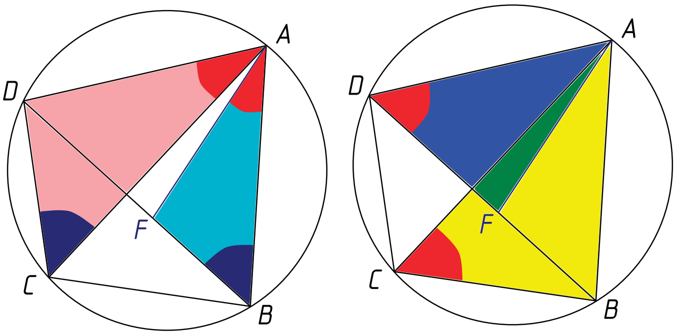
Лекция 2

15.5. Многоугольник, выпуклый многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.

15.6. Вписанные и описанные многоугольники: расположение центров окружностей, критерии для четырехугольников, формула для радиуса вписанной окружности.

15.7. ***Теорема Птолемея (Claudius Ptolemaeus).*** *Четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда произведение его диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

Доказательство. Докажем только в одну сторону. Построим на DB точку F так, чтобы углы DAC и BAF были равны (см. левый рисунок):



Заметим, кроме того, что углы DCA и ABF равны как опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому треугольники DCA и ABF подобны, откуда $CD : AC = BF : AB$ или $AC \cdot BF = AB \cdot CD$ (1).

Аналогично, треугольники ADF и ABC подобны (см. правый рисунок), откуда $BC : DF = AC : AD$ или $AC \cdot FD = BC \cdot AD$ (2). Складывая теперь (1) и (2), получаем требуемое. □

15.8. Треугольник. Теоремы синусов и косинусов. Площадь треугольника.

Формула $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ (1). Формулы для радиуса описанной окружности: $a/\sin\alpha = 2R$ (2), $R = abc/(4S)$ (3). Формула (2) доказывается, если из центра окружности опустить высоту, она же медиана и биссетриса, на сторону a; формула (3) легко получается, если из (2) выразить $\sin\alpha$ и подставить в (1).

Формула Герона (без доказательства).

15.9. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике: $a^2 = a_c \cdot c$, $h^2 = a_c \cdot b_c$, $h = \frac{ab}{c}$.

15.10. Медианы и биссектрисы треугольника, их свойства:

1. Медиана делит треугольник на две равновеликие части, три медианы — на шесть равновеликих частей.

2. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

3. Биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные боковым сторонам.

4. Точка пересечения биссектрис делит биссектрису, проведенную к стороне c, в отношении $\frac{a+b}{c}$ (для доказательства применим к левой и правой половинкам треугольника свойство о делении биссектрисой противоположной стороны, выразим отрезки стороны c и сложим получившиеся равенства).

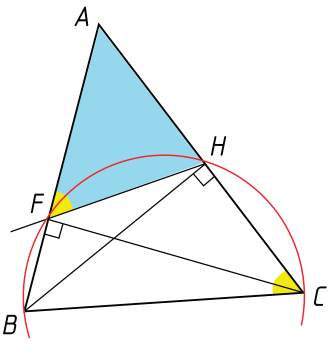
Лекция 3

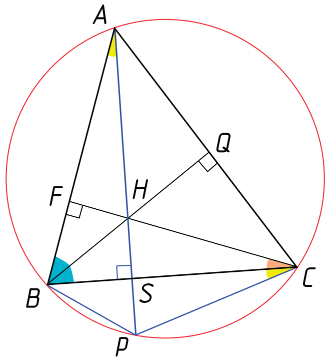
15.11. Высоты треугольника. Ортоцентр. Вневписанные окружности.

15.12. ***Теорема об основаниях двух высот.*** *Отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от исходного треугольника подобный ему с коэффициентом подобия, равным косинусу общего угла этих треугольников.*

Доказательство. Построим на BC окружность как на диаметре (см. левый рисунок), тогда точки F и H лежат на ней. Заметим теперь, что каждый из углов AFH и ACB равен полусумме дуг BF и FH. Кроме того, у треугольников, о которых идет речь в теореме, имеется общий угол A, что и завершает доказательство их подобия.

Докажем вторую часть теоремы. Найдем коэффициент подобия из треугольника AHB: $k = AH : AB = \cos\widehat{A}$. □

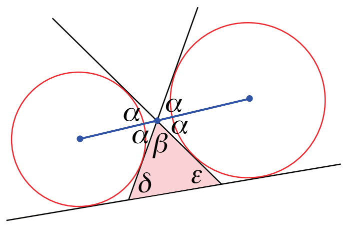




15.13. *Теорема об отражении ортоцентра.* *Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.*

Доказательство. Введем обозначения, как показано на правом рисунке; продолжим высоту AS за сторону BC, точку ее пересечения с описанной окружностью обозначим P; докажем, что $HS = SP$. Заметим для этого, что углы PCB и PAB опираются на одну и ту же дугу, а каждый из углов PAB и FCB равен $90° - \widehat{ABC}$, поэтому $\widehat{PCB} = \widehat{FCB}$. Следовательно, высота CS треугольника HCP является его биссектрисой и, следовательно, также и медианой. Из доказанного следует, что образ точки H при симметрии относительно BC совпадает с точкой P. □

15.14. *Теорема о центрах вневписанных окружностей.* *Центры двух вневписанных окружностей и вершина треугольника лежат на одной прямой.*



Доказательство. Соединим центры окружностей с вершинами треугольника; так как центры лежат на биссектрисах внешних углов треугольника, введем обозначения, как показано на рисунке. Рассматривая углы α, α, β, ε слева от одной из прямых, видим, что $2\alpha = 180° - \beta$, что и требовалось. □

15.15. *Следствие.* *Центр вписанной в треугольник окружности является ортоцентром треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что $\alpha + \beta/2 = 90°$. Таким образом, биссектриса угла треугольника перпендикулярна отрезку, соединяющему центры двух вневписанных окружностей. Осталось доказать, что эта биссектриса пройдет через центр третьей вневписанной окружности; это следует из того, что последняя вписана в угол, биссектрису которого мы рассматриваем. □

15.16. *Теорема о точке касания вписанной окружности.* *Расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной, выходящей из данной вершины, равно $p-a$, где p — полупериметр треугольника и a — длина противоположной данной вершине стороны.*

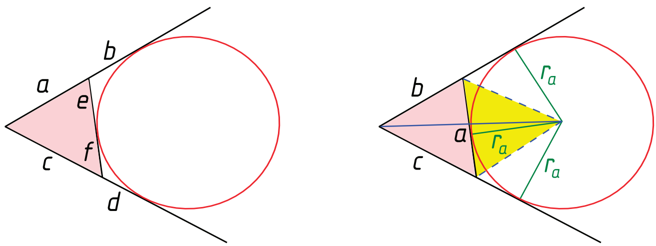
Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно. □

15.17. *Теорема о точке касания вневписанной окружности.* *Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, равно полупериметру треугольника.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству касательных имеем (см. левый рисунок):

$$a + b = c + d, \quad b = e, \quad f = d.$$

Заменяя в первом равенстве b на e и d на f, получим $a + e = c + f = p$, но $a + e = a + b$, то есть $a + b = p$, что и требовалось доказать. □



15.18. *Теорема о радиусе вневписанной окружности.* *Если S — площадь треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a, и p — полупериметр треугольника,* *то*

$$S = r_a(p - a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Площадь данного (розового на правом рисунке) треугольника равна сумме площадей розового и желтого треугольников минус площадь желтого; отсюда

$$S = \frac{1}{2}(br_a + cr_a - ar_a) = r_a \cdot \frac{1}{2}(a + b + c - 2a) = r_a \cdot (p - a),$$

что и требовалось доказать. □

Лекция 4

15.19. Параллельное проектирование.

15.20. Модуль простого отношения («шаг вперед, полшага назад»: $\langle ABC \rangle = AC : CB$). Лемма о том, что параллельное проектирование сохраняет его (доказательство через обобщенную теорему Фалеса, в случаях различного расположения точек).

15.21. Простое отношение трех точек. Его инвариантность относительно параллельного проектирования (без доказательства).

15.22. Теорема Менелая, школьный вариант.

Теорема Менелая (Menelaos). *Пусть даны треугольник ABC и прямая a, не проходящая ни через одну из его вершин. Обозначим точки пересечения этой прямой с прямыми AB, BC и AC через C_1, A_1 и B_1 соответственно. Тогда*

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

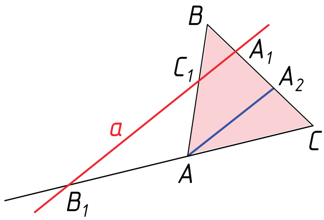
Д о к а з а т е л ь с т в о.

Применим параллельное проектирование всех участвующих в формулировке теоремы отрезков на сторону BC параллельно прямой a и воспользуемся инвариантностью простого отношения при параллельном проектировании. □

15.23. Теорема Менелая, полная формулировка («настоящие» простые отношения, в обе стороны, в правой части -1; без доказательства).

15.24. Чевиана. Теорема Чевы, школьный и полный (в правой части 1) варианты. Для доказательства школьного варианта применим два раза теорему Менелая к треугольникам, на которые исходный треугольник разбивается одной из чевиан, а затем умножим либо разделим одно из равенств на другое.

15.25. Четырехугольник.

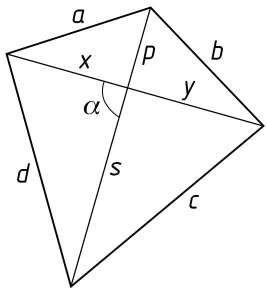


15.26. ***Теорема о площади четырехугольника через диагонали.*** *Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей, умноженного на синус угла между ними.*

Доказательство. Удобнее всего провести через вершины четырехугольника прямые, параллельные его диагоналям, а затем рассмотреть получившийся параллелограмм. □

15.27. ***Критерий перпендикулярности диагоналей четырехугольника.*** *Диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.*

Доказательство.



Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, запишем четыре раза теорему Пифагора и легко убедимся, что требуемое свойство выполняется. Обратно, пусть $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Запишем четыре раза теорему косинусов и приравняем суммы квадратов; получим

$$2(xp + sy + xs + by)\cos\alpha = 0.$$

Поскольку выражение в скобках не равно нулю, получаем $\cos\alpha = 0$, то есть $\alpha = 90°$, что и требовалось доказать. □

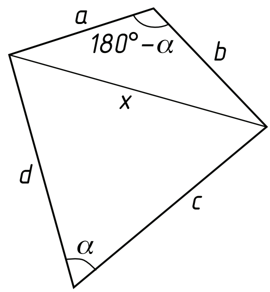
Лекция 5

15.28. ***Теорема Брахмагупты (Brahma-gupta).*** *Пусть a, b, c, d — длины сторон вписанного четырехугольника и p — его* *полупериметр. Тогда его площадь равна*

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Доказательство. Запишем два раза теорему косинусов:

$$x^2 = d^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$



Из этого равенства получаем $2(ab+dc)\cos\alpha = d^2+c^2-a^2-b^2$. Далее, очевидно,

$$16S^2 = 16\left(\frac{1}{2}(ab+dc)\sin\alpha\right)^2 = 4(ab+dc)^2(1-\cos^2\alpha) =$$

$$= 4(ab+dc)^2 - (2(ab+dc)\cos\alpha)^2.$$

Подставляя сюда предыдущий результат, получим:

$$16S^2 = 4(ab+dc)^2 - \left(d^2+c^2-a^2-b^2\right)^2 =$$

$$= (2(ab+dc)+(d^2+c^2-a^2-b^2))(2(ab+dc)-(d^2+c^2-a^2-b^2)) =$$

$$= \left((d+c)^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-(d-c)^2\right) =$$

$$= (d+c+a-b)(d+c-a+b)(a+b+d-c)(a+b-d+c) =$$

$$= 2(p-b)\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-d).$$

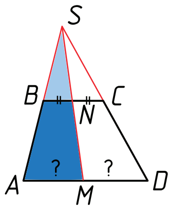
Извлекая теперь квадратный корень, получим требуемое. □

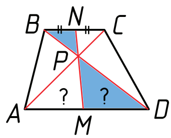
15.29. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

15.30. ***Волшебное свойство трапеции.*** *Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих ее боковые стороны, лежат на одной прямой.*

Доказательство.

Докажем теорему в два этапа.



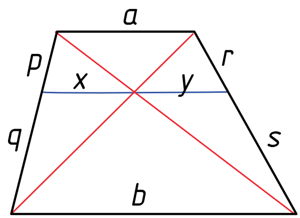


1. (См. левый рисунок.) Пусть N — середина верхнего основания трапеции, докажем, что M — середина ее нижнего основания. Из подобия треугольников SNB и SMA имеем: $SN : SM = BN : AM$; из подобия треугольников SNC и SMD имеем $SN : SM = CN : DM$. Отсюда $BN : AM = CN : DM$. Переставляя местами крайние члены этой пропорции, получим $DM : AM = CN : BN = 1$.

2. (См. правый рисунок.) Пусть N — середина верхнего основания трапеции, докажем, что M — середина ее нижнего основания. Доказывается аналогично из подобия треугольников BNP и DMP, а также треугольников CNP и AMP. □

15.31. ***Теорема о среднем гармоническом в трапеции.*** *Длина отрезка с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, равна среднему гармоническому длин оснований. Точкой пересечения диагоналей этот отрезок делится пополам.*

Доказательство. Введем обозначения как показано на рисунке.



Из подобия треугольников $x : a = q : (p+q)$ и, кроме этого, $x : b = p : (p+q)$. Складывая эти равенства, получим $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, откуда следует, что $x = ab/(a+b)$. Такой же результат получается для y, откуда следует, что $x = y$ и $x+y$ — среднее гармоническое a и b. □

15.32. *Теорема о среднем квадратичном в трапеции.* *Длина отрезка с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части, равна среднему квадратичному длин оснований.*

Доказательство. Пусть верхнее основание трапеции равно a, нижнее — b, а длина отрезка, о котором идет речь в теореме — x. Обозначим, кроме того, высоту верхней трапеции h_a, а нижней трапеции h_b. Из равенства площадей получим, что $(a+x)h_a = (b+x)h_b$, откуда $\dfrac{h_b}{h_a} = \dfrac{a+x}{b+x}$ (*). Но, очевидно, площадь всей трапеции равна удвоенной площади верхней трапеции: $(a+b)(h_a+h_b) = 2(a+x)h_a$. Поделив это равенство на h_a, получим: $(a+b)\left(1+\dfrac{h_b}{h_a}\right) = 2(a+x)$. Подставим сюда (*): $(a+b)\left(1+\dfrac{a+x}{b+x}\right) = 2(a+x)$. Решая это уравнение относительно x, получим $x = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. □

15.33. *Теорема о среднем геометрическом в трапеции.* *Длина отрезка с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и делящего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований.*

Доказательство. Очевидно. □

Практика 1

В классе (6 номеров)

776. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Докажите, что CO — биссектриса угла ACB.

777. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Докажите, что AC параллельна BD.

778. Через середину C дуги AB проводят две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D, E и хорду AB — в точках F и G. Докажите, что четырехугольник $DEGF$ может быть вписан в окружность.

779. *Через точку O проведены три прямые, попарные углы между которыми равны $60°$. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые, служат вершинами правильного треугольника.

780. *Прямоугольный треугольник ABC ($\angle BAC$ — прямой) двигается по плоскости таким образом, что вершины B и C скользят по сторонам заданного прямого угла. Докажите, что геометрическим местом точек A является некоторый отрезок и найдите его длину.

781. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (то есть ни одна из них не лежит внутри другой). Найдите длину общей касательной к этим окружностям.

Дома (5 номеров)

782. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Докажите, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

783. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

784. Докажите, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

785. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. AB — общая касательная этих окружностей, не проходящая через M (A и B — точки касания). Докажите, что M лежит на окружности с диаметром AB.

786. *На окружности взяты точки A, B, C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$.

Дополнительные задачи

787. *На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. A_1, B_1, C_1, D_1 — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.

Указания, решения, ответы

779. Постройте на AO окружность как на диаметре.

780. Пусть O — вершина заданного прямого угла, тогда четырехугольник $OBAC$ — вписанный. Докажите, что угол BOA не изменяется.

786. Заметим, что углы BCM и BAD находятся как полусуммы одних и тех же дуг, поэтому они равны. Отсюда треугольники MAD и MCB подобны. Далее рассмотрите треугольники ACM и DBM: они подобны, так как угол M у них общий, а углы MAC и BDM опираются на одну и ту же дугу. Затем запишите пропорции и как-то скомбинируйте их.

787. *Ответ:* 90°.

Практика 2

В классе (5 номеров)

788. *Длины двух сторон треугольника равны a, а длина третьей стороны равна b. Вычислите радиус его описанной окружности.

789. *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.

790. Основание треугольника равно 20, а медианы к боковым сторонам равны 18 и 24. Найдите площадь треугольника.

791. *В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

792. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найдите длины сторон треугольника.

Дома (5 номеров)

793. *Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S, равна $3S/4$.

794. Основание треугольника равно 26, а медианы, проведенные к боковым сторонам, равны 36 и 15. Найдите площадь треугольника и третью медиану.

795. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

796. Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

797. *Найдите величину $\cos 36°$.

Указания, решения, ответы

788. *Ответ:* $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

789. Используйте подобие получившихся треугольников и исходного треугольника, а также тот факт, что отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия.

791. Пусть в треугольнике ABC $AB = BC = 20$, $AC = 5$, AA_1 — искомая биссектриса. По теореме косинусов легко найти косинус угла C; так как BA_1 и и A_1C легко находятся по свойству биссектрисы, снова применяем теорему косинусов к треугольнику AA_1C и получаем требуемое.

793. Известно, что медиана делит треугольник на две равновеликие части, а три медианы — на шесть равновеликих частей. Рассмотрим треугольник ABC с медианами AA_1, BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке O. Продолжите медиану BB_1 за точку B_1 на расстояние OB_1; получившуюся точку обозначьте B_2. Докажите, что треугольник OCB_2 будет подобен треугольнику, составленному из медиан треугольника ABC, и найдите коэффициент подобия.

797. Рассмотрите равнобедренный треугольник с углом при вершине $36°$ и проведите биссектрису одного из углов при основании. Примените подобие треугольников и свойство биссектрисы.

Практика 3

В классе (5 номеров)

798. Пусть $AC = b$, $AB = c$, r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_a касается стороны BC), p — полупериметр треугольника ABC. Докажите, что $rr_a = (p-b)(p-c)$.

799. Пусть r и r_a, r_b, r_c — радиусы вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$.

800. Пусть $BC = a$, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_b касается стороны AC, радиуса r_c — стороны AB), p — полупериметр треугольника ABC. Докажите, что $r_b r_c = p(p-a)$.

801. *В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

802. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$ (*ортотреугольника*).

Дома (3 номера)

803. Пусть $BC = a$, r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_a касается стороны BC), p — его полупериметр. Докажите, что $pr = r_a(p-a)$.

804. Пусть r и h_a, h_b, h_c — радиус вписанной окружности и длины трех высот треугольника ABC. Докажите, что

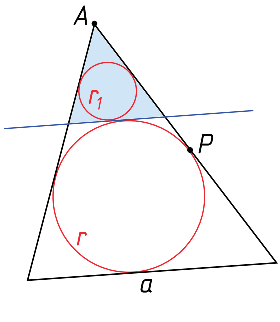
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

805. Пусть r и r_a, r_b, r_c — радиусы вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что $S_{ABC} = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

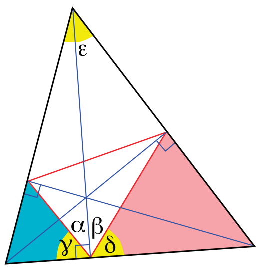
Указания, решения, ответы

801. Введем обозначения, как показано на левом рисунке. Пусть p и r — периметр и радиус вписанной окружности для исходного треугольника, а p_1 и r_1 — для одного из отсекаемых. Так как большая окружность является вневписанной для отсекаемого треугольника, то $AP = p_1$. С другой стороны, большая окружность вписана в исходный треугольник, поэтому $AP = p - a$. Таким образом, $p_1 = p - a$.

Рассмотрим теперь коэффициент подобия исходного и отсекаемого треугольников. С одной стороны, он равен отношению их периметров, а с другой стороны, — отношению радиусов вписанных окружностей. Сложите получившиеся равенства для всех отсекаемых треугольников.



К задаче **801**



К задаче **802**

802. Так как отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, отсекает от него подобный треугольник, голубой и розовый треугольники (см. правый рисунок) подобны исходному. Подумайте, какие углы равны.

Практика 4

В классе (5 номеров)

806. *В треугольнике проведены три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой касания вписанной в треугольник окружности с противоположной стороной. Докажите, что эти отрезки пересекаются в одной точке.

807. *На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и B_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ и $AB_1 : B_1C = 2 : 1$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение $B_1O : OB$.

808. *В условиях предыдущей задачи найдите площадь треугольника AOB_1, если $S_{ABC} = 6$.

809. *Отрезок BM является медианой треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 2 : 5$ и $BQ : QC = 10 : 1$. Отрезок PQ пересекает BM в точке R. Найдите отношение $BR : RM$.

810. *На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 2.$$

Точки P, Q, R являются попарным пересечением отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Найдите отношение площадей треугольников ABC и PQR.

Дома (3 номера)

811. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 3$ и $AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OA_1$.

812. В условиях предыдущей задачи найдите площадь четырехугольника BC_1OA_1, если $S_{ABC} = 1$.

813. Даны катеты прямоугольного треугольника ABC: $AC = 4$ и $BC = 3$. В треугольнике проведены биссектриса CD и медиана AM. Они пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника CEM.

806. Примените теорему Чевы.

807. *Ответ:* 2:1. **808.** *Ответ:* 8/3. **809.** *Ответ:* 4:1.

810. Пусть P — точка пересечения AA_1 и CC_1, Q — точка пересечения AA_1 и BB_1, R — точка пересечения BB_1 и CC_1. Выясним, как точки P, Q и R делят отрезки AA_1 и BB_1, используя теорему Менелая; получим

$$AP : PQ : QA_1 = 3 : 3 : 1, \quad BQ : QR : RB_1 = 3 : 3 : 1.$$

Теперь воспользуемся тем фактом, что если чевиана делит сторону треугольника в каком-либо отношении, то в том же отношении она делит и его площадь: пусть $S_{ABC} = S$, тогда $S_{ABB_1} = \frac{2}{3}S$, а $S_{ABQ} = \frac{3}{7}S_{ABB_1}$. Следовательно, $S_{AQB_1} = \frac{4}{7}S_{ABB_1} = \frac{8}{21}S$.

Далее рассмотрим треугольники QAB_1 и QPR и воспользуемся теоремой о том, что отношение их площадей равно отношению произведений боковых сторон. Получим: $S_{PQR} = \frac{9}{24}S_{QAB_1} = \frac{1}{7}S$.

Ответ: 7:1.

Практика 5

В классе (6 номеров)

814. *Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найдите отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

815. *Большее основание трапеции имеет длину 24. Найдите длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4.

816. *Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, на которые они делятся точкой пересечения.

817. *Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

818. *Найдите длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

819. *Докажите, что площадь трапеции равна произведению длины одной из боковых сторон и перпендикуляра, опущенного из середины другой боковой стороны к первой.

Дома (5 номеров)

820. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

821. *Используя результат предыдущей задачи, докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

822. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 3 : 1$, $BL : LC = 2 : 3$, $CM : MD = 1 : 2$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найдите отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

823. Около окружности с диаметром 15 описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17. Найдите основания трапеции.

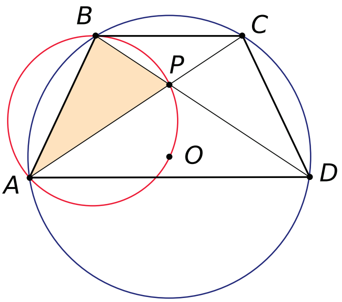
824. *В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найдите площадь трапеции.

Указания, решения, ответы

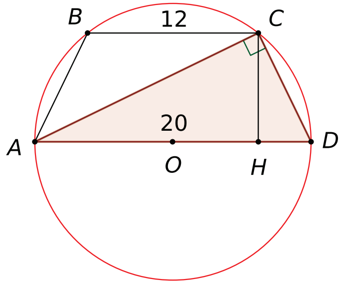
814. *Ответ:* 25:48. **815.** *Ответ:* 16.

816. Используя подобие кое-каких треугольников, удачно обозначьте длины всех отрезков, после чего примените теорему Пифагора.

817. Из рассмотрения синей окружности (см. левый рисунок) следует, что $\overset{\frown}{APB} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{CD}) = \overset{\smile}{AB} = \overset{\frown}{AOB}$. Далее рассмотрите красную окружность и углы APB и AOB.



К задаче **817**



К задаче **818**

818. Поскольку трапеция (см. правый рисунок) равнобедренная, легко найти AH, и HD. Из прямоугольного треугольника ACD найдите CH. Далее по известному свойству о средних геометрических в прямоугольном треугольнике найдите боковые стороны и диагонали.

819. Проведите через середину одной боковой стороны прямую, параллельную другой боковой стороне.

821. Из равенства диагоналей следует, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон исходного четырехугольника — ромб.

824. «Удвоим» трапецию, получим правильный шестиугольник. *Ответ:* $\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

Практика 6

В классе (4 номера)

825. *В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = a$ и $BC = b$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM отсекает от площади трапеции $1/4$ ее часть. Найдите длину отрезка CM.

826. *Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

827. *В выпуклом четырехугольнике диагонали равны 1 и 2, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

828. *(*Биофак МГУ, 1979.*) Около окружности радиуса R описана трапеция $ABCD$, длина меньшего основания BC которой равна a. Пусть E — точка касания окружности со стороной AB, и длина отрезка BE равна b. Найдите площадь трапеции.

Дома (3 номера)

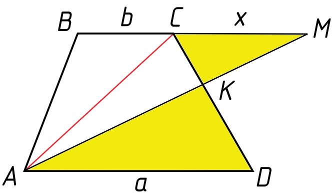
829. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину отрезка CM.

830. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $5 : 11$. Найдите длины оснований трапеции.

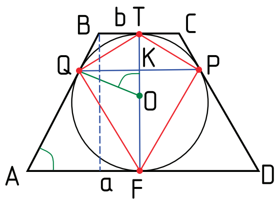
831. *Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найдите все стороны трапеции, если ее высота равна 12, а длины биссектрис 15 и 13.

825. Пусть площадь трапеции (см. левый рисунок) равна S, тогда $S_{AKD} = S/4$. Так как у треугольника ACD и у трапеции общая высота, имеем $S_{ACD} = \frac{a}{a+b} \cdot S$, откуда $S_{ACK} = \left(\frac{a}{a+b} - \frac{1}{4}\right) S = \frac{3a-b}{4(a+b)} \cdot S$. Но площади треугольников ACK и AKD относятся как их основания, отсюда, с учетом подобия треугольников AKD и MKC, получим:

$$\frac{x}{a} = \frac{CK}{KD} = \frac{S_{ACK}}{S_{AKD}} = \frac{\frac{3a-b}{4(a+b)} \cdot S}{S/4} = \frac{3a-b}{a+b}; \quad x = a \cdot \frac{3a-b}{a+b}.$$



К задаче **825**



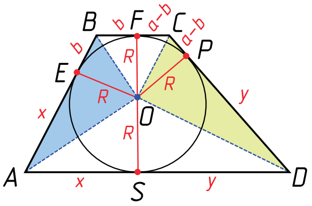
К задаче **826**

826. Введем обозначения, как показано на правом рисунке (длины оснований трапеции равны a и b). Поскольку высота трапеции равна 2, ее площадь равна $a+b$, то есть $a+b=5$. Далее опустите из вершины B высоту и найдите синус угла A, после чего докажите, что $\angle QOT = \angle A$. Но $S_{QOT} = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OT \cdot \sin \widehat{QOT}$, а площадь всего четырехугольника $FQTP$ в 4 раза больше.

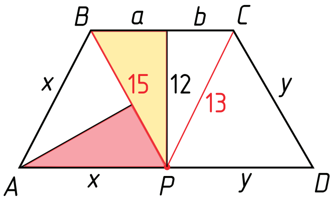
827. Докажите, что если «средние линии» выпуклого четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны.

828. Введем обозначения, как показано на левом рисунке. Поскольку AO, BO, CO, DO — биссектрисы, треугольники ABO и DCO — прямоугольные, поэтому $R^2 = xb = y(a-b)$. Выразив отсюда x и y, легко найти площадь трапеции.

Ответ: $aR\left(\frac{R^2}{b(a-b)} + 1\right)$.



К задаче **828**



К задаче **831**

831. Введем обозначения, как показано на правом рисунке. Поскольку BP и CP — биссектрисы, они отсекают от трапеции равнобедренные треугольники BAP и CPD. По теореме Пифагора легко найти a и b, а затем верхнее основание. Далее примените подобие закрашенных треугольников.

Практика 7

В классе (2 номера)

832. *Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

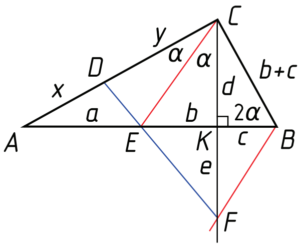
833. *Через точку M, лежащую внутри круга, проведена хорда AB; из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на касательные, проходящие через точки A и B. Докажите, что величина $\frac{1}{PM}+\frac{1}{QM}$ не зависит от выбора хорды, проходящей через точку M.

Дома (2 номера)

834. *На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

835. *В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

Указания, решения, ответы



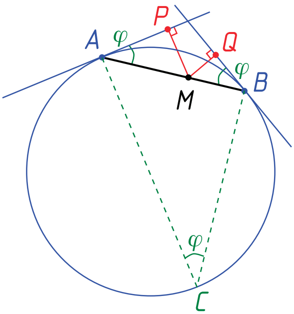
832. Из треугольника CEK $\widehat{CEK} = 90° - \alpha$, а из треугольника CBE $\widehat{BCE} = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$, поэтому треугольник BCE равнобедренный и $BE = BC = b + c$. Далее, из подобия треугольников ECK и BFK имеем $d : e = b : c$. Прибавляя к обеим частям этого равенства 1, получим, что $(d + e) : e = (b + c) : c$ (1).

По свойству биссектрисы $a : b = (x + y) : d$. Но из подобия треугольников ACK и CBK последнее отношение равно $(b + c) : c$, то есть $a : b = (b + c) : c$ (2). Сравнивая (1) и (2), получаем, что $(d + e) : e = a : b$ (3).

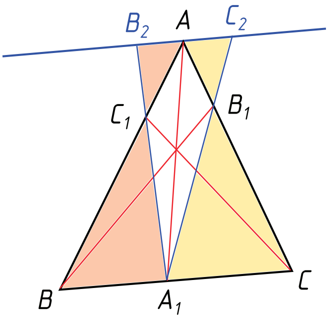
Применим теперь теорему Менелая к треугольнику ACK и прямой DF; учтем при этом (3):

$1 = \frac{x}{y} \cdot \frac{d+e}{e} \cdot \frac{b}{a} = \frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{x}{y}$, откуда $x = y$.

833. Пусть C — произвольная точка большой дуги AB (см. левый рисунок). Поскольку угол между касательной и хордой равен половине отсекаемой дуги, все три угла, обозначенные на рисунке буквой φ, равны. Из треугольников APM и BQM имеем $\frac{1}{PM} = \frac{1}{AM \sin \varphi}$, $\frac{1}{QM} = \frac{1}{MB \sin \varphi}$, а из треугольника ABC по теореме синусов $\frac{AB}{\sin \varphi} = 2R$ (R — радиус окружности). Получаем $\frac{1}{PM} + \frac{1}{QM} = \frac{AM + MB}{AM \cdot MB \cdot \sin \varphi} = \frac{2R}{AM \cdot MB}$.



К задаче **833**



К задаче **834**

834. Заметим подобие треугольников (см. правый рисунок): $AC_1B_2 \sim BC_1A_1$ и $AB_1C_2 \sim CB_1A_1$. Отсюда $AB_2 \cdot C_1B = AC_1 \cdot BA_1$ и $AC_2 \cdot CB_1 = A_1C \cdot B_1A$; найдите $\dfrac{AB_2}{AC_2}$ и примените теорему Чевы.

835. Три биссектрисы пересекаются в одной точке, а кое-какой четырехугольник — вписанный.

Практика 8

В классе (2 номера)

836. *В трапеции $ABCD$ даны основания $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите CK.

837. *Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как $2 : 5$. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Дома (3 номера)

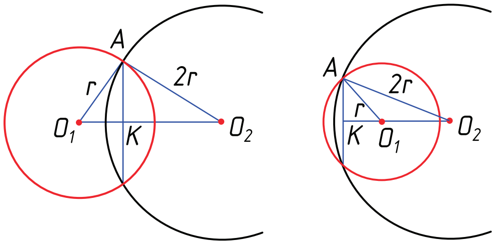
838. *В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Докажите, что $\angle PAC = \angle PQC$.

839. *В условиях предыдущей задачи найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $PQ = 8$ и $\overset{\frown}{ABC} = 60°$.

840. *В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM. Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите MN.

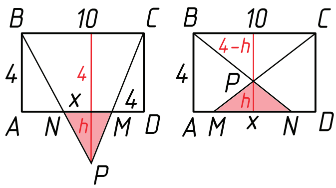
Указания, решения, ответы

836. Нетрудно найти диагональ трапеции: $AC = 75$. Найдем полупериметр треугольника ACD: $p = 105$. В первом случае, если окружность вписана в треугольник ACD, $CK = p - AD = 5$. Во втором случае, если окружность является вневписанной для треугольника ACD, $CK = p - AC = 30$. *Ответ:* 5 или 30.



К задаче **837**

837. Поскольку точки O_1 и O_2 равноудалены от концов хорды, O_1O_2 — ее серединный перпендикуляр. Тогда $AK = \sqrt{3}$ и из условия $\dfrac{\sqrt{r^2-3}}{\sqrt{4r^2-3}} = \dfrac{2}{5}$ (случай 5/2 невозможен, так как числитель явно меньше знаменателя). Найдите r^2, KO_1, KO_2. Далее рассмотрите два случая (см. рисунок). *Ответ:* 7 или 3.



838. Найдите вписанный четырехугольник.

839. Треугольники PBQ и ABC подобны с коэффициентом $\cos 60°$, отсюда легко найти AC.

840. Пусть $MN = x$ (см. рисунок на предыдущей странице). Поскольку $S_{MNP} = 1$, получаем $xh = 2$ (*). Возможны два случая (см. рисунок). Из подобия треугольников в первом случае $\dfrac{4+h}{h} = \dfrac{10}{x}$; выразите отсюда h, подставьте в (*) и получите уравнение для x. Аналогично поступите во втором случае. *Ответ:* 2 или $\frac{5}{2}$.

Тема 16
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

Лекция 1

16.1. Преобразование (биекция плоскости на себя), композиция преобразований. Преобразование, обратное к данному. Понятие о группе преобразований: показать ассоциативность в группе поворотов (на примере); пример некоммутирующих элементов в группе всех преобразований плоскости.

Эрлангенская программа Ф. Клейна.

16.2. Движение — преобразование, сохраняющее расстояния. Легко доказать, что композиция двух движений является движением и что отображение плоскости на себя, обратное движению, является движением. Группа движений плоскости. Конгруэнтность фигур (определение, обозначение).

16.3. Свойства движений.

Теорема. *Образом прямой является прямая.*

Доказательство. Используя критерий коллинеарности $|AX| + |XB| = |AB|$, легко доказать, что коллинеарные точки отображаются в коллинеарные. Проблема в том, что прямая может отображаться *не во всю* прямую, а только в ее часть; осталось, таким образом, доказать, что образом прямой является *вся* прямая.

Пусть $\varphi(a) \subseteq a'$. Поскольку φ^{-1} — тоже движение, то и $\varphi^{-1}(a') \subseteq a$, поэтому $\varphi(\varphi^{-1}(a')) \subseteq \varphi(a)$, то есть $a' \subseteq \varphi(a)$, поэтому $a' = a$. $\square$

Луч отображается в луч (без доказательства). Сохранение конгруэнтности углов (доказательство через конгруэнтность треугольников). Сохраняется сонаправленность лучей (без доказательства).

16.4. Осевая симметрия. Осевая симметрия является движением:

1) если одна из двух точек — концов отрезка — лежит на оси, то все следует из свойства серединного перпендикуляра;

2) если обе точки лежат по одну сторону от оси, либо по разные стороны от оси — рассматривать равные треугольники (точка пересечения «диагоналей» лежит на оси, это следует из равенства углов).

Когда две осевые симметрии коммутируют? — Тогда и только тогда, когда их оси перпендикулярны (на примере, без доказательства).

16.5. Определения движений I и II рода. Очевидные свойства композиции движений I и II рода.

Лекция 2

16.6. Повороты, параллельные переносы. Теоремы о том, что они являются движениями. Скользящие симметрии.

16.7. Движение однозначно определяется образами трех неколлинеарных точек. Неподвижные точки. Теоремы о неподвижных точках.

16.8. Теорема о разложимости движения в композицию не более чем трех осевых симметрий (без доказательства). Теорема Шаля (любое движение I рода есть либо поворот, либо параллельный перенос; любое движение II рода — скользящая или, как частный случай, осевая симметрия) — без доказательства. Пример: какой скользящей симметрии равна композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, не параллельный оси?

Лекция 3

16.9. Гомотетия. Множество всех гомотетий с общим центром является абелевой группой.

16.10. Преобразование подобия. Разложение подобия в композицию движения и гомотетии.

Практики 1—3

Деление задач на классные и домашние (всего 22 номера):

	В классе	Дома
Практика 1	841, 843, 845, 846, 847, 851, 854, 857	842, 848
Практика 2	849, 853, 855, 859	852, 856, 858
Практика 3	850, 861, 862	844, 860

Параллельный перенос

841. Докажите, что при параллельном переносе окружность переходит в окружность.

842. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, на другой — точка B, причем $\angle AKB$ — прямой. Докажите, что $|AB| = 2R$.

843. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

844. Дан угол ABC и прямая l. Постройте прямую, параллельную прямой l, на которой стороны угла ABC высекают отрезок длины a.

845. *Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$ и $BD = b$. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

Центральная симметрия

846. Докажите, что при центральной симметрии окружность переходит в окружность.

847. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образованного сторонами треугольника и параллельными им касательными к его вписанной окружности, равны.

848. *Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ и площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

849. Докажите, что композиция двух центральных симметрий является параллельным переносом.

850. *Постройте прямую, на которой две данные окружности с общим центром высекают три конгруэнтных отрезка.

851. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол однаковые монеты. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.

852. Каким движением является композиция центральной симметрии и параллельного переноса?

853. *Докажите, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

Осевая симметрия

854. Докажите, что окружность при осевой симметрии переходит в окружность.

855. Докажите, что если фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

856. *Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45°. Докажите, что $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

Поворот

857. Докажите, что при повороте окружность переходит в окружность.

858. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что точки их пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

859. *На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK.

860. *На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P — середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

861. *Найдите геометрическое место точек M, лежащих внутри правильного треугольника ABC, таких, что выполняется равенство $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

862. *Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

Указания, ответы

845. Пусть H_1 — точка пересечения высот, о которой идет речь. Примените параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{H_1H}$.

Ответ: $\sqrt{b^2 - a^2}$.

848. Рассмотрите точку D_1, симметричную D относительно P.

850. Отразите меньшую окружность относительно любой ее точки.

852. *Ответ:* центральной симметрией.

853. Рассмотрите композицию двух симметрий, если они существуют.

856. Отразите точки C и D относительно прямой AB.

859. Поверните квадрат вокруг точки A на $90°$ так, чтобы точка B перешла в точку D. *Ответ:* $45°$.

860. Рассмотрите поворот на $60°$ вокруг точки C, переводящий точку E в точку D.

861. Рассмотрите поворот с центром A, переводящий B в C.

Ответ: дуга окружности, лежащая внутри треугольника, из каждой точки которой отрезок BC виден под углом $150°$.

862. Задача решается поворотом одной из прямых на $60°$.

Тема 17

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ

Лекция 1

17.1. Основные понятия и аксиомы стереометрии; аксиомы о трех мухах, двух гвоздях и пересечении плоскостей. Теоремы о натягивании единственной плоскости на прямую и точку; на две пересекающиеся прямые.

17.2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Параллельные прямые. Аналог пятого постулата Евклида в пространстве.

Лемма «Береги глаза». *Если* $a \parallel b, a \cap \alpha = \{M\}$, *то* $\exists N = b \cap \alpha$.

Доказательство. Натянем на a и b плоскость β, пусть $p = \alpha \cap \beta$. Поскольку M — общая точка α и β, то $M \in p$, то есть a пересекает p, поэтому b тоже пересекает p в некоторой точке N, которая и является искомой. □

Транзитивность параллельности прямых. *Если* $a \parallel b$, $b \parallel c$, *то* $a \parallel c$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную $M \in c$ и натянем плоскость α на a и M. Докажем, что $c \subset \alpha$: от противного, если бы c пересекала α, то по лемме «береги глаза» b тоже пересекала бы α, но тогда по той же лемме и a пересекала бы α. Таким образом, a и c лежат в одной плоскости; осталось доказать, что они не пересекаются. Если бы они пересекались, это противоречило бы аналогу пятого постулата Евклида, поскольку обе пересекающиеся прямые a и c были бы параллельны b. □

17.3. Параллельная проекция, ее свойства. Проекция фигуры. Изображение пространственных фигур.

17.4. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Признак параллельности прямой и плоскости. *Если* $a \parallel b$ *и* $b \subset \alpha$, *то* $a \parallel \alpha$.

Доказательство. Собственно, это с очевидностью следует из леммы «береги глаза». □

Теорема о «плюющемся канатоходце». *Если* $a \parallel \alpha$ *и* $a \subset \beta$ *то* $\alpha \cap \beta \parallel a$.

Доказательство. Очевидно, что линия пересечения плоскостей α и β лежит вместе с прямой a в плоскости β и не пересекается с прямой a, иначе a пересекалась бы с α. $\square$

Теорема о гимнастических брусьях. *Если $a \parallel b$ и $a \parallel \alpha$, то $b \parallel \alpha$ или $b \subset \alpha$.*

Доказательство. Это утверждение тоже с очевидностью следует из леммы «береги глаза». $\square$

Лекция 2

17.5. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых.

17.6. Существование единственной плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых параллельно другой.

Теорема. *Если $a \dot{-} b$, то $\exists! \alpha$ такая, что $a \subset \alpha$ и $b \parallel \alpha$.*

Доказательство. Возьмем на a произвольную точку и проведем через нее прямую c, параллельную b, после чего натянем на a и c плоскость α и докажем, что она искомая. Осталось доказать, собственно, что такая плоскость единственна. Пусть α' — другая плоскость, удовлетворяющая условию теоремы. Если $\alpha' \neq \alpha$, то α' пересекается с прямой c, а поэтому по лемме «береги глаза» пересекается и с прямой b. $\square$

17.7. Лемма об углах с соответственно сонаправленными сторонами. Угол между прямыми и корректность его определения.

Лекция 3 (1 час)

17.8. Взаимное расположение двух плоскостей.

Признак параллельности двух плоскостей. *Пусть $a, b \subset \alpha$, $a', b' \subset \beta$, $a \cap b \neq \varnothing$. Если $a \parallel a'$ и $b \parallel b'$, то $\alpha \parallel \beta$.*

Доказательство. Докажем от противного, предположим, что $\alpha \cap \beta = p$. По признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$, а по теореме о плюющемся канатоходце $p \parallel a$. Аналогично, $p \parallel b$. Таким образом, через точку пересечения прямых a и b проходят две прямые, параллельные p, чего не может быть. $\square$

17.9. Теоремы о параллельных плоскостях.

Теорема о разрезании торта. *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны.*

Доказательство. От противного все очевидно. $\square$

Теорема о двух столбах. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, конгруэнтны.*

Доказательство. Натянем на эти две параллельные прямые плоскость, получим параллелограмм и все очевидно. □

Лекция 4

17.10. Тетраэдр и параллелепипед, их изображение.

Пареллелепипед — пересечение шести полупространств, порожденных тремя парами параллельных плоскостей, таких, что: 1) полупространства, порожденные одной парой плоскостей, не являются подмножествами одно другого; 2) плоскости из разных пар непараллельны. Свойства параллелепипеда: противоположные грани равны и параллельны, диагонали пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

17.11. Определение сечения. Сечения тетраэдра и параллелепипеда: метод следов. Понятие следа. Метод следов на ребрах (прямых, содержащих ребра).

17.12. Метод следов на гранях (плоскостях, содержащих грани): если XY — след секущей плоскости на какой-либо (обычно на нижней) грани, R и S — точки сечения, R' и S' — их проекции на нижнюю грань, то $(RS) \cap (R'S') \in (XY)$.

17.13. Метод внутреннего проектирования (вспомогательных плоскостей).

Практика 1

В классе (7 номеров)

863. Даны прямая и не лежащая на ней точка. Докажите, что все прямые, проходящие через эту точку и пересекающиеся с данной прямой, лежат в одной плоскости.

864. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проходит плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если C — середина AB и $BB_1 = 7$.

865. Точка C лежит на отрезке AB, причем $AB : BC = 4 : 3$. Отрезок CD, равный 12, параллелен плоскости α, проходящей через точку B. Докажите, что прямая AD пересекает α в некоторой точке E и найдите длину отрезка BE.

866. *Три плоскости, не проходящие через одну прямую, попарно пересекаются. Докажите, что прямые, по которым они пересекаются, либо параллельны, либо имеют общую точку.

867. Докажите, что если прямые AB и CD скрещиваются, то прямые AD и BC тоже скрещиваются.

868. В пространственном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD.

869. Докажите, что плоскость α, проходящая через середины двух ребер основания тетраэдра и вершину, не принадлежащую основанию, параллельна третьему ребру основания. Найдите периметр и площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если длины всех ребер тетраэдра равны 20.

Дома (7 номеров)

870. Три прямые попарно пересекаются. Докажите, что они либо лежат в одной плоскости, либо имеют общую точку.

871. Точка C лежит на отрезке AB. Через точку A проходит плоскость, а через точки B и C — параллельные прямые, пересекающие эту плоскость соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите длину отрезка CC_1, если $AC : CB = 3 : 2$ и $BB_1 = 20$.

872. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 12. Точка M не лежит в плоскости трапеции, а точка K — середина отрезка BM. Докажите, что плоскость ADK пересекает отрезок MC в некоторой точке H, и найдите отрезок KH.

873. Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая a, параллельная диагонали BD, а через вершину C — прямая b, не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что прямые a и CD пересекаются.

874. В условиях предыдущей задачи докажите, что прямые a и b скрещиваются.

875. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны.

876. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Указания, решения, ответы

866. *Решение.* Обозначим данные плоскости α, β, γ; пусть, кроме того, $a = \beta \cap \gamma$, $b = \alpha \cap \gamma$, $c = \alpha \cap \beta$. Предположим, что $a \cap b = \{M\}$. Тогда $M \in \beta$, $M \in \alpha$, поэтому $M \in \alpha \cap \beta = c$. Таким образом, мы доказали, что если какие-то две прямые из трех пересекаются, то третья прямая пройдет через точку их пересечения. Поэтому либо никакие две прямые не пересекаются, либо все три прямые пересекаются в одной точке.

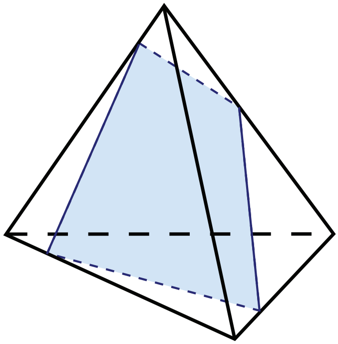
Практика 2

В классе (5 номеров)

877. Докажите, что три параллельные плоскости высекают на любых двух пересекающих эти плоскости прямых пропорциональные отрезки.

878. *Дан правильный тетраэдр (все его ребра равны). Докажите, что периметры фигур, которые получаются при пересечении этого тетраэдра плоскостями, параллельными двум противоположным ребрам, равны.

879. Докажите, что данный рисунок неверен.



К задаче **879**

880. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке (центре тяжести тетраэдра) и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершин.

881. *Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны между собой, то противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны.

Дома (4 номера)

882. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между плоскостью и параллельной ей прямой, равны.

883. *Докажите, что сумма квадратов двух противоположных ребер тетраэдра вдвое больше суммы квадратов отрезков, соединяющих соответственно середины остальных противоположных ребер.

884. *Пусть α, β и γ — углы, образованные произвольной прямой с тремя попарно перпендикулярными прямыми. Докажите, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

885. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, K — середина ребра DD_1. Найдите косинус угла между прямыми CK и A_1D.

878. *Указание.* Докажите, что все эти сечения представляют собой параллелограммы с периметрами, равными удвоенной длине ребра.

881. *Решение.* Достроим тетраэдр до параллелепипеда, проведя через каждое его ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Тогда ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней получившегося параллелепипеда (рисунок лучше начинать с параллелепипеда). Ребра этого параллелепипеда равны расстояниям между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра. Из условия следует, что все грани параллелепипеда — ромбы (соединим кое-что, получим параллелограммы с равными диагоналями, являющиеся прямоугольниками). Но их диагонали перпендикулярны, значит, перпендикулярны и противоположные ребра тетраэдра.

883. *Указание.* Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах противоположных ребер — параллелограмм, и воспользуйтесь формулой, связывающей длины сторон и диагоналей параллелограмма.

884. *Указание.* Рассмотрите прямоугольный параллелепипед.

885. *Ответ.* $1/\sqrt{10}$.

Практика 3

В классе (7 номеров)

886. Докажите, что две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости.

887. Плоскости α и β параллельны, $A \in \alpha$. Докажите, что любая прямая, проходящая через A и параллельная β, лежит в α.

888. Докажите транзитивность параллельности плоскостей.

889. В тетраэдре $ABCD$ точки M, N и P — середины ребер AB, BC и CD соответственно; $AC = 10$, $BD = 12$. Докажите, что плоскость MNP проходит через середину K ребра AD, и найдите периметр четырехугольника, полученного при пересечении тетраэдра плоскостью MNP.

890. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, M_1, N_1 лежат на ребрах AB, CD, A_1B_1 и C_1D_1 соответственно, при этом $AM = CN = A_1M_1 = C_1N_1$. Докажите, что $MBNDM_1B_1N_1D_1$ — параллелепипед.

891. *В тетраэдре $DABC$ биссектрисы трех углов при вершине D пересекают отрезки BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

892. Две плоскости, каждая из которых содержит два боковых ребра параллелепипеда, не принадлежащих одной грани, пересекаются по некоторой прямой. Докажите, что эта прямая параллельна боковым ребрам параллелепипеда и пересекает все его диагонали.

Дома (6 номеров)

893. Две стороны треугольника параллельны некоторой плоскости. Докажите, что и третья его сторона параллельна этой плоскости.

894. Три отрезка A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 имеют общую середину. Докажите, что плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.

895. Некоторая прямая параллельна одной из двух параллельных плоскостей. Докажите, что эта прямая либо параллельна другой плоскости, либо лежит в ней.

896. Три прямые, проходящие через одну точку и не лежащие в одной плоскости, пересекают одну из двух параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 и C_1, а другую — в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

897. Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC. Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC, и найдите коэффициент подобия.

898. Докажите, что сумма квадратов четырех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его двенадцати ребер.

Указания

891. *Указание.* Воспользуйтесь теоремой кое-кого.

Практика 4

В классе (6 номеров)

899. *Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите площадь наибольшего сечения, проходящего через два параллельных и не лежащих в одной грани ребра параллелепипеда.

900. *Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна a, а ее боковое ребро равно b.

901. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба, проходящее через середины ребер AB, BB_1, B_1C_1, и найдите его площадь.

902. *Найдите косинус угла между двумя диагоналями куба.

903. *Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, боковое ребро равно 4. Найдите площадь сечения, проходящего через две вершины одного основания призмы и середину стороны другого основания (не совпадающего с боковой гранью призмы).

904. *$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через D, C_1 и середину A_1B_1, делит диагональ D_1B?

Дома (2 номера)

905. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба, проходящее через A, D_1 и середину ребра BB_1, и найдите его площадь.

906. *Найдите угол между диагональю куба и не пересекающейся с ней диагональю грани.

Ответы

899. $6\sqrt{41}$. **900.** $ab/4$. **901.** $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **902.** $1/3$.

903. $\dfrac{9\sqrt{91}}{4}$. **904.** $2:3$. **905.** $\dfrac{9}{8}a^2$. **906.** 90°.

Практика 5

В классе (12 номеров)

907. Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости ABC, если точка M лежит внутри грани ABD.

908. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, постройте его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются.

909. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точку M на ребре BB_1. Постройте точку пересечения прямой AM и плоскости $A_1B_1C_1$.

910. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точку M на грани AA_1B_1B. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M и параллельное плоскости BDD_1.

911. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости AB_1C_1.

912. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что это сечение — трапеция.

913. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через диагональ AC основания параллельно диагонали BD_1. Докажите, что если основание параллелепипеда — ромб и углы ABB_1 и CBB_1 прямые, то построенное сечение — равнобедренный треугольник.

914. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах CC_1, AD и BB_1.

915. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точку M на ребре AB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и параллельной прямым AC и BD.

916. По какой прямой пересекаются плоскости сечений A_1BCD_1 и BDD_1B_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

917. $M \in [BC]$, где $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1.

918. *Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды и параллельной плоскости боковой грани.

Дома (8 номеров)

919. Изобразите тетраэдр $DABC$ и на ребрах DC и BC отметьте соответственно точки N и K. Постройте точку пересечения прямой KN и плоскости ABD.

920. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на ребрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения прямой MN и плоскости ABC.

921. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.

922. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где K — середина ребра AA_1, а L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

923. Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на ребрах BB_1, AA_1 и AD.

924. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и отметьте точки M и N на ребрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

925. Приведите пример, когда сечением куба является пятиугольник. Докажите, что сечением куба не может быть правильный пятиугольник.

926. Разбейте куб на шесть равных тетраэдров (достаточно аккуратного чертежа).

918. *Указание.* Рассмотрите вспомогательное сечение, проходящее через вершину пирамиды и середины двух противоположных сторон основания. *Ответ.* $25S/16$.

Практика 6

В классе (5 номеров)

927. На трех ребрах B_1C_1, AA_1 и AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Постройте след секущей плоскости PQR на плоскости AA_1D.

928. В гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C и $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Постройте след секущей плоскости PQR на плоскости ABC.

929. На прямой, содержащей ребро BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, взята точка P такая, что $BP : B_1P = 3 : 1$, в грани CC_1D_1D взята точка Q — центр этой грани, и на ребре AD взяты точки R_1, R_2, R_3 и R_4 — такие, что $DR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = R_3R_4 = R_4A$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQD.

930. В условиях предыдущей задачи постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR_1.

931. На трех ребрах BB_1, C_1D_1 и AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R — середины этих ребер, а на диагонали A_1C параллелепипеда взята точка S такая, что $A_1S : A_1C = 1 : 4$. Постройте многоугольник $MPKQLR$, являющийся сечением заданного параллелепипеда, а затем постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S и прямую MP.

Дома (7 номеров)

932. На трех ребрах B_1C_1, AA_1 и AD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Постройте след секущей плоскости PQR на плоскости AA_1.

933. В гранях AA_1B_1B, BB_1C_1C и $ABCD$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P, Q и R. Постройте след секущей плоскости PQR на плоскости AA_1B_1.

934. На прямой, содержащей ребро BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, взята точка P такая, что $BP : B_1P = 3 : 1$, в грани CC_1D_1D взята точка Q — центр этой грани, и на ребре AD взяты точки R_1, R_2, R_3 и R_4 — такие, что $DR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = R_3R_4 = R_4A$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQA.

935. В условиях предыдущей задачи постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR_2.

936. Точки P, Q и R взяты на поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ следующим образом: точка P лежит на диагонали B_1D_1, точка Q — на ребре AB, а точка R — на ребре CC_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR, если отношения $B_1P : B_1D_1$, $AQ : AA_1$ и $CR : CC_1$ имеют соответственно следующие значения: $1 : 3$, $1 : 3$ и $2 : 3$.

937. На поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и R следующим образом: точка P лежит иа диагонали DC_1, точка Q — на диагонали A_1D, а точка R — на прямой AB. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью PQR, если отношения $DP : DC_1$, $DQ : DA_1$ и $AR : AB$ имеют соответственно следующие значения: $1 : 2$, $1 : 2$, $1 : 2$.

938. На поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки P, Q и R таким образом, что точка P лежит на ребре A_1B_1, точка Q — на диагонали A_1D, а точка R — на ребре BC. Плоскостью PQR параллелепипед рассекается на два многогранника. Постройте сечение нижнего из этих многогранников плоскостью PRS, если точка S лежит на прямой BB_1 и отношение $BS : BB_1$ имеет значение $1 : 2$.

Тема 18

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

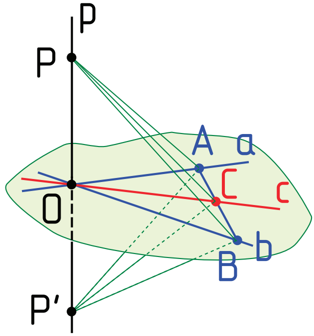
Лекция 1

18.1. Перпендикулярность прямых в пространстве.

18.2. Перпендикулярность прямой и плоскости: определение и признак.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Если* $a, b \subset \alpha$, $a \cap b \neq \varnothing$ *и* $p \perp a$, $p \perp b$, *то* $p \perp \alpha$.

Доказательство. Пусть c — произвольная прямая, лежащая в α; докажем, что $p \perp c$. Без ограничения общности a, b, c и p проходят через одну точку O; отложим от O конгруэнтные отрезки OP, OP', OA, OB (см. рисунок); пусть $\{C\} = c \cap (AB)$.



Очевидно, $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle P'OA \cong \triangle P'OB$ (это прямоугольные треугольники с конгруэнтными катетами), поэтому $PA = PB = P'A = P'B$. Тогда $\triangle PAB \cong \triangle P'AB$ по трем сторонам, откуда $\angle PBA = \angle P'BA$. Рассмотрим теперь треугольники PBC и $P'BC$; они конгруэнтны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $PC = P'C$ и, следовательно, $\triangle PCP'$ — равнобедренный и его медиана CO является его высотой. □

18.3. Теоремы о перпендикулярности прямых; прямой и плоскости.

Теорема о рельсах и шпаге. *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.*

Доказательство. Очевидно из определения перпендикулярности прямых. □

Теорема о двух соснах. *Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.*

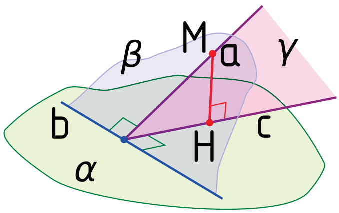
Доказательство. Пусть $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$. Если $a \nparallel b$, возьмем на b произвольную точку, не лежащую в α, и проведем через нее $a' \parallel a$, после чего на a' и b натянем плоскость β; пусть $p = \alpha \cap \beta$. По теореме о рельсах и шпаге $a' \perp p$, но из условия доказываемой теоремы следует, что и $b \perp p$, и мы получаем треугольник с двумя прямыми углами. □

Теорема о протыкании торта. *Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.*

Доказательство. Проведем через прямую две различные плоскости, после чего применим теорему о разрезании торта и признак перпендикулярности прямой и плоскости. □

Теорема об опускании перпендикуляра. *Через точку, не лежащую в плоскости, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.*

Доказательство. Пусть даны плоскость α и не лежащая в ней точка M. Проведем в α произвольную прямую b, натянем на M и b плоскость β и в этой плоскости опустим на b перпендикуляр a из M; из основания этого перпендикуляра восставим к b перпендикуляр c, лежащий в α; на прямые (допуская некоторую вольность, обозначим их теми же буквами, что и перпендикуляры) a и c натянем плоскость γ; в этой плоскости опустим перпендикуляр MH из точки M на прямую c (см. рисунок).



Докажем, что MH — искомый перпендикуляр. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $b \perp \gamma$, следовательно,

$MH \perp b$. Кроме того, по построению $MH \perp c$, поэтому по тому же признаку $MH \perp \alpha$. $\square$

Теорема о восставлении перпендикуляра. *Через точку, лежащую в плоскости, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной плоскости.*

Доказательство. Легко получается из предыдущей теоремы: опустим на данную плоскость перпендикуляр из произвольной точки пространства; дальнейшее очевидно. $\square$

18.4. Ортогональная проекция. Теорема о трех перпендикулярах.

Лекция 2

18.5. Угол между прямой и плоскостью. Расстояния: от точки до прямой, между параллельными прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

18.6. Двугранный угол, его линейный угол. Корректность определения линейного угла. Перпендикулярность плоскостей.

18.7. Теоремы о перпендикулярности плоскостей.

Признак перпендикулярности плоскостей. *Если $a \perp \alpha$, $a \subset \beta$, то $\beta \perp \alpha$.*

Доказательство. Пусть $p = \alpha \cap \beta$, $\{M\} = a \cap \alpha$; в плоскости α из точки M восставим перпендикуляр к p, и будет нам счастье. $\square$

Теорема о перпендикулярном разрезании торта. *Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \perp \alpha$, то $\gamma \perp \beta$.*

Доказательство. По теореме о разрезании торта линии пересечения a и b плоскости γ с плоскостями α и β будут параллельны. Построим к ним общий перпендикуляр AB ($A \in a \subset \alpha$, $B \in b \subset \beta$). Из точки A в плоскости α восставим перпендикуляр p_α к прямой a; по теореме о рельсах и шпаге $p_\alpha \perp b$. Проведем через точку B прямую p_β, параллельную p_α, тогда $p_\beta \perp b$ и, кроме того, $p_\beta \subset \beta$. Дальнейшее очевидно. $\square$

Теорема о перпендикулярном парусе на мачте. *Для любых прямой a и плоскости α существует плоскость β, проходящая через a и перпендикулярная α.*

Доказательство. Если $a \perp \alpha$, проведем через a любую плоскость. Если $a \parallel \alpha$ или $a \cap \alpha \neq \varnothing$, $a \not\perp \alpha$, проведем из любой точки a перпендикуляр p к α и натянем β на a и p. □

Лемма о пьянице у стены. *Если плоскость β и прямая b перпендикулярны плоскости α, то $b \parallel \beta$.*

Доказательство. Пусть pOq — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β ($p \subset \alpha$, $q \subset \beta$), тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $q \perp \alpha$. Но по условию $b \perp \alpha$, поэтому по теореме о двух соснах $b \parallel q$, следовательно, $b \parallel \beta$. □

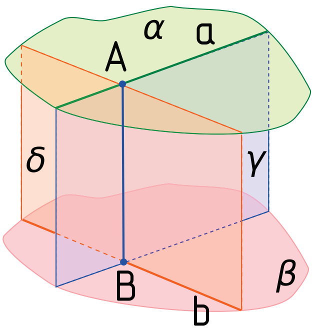
Теорема о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей. *Если $\beta \perp \alpha$, $\gamma \perp \alpha$ и $a = \beta \cap \gamma$, то $a \perp \alpha$.*

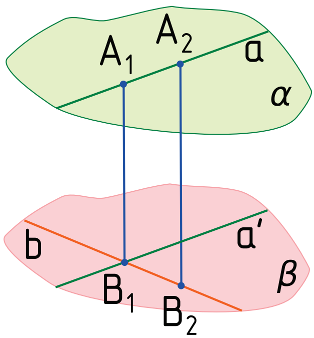
Доказательство. Рассмотрим произвольную прямую s, перпендикулярную α. По лемме о пьянице у стены $s \parallel \beta$ и $s \parallel \gamma$, поэтому s параллельна линии пересечения β и γ, то есть a. Если теперь $a \not\perp \alpha$, восставим из точки пересечения a и α перпендикуляр $a' \perp \alpha$, тогда по теореме о двух соснах $a' \parallel s$, и мы получаем две прямые, параллельные s и проходящие через одну точку. □

18.8. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Теорема о существовании общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

Доказательство. Пусть $a \dot{-} b$. проведем через эти прямые параллельные плоскости α и β (см. левый рисунок).





По теореме о перпендикулярном парусе на мачте через a проведем плоскость γ, перпендикулярную β, а через b — плоскость δ, перпендикулярную α; пусть $(AB) = \gamma \cap \delta$. Докажем, что AB — искомый общий перпендикуляр к a и b. В самом деле, по теореме о перпендикулярном разрезании торта плоскости γ и δ перпендикулярны каждой из плоскостей α и β; по теореме о линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей, получаем, что (AB) перпендикулярна как α, так и β, а поэтому перпендикулярна как a, так и b.

Докажем теперь единственность существования общего перпендикуляра (см. правый рисунок). Предположим существование двух общих перпендикуляров A_1B_1 и A_2B_2; через точку B_1 в плоскости β проведем прямую a', параллельную a. Тогда по теореме о рельсах и шпаге прямая A_1B_1 будет перпендикулярна a', следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $A_1B_1 \perp \beta$. Аналогично, $A_2B_2 \perp \beta$, поэтому по теореме о двух соснах $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, то есть все четыре точки A_1, A_2, B_1, B_2 лежат в одной плоскости, что противоречит тому, что прямые a и b скрещиваются. □

18.9. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми, его минимальность (без доказательства). Способы его нахождения:

1) «в лоб» построением общего перпендикуляра;

2) проводим плоскость, перпендикулярную одной прямой, и ищем расстояние от точки пересечения этой прямой с построенной плоскостью до проекции второй прямой на эту плоскость (см. задачу № 970);

3) проводим через одну прямую плоскость, параллельную второй прямой, находим расстояние между прямой и плоскостью в удобном месте;

4) строим две параллельные плоскости и находим расстояние между ними;

5) по формуле $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}abd\sin\varphi$.

Практика 1

В классе (7 номеров)

939. Прямая CD перпендикулярна плоскости правильного треугольника ABC; через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная CD. Известно, кроме того, что $AB = 16\sqrt{3}$, $OK = 12$, $CD = 16$. Найдите расстояния от точек D и K до точек A и B.

940. Прямая AM перпендикулярна плоскости квадрата $ABCD$ с центром O. Докажите, что $(BD) \perp (AMO)$ и $(MO) \perp (BD)$.

941. Докажите, что если $a \perp \alpha$, $a \perp b$, $b \not\subset \alpha$, то $b \parallel \alpha$.

942. Из точки A, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = \frac{3}{2}$. Найдите BC.

943. Отрезок AD перпендикулярен плоскости равнобедренного треугольника ABC; $AB = AC = 5$, $BC = 6$, $AD = 12$. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

944. Прямая BD перпендикулярна плоскости треугольника ABC; $BD = 9$, $AC = 10$, $BC = BA = 13$. Найдите расстояние от точки D до прямой AC и площадь треугольника ACD.

945. Из точки A, удаленной от плоскости γ на расстояние d, проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом $30°$ к плоскости. Проекции наклонных на γ образуют угол $120°$. Найдите BC.

Дома (6 номеров)

946. Через точку O пересечения диагоналей квадрата со стороной a проведена прямая OK, перпендикулярная плоскости квадрата; $OK = b$. Найдите расстояния от точки K до вершин квадрата.

947. Прямая MB перпендикулярна прямым, содержащим стороны AB и BC треугольника ABC; D — произвольная точка прямой AC. Определите вид треугольника MBD.

948. В тетраэдре $ABCD$ точка M — середина BC, $AB = AC$, $DB = DC$. Докажите, что $(ADM) \perp (BC)$.

949. Докажите, что точка X равноудалена от концов отрезка AB тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости, проходящей через середину отрезка AB и перпендикулярной ему (к сожалению, никакого красивого названия у этой плоскости нет).

950. Игрушечный слон висит под потолком на трех веревочках длиной 40 см каждая; точки крепления веревочек к потолку образуют правильный треугольник со стороной 60 см.

Найдите расстояние от слона до потолка (размерами слона пренебречь).

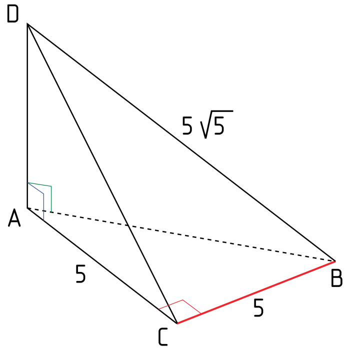
951. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведена прямая BF, перпендикулярная его плоскости; $BF = 8$, $AB = 4$. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата.

Практика 2

В классе (9 номеров)

952. Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонен к этой плоскости под углом $30°$. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

953. В тетраэдре $ABCD$ углы DAB, DAC и ACB прямые (см. рисунок), $AC = CB = 5$, $DB = 5\sqrt{5}$. Найдите величину двугранного угла $ABCD$.



К задаче **953**

954. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра A_1D_1. Найдите величину двугранного угла A_1BB_1K.

955. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны.

956. В кубе с ребром 1 найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагональ куба и диагональ грани куба.

957. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 12$ и диагональ BD_1 составляет с плоскостью грани AA_1D_1D угол $30°$, а с ребром DD_1 — угол $45°$.

958. Найдите угол между скрещивающимися прямыми AB и PQ, если точки P и Q равноудалены от концов отрезка AB.

959. Величина двугранного угла $CABC'$ равна α, причем точка C' является ортогональной проекцией точки C на плоскость ABC'. Докажите, что $S' = S\cos\alpha$, где S и S' — площади треугольников ABC и ABC' соответственно.

960. *Параллельные прямые AB и CD лежат в разных гранях двугранного угла, величина которого $60°$. Точки A и D удалены от ребра этого двугранного угла соответственно на расстояния 16 и 13. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Дома (8 номеров)

961. Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен $60°$. Известно, что $AC = 5$, $AB = 13$. Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

962. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC; $AB = BC = AC = 6$, $BD = 3\sqrt{7}$. Найдите величины двугранных углов $DACB$, $DABC$ и $BDCA$.

963. Докажите, что все двугранные углы правильного тетраэдра равны, и найдите величины этих двугранных углов.

964. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите величину двугранного угла ABB_1C.

965. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите величину двугранного угла ADD_1B.

966. В кубе с ребром 1 найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагональ куба и ребро куба.

967. Точка X удалена от каждой из вершин прямоугольного треугольника на расстояние 10; медиана этого треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 5. Найдите расстояние от точки X до плоскости треугольника.

968. Правильные треугольники ABC и DBC расположены так, что точка D ортогонально проектируется в центр треугольника ABC. Найдите величину угла между плоскостями этих треугольников.

Указания, решения, ответы

960. *Указание.* Сначала докажите (от противного), что каждая из этих прямых параллельна ребру двуграного угла.

Практики 3–4

В классе (9 номеров)

969. *Дан двуграный угол величиной α. В плоскости одной из его граней проведена прямая, перпендикулярная ребру двугранного угла, а в плоскости другой грани — прямая, образующая с ребром угол β. Найдите угол между этими прямыми.

970. *Найдите расстояние между диагоналями двух смежных граней куба с ребром 1.

971. *Двугранный угол между плоскостями α и β равен φ. В плоскости α лежит многоугольник Φ, а Φ' — его проекция на плоскость β. Пусть площади многоугольников Φ и Φ' равны S и S' соответственно. Докажите, что $S' = S \cdot \cos\varphi$.

972. *В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите величины двугранных углов при основании пирамилы и между ее боковыми гранями.

973. *Все ребра правильной треугольной призмы равны. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего этой грани бокового ребра.

974. *Проекцией куба на некоторую плоскость является правильный шестиугольник со стороной a. Найдите объем куба.

Дома (4 номера)

975. *В основании пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая — через точку C и середину ребра AB.

976. *Решите задачу № 972 для правильной четырехугольной пирамиды.

977. * $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через точку C и середины ребер SB и SD.

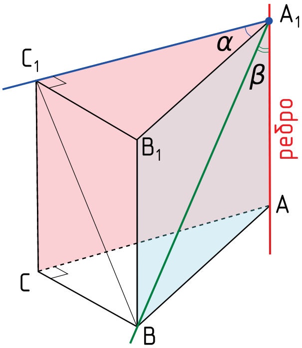
978. *Докажите, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами той грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

Указания, решения, ответы

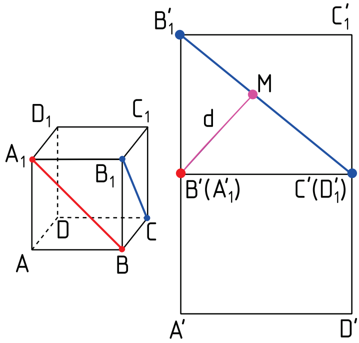
969. Эта задача иллюстрирует принцип «ничего не должно висеть в воздухе». Без ограничения общности обе прямые проходят через одну и ту же точку на ребре двугранного угла. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с прямоугольными треугольниками в основаниях (см. рисунок). В этой задаче нам удобнее рассматривать именно прямоугольные треугольники; в других задачах, может быть, удобнее будут равнобедренные. Пусть ребро двугранного угла — AA_1, а прямые, о которых идет речь в задаче, — A_1C_1 и A_1B.

По теореме о трех перпендикулярах (BC_1 — наклонная, B_1C_1 — ее проекция, A_1C_1 — прямая, лежащая в плоскости) $\angle BC_1A_1 = 90°$. Из $\triangle A_1B_1C_1$ имеем $A_1B_1 = \dfrac{A_1C_1}{\cos\alpha}$, тогда и $AB = \dfrac{A_1C_1}{\cos\alpha}$. Далее, из $\triangle A_1BA$ получаем $A_1B = \dfrac{AB}{\sin\beta}$, то есть $A_1B = \dfrac{A_1C_1}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$. Наконец, из $\triangle BA_1C_1$ получаем, что $\cos\angle BA_1C_1 = \dfrac{A_1C_1}{A_1B} = \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Ответ: $\arccos(\cos\alpha \cdot \sin\beta)$.



К задаче **969**



К задаче **970**

970. Будем искать расстояние между прямыми A_1B и B_1C (см. рисунок).

Первый способ.

Спроектируем куб на плоскость, проходящую через точку B и перпендикулярную диагонали A_1B. Задача сводится к нахождению расстояния d от точки B' до прямой $B_1'C'$.

Поскольку плоскость, на которую мы проектировали куб, перпендикулярна прямой A_1B, прямоугольник $A'B_1'C_1'D'$ конгруэнтен прямоугольнику AB_1C_1D. Но B' — середина отрезка $A'B_1'$ и поэтому в прямоугольном треугольнике $B'B_1'C'$ катеты $B'B_1'$ и $B'C'$ равны соответственно $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и 1, тогда по теореме Пифагора $B_1'C = \sqrt{3/2}$.

d — это высота, проведенная к гипотенузе, поэтому по известной формуле получим $d = \dfrac{B'B_1' \cdot B'C'}{B_1'C'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

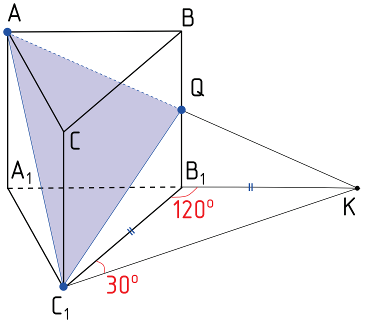
Второй способ.

Рассмотрим тетраэдр A_1BCB_1. Угол между ребрами A_1B и B_1C легко находится; он равен 60°. Легко найти и объем тетраэдра: $V = \dfrac{1}{3} S_{BB_1C} \cdot A_1B_1 = \dfrac{1}{6}$. Искомое расстояние d легко теперь выразить из формулы $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d \sin 60°$; получим $d = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

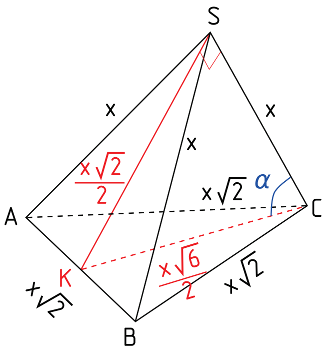
971. *Указание.* Воспользуйтесь результатом задачи № 959. Затем последовательно рассмотрите: треугольник с вершиной, лежащей на ребре двугранного угла (противолежащая этой вершине сторона может быть либо параллельна ребру, либо непараллельна); произвольный выпуклый многоугольник с вершиной или стороной, лежащей на ребре; произвольный многоугольник.

972. *Ответ.* $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}\right)$, $2 \arcsin\left(\dfrac{1}{2} \sec \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

973. Рассмотрим конфигурацию, изображенную на рисунке. Треугольники ABQ и KB_1Q конгруэнтны, поэтому $B_1K = B_1C_1$, тогда $\angle B_1C_1K = 30°$, $\angle A_1C_1K = 60° + 30° = 90°$. Таким образом, линейный угол искомого двугранного угла — это $\angle AC_1A_1$. *Ответ.* 45°.



К задаче **973**



К задаче **974**

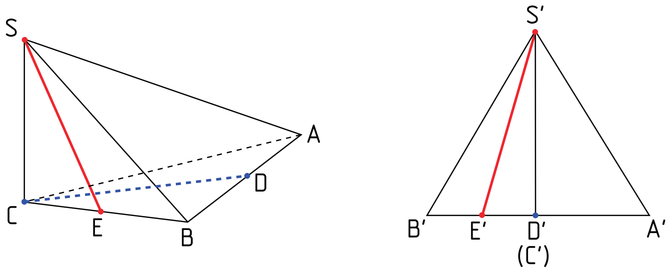
974. Понятно, что такая проекция может получиться, например, в том случае, когда одна из вершин куба лежит в плоскости проекции, а выходящие из этой вершины три ребра куба образуют с плоскостью проекции равные углы. Рассмотрим эту вершину S и эти три ребра SA, SB SC (см. рисунок); плоскость проекции находится у нас как бы сверху, параллельно плоскости

(ABC); плоские углы при вершине S получившегося тетраэдра — прямые.

Длины ребер тетраэдра $SABC$ легко находятся; они подписаны на рисунке; легко найти и длину медианы SK. Из прямоугольного (т. к. $(SC) \perp (ASB)$) треугольника SKC находим, что $\cos\alpha = 2/\sqrt{6}$. Сторона правильного шестиугольника, как известно, равна радиусу описанной около него окружности; последний равен длине проекции, например, ребра SC на плоскость проекции, то есть $a = x \cdot \cos\alpha$, откуда $x = \dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ответ. $\dfrac{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

975. Спроектируем пирамиду на плоскость, перпендикулярную CD и проходящую через (AB) (см. рисунок). При этом CD проектируется в D', точка E — в точку E' (середину отрезка $B'D'$).



К задаче **975**

Очевидно, $B'D' = \frac{1}{2}B'A' = \frac{1}{2}BA = 2\sqrt{2}$, $S'D' \perp A'B'$ и $S'D' = SC = 2$. Искомое расстояние равно расстоянию от точки D' до прямой SE', то есть равно высоте в прямоугольном треугольнике $S'D'E'$, проведенной к гипотенузе $S'E'$. Имеем:

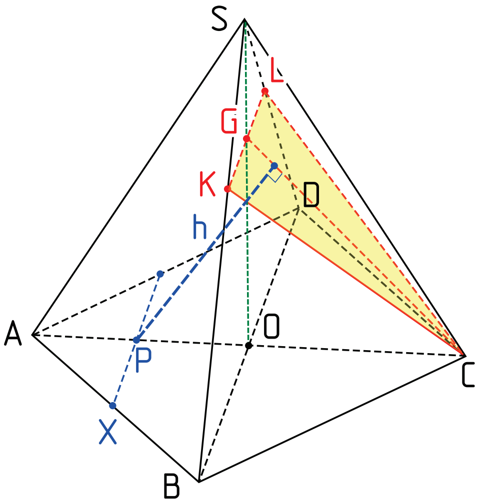
$$E'D' = \sqrt{2}, \;\; S'E' = \sqrt{(S'D')^2 + (E'D')^2} = \sqrt{6}.$$

Тогда искомое расстояние равно $\dfrac{S'D' \cdot E'D'}{S'E'} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Поскольку $SE = \sqrt{(SC)^2 + (CE)^2} = \sqrt{12}$, то можно найти α — искомый угол между прямыми SE и CD: $\sin\alpha = \dfrac{S'E'}{SE} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 45°$.

Ответ: $2/\sqrt{3}$, $45°$.

976. *Ответ.* $\arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$, $2\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sec\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

977. Итак, найдем расстояние от точки X до плоскости KLC (см. рисунок).



К задаче **977**

Проведем $XP \parallel BD$, тогда, поскольку $(XP) \parallel (KLC)$, искомое расстояние можно найти как расстояние от прямой (XP) до плоскости (KLC), то есть как высоту треугольника PGC, опущенную на сторону CG.

Найдем для начала стороны CG и CP этого треугольника, а также синус угла между ними. $CK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $KG = \dfrac{KL}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, тогда по теореме Пифагора из $\triangle CKG$ получим $CG = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$. Далее, очевидно, что $CP = \frac{3}{4} \cdot CA = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Наконец,

$$\sin \angle GCO = \frac{GO}{CG} = \frac{SO}{2CG} = \frac{\sqrt{SB^2 - BO^2}}{2CG} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{2CG} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Обозначим искомую высоту буквой h; имеем:

$$\sin \angle GCO = \frac{h}{CP}, \quad h = CP \cdot \sin \angle GCO = \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

978. Пусть ребро тетраэдра $ABCD$ равно a. Высота AO, как нетрудно найти, равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Если M — середина AO, то

$$MB = \sqrt{BO^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Значит, треугольник BMC равнобедренный и прямоугольный.

Тема 19
ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ

Лекция 1

19.1. Направленные отрезки. Векторы. Длины векторов, сонаправленность, коллинеарность.

19.2. Действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число), их свойства.

19.3. Критерий коллинеарности ненулевых векторов. Компланарность векторов, критерий компланарности ненулевых векторов.

Лекция 2

19.4. Базис плоскости и пространства. Теорема о разложении вектора по базису (для доказательства натягиваем плоскость на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проецируем конец вектора $\vec{p}$ на эту плоскость параллельно прямой, содержащей $\vec{c}$).

19.5. Координаты вектора на прямой, в плоскости, в пространстве; связь между координатами вектора и координатами его концов. Прямоугольные координаты. Проекции векторов.

19.6. Координатные формулы: середины отрезка, деления отрезка в данном отношении, длины вектора, расстояния между точками. Уравнение сферы.

19.7. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов, его свойства. Вычисление углов между векторами и между прямыми. Векторное произведение векторов (определение).

Лекция 3

19.8. Уравнения прямой на плоскости: по точке и нормальному вектору (канонический вид), по точке и направляющему вектору (запись в виде равенства дробей и в параметрическом виде), по двум точкам, в отрезках.

19.9. Уравнения прямой в пространстве: по точке и двум нормальным векторам, по точке и направляющему вектору (запись в виде равенства дробей и в параметрическом виде), по двум точкам.

19.10. Уравнения плоскости: по точке и нормальному вектору (канонический вид), по точке и двум направляющим векторам (параметрический вид).

19.11. Расстояние от точки до плоскости.

19.12. Аналитические условия перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей.

19.13. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере и ее уравнение.

Практика 1

В классе (6 номеров)

979. Пусть точка C лежит на отрезке AB и $|AC| : |CB| = 1 : 3$. Разложите вектор $\overrightarrow{OC}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

980. *Пусть точка O — центр правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.

981. Докажите, используя векторы, что середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

982. Даны три точки A, B, C. Для произвольной точки X пространства выбрана точка O так, что $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. Докажите, что: а) расположение точки O не зависит от выбора точки X; б) точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

983. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

984. Дан треугольник ABC. Точки A_1 и B_1 выбраны так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [AC]$, причем $|BA_1| : |A_1C| = |AB_1| : |B_1C| = 1 : 2$. Точка O является пересечением отрезков $[AA_1]$ и $[BB_1]$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по базису $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$; б) определите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

Дома (3 номера)

985. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})/2$.

986. Пусть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ и $|OA| = |OB| = |OC|$. Докажите, что ABC — правильный треугольник.

987. Дан треугольник ABC. На отрезках BC и AC соответственно выбраны точки A_1 и B_1 так, что $|BA_1| : |A_1C| = 3 : 1$ и $|AB_1| : |B_1C| = 1 : 2$. Точка O является пересечением отрезков $[AA_1]$ и $[BB_1]$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по базису $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$; б) определите, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

980. Рассмотрим поворот относительно центра многоугольника на угол $360°/n$. Очевидно, при таком повороте сумма векторов переходит сама в себя, следовательно, она равна $\vec{0}$.

Практика 2

В классе (7 номеров)

988. Даны точки $A(3, 2, 5)$, $B(5, 4, 8)$, $C(-3, x, y)$. При каких x и y точка C лежит на прямой AB?

989. Даны точки $A(-1, 2, -3)$ и $B(17, -13, 9)$. Найдите координаты такой точки C отрезка AB, что $|AC| : |CB| = 2 : 1$.

990. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, M — точка пространства, не лежащая в его плоскости. Принимая в качестве базисных векторов $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AM}$, разложите по этому базису векторы $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MF}$.

991. Лежит ли точка $M(1, 1, 1)$ в плоскости, проходящей через точки $A(2, 0, 4)$, $B(-3, -27, 5)$ и $C(4, -2, 10)$?

992. Даны точки $A(1, 2, 3)$, $B(7, 4, 9)$, $C(1, 1, 1)$ и $D(3, 8, 6)$. Определите взаимное расположение прямых AB и CD.

993. Даны точки $A(3, 2, 1)$, $B(-12, 3, 5)$, $C(6, 7, 3)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC (т. е. его центра масс).

994. Найдите расстояние от начала координат до центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$.

Дома (5 номеров)

995. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, M — точка пространства, не лежащая в его плоскости. Принимая в качестве базисных векторов $\vec{a} = \overrightarrow{MA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{MB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{MC}$, разложите по этому базису векторы $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{DF}$.

996. Даны точки $A(4, -2, 3)$, $B(7, -12, 8)$ и $C(1, 1, 3)$. При каком значении x точка $D(15, -36, x)$ лежит в плоскости ABC?

997. Даны точки $A(11, -4, 8)$, $B(6, -3, 4)$, $C(0, -1, 0)$ и $D(-1, 0, 4)$. Пересекаются ли прямые AB и CD? Если да — найдите координаты точки их пересечения.

998. Даны точки $A(1, 2, 3)$, $B(12, -4, 6)$, $C(7, 2, 4)$. Известно, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Найдите координаты точки D.

999. Даны координаты двух вершин треугольника $A(2, -1)$, $B(-3, 5)$ и координаты точки пересечения медиан этого треугольника $M(1, 1)$. Найдите координаты вершины C.

Практика 3

В классе (8 номеров)

1000. При каком x векторы $\vec{v} = (1, 2, 5)$, $\vec{u} = (-1, 3, 13)$ и $\vec{w} = (5, x, -29)$ компланарны?

1001. Длина вектора $\vec{a}$ равна 2, длина вектора $\vec{b}$ равна 3. Известно, что $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 56$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1002. Докажите, что вектор $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

1003. Используя векторы, докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

1004. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AH}$.

1005. Найдите координаты точек пересечения сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, и прямой, проходящей через точку $(2, 1, 1)$ параллельно вектору $(2, -4, -1)$.

1006. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Используя векторы, найдите угол между прямыми DA_1 и AB_1.

1007. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, точка M — центр грани CC_1D_1D. Найдите расстояние от точки A до прямой BM.

Дома (6 номеров)

1008. Длина вектора $\vec{a}$ равна 3, длина вектора $\vec{b}$ равна 4, а угол между этими векторами равен $2\pi/3$. Вычислите скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$.

1009. Даны три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажите, что векторы $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны.

1010. Используя векторы, докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

1011. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка M — середина ребра CC_1. Найдите косинус угла между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$.

1012. Тройка векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ имеющих длины 1, 2 и 3 соответственно, образует базис пространства. Известно, что $\widehat{\vec{e_1},\vec{e_2}}=30^\circ$, $\widehat{\vec{e_1},\vec{e_3}}=\widehat{\vec{e_2},\vec{e_3}}=60^\circ$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{u}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ и $\vec{v}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+2\vec{e_3}$.

1013. Используя векторы, найдите угол и расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба с ребром 1.

Практика 4

В классе (5 номеров)

1014. Найдите координаты точки, симметричной точке $(0,1,0)$ относительно прямой, проходящей через точки $(1,0,0)$ и $(1,2,1)$.

1015. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны три точки: K — середина ребра AA_1, $H\in[AD]$, M — центр грани CC_1D_1D, $(KM)\perp(B_1H)$. В каком отношении точка H делит отрезок AD?

1016. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, объем которой равен 3. Известно, что $A(1,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$. Найдите координаты точки A_1. *Для тех, кто забыл:* объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на длину бокового ребра.

1017. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, а m_a и m_b — длины медиан, проведенных к соответствующим сторонам. Докажите, что эти медианы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = 5c^2$.

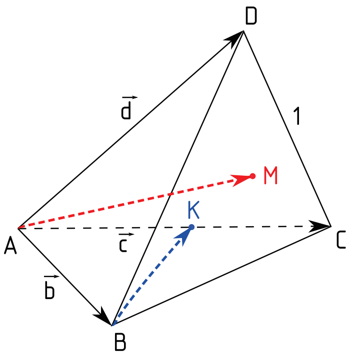
1018. В единичный куб вписана сфера. а) Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до всех вершин куба не зависит от выбора этой точки. б) Найдите эту сумму.

Дома (2 номера)

1019. а) Найдите координаты точки, симметричной точке $(1, 2, 1)$ относительно прямой, проходящей через точки $(0, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. б) Найдите расстояние от точки $(1, 2, 1)$ до этой прямой.

1020. *В правильном тетраэдре $DABC$ точка M — центр грани BCD, а точка K — середина ребра AC. Найдите угол между прямыми AM и BK.

Указания, решения, ответы



К задаче **1020**

1020. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ (см. рисунок). Тогда, очевидно, скалярный квадрат каждого из этих векторов равен 1, а их попарные скалярные произведения равны $1/2$. Имеем: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$, $\overrightarrow{BK} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. Тогда $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BK}|}{|\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{BK}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Практика 5

В классе (6 номеров)

1021. Пусть O — начало координат. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $N(3,5,2)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{ON}$.

1022. Найдите координаты точки, симметричной началу координат относительно плоскости, заданной уравнением $3x-2y+$ $+z+1=0$.

1023. Найдите угол между плоскостями MNK и MND, если $M(0,0,0)$, $N(1,1,1)$, $K(3,2,1)$, $D(3,1,2)$.

1024. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 1. Точки E и F лежат на ребрах BC и C_1D_1 соответственно, причем известно, что $|BE|=\frac{1}{4}$, $|FD_1|=\frac{2}{5}$. Точка M — центр куба. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости EFM.

1025. Найдите расстояние от плоскости до сферы, если они соответственно заданы уравнениями $2x+2y-z+15=0$ и $x^2+y^2+z^2=4$.

1026. Плоскость, заданная уравнением $x+y+z+D=0$, касается сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$. Найдите число D и координаты точки касания.

Дома (6 номеров)

1027. Плоскости α и β заданы уравнениями $x+2y-z+1=0$ и $2x+4y-2z-7=0$ соответственно. Запишите уравнение плоскости, параллельной обеим заданным плоскостям и находящейся от них на равных расстояниях.

1028. Являются ли точки $(2,-5,3)$ и $(4,-1,1)$ симметричными относительно плоскости, которая задана уравнением $x+2y-$ $-z-5=0$?

1029. Найдите угол между плоскостями ABC и PQR, если $A(-1,0,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(0,0,-1)$, $P(2,1,2)$, $Q(0,1,4)$, $R(4,0,0)$.

1030. Найдите координаты точки пересечения прямой AB с плоскостью, заданной уравнением $2x + 2y - z + 4 = 0$, если $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 4, 0)$.

1031. Ребро куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ имеет длину 1. Точки A и B лежат на ребрах KL и MM_1 соответственно, причем известно, что $|KA| = \frac{1}{4}$, $|BM_1| = \frac{2}{5}$. Точка O — центр куба, точка P — проекция точки K_1 на плоскость (ABO). Найдите $|AP|$.

1032. Найдите угол между плоскостями, которые заданы уравнениями $x - y + 3z = 2$ и $-x - 3y + z = 2$.

Тема 20
ДВИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 1

20.1. Группа движений пространства. Конгруэнтность фигур.

20.2. Параллельный перенос.

20.3. Поворот вокруг оси. Винтовое движение (композиция поворота и параллельного переноса на вектор, параллельный оси).

20.4. Зеркальная симметрия. Осевая и центральная симметрии. Очевидно, что осевая симметрия является поворотом на 180°. Скользящая симметрия (композиция зеркальной симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный плоскости).

20.5. Ориентация пространства. Классификация движений пространства:

1) Любое движение пространства — композиция не более чем четырех зеркальных симметрий. Например, центральная симметрия — композиция трех зеркальных симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей (и поэтому является движением II рода).

2) *Теорема Шаля.* Всякое движение I рода есть винтовое движение, в частности: а) поворот; б) поворот на 180°, то есть осевая симметрия; в) параллельный перенос. Всякое движение II рода есть композиция зеркальной симметрии и винтового движения.

20.6. Группа подобий. Гомотетии. Разложение подобия в композицию движения и гомотетии.

Тема 21
МНОГОГРАННИКИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Лекция 1

21.1. Геометрическая фигура. Внутренние точки (существует окрестность, лежащая в фигуре), граничные точки (любая окрестность пересекается и с фигурой, и с дополнением), граница фигуры. Внутренность, замыкание фигуры. Канонически замкнутая фигура: $\Phi = [\langle\Phi\rangle]$.

21.2. Геометрическое тело (ограниченное, канонически замкнутое, связное). Поверхность тела.

21.3. Объем геометрического тела как функция, отображающая множество фигур в $\mathbb{R}_+$. Аксиомы инвариантности (объемы конгруэнтных фигур равны), монотонности, аддитивности, нормированности (объем единичного кубика).

21.4. Многогранник. Вершины, ребра, грани. Выпуклые многогранники. Формула Эйлера для выпуклого многогранника. Правильные многогранники (платоновы тела). Вписанные и описанные многогранники. Формула $r = 3V/S$.

21.5. Призма. Площадь поверхности и объем прямой и наклонной призмы (в том числе с использованием перпендикулярного сечения).

21.6. Пирамида и усеченная пирамида. Правильная пирамида, правильный тетраэдр. Основание высоты пирамиды в различных «хороших» случаях. Площадь поверхности и объем пирамиды и усеченной пирамиды: $V_{ус.} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$.

21.7. Отношение объемов треугольных пирамид, имеющих общий трехгранный угол.

Лекция 2

21.8. Тела вращения. Цилиндр. Прямой круговой цилиндр. Площадь поверхности и объем цилиндра.

21.9. Конус. Прямой круговой конус. Конические сечения. Усеченный конус. Площадь поверхности и объем конуса и усеченного конуса.

21.10. Сфера и шар. Объем шара. Площадь сферы («метод окрашивания»). Шаровой сегмент, шаровой слой, шаровой сектор.

Лекция 3

21.11. Выпуклый многогранный угол. Трехгранный угол. Теорема об объемах треугольных пирамид с конгруэнтными трехгранными углами при вершине.

21.12. Плоские углы многогранного угла (неравенство треугольника $\alpha < \beta + \gamma$), их сумма (она меньше 360°; раздавим угол каблуком на плоскость).

21.13. Теоремы синусов и косинусов для трехгранного угла. Пусть α, β, γ — плоские углы, а A, B, C — двугранные (двугранный угол A — «между» β и γ).

1-я теорема косинусов. $\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos A$.

Следствие. $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}$.

Теорема трех косинусов (еще одно следствие). Если две грани трехгранного угла перпендикулярны, то есть если $A = 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma$.

2-я теорема косинусов. $\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos\alpha$.

Теорема синусов. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A} = \dfrac{\sin\beta}{\sin B} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin C}$.

Практика 1

В классе (4 номера)

1033. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего ей бокового ребра.

1034. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

1035. Внутри куба расположены два равных касающихся друг друга шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех других граней куба. Найдите радиусы шаров, если ребро куба равно 1.

1036. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а радиус вписанного шара — $1/2$. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

Дома (3 номера)

1037. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите объем пирамиды, а также радиусы вписанного и описанного шаров.

1038. Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4, 5, а двугранные углы при основании равны $60°$.

1039. Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что радиус вписанного в нее шара в три раза меньше стороны основания.

Практика 2

В классе (3 номера)

1040. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

1041. Ребро куба равно 1. Найдите объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в центрах трех смежных граней и в вершине куба, не принадлежащей этим граням.

1042. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через D, C_1 и середину A_1B_1, делит диагональ D_1B?

Дома (3 номера)

1043. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 3$. Высота пирамиды равна 4 и проходит через середину AD. Найдите AD, если известно, что в пирамиду можно вписать шар.

1044. Чему равна длина кратчайшего пути по поверхности куба, соединяющего центр какой-либо грани куба с одной из вершин противоположной грани? (Ребро куба равно 1.)

1045. S и P — площади двух смежных граней тетраэдра $ABCD$, a — длина их общего ребра, α — величина угла между этими гранями. Докажите, что объем тетраэдра можно вычислить по формуле $V = \dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

Практика 3

В классе (1 номер)

1046. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$. На ребре SA взята точка M так, что $SM = 2AM$. Через M и середины ребер SB и SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Дома (1 номер)

1047. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через центры трех его смежных граней?

Практика 4

В классе (5 номеров)

1048. Радиусы двух шаров равны 2 и 5. Через их единственную общую точку проведена плоскость, площадь сечения которой меньшего шара равна 0,4. Найдите площадь сечения этой плоскостью большего шара.

1049. Расстояние от центра верхнего основания цилиндра до плоскости нижнего основания цилиндра равно радиусу основания цилиндра и равно 6. Найдите расстояние от центра верхнего основания до хорды нижнего основания, стягивающей дугу 90°.

1050. Высота конуса равна h. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислите объем конуса.

1051. Определите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса с образующей, равной l, описанного около шара радиуса r.

1052. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

Дома (4 номера)

1053. Радиус основания конуса равен R, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определите объем конуса.

1054. Радиус основания конуса равен R. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом $90°$. Вычислите объем конуса.

1055. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определите отношение объемов полученных частей конуса.

1056. В конус вписан шар. Докажите, что отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара равно отношению их объемов.

Практика 5

В классе (4 номера)

1057. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найдите отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

1058. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на 8 частей. В каждую из этих частей вписано по маленькому шарику. Найдите отношение объема одного маленького шарика к объему исходного шара.

1059. Пусть в условиях предыдущей задачи центры вписанных шариков являются вершинами некоторого многогранника. Найдите отношение объемов этого многогранника и исходного шара.

1060. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $150°$. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

Дома (4 номера)

1061. Диаметр основания цилиндра увеличили вдвое и одновременно уменьшили вдвое его высоту. Как изменились площадь боковой поверхности и объем цилиндра?

1062. В конус высоты h с радиусом основания R впишите цилиндр с максимальной площадью боковой поверхности и найдите эту площадь.

1063. Каждое ребро куба разделено на три конгруэнтные части. Докажите, что полученные двадцать четыре точки деления принадлежат одной сфере. Вычислите площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна 3.

1064. Из бумажного прямоугольника со сторонами a и b склеивают боковую поверхность цилиндра. Какие стороны следует склеить между собой, чтобы цилиндр с такой боковой поверхностью имел наибольший объем?

Практика 6

В классе (3 номера)

1065. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота цилиндра равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина — на границе другого основания. Найдите сторону правильного треугольника.

1066. *В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 30°$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Известно, что существует конус, вершина которого совпадает с точкой A, а основание вписано в треугольник SBC. Найдите объем пирамиды.

1067. *ABC — правильный треугольник со стороной 3, M и K — точки на BA и CA такие, что $BM = CK = 1$. Найдите объем тела, полученного при вращении треугольника ABC вокруг прямой MK.

Дома (3 номера)

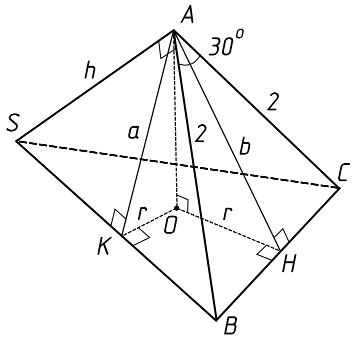
1068. Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб, четыре вершины которого расположены на основании конуса, а четыре — на его боковой поверхности. Найдите отношение объемов куба и конуса.

1069. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 1 и 2 вокруг диагонали.

1070. Концы диагонали куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные вершины куба лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

Указания, решения, ответы

1066. Пусть точки K и H — точки касания основания конуса (его центр обозначим буквой O, а радиус — буквой r) со сторонами грани SBC, тогда по теореме о трех перпендикулярах имеем $AK \perp SB$, $AH \perp BC$. Заметим, что треугольник SAB является прямоугольным, так как по условию $SA \perp (ABC)$. Обозначим также $AK = a$, $AH = b$, $AS = h$.



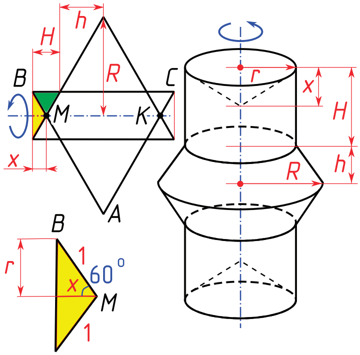
По условию высота пирамиды, проведенная из вершины A, падает в центр окружности, вписанной в треугольник SBC, поэтому прямоугольные треугольники AOK и AOH равны, откуда $a = b$. Из треугольника ABC по теореме косинусов легко находим, что $BC = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$, после чего по теореме Пифагора из треугольника AHB (учитывая, что H — середина BC) получим $a = b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Но a является длиной высоты прямоугольного треугольника SAB, опущенной из вершины прямого угла, поэтому она равна произведению катетов этого треугольника, деленному на гипотенузу. Таким образом, $a = \dfrac{SA \cdot AB}{SB} = \dfrac{2h}{\sqrt{h^2+4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, откуда находим $h = 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2(2+\sqrt{3})$.

Дальнейшее несложно. Площадь основания пирамиды BAC равна 1 (легко находится как половина произведения двух сторон на синус угла между ними), высоту пирамиды h мы только что нашли.

Ответ: $\frac{2}{3}(2+\sqrt{3})$.

1067. Найдем сначала все величины, обозначенные на рисунке. Так как $BM = 1$, из желтого треугольника находим глубину конической «ямы»: $x = \frac{1}{2}$. Зеленый треугольник, очевидно, равносторонний, поэтому $H = BM = 1$. Далее, $h = \frac{1}{2}BC - H = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. Из желтого треугольника находим $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Треугольник MKA — правильный со стороной 2, а R — длина его высоты, поэтому $R = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.



Искомый объем равен $2(V_1 - V_2 + V_3)$, где V_1 — объем цилиндра с радиусом основания r и высотой H, V_2 — объем конической «ямы» с радиусом основания r и высотой x, V_3 — объем усеченного конуса с радиусами оснований R и r и высотой h. Используя найденные данные, находим: $V_1 = \frac{3}{4}\pi$, $V_2 = \frac{1}{8}\pi$, $V_3 = \frac{7}{8}\pi$.

Ответ: 3π.

Практика 7

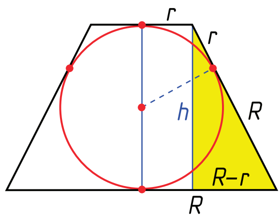
В классе (1 номер)

1071. *Докажите, что для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать сферу, касающуюся оснований и каждой образующей конуса, необходимо и достаточно, чтобы длина высоты конуса была средним геометрическим между диаметрами верхнего и нижнего оснований конуса.

Дома (1 номер)

1072. Три шара попарно касаются, а плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найдите радиусы этих шаров, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

Указания, решения, ответы



1071. Понятно, что данная задача — планиметрическая. Пусть сфера вписана в конус требуемым образом; введем обозначения как показано на рисунке. Из желтого треугольника по теореме Пифагора имеем: $h^2+(R-r)^2=(R+r)^2$, откуда $h^2=4Rr$, то есть $h=\sqrt{(2R)(2r)}$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь утверждение в обратную сторону: из данного соотношения и теоремы Пифагора следует, что длина боковой стороны трапеции равна $R+r$, то есть сумма длин оснований трапеции равна сумме длин ее боковых сторон и, следовательно, в трапецию можно вписать окружность.

Тема 22
ПОВТОРЕНИЕ ПЛАНИМЕТРИИ

Практика 1

В классе (5 номеров)

1073. Основания трапеции равны a и b ($a>b$). Найдите длину отрезка MN, концы которого делят боковые стороны AB и CD в отношении $AM:MB=DN:NC=p:q$.

1074. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1:A_1C=2:1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

1075. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной $60°$. На этой дуге взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

1076. Диагональ трапеции делит ее на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.

1077. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Докажите, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

Дома (4 номера)

1078. Один из углов трапеции равен $30°$, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований равно 8.

1079. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?

1080. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P. Докажите, что треугольники ABP и BDP подобны.

1081. Основания трапеции равны 4 и 3, а боковые стороны пересекаются под прямым углом. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

Практика 2

В классе (5 номеров)

1082. *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь исходного треугольника.

1083. Докажите, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S, равна $\frac{3}{4}S$.

1084. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1085. В равнобедренном треугольнике ABC из середины основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC; O — середина отрезка HE. Докажите, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1086. * В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC.

Дома (4 номера)

1087. Длины двух сторон треугольника равны a, а длина третьей стороны равна b. Вычислите радиус его описанной окружности.

1088. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислите сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

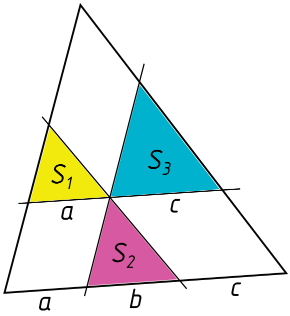
1089. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC и острым углом при вершине B, CD — биссектриса угла C. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе CD. Эта прямая пересекает продолжение основания AC в точке E. Докажите, что $AD = \frac{1}{2}EC$.

1090. Даны длины катетов прямоугольного треугольника ABC: $AC = 4$, $BC = 3$. В треугольнике проведены биссектриса CD и медиана AM. Они пересекаются в точке E. Найдите площадь треугольника CEM.

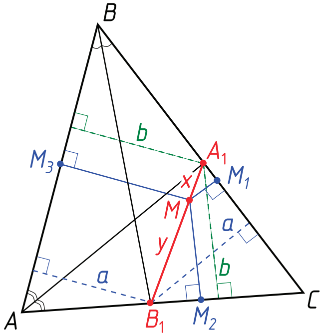
Указания, решения, ответы

1082. Введем обозначения, как показано на рисунке. Воспользуйтесь подобием каждого из «цветных» треугольников и исходного треугольника. Запишите коэффициент подобия двумя способами: через отношение сходственных сторон и через отношение площадей, а потом сложите три получившихся равенства.

Ответ: $S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$.



К задаче **1082**



К задаче **1086**

1086. Опустим из точек M, A_1 и B_1 перпендикуляры на стороны треугольника и введем обозначения, как показано на рисунке. Так как каждая точка биссектрисы равноудалена от сторон угла, равные отрезки обозначим одинаковыми буквами (a, a и b, b).

Выразите длину MM_3 через a, b, x и y, используя теорему о делении отрезка в данном отношении. Далее из подобия треугольников выразите длину MM_1 и MM_2 через те же переменные. Сравните полученные равенства.

Практика 3

В классе (6 номеров)

1091. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Докажите, что CO — биссектриса угла ACB.

1092. Докажите, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

1093. Через точку O проведены три прямые, попарные углы между которыми равны 60°. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые, служат вершинами правильного треугольника.

1094. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 и диагональю 6. Найдите стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

1095. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найдите площадь трапеции.

1096. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Дома (5 номеров)

1097. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найдите углы треугольника ABC.

1098. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. AB — общая касательная этих окружностей, не проходящая через M (A и B — точки касания). Докажите, что M лежит на окружности с диаметром AB.

1099. В равнобедренную трапецию $ABCD$ (AD, BC — основания) вписана окружность с центром в точке O, $OC = 3$, $OD = 4$. Чему равен периметр трапеции?

1100. Найдите длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

1101. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, а ее периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

Л — лекционные, П — практические занятия

Неделя	Номер и наименование темы, контрольной работы	Л	П
	10 класс, первый семестр		
02.09 – 08.09	1. Элементы теории множеств	4	4
09.09 – 15.09	1. Элементы теории множеств	4	4
16.09 – 22.09	**КР–1** «Элементы теории множеств»	2	–
	Натуральные числа	2	4
23.09 – 29.09	Натуральные числа	4	4
30.09 – 06.10	15. Планиметрия	2	4
	КР–2 «Натуральные числа»	2	–
07.10 – 13.10	15. Планиметрия	4	4
14.10 – 20.10	**КР–15a** «Планиметрия»	2	–
	15. Планиметрия	2	4
21.10 – 27.10	15. Планиметрия	2	4
	КР–15b «Планиметрия»	2	–
28.10 – 10.11	15. Планиметрия	–	2
	3. Целые числа	4	2
11.11 – 17.11	Коллоквиум по планиметрии	4	–
	Обобщающее повторение планиметрии	–	4
18.11 – 24.11	**КР–3a** «Целые числа»	2	–
	3. Целые числа	2	4
25.11 – 01.12	3. Целые числа	2	4
	КР–3b «Целые числа»	2	–
02.12 – 08.12	16. Преобразования плоскости	4	4
09.12 – 15.12	16. Преобразования плоскости	2	2
	КР–16 «Преобразования плоскости»	2	–
	Обобщающее повторение	–	2
16.12 – 19.12	Обобщающее повторение	2	2
	10 класс, второй семестр		
13.01 – 19.01	4. Комбинаторика. Элементы теор. вер.	4	4

20.01 – 26.01	**КР–4** «Комбинаторика. Элементы т. в.»	2	–
	5. Числовые функции	2	4
27.01 – 02.02	5. Числовые функции	2	2
	6. Многочлены	2	2
03.02 – 09.02	**КР–5** «Числовые функции»	–	2
	6. Многочлены	2	2
	7. Комплексные числа	2	–
10.02 – 16.02	**КР–6** «Многочлены»	2	–
	7. Комплексные числа	–	4
	КР–7 «Комплексные числа»	2	–
17.02 – 22.02	17. Осн. пон. стереом. Параллельность	4	2
24.02 – 02.03	17. Осн. пон. стереом. Параллельность	1	4
	Тест по стереометрии	1	–
	17. Осн. пон. стереом. Параллельность	2	–
03.03 – 09.03	17. Осн. пон. стереом. Параллельность	–	4
	8. Рациональные уравнения	2	–
10.03 – 16.03	17. Осн. пон. стереом. Параллельность	–	2
	КР–17 «Осн. пон. ст. Параллельность»	2	–
	8. Рациональные уравнения	2	2
17.03 – 30.03	8. Рациональные уравнения	4	4
31.03 – 06.04	8. Рациональные уравнения	–	2
	КР–8a «Рациональные уравнения»	2	–
	8. Рациональные неравенства	2	2
07.04 – 13.04	8. Рациональные неравенства	2	2
	КР–8b «Рациональные неравенства»	–	2
	9. Действ. числа. Ирр. ур-ния и нер-ва	2	–
14.04 – 20.04	9. Действ. числа. Ирр. ур-ния и нер-ва	–	6
	КР–9 «Действ. числа. Ирр. ур. и н-ва»	2	–
21.04 – 27.04	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	4	4
28.04 – 04.05	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	2	2
	КР–10a «Показательные ур-ния и н-ва»	2	–
05.05 – 11.05	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	2	4
12.05 – 18.05	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	–	4
	КР–10b «Логарифмич. ур-ния и н-ва»	2	–

	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	–	2
19.05 – 25.05	10. Показ. и лог. ф-ции, ур-ния и н-ва	–	4
	КР–10c «П. и лог. ур-ния и н-ва с парам.»	2	–
26.05 – 30.05	Обобщающее повторение	4	2
	11 класс, первый семестр		
02.09 – 08.09	11. Тригонометрические выражения	4	4
09.09 – 15.09	**КР–11a** «Тригонометрич. выражения»	2	–
	11. Обратные тригонометрич. функции	2	4
16.09 – 22.09	11. Обратные тригонометрич. функции	–	2
	КР–11b «Обратные тригоном. функции»	2	–
	11. Тригонометрические уравнения	2	2
23.09 – 29.09	11. Тригонометрические уравнения	–	2
	КР–11c «Тригонометрич. уравнения»	2	–
	11. Тригонометрич. нер-ва и системы	2	2
30.09 – 06.10	11. Тригонометрические функции	2	–
	11. Тригоном. н-ва, системы; параметр	–	4
	КР–11d «Триг. н-ва, системы; парам.»	2	–
07.10 – 13.10	18. Перпендикулярность. Углы в пр-ве	4	4
14.10 – 20.10	**КР–18a** «Перпендик. Углы в пр-ве»	2	–
	18. Перпендикулярность. Углы в пр-ве	–	4
	12. Пределы. Непрерывность функции	2	–
21.10 – 27.10	**КР–18b** «Перпендик. Углы в пр-ве»	2	–
	12. Пределы. Непрерывность функции	2	4
28.10 – 10.11	13. Производная	4	4
11.11 – 17.11	**КР–13a** «Производная»	2	–
	13. Производная	2	2
18.11 – 24.11	13. Производная	2	2
	КР–13b «Производная»	2	–
	19. Векторы и координаты	2	–
25.11 – 01.12	19. Векторы и координаты	2	6
02.12 – 08.12	**КР–19a** «Векторы и координаты»	2	–
	19. Векторы и координаты	–	4
	20. Движения пространства	2	–
09.12 – 15.12	**КР–19b** «Векторы и координаты»	2	–

	Повторение. Решение задач	2	4
16.12 – 19.12	Повторение. Решение задач	–	4
	11 класс, второй семестр		
13.01 – 19.01	14. Интеграл	4	4
20.01 – 26.01	14. Интеграл	–	2
	КР–14 «Интеграл»	2	–
	21. Многогранники и тела вращения	2	2
27.01 – 02.02	21. Многогранники и тела вращения	4	4
03.02 – 09.02	**КР–21a** «Многогранники и тела вращ.»	2	–
	21. Многогранники и тела вращения	2	4
10.02 – 16.02	21. Многогранники и тела вращения	2	4
	КР–21b «Многогранники и тела вращ.»	2	–
17.02 – 22.02	21. Многогранники и тела вращения	–	2
	КР–21c «Многогранники и тела вращ.»	2	–
	22. Повторение планиметрии	–	2
24.02 – 02.03	22. Повторение планиметрии	4	4
03.03 – 09.03	**КР–22** «Повторение планиметрии»	2	–
	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	2	2
10.03 – 16.03	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
17.03 – 30.03	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
31.03 – 06.04	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
07.04 – 13.04	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
14.04 – 20.04	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
21.04 – 27.04	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
28.04 – 04.05	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	2	2
05.05 – 11.05	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	2	2
12.05 – 18.05	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	4	4
19.05 – 22.05	Повторение. Подготовка к ит. аттестации	2	2

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Коллоквиум (середина первого семестра 10 класса)

Для подготовки к коллоквиуму учащимся предлагается изучить доказательства следующих утверждений:

1. Величина угла между двумя секущими, между секущей и касательной равна полусумме/полуразности высекаемых дуг (половине отсекаемой дуги).
2. Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть. Аналогичные произведения для двух секущих равны.
3. Четыре точки лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда произведения отрезков пересекающихся хорд равны.
4. Центр вписанной в многоугольник окружности лежит на пересечении биссектрис его внутренних углов; центр описанной — на пересечении серединных перпендикуляров к его сторонам. Радиус вписанной окружности равен отношению площади к полупериметру многоугольника.
5. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен произведению его сторон, деленному на четыре площади треугольника. Диаметр описанной окружности равен отношению его стороны к синусу противолежащего угла.
6. Треугольник делится одной медианой на две равновеликие части; тремя медианами — на шесть равновеликих частей.
7. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.
8. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально боковым сторонам.
9. Биссектриса треугольника со сторонами a, b и c, проведенная к стороне c, делится точкой пересечения биссектрис в отношении $(a+b)/c$.
10. Катет прямоугольного треугольника равен среднему геометрическому гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна среднему геометрическому проекций катетов на

гипотенузу. Эта же высота равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.

11. Отрезок, соединяющий основания высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника подобный ему с коэффициентом подобия, равным косинусу общего угла этих треугольников.

12. Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно его стороны, лежит на описанной окружности.

13. Центры двух вневписанных в треугольник окружностей и вершина треугольника лежат на одной прямой.

14. Центр вписанной в треугольник окружности является ортоцентром треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей исходного треугольника.

15. Расстояние от вершины треугольника до точки касания вписанной окружности со стороной треугольника, выходящей из данной вершины, равно разности полупериметра треугольника и стороны, противолежащей данной вершине. Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением стороны треугольника, выходящей из данной вершины, равно полупериметру треугольника.

16. Площадь треугольника равна произведению радиуса вневписанной окружности на разность полупериметра треугольника и длины той его стороны, которой касается эта окружность.

17. Простое отношение трех точек инвариантно при параллельном проектировании.

18. Теорема Менелая.

19. Теорема Чевы.

20. Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих ее боковые стороны, лежат на одной прямой.

21. Длина отрезка с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения диагоналей, равна среднему гармоническому длин оснований. Этот отрезок делится точкой пересечения диагоналей пополам.

22. Длина отрезка с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части, равна среднему квадратичному длин оснований.

23. Длина отрезка, разбивающего трапецию на две подобные трапеции, равна среднему геометрическому длин оснований.
24. Формула Брахмагупты.
25. Критерий перпендикулярности диагоналей выпуклого четырехугольника.
26. Теорема Птолемея.

Зимняя сессия, 10 класс

Алгебра и начала анализа

1. Понятие множества. Операции над множествами. Свойства операций. Подмножество. Булеан множества. Количество элементов в булеане конечного множества (с доказательством).
2. Дистрибутивность операции объединения множеств относительно пересечения; пересечения относительно объединения (с доказательством).
3. Понятие универсального множества. Дополнение множества (определение). Законы де Моргана (с доказательством).
4. Упорядоченная пара элементов множества (определение). Докажите, что из равенства двух упорядоченных пар следует равенство соответствующих элементов. Прямое произведение множеств (определение, примеры).
5. Бинарное отношение; рефлексивность, симметричность, транзитивность; отношение эквивалентности; разбиение множества на классы (определения). Связь между отношением эквивалентности и разбиением на классы (с доказательством). Примеры.
6. Натуральные числа: аксиомы Пеано. Определение сложения натуральных чисел. Докажите, что операция сложения ассоциативна.
7. Определение сложения натуральных чисел. Докажите, что операция сложения коммутативна.
8. Определение умножения натуральных чисел. Докажите, что операция умножения дистрибутивна относительно сложения.

9. Отношение «меньше или равно» на множестве натуральных чисел (определение). Докажите, что это отношение является отношением порядка.
10. Линейно упорядоченные и вполне упорядоченные множества (определения). Докажите, что множество натуральных чисел является вполне упорядоченным.
11. Целые числа; операции над целыми числами; порядок на множестве целых чисел (определения). Докажите, что множество целых чисел является кольцом.
12. Теорема о делении с остатком (с доказательством).
13. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное (определения). Докажите существование и единственность положительного наибольшего общего делителя двух целых чисел.
14. Наибольший общий делитель (определение). Свойства операции «вычисление наибольшего общего делителя» (с доказательством).
15. Делители и кратные (определения). Докажите, что отношение «делить» является отношением порядка на множестве натуральных чисел. Теорема о делимости на n линейной комбинации чисел, каждое из которых делится на n (с доказательством).
16. Взаимно простые числа (определение, примеры). Критерий взаимной простоты (без доказательства). Теорема о делимости числа на произведение двух своих делителей (с доказательством).
17. Простые числа (определение). Теорема о бесконечности множества простых чисел (с доказательством).
18. Теорема о каноническом разложении натурального числа, большего 1 (с доказательством).
19. Алгоритм Евклида (с доказательством). Примеры.
20. Сравнимость по модулю n (определение). Свойства сравнений (с доказательством).
21. Вычет. Сложение и умножение вычетов (определения). Докажите, что множество вычетов по данному модулю с операциями сложения и умножения является кольцом. При каком n кольцо вычетов по модулю n является полем (без доказательства)?

22. Малая теорема Ферма (с доказательством). Примеры.
23. Функция Эйлера (определение). Мультипликативность функции Эйлера (без доказательства; показать на примере). Теорема Эйлера (с доказательством).
24. Сравнение первой степени (определение). Отыскание частного решения (без доказательства; показать на примере). Формула общего решения (с доказательством).
25. Линейное диофантово уравнение (определение). Теорема об общем решении линейного диофантова уравнения с взаимно простыми коэффициентами (с доказательством).

Геометрия

1. Основные понятия планиметрии и отношения между ними. Аксиома, теорема. Основные аксиомы планиметрии. Луч, сонаправленность лучей на прямой, отрезок, полуплоскость (определения).
2. Угол, прямой угол, перпендикулярность прямых (определения). Лемма о вложенных отрезках (без доказательства). Измерение отрезков и углов.
3. Пятый постулат Евклида (аксиома параллельности). Абсолютная геометрия, геометрии Лобачевского и Римана, их модели в евклидовой геометрии. Сонаправленность лучей на плоскости (определение, свойства без доказательства).
4. Окружность, круг, дуга, хорда, сектор, сегмент, секущая, касательная. Длина окружности. Центральные и вписанные углы. Величина дуги. Теоремы об углах и хордах (доказать 2–3 из них по выбору учителя).
5. Многоугольник, выпуклый многоугольник (определения). Сумма углов выпуклого многоугольника (с доказательством). Вписанные и описанные многоугольники: расположение центров окружностей (с доказательством), формула для радиуса вписанной окружности (с доказательством).
6. Треугольник (определение). Теоремы синусов и косинусов (без доказательства). Две формулы радиуса окружности, описанной около треугольника (с доказательством).
7. Понятие площади фигуры. Формулы площади параллелограмма, трапеции, треугольника (с доказательством). Формула Герона (без доказательства).

8. Медианы, биссектрисы, высоты треугольника, их свойства (с доказательством). Ортоцентр треугольника и его свойства (с доказательством).
9. Вневписанные окружности. Расположение вершин треугольника и центров вписанной и вневписанных окружностей (с доказательством).
10. Длины отрезков от точки касания вписанной и вневписанной в треугольник окружностей до вершины треугольника (с доказательством). Формула площади треугольника через радиус вневписанной окружности, полупериметр и сторону (с доказательством).
11. Простое отношение трех точек (определение) и его инвариантность при параллельном проектировании (с доказательством). Теорема Менелая (с доказательством).
12. Чевиана. Теорема Чевы (с доказательством).
13. Четырехугольник: критерии вписанности и описанности (без доказательства). Сумма квадратов диагоналей параллелограмма (с доказательством). Формула площади четырехугольника через длины диагоналей (с доказательством).
14. Трапеция (определение). Свойства трапеции (доказать одно из них по выбору учителя).
15. Свойства отрезков с концами, лежащими на боковых сторонах трапеции, параллельных основаниям (с доказательством).
16. Формула Брахмагупты (с доказательством).
17. Критерий перпендикулярности диагоналей выпуклого четырехугольника (с доказательством).
18. Теорема Птолемея (с доказательством). Обратная теорема (без доказательства).
19. Движение плоскости (определение). Докажите, что композиция двух движений является движением; что отображение плоскости на себя, обратное движению, является движением. Конгруэнтные фигуры (определение).
20. Осевая симметрия (определение). Докажите, что осевая симметрия является движением.
21. Центральная симметрия (определение). Докажите, что центральная симметрия является движением.

22. Параллельный перенос (определение). Докажите, что параллельный перенос является движением.
23. Поворот (определение). Докажите, что поворот является движением.
24. Ориентация плоскости. Движения первого и второго рода (определения). Движениями какого рода являются параллельный перенос, осевая и центральная симметрии, поворот (объяснить на примерах)?
25. Гомотетия (определение). Докажите, что множество всех гомотетий с общим центром является абелевой группой. Преобразование подобия (определение). Связь между преобразованием подобия и гомотетией (без доказательства).

Летняя сессия, 10 класс

Алгебра и начала анализа

1. Предмет комбинаторики. Правила умножения и сложения (показать на примерах). Факториал. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений (с доказательством).
2. Комбинаторное доказательство формулы бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов (с доказательством). Треугольник Паскаля.
3. Вероятностное пространство. Элементарные и сложные события. Вероятность (определение). Несовместные события; сумма событий (определение). Вероятность суммы несовместных событий.
4. Произведение событий (определение). Независимость событий (определение). Вероятность суммы событий (с доказательством и примером).
5. Числовая функция (определение). Способы задания числовых функций. График функции. Ограниченность, монотонность, четность, нечетность, периодичность функции (определения). Связь между свойствами функции и свойствами ее графика.
6. Преобразования графиков функций: сдвиги, отражения относительно осей координат, растяжения и сжатия (показать на примерах).

7. Функции $y = kx + b$, $y = |x|$, $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $y = k/x$ $(k \neq 0)$, их свойства и графики. Дробно-линейная функция, ее асимптоты.
8. Многочлен от одной переменной (определение). Формулы сокращенного умножения: квадрат алгебраической суммы нескольких слагаемых, разность n-х степеней, сумма n-х степеней при нечетном n (доказательства и примеры).
9. Многочлен от нескольких переменных; симметрический многочлен; элементарные симметрические многочлены (определения). Теорема о представимости симметрического многочлена в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов (без доказательства, показать на примере).
10. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу и следствие из нее (с доказательством).
11. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами (с доказательством).
12. Теорема Виета для многочлена n-й степени (с доказательством).
13. Определение комплексных чисел. Алгебраические операции над комплексными числами. Комплексная плоскость.
14. Тригонометрическая форма комплексного числа. Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно (показать на примерах).
15. Формула Муавра. Извлечение корня n-й степени из положительного действительного числа.
16. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел; неравенство Бернулли (с доказательством)
17. Неравенство Коши — Буняковского (геометрический смысл). Неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным (с доказательством).
18. Определение действительного числа. Порядок на множестве действительных чисел; действия с действительными числами (определения). Периодичность представления действительного числа десятичной дробью (без доказательства). Запись периодических дробей в виде обыкновенных дробей (показать на примерах).

19. Степенная функция, ее свойства и график.
20. Иррациональные уравнения и неравенства. Решение уравнений и неравенств вида $\sqrt{P(x)} < | = | > Q(x)$ сведением к равносильным системам/совокупностям (показать на примерах). Решение иррациональных неравенств методом интервалов (показать на примере).
21. Показательная функция, ее возрастание/убывание (с доказательством) и график.
22. Методы решения показательных уравнений и неравенств (показать на примерах).
23. Однородный многочлен от двух переменных (определение). Идея однородности при решении рациональных и показательных уравнений (показать на примерах).
24. Логарифм (определение). Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов (с доказательством).
25. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода к новому основанию логарифма и следствия из нее (с доказательством).
26. Логарифмическая функция, ее возрастание/убывание (с доказательством) и график.

Геометрия

1. Основные понятия стереометрии и отношения между ними. Основные аксиомы стереометрии. Существование плоскости, содержащей две заданные пересекающиеся прямые; заданные прямую и точку (с доказательством).
2. Параллельные прямые (определение). Теорема стереометрии — аналог пятого постулата Евклида (с доказательством). Параллельность отрезков и лучей (определения).
3. Теоремы о пересечении плоскости двумя параллельными прямыми; о транзитивности параллельности прямых (с доказательством).
4. Параллельность прямой и плоскости (определение). Признак параллельности прямой и плоскости; теоремы о канатоходце и о параллельности плоскости двух параллельных прямых (с доказательством).

5. Скрещивающиеся прямые (два эквивалентных определения). Признак скрещивающихся прямых; теорема о скрещивающихся прямых и параллельных плоскостях (с доказательством).
6. Лемма об углах с сонаправленными сторонами (с доказательством). Угол между параллельными; пересекающимися; скрещивающимися прямыми (определения). Доказательство корректности определения угла между скрещивающимися прямыми.
7. Параллельные плоскости (определение). Признак параллельности плоскостей (с доказательством).
8. Теоремы о разрезании торта; об отрезках параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями; о пересечении двух параллельных плоскостей прямой (с доказательством).
9. Параллельное проектирование (определение). Докажите, что параллельное проектирование сохраняет параллельность прямых. Основные правила построения плоских изображений пространственных фигур.
10. Данная плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей; пересекает ли она и вторую? (доказательство или контрпример). Транзитивность параллельности плоскостей (с доказательством). Теорема о существовании плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости (с доказательством).
11. Тетраэдр и параллелепипед; прямой и прямоугольный параллелепипед (определения). Свойства параллелепипеда (с доказательством).
12. Сечение тетраэдра или параллелепипеда (определение). След секущей плоскости (определение). Построение сечения параллелепипеда методом следов на ребрах; на гранях (без доказательства; показать на примерах). Использование теоремы о разрезании торта при построении сечений параллелепипеда.
13. Построение сечения параллелепипеда методом внутреннего проектирования (вспомогательных плоскостей): без доказательства; показать на примерах, когда три заданные точки лежат на ребрах; во внутренних областях граней.

Зимняя сессия, 11 класс

Алгебра и начала анализа

1. Определения тригонометрических функций вещественного аргумента. Область определения, множество значений, четность, нечетность, периодичность, ограниченность (с доказательством). Графики синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
2. Основное тригонометрическое тождество и следствия из него (с доказательством). Вычисление значений тригонометрических функций одного и того же аргумента по заданному значению одной из них (показать на примерах).
3. Формулы приведения (доказательство одной из них по выбору экзаменатора). Два правила запоминания формул приведения.
4. Формулы сложения и двойного угла для синуса и косинуса (с доказательством).
5. Формулы сложения и двойного угла для тангенса (с доказательством).
6. Формулы половинного угла (понижения степени, удвоения аргумента) для синуса и косинуса (с доказательством).
7. Формулы преобразования суммы синусов/косинусов в произведение (с доказательством). Преобразование в произведение суммы синуса и косинуса (показать на примере).
8. Формулы преобразования произведения синусов, косинусов, синуса и косинуса в сумму (с доказательством).
9. Арксинус (определение, область определения, множество значений, график). Тождество $\arcsin(-a) = \ldots$ (проиллюстрировать на рисунке). Вывод общей формулы для решения уравнения $\sin x = a$.
10. Арккосинус (определение, область определения, множество значений, график). Тождество $\arccos(-a) = \ldots$ (проиллюстрировать на рисунке). Вывод общей формулы для решения уравнения $\cos x = a$.
11. Арктангенс (определение, область определения, множество значений, график). Тождество $\operatorname{arctg}(-a) = \ldots$ (проиллюстрировать на рисунке). Вывод общей формулы для решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

12. Однородные тригонометрические уравнения (определение) и методы их решения (показать на примере для уравнений первой и второй степени).

13. Линейные тригонометрические уравнения (определение). Решение методом сведения к половинному аргументу; методом введения вспомогательного аргумента (показать на примерах).

14. Методы решения тригонометрических неравенств вида $f(x) \otimes a$, где f — sin, cos, tg или ctg; $\otimes$ — один из знаков строгого или нестрогого неравенства; a — вещественное число.

15. Предел последовательности (определение). Единственность предела (с доказательством).

16. Ограниченность сходящейся последовательности (с доказательством). Существование предела монотонной ограниченной последовательности (с доказательством).

17. Число e (определение, доказательство существования). Пример возникновения числа e при решении задачи о сложных процентах.

18. Теорема о переходе к пределу в сумме (с доказательством). Пределы и арифметические операции (без доказательства, показать на примерах).

19. Теорема о двух полицейских для последовательностей (с доказательством).

20. Предел функции в точке (определение). Единственность предела (с доказательством).

21. Непрерывность функции в точке и на множестве (определения). Примеры разрывных функций. Разрывы 0, I и II рода (показать на примерах).

22. Производная функции в точке (определение). Механический смысл производной. Дифференцируемые и недифференцируемые функции (примеры). Производная функция (определение). Формулы для производной суммы двух функций (с доказательством), разности двух функций, произведения функции на число, произведения и частного двух функций, сложной функции (без доказательства).

23. Касательная к графику функции (нестрогое определение). Геометрический смысл производной, иллюстрация на примере. Теоремы Ролля и Лагранжа (без доказательства; геометрическая и аналитическая формулировки).

24. Экстремумы функции (определения). Теоремы о связи производной и монотонности (без доказательства). Стационарные и критические точки функции. Теорема Ферма (без доказательства). Необходимые и достаточные условия экстремума. Правила нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке; на интервале.

25. Выпуклое множество в $\mathbb{R}^2$; выпуклая и вогнутая функции (определения). Исследование функции на выпуклость/вогнутость с помощью второй производной (показать на примере).

26. Исследование и построение графика функции с помощью производной. Вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты; алгоритмы их нахождения (показать на примерах).

Геометрия

1. Перпендикулярность прямых в пространстве; перпендикулярность прямой и плоскости (определения). Теоремы: о двух параллельных прямых, одна из которых перпендикулярна третьей; о двух прямых, перпендикулярных плоскости (с доказательством). Верны ли обратные теоремы? (Если да — доказать).

2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости (с доказательством).

3. Теорема о существовании и единственности перпендикуляра к данной плоскости, проведенного через данную точку пространства (с доказательством).

4. Теорема о перпендикулярном протыкании торта (с доказательством).

5. Ортогональное проектирование (определение). Докажите, что при ортогональном проектировании прямая проектируется в прямую или в точку. Угол между прямой и плоскостью (определение).

6. Расстояние между прямой и плоскостью; между параллельными плоскостями (определения, доказательства корректности).

7. Теорема о трех перпендикулярах и обратная ей (с доказательством).
8. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла (определения). Величина двугранного угла (определение, доказательство корректности).
9. Перпендикулярные плоскости (определение). Признак перпендикулярности плоскостей (теорема о могильной табличке; с доказательством).
10. Вектор как класс эквиполентных направленных отрезков (определение). Действия над векторами (определения; доказательство корректности одного из них по выбору учащегося).
11. Свойства действий над векторами. Доказать одно из свойств (по выбору учащегося).
12. Коллинеарные векторы (определение, доказательство корректности). Критерий коллинеарности ненулевых векторов (с доказательством).
13. Компланарные векторы (определение, доказательство корректности). Критерий компланарности ненулевых векторов (с доказательством).
14. Базисы плоскости и пространства (определения). Теорема о разложении вектора по базису пространства (с доказательством).
15. Координаты вектора на плоскости и в пространстве (определения). Координаты суммы, разности векторов, произведения вектора на число (с доказательством).
16. Координатные формулы длины вектора, середины отрезка, деления отрезка в данном отношении (в прямоугольной декартовой системе координат; с доказательством).
17. Критерий коллинеарности ненулевых векторов в координатах (с доказательством). Как выяснить, компланарны ли ненулевые векторы, по их координатам? (Показать на примере; с пояснениями).
18. Угол между векторами (определение, доказательство корректности). Скалярное произведение векторов (определение). Формула для вычисления скалярного произведения векторов по их координатам (с доказательством). Формулы для вычисления угла между векторами; между прямыми.

19. Уравнения прямой в плоскости: по точке и направляющему вектору, по точке и нормальному вектору, в отрезках (с выводом).

20. Уравнения прямой в пространстве: по точке и направляющему вектору (две формы записи), по двум точкам (две формы записи); с выводом.

21. Уравнение плоскости, заданной своим нормальным вектором (с выводом). Уравнение плоскости по трем точкам (показать на примере).

22. Расстояние от точки до прямой в плоскости; расстояние от точки до плоскости в пространстве (вывести общие формулы; с пояснениями).

23. Аналитические условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей (привести примеры).

24. Уравнение плоскости, касательной к данной сфере в данной точке этой сферы (вывести на примере).

25. Уравнение плоскости, касательной к данной сфере и параллельной данной плоскости (вывести на примере).

26. Как аналитически определить взаимное расположение данной сферы и данной плоскости? (Показать на примерах).

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Текущая оценка контрольных и домашних работ

Каждая контрольная работа состоит из четырех заданий. Первое и второе задания оцениваются по шкале {0, 1}. Третье и четвертое задания оцениваются по четырехбалльной шкале в соответствии со следующими критериями:

3 — задача решена полностью и правильно. Имеются верные обоснования всех ключевых моментов решения. В записи решения, чертежах, рисунках, схемах допускаются 1—2 недочета. Правильно выполнены все преобразования и вычисления, получен верный ответ;

2 — ход решения верен, однако обоснованы не все его ключевые моменты; либо допущено более 2 недочетов в записи решения; либо допущены не влияющие на правильность дальнейшего хода решения описки или ошибки в преобразованиях или вычислениях, приведшие к неверному ответу;

1 — общая идея, способ решения верные, но не выполнены некоторые этапы решения или решение не завершено. Большинство ключевых моментов не обоснованы или имеются неверные обоснования, либо допущена ошибка, влияющая на правильность дальнейшего хода решения; при этом возможны как неверный, так и верный ответы.

0 — в работе не содержится верной идеи, способа решения задачи, не совершены верные действия по реализации этой идеи, либо ученик не приступал к решению задачи.

Кроме того, наряду с контрольной работой проверяется и выполнение практической работы (задач, решавшихся в классе и задававшихся на дом), оцениваемое следующим образом:

2 — верно выполнено 90 и более процентов работы;

1 — верно выполнено от 70 до 90 процентов работы;

0 — верно выполнено менее 70 процентов работы.

Отметка за контрольную работу выставляется, исходя из суммы набранных учащимся баллов:

0–3 балла	4–6 баллов	7–8 баллов	9–10 баллов
«2»	«3»	«4»	«5»

Отметка за полугодие

Отметка за полугодие выставляется по следующим правилам:

5 — среди отметок в полугодии нет «2» и средний балл всех отметок в полугодии (с учетом их веса) больше или равен 4,65;

4 — средний балл всех отметок больше или равен 3,65, но меньше 4,65;

3 — средний балл всех отметок больше или равен 2,65, но меньше 3,65;

2 — средний балл всех отметок меньше 2,65.

Оценивание устного ответа на экзамене по математике

В экзаменационном билете учащемуся по каждому предмету (алгебра и начала анализа, геометрия) предлагается ответить на теоретический вопрос и решить задачу. Отметка по предмету выставляется по следующим критериям:

5 — ответ на теоретический вопрос свидетельствует о знании, понимании и прочном усвоении учащимся программного материала. На вопросы экзаменатора, в том числе и дополнительные (в пределах программы), учащийся дает самостоятельные, правильные, сознательные и уверенные ответы. Задача решена правильно и самостоятельно. Допускаются 1–2 негрубые ошибки в ответе на теоретический вопрос, в решении задачи или в речи, которые учащийся самостоятельно исправил после указания на них экзаменатора;

4 — ответ на теоретический вопрос свидетельствует о знании, понимании и прочном усвоении учащимся программного материала. На вопросы экзаменатора, в том числе и дополнительные (в пределах программы), учащийся дает правильные, сознательные и уверенные ответы (возможно, после наводящих вопросов или незначительных подсказок экзаменатора). Задача решена правильно самостоятельно или после незначительной помощи экзаменатора. Допускаются 1—2 негрубые ошибки в ответе на теоретический вопрос, в решении задачи или в речи, которые учащийся исправил после наводящих вопросов или незначительных подсказок экзаменатора;

3 — ответ в целом соответствует критериям отметок «4» или «5», но при этом допущены грубые ошибки, либо 1—2 негрубые ошибки, которые учащийся не может исправить даже после наводящих вопросов и подсказок экзаменатора; либо ответ на теоретический вопрос соответствует критериям отметок «4» или «5», а задача не решена или решена неправильно; либо решение задачи соответствует критериям отметок «4» или «5», а ответ на теоретический вопрос свидетельстует о недостаточном знании этого вопроса экзаменуемым;

2 — в остальных случаях.

Итоговая отметка за семестр

Итоговая отметка за семестр выставляется на основании отметки за полугодие и отметки, полученной на экзамене. Если на экзамене получена отметка «2», в качестве итоговой отметки за семестр выставляется «2». Если отметка на экзамене и отметка за полугодие различаются на 2 балла, за семестр выставляется их среднее арифметическое; если на 1 балл, то за семестр выставляется отметка, полученная на экзамене.

В случае, если положительная отметка на экзамене получена в результате его пересдачи, за семестр выставляется отметка «3».

За второй семестр 11 класса выставляется отметка за второе полугодие 11 класса.

Итоговая отметка за учебный год

Данная отметка выставляется на основании отметок за первый и второй семестры. Если одна из этих отметок «2», в качестве итоговой отметки за год выставляется «2». Если отметки за семестры различаются на 2 балла, за учебный год выставляется их среднее арифметическое; если на 1 балл, то за год выставляется отметка, выставленная за второй семестр.

Учебное издание

Гольдин Александр Миронович

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для учащихся 10–11 классов

Набор, верстка и корректура выполнены автором
с использованием издательской системы $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано в печать 23.12.2019. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 9,3.
Издание набрано свободно распространяемой гарнитурой «Латинская»
А. В. Дмитриева (пакет «OldFonts», версия 38-5.06.2010).
Бумага офсетная. Тираж 120 экз. Заказ № 369.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург-83, ул. Тургенева, 4

Университетское издательство
620017, Екатеринбург, ул. Вали Котика, 13, под. 1а

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург-83, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-90-13, 358-93-22, 350-58-20
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru
http://print.urfu.ru

Для заметок

Для заметок