

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

С.А. Ануфриенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 11

Учебное пособие



Екатеринбург
2025

УДК
ББК

Подготовлено на кафедре математики СУНЦ УрФУ

Рецензенты: *А. В. Осипов*, зав. сектором топологии Отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, д.ф.-м.н.,
С. Э. Нохрин, доцент кафедры математического анализа департамента математики, механики и компьютерных наук ИЕНиМ УрФУ, канд.ф.-м.н.

Математический анализ 11: учеб. пособие / С. А. Ануфриенко.— : Изд-во , 2025. 216с.

В книгу включены разделы программы по математическому анализу, которые изучаются в одиннадцатых математических классах СУНЦ УрФУ: построение вещественной прямой, пределы последовательностей и пределы функций, производная функции и исследование свойств числовых функций с помощью производной, интеграл.

Учебное пособие предназначено для учащихся СУНЦ УрФУ, старшеклассников и учителей математики.

ISBN

© С. А. Ануфриенко, 2025
© Макет С. А. Ануфриенко, 2025

Оглавление

Предисловие и система обозначений	5
1. Множество действительных чисел	9
1.1. Натуральные числа	9
1.2. Кольцо целых чисел	14
1.3. Поле рациональных чисел	23
1.4. Порядок на $\mathbb{Q}$	28
1.5. Множество действительных чисел	32
1.6. Правильно расположенные и близкие множества	38
1.7. Операции с действительными числами	41
1.8. Бесконечные десятичные дроби	51
2. Предел последовательности	56
2.1. Метрические пространства	56
2.2. Предел последовательности	63
2.3. Лемма Вейерштрасса. Число Эйлера	66
2.4. Арифметические операции с пределами последовательностей	71
2.5. Предельный переход в неравенствах	76
2.6. Три леммы	80
3. Предел функции. Непрерывность	86
3.1. Предел функции в точке	86
3.2. Арифметические операции и пределы функций	90
3.3. Первый замечательный предел	93
3.4. Второй замечательный предел	96
3.5. Непрерывность функции в точке и на множестве	101
3.6. Строго монотонные функции и их обратные	106
3.7. Непрерывные функции на отрезке	110
3.8. Степень с рациональным показателем	112
3.9. Показательная функция	120
3.10. Логарифмическая функция	129
4. Производная	135
4.1. Определение производной. Касательная к графику	135
4.2. Производная и арифметические операции	140
4.3. Производные элементарных функций	144
4.4. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа	149

4.5.	Производная и свойства функций	154
4.6.	Направление выпуклости и точки перегиба	161
5.	Интеграл	173
5.1.	Неопределенный интеграл	173
5.2.	Суммы Дарбу и определенный интеграл	178
5.3.	Свойства определенного интеграла	190
5.4.	Формула Ньютона-Лейбница	197
5.5.	Приложения определенного интеграла	201



Предисловие и система обозначений

Первое систематическое изложение основ математического анализа (или «метода бесконечно малых») появилось во второй половине XVII века в работах двух великих математиков — сэра И. Ньютона¹ и Г.В. Лейбница². Начиналось всё с очень драматических событий. Эпидемия чумы (только в Лондоне бактерия *Yersinia pestis* за два года унесла 20% его жителей, сто тысяч — по всей Англии) и Великий лондонский пожар (2–5 сентября 1666 года) выгнали часть столичных жителей в деревню. Еще в августе 1666 года занятия в Тринити-колледже были прекращены из-за эпидемии и магистр Исаак Ньютон уехал в дом своей матери, в Вулсторп, захватив книги и инструменты. Постоянные перебои с электричеством (первый источник постоянного тока был изобретен в 1800 году) и Интернетом (первая открытая сеть NSFNET появилась только в 1984 году) высвободили у Ньютона достаточно времени для создания классической физики, оптики и «метода флюксий» (*флюксия* — производная по времени). Лишенный честолюбия и не желая тратить время на псевдонаучные споры, Ньютон долго не публиковал результаты своих исследований. В его письме к Лейбницу в 1676 году он указывает на существование метода бесконечно малых и достигнутых с его помощью результатов, детали самого метода были скрыты сложной шифровкой. Письмом от 21 июня 1677 года Лейбниц отвечает на загадки Ньютона изложением основ дифференциального исчисления, отличающихся от ньютоновских более ясной системой понятий и обозначений. На этом переписка закончилась. В 1682 году в Лейпциге начал издаваться первый немецкий научный журнал «Acta Eruditorum», в котором выходят несколько работ Лейбница без каких-либо ссылок на предшественников. В 1684 и 1686 годах он публикует основы математического анализа и высказывает предположение о начале но-

¹Исаак Ньютон (1643–1727) — английский математик, физик и астроном, создатель классической физики и математического анализа; президент Королевского общества (1703–1727); управляющий (1699–1727) Королевского монетного двора, под чьим руководством была существенно улучшена монетная система Англии, трижды Монетный двор посещал русский царь Петр и в 1700 году провел в России монетную реформу, сходную с английской; Ньютон был первым, кого посвятили в рыцари за научные достижения.

²Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик, философ, логик, физик, языковед и изобретатель, основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской академии и Лондонского Королевского общества; заложил основы математического анализа, комбинаторики и математической логики, описал двоичную систему счисления, ввел современные обозначения для интеграла и дифференциала, сформулировал закон сохранения энергии; был предшественником немецкой классической философии; несколько раз встречался с Петром I и сопровождал его в Теплице и Дрездене, следствием этих встреч было одобрение Петром создания Академии наук в Петербурге; от Петра Лейбниц получил титул тайного советника юстиции и пенсию в 2000 гульденов; Лейбниц стал первым гражданским лицом Германии, которому был воздвигнут памятник.



вой эпохи в истории математики. Ньютон под давлением своих сторонников, озабоченных вопросами национального приоритета, публикует свою старую работу по флюксионному анализу в 1704 году. В «Acta» выходит анонимка о безусловном приоритете Лейбница и плагиате Ньютона. Так между многочисленными соратниками Ньютона и соратниками Лейбница началась общеевропейская война о приоритете, чуть менее кровопролитная в сравнении с шекспировской войной Алой и Белой роз. В январе 1713 года Королевское общество получило примирительное письмо Лейбница, в котором он соглашался, что Ньютон пришел к анализу самостоятельно, «на общих принципах, подобно нашим». По требованию рассерженного Ньютона общество создает международную комиссию, чтобы закрыть вопрос о приоритете. Комиссия очень быстро и единогласно решает вопрос в пользу Ньютона. Некоторые исследователи отмечают, что в комиссию входили только лояльные к Ньютону ученые и черновик итогового доклада был написан самим Исааком. Активная фаза войны продолжалась до декабря 1716 года, когда аббат Конти сообщил Ньютону: «Лейбниц умер, диспут окончен». Следствием этой драмы стала изоляция английской и европейской научных школ, поэтому проникновение революционных идей ньютоновской физики в Европу и мощных результатов европейской математики в Англию задержалось на столетие. Сейчас закрепилось мнение, что **Ньютон и Лейбниц пришли к открытию математического анализа независимо**. К вопросу о приоритете можно добавить, что учителем Ньютона был И. Барроу³, который разработал метод нахождения касательных, преподавал его в Тринити-колледже и опубликовал его в книге своих лекций в начале 1670-х годов. Известно, что эту книгу в 1673 году приобрел Лейбниц во время своего первого посещения Лондона. Ньютон никогда не оспаривал приоритет Барроу в открытии формулы Ньютона–Лейбница и метода решения уравнений разделением переменных, содержащихся в этой книге.

Совсем немного о приложениях математического анализа. В геометрии теорию длины, площади, объема, измерения углов невозможно построить без предельных переходов. Классическая физика, астрономия активно используют производную и интеграл. Несколько лет занятий тензорным анализом и

³Исаак Барроу (1630–1677) — английский математик, физик и богослов, издал сочинения многих греческих математиков со своими комментариями; не смог по политическим мотивам возглавить кафедру греческого языка в Кембридже и отправился в четырехлетнее путешествие к Гробу Господню, в котором ему довелось проявить храбрость — когда на их корабль напали пираты, Барроу единственным из пассажиров с мечом в руках присоединился к команде в обороне судна в абордажной битве; в 1664 году была введена именная должность Лукасовского профессора математики и Барроу стал ее первым обладателем; в 1669 году Барроу оставил пост лукасовского профессора математики, передав последний Ньютону.



дифференциальной геометрией позволили А. Эйнштейну⁴ в 1915 году опубликовать (почти одновременно с Д. Гильбертом⁵) уравнения поля общей теории относительности (ОТО) и заложить фундамент современной физики. В наши дни результаты ОТО обязательно учитываются в спутниковых навигационных системах. Теория дифференциальных уравнений применяется в химии для исследования химических реакций, в биологии — для определения численности популяций, в авиа- и ракетостроении — на этапе проектирования и в управлении движении. Кстати, хорошие аэродинамические свойства крыла самолета обеспечиваются функцией Жуковского⁶ из теории функций комплексного переменного (ТФКП). Немного гиперболизируя, можно утверждать, что современные самолеты летают на теории функций комплексного переменного, а ракеты — на дифференциальных уравнениях.

Несколько слов о структуре книги. Учебный материал разбит на несколько глав, каждая глава — на параграфы. Нумерация утверждений двойная: номер параграфа и номер утверждения в нем. В редких случаях возникают ссылки на утверждения других глав, в этом случае явно указывается еще и номер главы.

Кратко о содержании книги. Основой математического анализа является действительная (или вещественная) прямая и ее свойства, поэтому в первой главе последовательно строятся множества целых, рациональных и действительных чисел, а также обсуждается вопрос представления действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Сложно говорить о какой-либо строгости в доказательстве результатов следующих глав и многих теорем геометрии 11 класса без материала первой главы. Вторая и третья главы посвящены теории пределов последовательностей и функций, там же вводится понятие непрерывности и доказываются основные свойства непрерывных

⁴Альберт Эйнштейн (1879–1955) — физик-теоретик, основатель современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года; вместе с Планком стал основателем квантовой теории; Эйнштейн верил, что «вся физика — это геометрия».

⁵Давид Гильберт (1862–1943) — универсальный математик, автор фундаментальных идей и результатов многих областей математики: функционального анализа, теории инвариантов, общей алгебры, математической физики, теории интегральных уравнений и оснований математики; профессор, член многих академий наук, создатель важнейшего математического центра в Гёттингене (среди его учеников был, например, чемпион мира по шахматам Эмануил Ласкер); на Втором Международном математическом конгрессе в 1900 году сформулировал знаменитый список двадцати трех нерешенных проблем, во многом определивший развитие математики всего XX века.

⁶Николай Егорович Жуковский (1847–1921) — русский ученый в области математики и механики, основоположник современной гидро- и аэродинамики; заслуженный профессор Московского университета (1911), член-корреспондент Императорской Академии наук по разряду математических наук (1894); в 1902 году в Московском университете построил одну из первых аэродинамических труб; в 1905 году избран президентом Московского математического общества.



функций. Четвертая и пятая главы содержат основные результаты о производной и интегралах.

Договоримся о некоторых математических обозначениях и сокращениях, которые будут использоваться в тексте:

$\forall$ — квантор всеобщности, читается «для всех» или «для любых», появился из английского выражения for **All**, выделенную букву в котором отразили относительно горизонтальной оси;

$\exists$ — квантор существования, читается «существует», появился от английского слова **Exist**, выделенную букву в котором отразили относительно вертикальной оси; $\exists!$ — частный случай квантора существования, читается «существует и единственный»;

$\Rightarrow$ — следует;

$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда;

$\&$ — знак конъюнкции, читается как «и»;

$\vee$ — знак дизъюнкции, читается как «или»;

: или | — в утверждении является сокращением для «таких, что»;

■ — конец доказательства;

О/п или о/п — сокращение для «От противного» или «от противного», в зависимости от места в предложении;

$\nexists$ — противоречие;

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — соответственно множества всех натуральных, целых, рациональных и вещественных (или действительных) чисел;

$\in$ — знак принадлежности;

$\subseteq$ — знак включения, ставят между множествами в случае, когда множество слева от знака содержится во множестве справа от него, допускаются цепочки, например $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;

$\{x : P(x)\}$ — множество всех таких элементов x , для которых выполняется свойство $P(x)$;

$\cap$ — пересечение множеств;

$\cup$ — объединение множеств;

$\sum$ — сумма чисел;

$\prod$ — произведение чисел или множеств.

В следующем примере использования кванторов внимательный читатель распознает аксиому Евклида: $\forall B \forall a \exists ! b : B \in b \ \& \ b \parallel a$.

Критические замечания и конструктивные предложения просьба отправлять по электронной почте math-lyceum-urfu@mail.ru.

Глава 1

Множество действительных чисел

1.1. Натуральные числа

В этом параграфе вспомним некоторые понятия и утверждения из курса алгебры десятого класса, которые нам помогут при построении вещественной прямой. *Декартовым произведением* множеств X и Y называется $X \times Y = \{(a, b) : a \in X \text{ \& } b \in Y\}$. Любое подмножество $\rho \subseteq X \times X$ называется *отношением* на множестве X , а $\varphi \subseteq X \times Y$ — соответствием между множествами X и Y (соответствия обозначают так: $\varphi : X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{\varphi} Y$). *Областью определения* соответствия $\varphi : X \rightarrow Y$ называется множество $D(\varphi) = \{a \in X : \exists b \in Y \text{ такой, что } (a, b) \in \varphi\}$. Соответствие $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *однозначным*, если из условия $(a, b), (a, b_1) \in \varphi$ всегда следует, что $b = b_1$ (т.е. каждому элементу из $D(\varphi)$ ставится в соответствие только один элемент из Y). *Отображением* называется всюду определенное и однозначное соответствие. *Операцией* $*$ (или бинарной операцией) на множестве X называется произвольное отображение $* : X \times X \rightarrow X$.

Напомним, что единственным неопределяемым отношением в теории натуральных чисел является отношение «следовать за» и запись $a' = b$ означает, что элемент b следует за элементом a . Систему аксиом, описывающую это отношение, предложил Пеано¹ («Основания арифметики, изложенные новым способом», 1889).

Определение. Множеством натуральных чисел называется множество $\mathbb{N}$, для некоторых элементов которого задано отношение «следовать за», которое удовлетворяет следующим аксиомам:

¹Джузеппе Пеано (1858–1932) — итальянский математик, был одним из основателей математической логики и теории множеств; построил непрерывную кривую, целиком заполняющую квадрат (кривая Пеано).



П1. Существует в $\mathbb{N}$ элемент (который называется единицей), который не следует ни за каким другим $[\exists 1 \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a' \neq 1]$.

П2. Для каждого элемента из $\mathbb{N}$ определен следующий, причем только один $[\forall a \in \mathbb{N} \exists! a']$.

П3. Любой элемент из $\mathbb{N}$ может следовать не более чем за одним элементом из $\mathbb{N}$ $[\forall a, b, c \in \mathbb{N} \text{ из условия } (c = a' \& c = b') \Rightarrow a = b]$.

П4 (аксиома полной индукции). Любое множество $M \subseteq \mathbb{N}$, которое одновременно содержит единицу и замкнуто относительно взятия следующего, совпадает с $\mathbb{N}$ $[\forall M \subseteq \mathbb{N} \text{ из двух условий (а) } 1 \in M \& \text{ (б) } \forall a \in M \Rightarrow a' \in M \text{ следует, что } M = \mathbb{N}]$.

Натуральным числом называется произвольный элемент из $\mathbb{N}$. Напомним, что отсутствие квантора в утверждении по умолчанию предполагает, что используется квантор всеобщности. Так, доказанное в десятом классе утверждение, что при $a, b \in \mathbb{N}$ из $a \neq b$ следует $a' \neq b'$, надо понимать так: для любых различных натуральных чисел верно, что следующие за ними также различны. Из аксиом Пеано также были выведены два утверждения: $a \neq a'$ и из $b \neq 1$ следует существование такого $a \in \mathbb{N}$, что $a' = b$.

Из многочисленных примеров множеств, удовлетворяющих аксиомам Пеано, остановимся только на двух. Первый из них — теоретико-множественный. В нем по определению единица — это $\{\emptyset\}$, а для каждого уже определенного элемента a следующим будет $a' = a \cup \{a\}$. Поэтому вторым и третьим натуральными числами будут соответственно

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \quad \text{и} \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

(нетрудно заметить, что в этих множествах два и три элемента соответственно). Привычный для нас пример $\mathbb{N}$ строится с помощью множества десятичных цифр $C_0 = \{0, 1, \dots, 9\}$, для которых следующие определены десятью соотношениями: $0' = 1, 1' = 2, 2' = 3, \dots, 9' = 10$. Теперь элементами $\mathbb{N}$ будем считать конечные (конечным называется множество, которое не равномощно никакому своему собственному² подмножеству) упорядоченные наборы цифр, в которых старшая цифра (т.е. крайне левая) не равна нулю и следующий за $ab \dots pq$ определяется так:

$$ab \dots pq' = \begin{cases} ab \dots p(q)', & \text{если } q \neq 9, \\ (ab \dots p)'0, & \text{если } q = 9. \end{cases}$$

²Множество A называется собственным подмножеством множества B , если $A \subseteq B$ и $A \neq B$.



Поэтому $(2099)' = (209)'0 = (20')00 = 2100$. Договоримся, что далее под $\mathbb{N}$ будем понимать множество с определенным отношением «следовать за» из последнего примера.

Сложение натуральных чисел. Вспомним, что сложением на $\mathbb{N}$ называется операция $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, которая удовлетворяет двум свойствам:

$$C1. \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 = a' ;$$

$$C2. \forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b' = (a + b)' .$$

В десятом классе мы не обсудили вопрос существования такой операции. Установим более сильный факт и заодно вспомним технику использования аксиомы П4.

Теорема 1.1. *На множестве $\mathbb{N}$ существует и единственна операция со свойствами C1 и C2.*

Доказательство. I. Существование. Внимательно рассмотрим множество $M = \{a \in \mathbb{N} : \text{для всех } b \in \mathbb{N} \text{ на паре } (a, b) \text{ можно задать операцию, удовлетворяющую C1 и C2}\}$.

а) определим $1 + b = b'$ для любого $b \in \mathbb{N}$. Тогда $1 + 1 = 1'$ и C1 на паре $(1, 1)$ выполняется. Кроме того, $1 + b' = (b')' = (1 + b)'$ (здесь мы дважды воспользовались нашим определением), поэтому C2 на парах $(1, b)$ также верно. Таким образом, из П4 следует, что $1 \in M$.

б) пусть $a \in M$ (т.е. $a + b$ для всех $b \in \mathbb{N}$ определено и C1 и C2 выполняются). Определим: $a' + b = (a + b)'$. Тогда $a' + 1 = (a + 1)' = (a')'$ (во втором равенстве мы использовали то, что $a \in M$), что означает выполнение C1 на паре $(a', 1)$. Далее,

$$a' + b' = (a + b')' = ((a + b)')' = (a' + b)'$$

(снова, во втором переходе мы использовали $a \in M$), что означает, что C2 на паре (a', b) также выполняется. Тем самым мы проверили, что $a' \in M$.

Из (а), (б) и П4 следует, что $M = \mathbb{N}$, т.е. существование операции со свойствами C1 и C2 доказано.

II. Единственность. О/п: предположим, что на $\mathbb{N}$ есть еще одна операция $\clubsuit : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющая C1 и C2. Теперь рассмотрим $M_1 = \{b \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b = a \clubsuit b\}$.

а) поскольку $+$ и $\clubsuit$ удовлетворяют C1, верно $a + 1 = a' = a \clubsuit 1$, откуда $1 \in M_1$.

б) пусть $b \in M_1$. Для любого $a \in \mathbb{N}$ это дает $a + b = a \clubsuit b$. Из П2 получим $(a + b)' = (a \clubsuit b)'$. Последнее равенство по C2 (для $+$ и $\clubsuit$) можно



переписать в виде $a + b' = a \clubsuit b'$. В силу произвольности $a \in \mathbb{N}$ это означает, что $b' \in M_1$.

Из (а), (б) и П4 следует, что $M_1 = \mathbb{N}$, т.е. операции $+$ и $\clubsuit$ на всем множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ совпадают. $\bowtie$.

■

В десятом классе были доказаны следующие свойства сложения:

- 1) *ассоциативность*, т.е. $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- 2) *коммутативность*, т.е. $a + b = b + a$ для любой пары $a, b \in \mathbb{N}$;
- 3) *правило сокращения для сложения*, т.е. равносильность двух равенств $a + c = b + c$ и $a = b$ для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- 4) для любых $a, n \in \mathbb{N}$ выполняется $a + n \neq n$.

Умножение натуральных чисел. Вспомним, что умножением на $\mathbb{N}$ называется операция, которая удовлетворяет двум свойствам:

- У1. Для любого $a \in \mathbb{N}$ выполняется $a \cdot 1 = a$,
- У2. Для всех $a, b \in \mathbb{N}$ верно $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Ответим на вопрос существования такой операции следующим результатом.

Теорема 1.2. *На множестве $\mathbb{N}$ существует и единственна операция со свойствами У1 и У2.*

Доказательство. I. Существование. Внимательно рассмотрим множество $M = \{a \in \mathbb{N} : \text{для всех } b \in \mathbb{N} \text{ на паре } (a, b) \text{ можно задать операцию, удовлетворяющую У1 и У2}\}$.

а) определим $1 \cdot b = b$ для любого $b \in \mathbb{N}$. Тогда $1 \cdot 1 = 1$ и У1 на паре $(1, 1)$ выполняется. Кроме того, $1 \cdot b' = b' = b + 1 = 1 \cdot b + 1$ (здесь мы дважды воспользовались нашим определением), поэтому У2 на парах $(1, b)$ также выполняется. Таким образом, из П4 следует, что $1 \in M$.

б) пусть $a \in M$ (т.е. $a \cdot b$ для всех $b \in \mathbb{N}$ определено и У1 и У2 выполняются при данном фиксированном a). Определим: $a' \cdot b = a \cdot b + b$. Тогда $a' \cdot 1 = a \cdot 1 + 1 = a + 1 = a'$ (во втором равенстве мы использовали то, что $a \in M$), что означает выполнение У1 на паре $(a', 1)$. Далее,

$$a' \cdot b' = a \cdot b' + b' = a \cdot b + a + b + 1 = (ab + b) + (a + 1) = a'b + a'$$

(снова, во втором переходе мы использовали $a \in M$, а в третьем — коммутативность и ассоциативность сложения), что означает, что У2 на паре (a', b) также выполняется. Тем самым мы проверили, что $a' \in M$.



Из (а), (б) и П4 следует, что $M = \mathbb{N}$, т.е. существование операции со свойствами У1 и У2 доказано.

II. Единственность. О/п: предположим, что на $\mathbb{N}$ есть еще одна операция $\heartsuit : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, удовлетворяющая У1 и У2. Теперь рассмотрим $M_1 = \{b \in \mathbb{N} : \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \cdot b = a \heartsuit b\}$.

а) поскольку $\cdot$ и $\heartsuit$ удовлетворяют У1, верно $a \cdot 1 = a = a \heartsuit 1$, откуда $1 \in M_1$.

б) пусть $b \in M_1$. Для любого $a \in \mathbb{N}$ это дает $a \cdot b = a \heartsuit b$. Из свойства сокращения для сложения, получим $a \cdot b + a = a \heartsuit b + a$. Последнее равенство по У2 (для $\cdot$ и $\heartsuit$) можно переписать в виде $a \cdot b' = a \heartsuit b'$. В силу произвольности $a \in \mathbb{N}$ это означает, что $b' \in M_1$.

Из (а), (б) и П4 следует, что $M_1 = \mathbb{N}$, т.е. операции $\cdot$ и $\heartsuit$ на всем множестве $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ совпадают. $\bowtie$.

■

В десятом классе были доказаны следующие свойства умножения:

- 1) *ассоциативность*, т.е. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- 2) *коммутативность*, т.е. $a \cdot b = b \cdot a$ для любой пары $a, b \in \mathbb{N}$;
- 3) *правая и левая дистрибутивности*, т.е. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{N}$;
- 4) *правило сокращения для умножения*, т.е. равносильность двух равенств $a \cdot c = b \cdot c$ и $a = b$ для любой тройки $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Порядок на $\mathbb{N}$. С помощью сложения нетрудно ввести строгий ($<$) и нестрогий ($\leq$) порядки на $\mathbb{N}$. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ тогда $a < b$, если найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $a + k = b$. Выполняется $a \leq b$, если $a < b$ или $a = b$. По определению $b > a$, если $a < b$. Также по определению считаем, что $b \geq a$, если $a \leq b$. Вспомним свойства отношения $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- 1) $a \leq a$ (*рефлексивность*).
- 2) если одновременно выполняются $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$ (*антисимметричность*).
- 3) если одновременно выполняются $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$ (*транзитивность*).

Отношение со свойствами (1)–(3) называется отношением *частичного порядка*, а множество с таким отношением — *частично упорядоченным* (ЧУМ).

- 4) для любых $a, b \in \mathbb{N}$ выполняется ровно одно из следующих утверждений: а) $a = b$; б) $a < b$; в) $b < a$ (*линейность порядка*).



Отношение со свойствами (1)–(4) называется отношением *линейного порядка*, а множество с таким отношением — *линейно упорядоченным (ЛУМ)*.

5) для всякого непустого $A \subseteq \mathbb{N}$ в A найдется минимальный элемент a_0 (т.е. $a_0 \in A$ и $a_0 \leq a$ для любого $a \in A$) (*полнота порядка*).

Отношение со свойствами (1)–(5) называется отношением *полного порядка*, а множество с таким отношением — *вполне упорядоченным (ВУМ)*. Таким образом, $(\mathbb{N}, \leq)$ — ВУМ.

Порядок $\leq$ связан с операциями сложения и умножения многочисленными свойствами. Перечисли те из них, которые были доказаны в курсе алгебры десятого класса. В следующих свойствах считаем, что $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

6) если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$ (если $a < b$, то $a + c < b + c$).

7) если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $a + c \leq b + d$ (если $a < b$ и $c \leq d$, то $a + c < b + d$).

8) если $a \leq b$, то $ac \leq bc$ (если $a < b$, то $ac < bc$).

9) если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $ac \leq bd$ (если $a < b$ и $c \leq d$, то $ac < bd$).

10) для любых $a, b \in \mathbb{N}$ найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $b < ak$ (свойство Архимеда).

Этих фактов о натуральных числах нам будет достаточно, чтобы построить множество $\mathbb{Z}$.

1.2. Кольцо целых чисел

Прежде обсудим несколько алгебраических понятий.

Определение. Множество G с операцией $*$ называется группой, если выполняются три свойства:

1) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);

2) $\exists e \in G : e * a = a * e = a$ для всех $a \in G$ (существование нейтрального элемента e);

3) $\forall a \in G \exists b \in G : a * b = b * a = e$ (существование b — обратного элемента к a).

Если к этим свойствам добавляется (4) $\forall a, b \in G \Rightarrow a * b = b * a$ (коммутативность), то $(G, *)$ называется коммутативной или абелевой³ группой.

³Нильс Абель (1802–1829) — норвежский математик, его работы посвящены алгебре, теории функций и математическому анализу; доказал неразрешимость в радикалах общего уравнения пятой степени; дал толчок в развитии теории Галуа и теории функций комплексного переменного.



Нейтральный элемент по сложению традиционно обозначается через 0 , по умножению — через 1 . Обратный элемент к a по сложению обозначается $-a$, по умножению — через a^{-1} . Множество $(K, +, \cdot)$ с двумя операциями называется *кольцом*, если $(K, +)$ — абелева группа и выполняются левая и правая дистрибутивности. Если в кольце $(K, +, \cdot)$ операция умножения удовлетворяет ассоциативности (соответственно коммутативности), то кольцо называется *ассоциативным* (*коммутативным*). Если в кольце $(K, +, \cdot)$ есть нейтральный элемент по умножению, то оно становится *кольцом с единицей*. Два ненулевых элемента a и b в кольце $(K, +, \cdot)$ называются *делителями нуля*, если $a \cdot b = 0$. Например, в кольце $(K_6, +, \cdot)$ вычетов по модулю шесть верно $2 \cdot 3 \equiv 0$, поэтому эти два числа являются делителями нуля. В случае, если кольцо $(K, +, \cdot)$ не имеет делителей нуля, оно называется *кольцом целостности*. Нередко встречаются *абелевы кольца*, т.е. коммутативно ассоциативные кольца целостности с единицей. Полем $(\mathbb{P}, +, \cdot)$ называется множество с двумя операциями, причем $(\mathbb{P}, +)$ и $(\mathbb{P} \setminus \{0\}, \cdot)$ — абелевы группы и выполняется дистрибутивность: $\forall a, b, c \in \mathbb{P} \Rightarrow (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. В любом поле нет делителей нуля, поскольку равенство $a \cdot b = 0$ при ненулевом a можно домножить на a^{-1} и получить $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = a^{-1} \cdot 0$, что дает $b = 0$. Таким образом, любое поле является абелевым кольцом.

Напомним, что биекцией f между множествами X и Y называется всюду определенное и однозначное соответствие, которое к тому же *сюръективно* (т.е. $f(X) = Y$) и *инъективно* (т.е. $f(x_1) \neq f(x_2)$ для любых $x_1 \neq x_2$). Пусть теперь на множествах X и Y заданы некоторые операции $*$ и $\star$. Если биекция $f : X \rightarrow Y$ сохраняет результат операции (т.е. для любой пары $x_1, x_2 \in X$ выполняется $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \star f(x_2)$), то f называется *изоморфизмом*, а множества $(X, *)$ и $(Y, \star)$ называются *изоморфными* (что обозначают через $X \cong Y$ или $(X, *) \cong (Y, \star)$). С точки зрения алгебры изоморфные множества считаются одинаковыми. Когда говорят об изоморфизмах колец (или множеств с двумя операциями), требуют, чтобы биекция сохраняла результат каждой из операций. Рассмотрим нетривиальный пример изоморфных множеств, на которых заданы разные операции: $(\mathbb{N}, +)$ и $(\mathbb{N}(2), \cdot)$. Здесь $\mathbb{N}(2) = \{2^a : a \in \mathbb{N}\}$ — множество всех натуральных степеней двойки. Очевидно, что при $a, b \in \mathbb{N}$ верно $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b} \in \mathbb{N}(2)$, т.е. мы проверили, что произведение является операцией на множестве $\mathbb{N}(2)$. Осталось найти изоморфизм. Ясно, что правило $f(a) = 2^a$ задает биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}(2)$. Теперь возьмем произвольные $a, b \in \mathbb{N}$, для них $f(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = f(a) \cdot f(b)$. Поэтому f —



изоморфизм и $(\mathbb{N}, +) \cong (\mathbb{N}(2), \cdot)$.

Основная проблема (с алгебраической точки зрения) для $\mathbb{N}$ состоит в том, что $(\mathbb{N}, +)$ не является даже группой. А почему бы нам не расширить $\mathbb{N}$ до кольца?

Определение. Множеством целых чисел называется множество $\mathbb{Z}$ с двумя операциями $+, \cdot$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо;
- 2) $\mathbb{Z}$ содержит⁴ $\mathbb{N}$;
- 3) операции сложения и умножения на $\mathbb{Z}$ продолжают операции, определенные на $\mathbb{N}$;
- 4) $\mathbb{Z}$ — минимальное⁵ кольцо со свойствами 1–3.

Условие (4) предыдущего определения заменим более простым в проверке свойством из следующей теоремы. Опять, равенства и включения множеств надо понимать с точностью до изоморфизма. Напомним, что в группе по сложению вместо $a + (-b)$ мы пишем $a - b$.

Теорема 2.1. Пусть $(K, +, \cdot)$ — кольцо, удовлетворяющее свойствам (1)–(3) предыдущего определения. Если для каждого элемента $k \in K$ найдется такая пара натуральных чисел a, b , что $k = a - b$, тогда $K = \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из (4) свойства сразу следует, что $\mathbb{Z} \subseteq K$, поэтому достаточно проверить только обратное включение. Выберем произвольный $k \in K$. Для него по условию теоремы найдется такая пара натуральных чисел a, b , что $k = a - b = a + (-b)$. Учитывая, что $(\mathbb{Z}, +)$ является группой и $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, получим $a, b, -b \in \mathbb{Z}$. Сложение является операцией на $\mathbb{Z}$, поэтому $k = a + (-b) \in \mathbb{Z}$. Отсюда $K \subseteq \mathbb{Z}$. ■

Определение. На множестве $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ введем отношение « $\sim$ » следующим образом: $(a, b) \sim (c, d)$, если $a + d = b + c$.

Напомним, что отношение $\rho \subseteq X \times X$ называется *отношением эквивалентности*, если оно одновременно рефлексивно (т.е. $a \rho a$ для каждого $a \in X$), симметрично (т.е. из $a \rho b$ всегда следует $b \rho a$) и транзитивно (из двух соотношений $a \rho b$ и $b \rho c$ всегда следует $a \rho c$).

⁴Точнее, содержит изоморфную копию, т.е. такое $\tilde{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, что $(\tilde{\mathbb{N}}, +, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +, \cdot)$.

⁵По включению, но опять, с точностью до изоморфизма.



Теорема 2.2. *Отношение « $\sim$ » является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{N}^2$.*

Доказательство. 1) рефлексивность очевидна, поскольку из $a + b = b + a$ следует $(a, b) \sim (a, b)$.

2) симметричность также следует из коммутативности сложения, поскольку из $(a, b) \sim (c, d)$ следует $a + d = b + c$, что дает $c + b = d + a$ и $(c, d) \sim (a, b)$.

3) пусть одновременно $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$, что по определению дает $a + d = b + c$ и $c + f = d + e$. Правило сокращения для сложения позволяет сначала получить $a + d + c + f = b + c + d + e$, а затем $a + f = b + e$. Последнее равенство равносильно $(a, b) \sim (e, f)$. ■

Из курса алгебры десятого класса мы знаем, что отношение эквивалентности $\rho \subseteq X \times X$ разбивает множество X (т.е. дает возможность представить X в виде объединения его непересекающихся подмножеств) на классы эквивалентности $K(a)$, где $K(a) = \{b \in X : b \rho a\}$ — один из таких классов.

Определение. Пусть Z_1 — множество всех классов эквивалентности на $\mathbb{N}^2$ по отношению « $\sim$ ». Элементы множества Z_1 будем обозначать k, l, m и т.д. Вместо $(a, b) \in k$ договоримся писать $k = (a, b)$ и говорить, что k задается парой (a, b) .

Всем ясно, что класс $k = K((1, 3))$ совпадает с классом $K((15, 17))$. А некоторые уже возможно догадались, что класс $K((a, b))$ будет «отвечать» за разность между натуральными числами a и b , что позволит работать с $K((1, 3))$ точно так же, как и с « -2 ». Этим объясняется следующее определение сложения и умножения на Z_1 .

Определение. Пусть $k, l \in Z_1$ и $k = (a, b)$, $l = (c, d)$. Определим сложение и умножение этих элементов следующим образом: $k + l = (a + c, b + d)$, $k \cdot l = (ac + bd, ad + bc)$.

Теорема 2.3. *Операции сложения и умножения на Z_1 определены корректно, т.е. не зависят от выбора представителей.*

Доказательство. Сначала выберем по две произвольные пары из каждого класса: $(a, b) \sim (a_1, b_1)$ и $(c, d) \sim (c_1, d_1)$. Из определения имеем два равенства:

$$a + b_1 = b + a_1, \tag{1}$$



$$c + d_1 = d + c_1. \quad (2)$$

Корректность сложения. Правило сокращения для сложения позволяет сложить левые и правые части (1), (2) и получить $a + b_1 + c + d_1 = b + a_1 + d + c_1$, что дает $(a + c, b + d) \sim (a_1 + c_1, b_1 + d_1)$. Корректность сложения доказана.

Корректность умножения. Нам необходимо доказать эквивалентность $(ac + bd, ad + bc) \sim (a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)$, что равносильно

$$ac + bd + a_1d_1 + b_1c_1 = ad + bc + a_1c_1 + b_1d_1. \quad (*)$$

Проведем следующие нехитрые манипуляции с (1) и (2). Сначала умножим (1) на c (это можно сделать по правилу сокращения для умножения) и воспользуемся дистрибутивностью, чтобы получить

$$ac + b_1c = bc + a_1c. \quad (3)$$

Следом, умножим (1) на d и поменяем местами левую и правую части:

$$bd + a_1d = ad + b_1d. \quad (4)$$

Далее, умножим (2) на a_1 :

$$a_1c + a_1d_1 = a_1d + a_1c_1. \quad (5)$$

И, наконец, умножим (2) на b_1 и поменяем местами левую и правую части:

$$b_1d + b_1c_1 = b_1c + b_1d_1. \quad (6)$$

Складывая соответственно левые (между собой) и правые части уравнений (3), (4), (5) и (6), приходим к

$$ac + b_1c + bd + a_1d + a_1c + a_1d_1 + b_1d + b_1c_1 = bc + a_1c + ad + b_1d + a_1d + a_1c_1 + b_1c + b_1d_1.$$

Убрав (по правилу сокращения для сложения) четыре одинаковых слагаемых в левой и правой частях последнего равенства, получим (*). Корректность умножения доказана. ■

Теорема 2.4. $(Z_1, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо.

Доказательство. Сначала докажем, что $(Z_1, +)$ — абелева группа. Пусть $k, l, m \in Z_1$ и $k = (a, b)$, $l = (c, d)$, $m = (e, f)$.



1) коммутативность сложения следует из коммутативности сложения на $\mathbb{N}$: $k + l = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = l + k$.

2) ассоциативность сложения на Z_1 следует из ассоциативности сложения на $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (k + l) + m &= (a + c, b + d) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f) = \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) = (a, b) + (c + e, d + f) = k + (l + m). \end{aligned}$$

3) обозначим через $0 = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $k + 0 = (a + n, b + n) \sim (a, b) = k$. Поэтому 0 — нейтральный элемент в $(Z_1, +)$. В силу коммутативности сложения мы не стали проверять, что $0 + k = k$.

4) для элемента $k = (a, b)$ рассмотрим $k_1 = (b, a)$ и посчитаем их сумму: $k + k_1 = (a + b, b + a) = 0$. Таким образом, k_1 — это обратный элемент по сложению для k (как обычно, k_1 будем обозначать через $-k$).

5) проверим, что произведение на Z_1 коммутативно. Сначала воспользуемся определением, затем — коммутативностью умножения и сложения на $\mathbb{N}$:

$$k \cdot l = (ac + bd, ad + bc) = (ca + db, cb + da) = l \cdot k.$$

6) теперь достаточно доказать только правую дистрибутивность. Вспомним, что сложение и умножение на $\mathbb{N}$ связаны дистрибутивностью, поэтому

$$\begin{aligned} (k + l)m &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) = (ae + ce + bf + df, af + cf + be + de) = \\ &= (ae + bf, af + be) + (ce + df, cf + de) = km + lm. \end{aligned}$$

Из (1)–(6) следует, что $(Z_1, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо. ■

Теорема 2.5. В Z_1 найдется такое подмножество $\tilde{\mathbb{N}}$, что выполняется $(\tilde{\mathbb{N}}, +, \cdot) \cong (\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Доказательство. Для произвольного натурального числа n рассмотрим класс $\tilde{n} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : (a, b) \sim (n + 1, 1)\}$ и определим $\tilde{\mathbb{N}} = \{\tilde{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Сразу заметим, что

$$(a, b) \in \tilde{n} \Leftrightarrow (a, b) \sim (n + 1, 1) \Leftrightarrow a + 1 = b + n + 1 \Leftrightarrow a = b + n. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\tilde{n} = \tilde{m} \Leftrightarrow (n + 1, 1) \sim (m + 1, 1) \Leftrightarrow n + 1 + 1 = 1 + m + 1 \Leftrightarrow n = m. \quad (2)$$



Теперь зададим соответствие $f : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом: для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ по определению $f(\tilde{n}) = n$. Определение $\tilde{N}$ и f сразу обеспечивают всюду определенность и сюръективность f . Если $f(\tilde{n}) = n$ и $f(\tilde{m}) = m$, то $(n+1, 1), (m+1, 1) \in \tilde{n}$, что по (2) дает $n = m$, поэтому f — однозначное соответствие. Если $\tilde{n} \neq \tilde{m}$, то из (2) получим $n \neq m$, т.е. $f(\tilde{n}) = n \neq m = f(\tilde{m})$, поэтому f инъективно. Мы проверили, что f — биекция между $\tilde{N}$ и $\mathbb{N}$. Займемся вопросом сохранения операций. Прежде заметим, что (1) указывает на корректность определения f : в натуральное число n переводятся те и только те пары, у которых первый элемент больше второго на n .

Сохранение сложения. Используя только что сделанное замечание и независимость сложения на Z_1 от выбора представителей, имеем⁶:

$$\begin{aligned} f(\tilde{n} +_{Z_1} \tilde{m}) &= f\left((n+1, 1) +_{Z_1} (m+1, 1)\right) = f\left((n+1+m+1, 1+1)\right) = \\ &= f\left((n+m+1, 1)\right) = n +_{\mathbb{N}} m = f(\tilde{n}) +_{\mathbb{N}} f(\tilde{m}). \end{aligned}$$

Сохранение умножения. Как и в случае сложения, в нужный момент меняем упорядоченную пару на эквивалентную ей:

$$\begin{aligned} f(\tilde{n} \cdot_{Z_1} \tilde{m}) &= f\left((n+1, 1) \cdot_{Z_1} (m+1, 1)\right) = f\left((m(n+1)+n+1, m+1+1)\right) = \\ &= f\left((nm+1, 1)\right) = n \cdot_{\mathbb{N}} m = f(\tilde{n}) \cdot_{\mathbb{N}} f(\tilde{m}). \end{aligned}$$

■

Мы не просто нашли изоморфную копию натуральных чисел в Z_1 , но и установили, что операции сложения и умножения на $\tilde{N}$ — это ограничение операций $+_{Z_1}$ и $\cdot_{Z_1}$. В частности, сумма $\tilde{2}$ и $\tilde{3}$ в Z_1 также приводит к $\tilde{5}$.

Теорема 2.6. Для каждого элемента $k \in Z_1$ найдутся такие два элемента $\tilde{a}, \tilde{b} \in \tilde{N}$, что $k = \tilde{a} - \tilde{b}$.

Доказательство. Пусть $k = (a, b)$, тогда

$$k = (a+1+1, b+1+1) = (a+1, 1) + (1, b+1) = (a+1, 1) - (b+1, 1) = \tilde{a} - \tilde{b}.$$

■

⁶Рядом со знаком операции там, где это необходимо, указываем на каком множестве рассматривается эта операция.



Следствие. Z_1 является множеством целых чисел.

Доказательство. Следует из предыдущих шести теорем. ■

Уточним структуру Z_1 и покажем, что в этом множестве нет делителей нуля.

Определение. Пусть $k \in Z_1$ и $k = (a, b)$. Число k называется *положительным* (соответственно *отрицательным*), если $a > b$ ($a < b$). Обозначение: $k > 0$ или $k < 0$.

Докажем корректность этого определения и еще несколько полезных фактов.

Теорема 2.7. 1) если $k = (a, b) \sim (c, d)$ и $a > b$, то $c > d$.

2) если $k = (a, b) \sim (c, d)$ и $a < b$, то $c < d$.

3) пусть $k \in Z_1$, тогда $k > 0 \Leftrightarrow k = \tilde{n}$ для некоторого $\tilde{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$.

4) пусть $k \in Z_1$, тогда $k < 0 \Leftrightarrow k = -\tilde{n}$ для некоторого $\tilde{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$.

5) если $k, l \in Z_1$ одного знака, то $k \cdot l > 0$.

6) если $k, l \in Z_1$ разных знаков, то $k \cdot l < 0$.

Доказательство. 1) из $a > b$ и определения порядка на $\mathbb{N}$ следует существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $a = b + n$. Теперь $(a, b) = (b + n, b) \sim (c, d)$ дает $b + n + d = b + c$ или $c = d + n$, что влечет $c > d$.

2) доказывается аналогично (1).

3) из определения положительного элемента во множестве Z_1 и доказательства (1) получаем $k = (a, b) > 0 \Leftrightarrow$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $k = (b + n, b) \sim (b + n + 1, b + 1) \sim (n + 1, 1) = \tilde{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$.

4) аналогично (3) приходим к цепочке $k = (a, a + n) \sim (1 + a, 1 + a + n) \sim (1, 1 + n) = -\tilde{n}$, где $\tilde{n} \in \tilde{\mathbb{N}}$.

5) б.о.о.⁷ считаем, что $k, l < 0$. Из (4) найдем такие натуральные числа n и m , что $k = (1, n + 1)$ и $l = (1, m + 1)$. Тогда

$$k \cdot l = (1 + mn + m + n + 1, n + 1 + m + 1) \sim (mn + 1, 1) > 0.$$

6) б.о.о. считаем, что $k > 0$ и $l < 0$. Из (3) и (4) найдем такие $n, m \in \mathbb{N}$, что $k = (n + 1, 1)$ и $l = (1, m + 1)$. Тогда

$$k \cdot l = (n + 1 + m + 1, 1 + mn + m + n + 1) \sim (1, mn + 1) < 0.$$

⁷Сокращение для «без ограничения общности» используем тогда, когда разбирается только один случай среди многих, схожих по доказательству.



Следствие 1. *Быть положительным (или отрицательным) числом в Z_1 не зависит от выбора представителей.*

Доказательство. Следует из (1) и (2) предыдущей теоремы. ■

Следствие 2. *Для любого $k \in Z_1$ выполняется ровно одно из трех соотношений: $k = \tilde{n}$, $k = -\tilde{n}$ или $k = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $k = (a, b)$. Из линейности порядка на $\mathbb{N}$ получим, что верно только одно из отношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Это, с учетом свойств (3) и (4) предыдущей теоремы, дает, что для k выполняется ровно одно из трех соотношений: $k = \tilde{n}$, $k = -\tilde{n}$ или $k = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. ■

Результат теоремы 2.5 позволяет нам думать, что с точки зрения алгебры множества $(\tilde{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ и $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ одинаковые. Тогда, в силу последнего следствия, структура Z_1 ясна и привычна. Это множество состоит только из нуля, натуральных чисел и обратных к ним по сложению. Учитывая, что Z_1 является множеством целых чисел, договоримся, что далее под $\mathbb{Z}$ будем понимать $\mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Теорема 2.8. 1) *пусть $k, l \in Z_1$, тогда $k \cdot l = 0 \Leftrightarrow k = 0$ или $l = 0$.*

2) *(правило сокращения для умножения на Z_1) следующие условия для $k, l \in Z_1$ равносильны:*

- а) $k = l$;
- б) $\forall p \in Z_1 \setminus \{0\}$ верно равенство $k \cdot p = l \cdot p$;
- в) $\exists p^* \in Z_1 \setminus \{0\}$, для которого верно $k \cdot p^* = l \cdot p^*$.

Доказательство. 1) в обратную сторону почти очевидно. Б.о.о. считаем, что $l = 0$ и, в силу независимости произведения на Z_1 от выбора представителей, $l = (1, 1)$ и $k = (a, b)$. Тогда $k \cdot l = (a + b, a + b) = 0$.

$\Rightarrow$) предположим противное: $k, l \neq 0$. По предыдущему следствию можно утверждать, что эти числа положительны, отрицательны или разных знаков. Тогда свойства (5) и (6) предыдущей теоремы нам дают $k \cdot l > 0$ или $k \cdot l < 0$, что противоречит условию $k \cdot l = 0$.

2) сначала докажем, что условие $k = l$ в Z_1 равносильно $k - l = 0$. Пусть $k = (a, b)$ и $l = (c, d)$, тогда $k = l \Leftrightarrow (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow (a + d, b + c) = 0 \Leftrightarrow (a, b) + (d, c) = 0 \Leftrightarrow k - l = 0$. Теперь докажем равносильность (а), (б) и (в).

(а) $\Rightarrow$ (б) условие $k = l$ заменим на $k - l = 0$, тогда из (1) для любого



$p \in \mathbb{Z}_1 \setminus \{0\}$ верно $(k-l) \cdot p = 0$. Дистрибутивность, доказанная в теореме 2.4, дает $k \cdot p - l \cdot p = 0$ или $k \cdot p = l \cdot p$. Заметим, что при $p = 0$ переход (а) $\Rightarrow$ (б) также выполняется.

(б) $\Rightarrow$ (в) очевидно.

(в) $\Rightarrow$ (а) о/п: считаем, что $k \neq l$, тогда $k - l \neq 0$ и $p^* \neq 0$. По (1) получим $(k - l) \cdot p^* \neq 0$ или $k \cdot p^* - l \cdot p^* \neq 0$, что дает $k \cdot p^* \neq l \cdot p^*$. $\nrightarrow$

Итак, $(\mathbb{Z}_1, +, \cdot)$ — коммутативное кольцо целостности. Читатель-максималист проверит, что умножение на $\mathbb{Z}_1$ ассоциативно и что для всех элементов $k \in \mathbb{Z}_1$ верно $k \cdot \tilde{1} = k$. Таким образом, скромное определение $\mathbb{Z}$ приводит к очень богатой алгебраической структуре: $(\mathbb{Z}_1, +, \cdot)$ (а, значит, и $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$) является абелевым кольцом! А мы тем временем прогуляемся по полю рациональных чисел.

1.3. Поле рациональных чисел

Почти у всех целых чисел нет обратных по умножению. С этой проблемой давно справились — изобрели дроби⁸, из которых и состоит множество рациональных чисел.

Определение. Множеством рациональных чисел называется множество $\mathbb{Q}$ с двумя операциями $+, \cdot$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ — поле (т.е. $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ — абелевы группы и выполняется дистрибутивность);
- 2) $\mathbb{Q}$ содержит $\mathbb{Z}$;
- 3) операции сложения и умножения на $\mathbb{Q}$ продолжают операции, определенные на $\mathbb{Z}$;
- 4) $\mathbb{Q}$ — минимальное⁹ поле со свойствами 1–3.

Элементы множества $\mathbb{Q}$ называются *рациональными числами*. Условие (4) предыдущего определения заменим более простым в проверке свойством из следующей теоремы. Опять, равенства и включения множеств надо понимать с точностью до изоморфизма. Напомним, что в группе по умножению через l^{-1} обозначают обратный по умножению к ненулевому элементу l .

⁸Дроби упоминаются в Московском математическом папирусе, он хранится в Музее изобразительных искусств им. А.С. Пушкина в Москве и относится к периоду Среднего царства Древнего Египта (около 1850 года до н.э.).

⁹По включению, но с точностью до изоморфизма.



Теорема 3.1. Пусть $(P, +, \cdot)$ — поле со свойствами (1)–(3) предыдущего определения. Если для каждого элемента $p \in P$ найдется такая пара целых чисел k, l , что $l \neq 0$ и $p = k \cdot l^{-1}$, тогда $P = \mathbb{Q}$.

Доказательство. Из (4) свойства сразу следует, что $\mathbb{Q} \subseteq P$, поэтому достаточно проверить только обратное включение. Выберем произвольный элемент $p \in P$. Для него по условию теоремы найдется такая пара целых чисел k, l , что $l \neq 0$ и $p = k \cdot l^{-1}$. Учитывая, что $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ является группой и $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, получим $k, l, l^{-1} \in \mathbb{Q}$. Умножение является операцией на $\mathbb{Q}$, поэтому $p = k \cdot l^{-1} \in \mathbb{Q}$. Отсюда $P \subseteq \mathbb{Q}$. ■

Мы не будем вводить бесконечно много новых многоэтажных конструкций и доопределять на них сложение и умножение, а построим $\mathbb{Q}$ из $\mathbb{Z}$ методом алгебраического расширения примерно так же, как $\mathbb{Z}$ было построено из $\mathbb{N}$. Только теперь упорядоченная пара (k, l) целых чисел будет обозначать дробь с числителем k и знаменателем l . Надо учесть, что пары $(1, 3)$ и $(-2, -6)$ должны определять одно и то же рациональное число, поэтому начнем с введения отношения эквивалентности на множестве упорядоченных пар и разбиения этого множества на классы эквивалентности.

Определение. На множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(k, l) : k, l \in \mathbb{Z}, l \neq 0\}$ введем отношение « $\sim$ » следующим образом: $(k, l) \sim (m, n)$, если $k \cdot n = l \cdot m$.

Теорема 3.2. Отношение « $\sim$ » является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Доказательство. 1) рефлексивность очевидна, поскольку из $k \cdot l = l \cdot k$ следует $(k, l) \sim (k, l)$.

2) симметричность также следует из коммутативности умножения на $\mathbb{Z}$: из $(k, l) \sim (m, n)$ следует $k \cdot n = l \cdot m$, что дает $m \cdot l = n \cdot k$ и $(m, n) \sim (k, l)$.

3) пусть одновременно $(k, l) \sim (m, n)$ и $(m, n) \sim (p, q)$, что по определению дает $k \cdot n = l \cdot m$ и $m \cdot q = n \cdot p$. Правило сокращения для умножения на $\mathbb{Z}$ (теорема 2.8, свойство (2)) позволяет сначала получить $k \cdot n \cdot m \cdot q = l \cdot m \cdot n \cdot p$, а затем $k \cdot m \cdot q = l \cdot m \cdot p$ (поскольку $n \neq 0$). Последнее равенство при $m \neq 0$ даст $k \cdot q = l \cdot p$, что равносильно $(k, l) \sim (p, q)$. Осталось рассмотреть случай $m = 0$. Тогда равенства $k \cdot n = l \cdot m$ и $m \cdot q = n \cdot p$ превращаются (по теореме 2.8, свойство (1)) в $k \cdot n = 0$ и $n \cdot p = 0$, что дает $k = 0$ и $p = 0$ (поскольку $n \neq 0$). Теперь очевидно выполнение определения для $(0, l) \sim (0, q)$. ■



Определение. Пусть Q_1 — множество всех классов эквивалентности на $(\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \sim)$. Элементы множества Q_1 обозначаем r, s, t и т.д. Вместо $(k, l) \in r$ пишем $r = (k, l)$ и говорим, что r задается парой (k, l) .

Определим операции сложения и умножения на Q_1 и докажем, что они не зависят от выбора представителей. Знак умножения между целыми числами будем опускать.

Определение. Пусть $r, s \in Q_1$ и $r = (k, l)$, $s = (m, n)$. Определим сложение и умножение этих элементов следующим образом: $r + s = (kn + lm, ln)$, $k \cdot l = (km, ln)$.

Теорема 3.3. Операции сложения и умножения на Q_1 определены корректно, т.е. не зависят от выбора представителей.

Доказательство. Сначала выберем по две произвольные пары из каждого класса: $r = (k, l) \sim (k_1, l_1)$ и $s = (m, n) \sim (m_1, n_1)$. Из определения имеем два равенства:

$$kl_1 = lk_1, \quad (1)$$

$$mn_1 = nm_1. \quad (2)$$

Корректность сложения. Надо проверить выполнение $(kn + lm, ln) \sim (k_1n_1 + l_1m_1, l_1n_1)$, что равносильно $knl_1n_1 + lml_1n_1 = k_1n_1ln + l_1m_1ln$ (*). Правило сокращения для умножения на $\mathbb{Z}$ (теорема 2.8) позволяет умножить обе части уравнения (1) на nn_1 и уравнения (2) — на ll_1 , что дает

$$knl_1n_1 = k_1n_1ln, \quad (3)$$

$$lml_1n_1 = l_1m_1ln. \quad (4)$$

Сложив (3) и (4), получим (*). Корректность сложения доказана.

Корректность умножения. Нам необходимо доказать эквивалентность $(km, ln) \sim (k_1m_1, l_1n_1)$, что равносильно $kml_1n_1 = lnl_1n_1$. (**)

Перемножив (1) и (2), сразу получим (**). Корректность умножения доказана. ■

Теорема 3.4. $(Q_1, +, \cdot)$ — поле.

Доказательство. Сначала докажем, что $(Q_1, +)$ — абелева группа. Пусть $r, s, t \in Q_1$ и $r = (k, l)$, $s = (m, n)$, $t = (p, q)$.

1) коммутативность сложения следует из коммутативности сложения и умножения на $\mathbb{Z}$: $r + s = (kn + lm, ln) = (ml + nk, nl) = s + r$.



2) ассоциативность сложения на Q_1 следует из ассоциативности сложения и умножения на $\mathbb{Z}$, а также из дистрибутивности на множестве целых чисел:

$$\begin{aligned}(r + s) + t &= (kn + lm, ln) + (p, q) = (knq + lmq + lnp, lnq) = \\ &= (k, l) + (mq + np, nq) = r + (s + t).\end{aligned}$$

3) обозначим через $\tilde{0} = \{(0, z) : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Тогда $r + \tilde{0} = (kz + 0, lz) \sim (k, l) = r$. Поэтому $\tilde{0}$ — нейтральный элемент в $(Q_1, +)$. В силу коммутативности сложения мы не стали проверять, что $\tilde{0} + r = r$.

4) для элемента $r = (k, l)$ рассмотрим $r_1 = (-k, l)$ и посчитаем их сумму: $r + r_1 = (kl - lk, l^2) = \tilde{0}$. Таким образом, r_1 — это обратный элемент по сложению для r (как обычно, r_1 будем обозначать через $-r$).

Теперь установим, что $(Q_1 \setminus \{\tilde{0}\}, \cdot)$ — абелева группа.

5), 6) коммутативность и ассоциативность умножения на Q_1 сразу следует из коммутативности и ассоциативности умножения на $\mathbb{Z}$:

$$r \cdot s = (km, ln) = (mk, nl) = s \cdot r,$$

$$(r \cdot s) \cdot t = (km, ln) \cdot (p, q) = ((km)p, (ln)q) = (k(mp), l(nq)) = r \cdot (s \cdot t).$$

7) обозначим через $\tilde{1} = \{(z, z) : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Тогда $r \cdot \tilde{1} = (kz, lz) \sim (k, l) = r$. Поэтому $\tilde{1}$ — нейтральный элемент в $(Q_1 \setminus \{\tilde{0}\}, \cdot)$. В силу коммутативности умножения мы не стали проверять, что $\tilde{1} \cdot r = r$.

8) для ненулевого элемента $r = (k, l)$ (т.е. $k \neq 0$) рассмотрим $r_2 = (l, k)$ и посчитаем их произведение: $r \cdot r_2 = (kl, lk) = \tilde{1}$. Таким образом, r_2 — это обратный элемент по умножению для r (как обычно, r_2 будем обозначать через r^{-1}).

9) в силу коммутативности умножения теперь достаточно доказать только правую дистрибутивность. Вспомним, что сложение и умножение на $\mathbb{Z}$ связаны дистрибутивностью, поэтому

$$\begin{aligned}(r + s)t &= (kn + lm, ln) \cdot (p, q) = (knp + lmp, lnq) \sim \\ &\sim (kpnq + lqmp, lnq^2) = (kp, lq) + (mp, nq) = r \cdot t + s \cdot t.\end{aligned}$$

Из (1)–(9) следует, что $(Q_1, +, \cdot)$ — поле.





Теорема 3.5. В Q_1 найдется такое подмножество $\tilde{\mathbb{Z}}$, что выполняется $(\tilde{\mathbb{Z}}, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Доказательство. Для произвольного целого числа k рассмотрим класс $\tilde{k} = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) \sim (k, 1)\}$ и определим $\tilde{\mathbb{Z}} = \{\tilde{k} : k \in \mathbb{Z}\}$. Сразу заметим, что

$$(p, q) \in \tilde{k} \Leftrightarrow (p, q) \sim (k, 1) \Leftrightarrow p = qk. \quad (1)$$

Кроме того,

$$\tilde{k} = \tilde{l} \Leftrightarrow (k, 1) \sim (l, 1) \Leftrightarrow k = l. \quad (2)$$

Также нетрудно проверить, что $\tilde{k} + \tilde{l} = (k, 1) + (l, 1) = (k + l, 1) \in \tilde{\mathbb{Z}}$ и $\tilde{k} \cdot \tilde{l} = (k, 1) \cdot (l, 1) = (kl, 1) \in \tilde{\mathbb{Z}}$, поэтому $+$ и $\cdot$ являются операциями на $\tilde{\mathbb{Z}}$.

Теперь зададим соответствие $f : \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$ следующим образом: для любого целого $k \in \mathbb{Z}$ по определению $f(\tilde{k}) = k$. Определение $\tilde{\mathbb{Z}}$ и f сразу обеспечивают всюду определенность и сюръективность f . Если $f(\tilde{k}) = p$ и $f(\tilde{k}) = q$, то $(p, 1), (q, 1) \in \tilde{k}$, что по (2) дает $p = q$, поэтому f — однозначное соответствие. Если $\tilde{k} \neq \tilde{l}$, то из (2) получим $k \neq l$, т.е. $f(\tilde{k}) = k \neq l = f(\tilde{l})$, поэтому f инъективно. Мы проверили, что f — биекция между $\tilde{\mathbb{Z}}$ и $\mathbb{Z}$. Займемся вопросом сохранения операций. Прежде заметим, что (1) указывает на корректность определения f : в целое число k переводятся те и только те пары, у которых первый элемент больше второго в k раз.

Сохранение сложения. Используя только что сделанное замечание и независимость сложения на Q_1 от выбора представителей, имеем¹⁰:

$$f(\tilde{k} +_{Q_1} \tilde{l}) = f((k, 1) +_{Q_1} (l, 1)) = f((k + l, 1)) = k +_{\mathbb{Z}} l = f(\tilde{k}) +_{\mathbb{Z}} f(\tilde{l}).$$

Сохранение умножения. Как и в случае сложения, используем независимость умножения от выбора представителей:

$$f(\tilde{k} \cdot_{Q_1} \tilde{l}) = f((k, 1) \cdot_{Q_1} (l, 1)) = f((kl, 1)) = k \cdot_{\mathbb{Z}} l = f(\tilde{k}) \cdot_{\mathbb{Z}} f(\tilde{l}).$$

■

Мы не просто нашли изоморфную копию целых чисел в Q_1 , но и установили, что операции сложения и умножения на $\tilde{\mathbb{Z}}$ — это ограничение операций $+_{Q_1}$ и $\cdot_{Q_1}$. В частности, сумма $\tilde{-2}$ и $\tilde{3}$ в Q_1 также приводит к $\tilde{1}$.

¹⁰Рядом со знаком операции там, где это необходимо, указываем на каком множестве рассматривается эта операция.



Теорема 3.6. Для каждого элемента $r \in Q_1$ найдутся такие два элемента $\tilde{k}, \tilde{l} \in \tilde{\mathbb{Z}}$, что $\tilde{l} \neq \tilde{0}$ и $r = \tilde{k} \cdot (\tilde{l})^{-1}$.

Доказательство. Пусть $r = (k, l)$, тогда

$$r = (k, l) = (k, 1) \cdot (1, l) = (k, 1) \cdot ((l, 1))^{-1} = \tilde{k} \cdot (\tilde{l})^{-1}.$$

■

Следствие. Q_1 является множеством рациональных чисел.

Доказательство. Следует из предыдущих шести теорем.

■

Результат теоремы 3.5 об изоморфизме между $(\tilde{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ и $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ позволяет вместо $\tilde{k} \in \tilde{\mathbb{Z}}$ использовать $k \in \mathbb{Z}$, а по теореме 3.6 рациональное число r можно задать несколькими способами: $r = (k, l) = \tilde{k} \cdot (\tilde{l})^{-1} = k \cdot l^{-1}$. Привычная дробь $\frac{k}{l}$ или k/l является просто другой формой записи $k \cdot l^{-1}$. Теорема 3.2 говорит о том, что рациональное число r является бесконечным (точнее, счетным) множеством равных между собой дробей, а теорема 3.3 разрешает в сложении и умножении использовать любую из этих дробей. Например, дроби $\frac{3}{6}$ или $\frac{-2}{-4}$ можно смело заменить на $\frac{1}{2}$.

1.4. Порядок на $\mathbb{Q}$

На множестве рациональных чисел определим порядок и изучим его свойства. Будем активно использовать представление рациональных чисел из предыдущего параграфа и заменять любой элемент $\tilde{k} \in \tilde{\mathbb{Z}}$ на соответствующее ему целое число $k \in \mathbb{Z}$. Начнем с расположения рациональных чисел относительно нуля.

Определение. Пусть $r \in Q_1$ и $r = (k, l)$. Число r называется положительным (соответственно отрицательным), если $kl > 0$ ($kl < 0$). Обозначение: $r > 0$ или $r < 0$. Считаем $r \geq 0$, если $r > 0$ или $r = 0$. Отношение $r \leq 0$ определяется аналогично.

Докажем корректность этого определения и еще несколько полезных фактов.

Теорема 4.1. 1) быть положительным рациональным числом не зависит от выбора представителей.

2) быть отрицательным рациональным числом не зависит от выбора представителей.



- 3) пусть $r \in Q_1$. Тогда $r > 0 \Leftrightarrow$ найдутся такие $a, b \in \mathbb{N}$, что $r = (a, b)$.
 4) пусть $r \in Q_1$. Тогда $r < 0 \Leftrightarrow$ существуют $a, b \in \mathbb{N}$, что $r = (-a, b)$.
 5) для каждого $r \in Q_1$ выполняется ровно одно из отношений: $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$.

Доказательство. 1) пусть $r = (k, l) \sim (m, n)$ и $kl > 0$. Эквивалентность пар дает равенство $kn = lm$, обе части которого можно умножить на $ln \neq 0$. Получим $(kl)n^2 = (mn)l^2$. По теореме 2.7 получим $n^2 > 0$, $(kl)n^2 > 0$, $l^2 > 0$, откуда $mn > 0$.

2) доказывается аналогично (1).

3) $\Leftrightarrow$ очевидно из определения, так как произведение натуральных чисел положительно.

$\Rightarrow$) пусть $r = (k, l) > 0$, т.е. $kl > 0$. По теореме 2.7 возможны два случая. В первом из них $k > 0$ и $l > 0$. Опять применяя теорему 2.7 (свойство (3)), получим $k, l \in \mathbb{N}$, поэтому искомыми будут $a = k$ и $b = l$. Во втором случае $k < 0$ и $l < 0$. В очередной раз применяя теорему 2.7 (свойство (4)), получим $-k, -l \in \mathbb{N}$, поэтому искомыми будут $a = -k$ и $b = -l$, поскольку $(k, l) \sim (-k, -l)$.

4) доказывается аналогично (3).

5) выберем произвольный элемент $r \in Q_1$ и представление $r = (k, l)$ (свойство (1) и (2) позволяют для определения знака использовать любого представителя). Линейность порядка на $\mathbb{N}$ и определение положительного или отрицательного целого числа (см. стр. 21) гарантируют, что для целого числа kl выполняется ровно одно из отношений; $kl > 0$, $kl < 0$ или $kl = 0$. Отсюда для рационального числа r выполняется ровно одно из отношений: $r > 0$, $r < 0$ или $r = 0$.

■

Теорема 4.2. Пусть $r_1, r_2 \in Q$.

- 1) если $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, то $r_1 + r_2 > 0$ и $r_1 \cdot r_2 > 0$.
 2) если $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$, то $r_1 + r_2 > 0$ и $r_1 \cdot r_2 \geq 0$.
 3) если $r_1 \geq 0$ и $r_2 \geq 0$, то $r_1 + r_2 \geq 0$ и $r_1 \cdot r_2 \geq 0$.

Доказательство. 1) из третьего пункта предыдущей теоремы найдем такие $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, что $r_1 = (a, b)$ и $r_2 = (c, d)$. Тогда $r_1 + r_2 = (ad + bc, bd) > 0$ и $r_1 \cdot r_2 = (ac, bd) > 0$, что следует из $ad + bc, bd, ac \in \mathbb{N}$ и третьего пункта предыдущей теоремы.

2) если $r_2 > 0$, то это следует из (1). Пусть теперь $r_2 = 0$. Тогда верно $r_1 + r_2 = r_1 > 0$ и $r_1 \cdot 0 = (a, b) \cdot (0, n) = (0, bn) = 0$.



3) если $r_1 > 0$, это следует из (2). При $r_1 = 0$ выполняются два неравенства: $r_1 + r_2 = r_2 \geq 0$ и $r_1 \cdot r_2 = 0 \geq 0$.

■

Определение. Пусть $r_1, r_2 \in Q_1$. Считаем, что $r_1 < r_2$ (соответственно $r_1 \leq r_2$), если $r_2 - r_1 > 0$ ($r_2 - r_1 \geq 0$).

Перечислим и докажем основные свойства введенного отношения.

I. Для каждого $r_1 \in Q_1 \Rightarrow r_1 \leq r_1$.

Доказательство. Это верно, поскольку $r_1 - r_1 = 0 \geq 0$.

■

II. Для любых $r_1, r_2 \in Q_1$ из неравенств $r_1 \leq r_2$ и $r_2 \leq r_1$ следует, что $r_1 = r_2$.

Доказательство. О/п: $r_1 \neq r_2$. Тогда имеем два строгих неравенства $r_1 < r_2$ и $r_2 < r_1$, которые по определению дают $r_2 - r_1 > 0$ и $r_1 - r_2 > 0$. По первому утверждению предыдущей теоремы получим $r_2 - r_1 + r_1 - r_2 > 0$ или $0 > 0$. ✕.

■

III. Для любых $r_1, r_2, r_3 \in Q_1$ из неравенств $r_1 \leq r_2$ и $r_2 \leq r_3$ следует, что $r_1 \leq r_3$.

Доказательство. По определению получим $r_2 - r_1 \geq 0$ и $r_3 - r_2 \geq 0$, что по предыдущей теореме дает $r_3 - r_2 + r_2 - r_1 \geq 0$. Отсюда $r_3 - r_1 \geq 0$ или $r_1 \leq r_3$.

■

IV. Для любых $r_1, r_2 \in Q_1$ выполняется ровно одно из следующих отношений: $r_1 < r_2$, $r_2 < r_1$ или $r_1 = r_2$.

Доказательство. Обозначим через $r = r_2 - r_1$. По теореме 2.6 (свойство (5)) выполнено ровно одно из следующих условий: $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$. Тогда по определению выполняется ровно одно из следующих отношений: $r_1 < r_2$, $r_2 < r_1$ или $r_1 = r_2$.

■

Следствие. $(Q_1, \leq)$ — линейно упорядоченное множество (ЛУМ).

Доказательство. Следует из I–IV.

■

V. Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4 \in Q_1$.

а) если $r_1 \leq r_2$, то $r_1 + r_3 \leq r_2 + r_3$.

б) если $r_1 < r_2$, то $r_1 + r_3 < r_2 + r_3$.



в) если $r_1 \leq r_2$ и $r_3 \leq r_4$, то $r_1 + r_3 \leq r_2 + r_4$.

г) если $r_1 < r_2$ и $r_3 \leq r_4$, то $r_1 + r_3 < r_2 + r_4$.

Доказательство. а) следует из $r_2 + r_3 - (r_1 + r_3) = r_2 - r_1 \geq 0$.

б) аналогично (а).

в) применяя (а) к неравенству $r_1 \leq r_2$, получим $r_1 + r_3 \leq r_2 + r_3$ (*). Аналогично из неравенства $r_3 \leq r_4$ имеем $r_2 + r_3 \leq r_2 + r_4$ (**). Из (*), (**) и транзитивности порядка получим $r_1 + r_3 \leq r_2 + r_4$.

г) учитывая, что $r_2 - r_1 > 0$ и $r_4 - r_3 \geq 0$, по предыдущей теореме (пункт (2)) получим $r_4 - r_3 + r_2 - r_1 > 0$ или $r_4 + r_2 - (r_3 + r_1) > 0$, что дает $r_1 + r_3 < r_2 + r_4$. ■

VI. Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Q}_1$.

а) если $r_1 \leq r_2$ и $r_3 \geq 0$, то $r_1 \cdot r_3 \leq r_2 \cdot r_3$.

б) если $r_1 < r_2$ и $r_3 > 0$, то $r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_3$.

в) если $0 < r_1 < r_2$ и $0 < r_3 < r_4$, то $r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_4$.

г) если $r_1 < r_2$, то $-r_2 < -r_1$.

д) если $r_1 < r_2$ и $r_3 < 0$, то $r_2 \cdot r_3 < r_1 \cdot r_3$.

Доказательство. а) пункт (3) предыдущей теоремы из $r_2 - r_1 \geq 0$ и $r_3 \geq 0$ позволяет получить $r_3(r_2 - r_1) \geq 0$ или $r_3r_2 - r_3r_1 \geq 0$ (благодаря дистрибутивности). Последнее неравенство равносильно $r_1 \cdot r_3 \leq r_2 \cdot r_3$.

б) аналогично (а), только с использованием (1) предыдущей теоремы.

в) дважды применяя (б), получим $r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_3$ и $r_2 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_4$. Транзитивность порядка даст $r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_4$.

г) из $r_2 - r_1 > 0$ получим $-r_1 - (-r_2) > 0$, что равносильно $-r_2 < -r_1$.

д) из $-r_2 < -r_1$ и $-r_3 > 0$ по (б) получим $(-r_3) \cdot (-r_2) < (-r_3)(-r_1)$ или $r_2 \cdot r_3 < r_1 \cdot r_3$. ■

VII. Пусть $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_1$ и $r_1 < r_2$, тогда найдется такое $r_3 \in \mathbb{Q}_1$, что $r_1 < r_3 < r_2$ (плотность порядка).

Доказательство. Обозначим через $r_3 = (r_1 + r_2) \cdot (2)^{-1} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ и докажем, что это рациональное число удовлетворяет двойному неравенству.

К неравенству $r_1 < r_2$ применим V(б) и получим $r_1 + r_1 < r_1 + r_2$. Пусть $r_1 = (k, l)$, тогда $r_1 + r_1 = (kl + lk, l^2) \sim (k + k, l) = (2k, l) = (2, 1) \cdot (k, l) = \tilde{2} \cdot r_1 = 2 \cdot r_1$. Кроме того, из $\tilde{2} = (2, 1) > 0$ сразу следует, что $(2)^{-1} = (1, 2) > 0$. Умножив неравенство $2 \cdot r_1 < r_1 + r_2$ на положительное число $(2)^{-1}$, получим $r_1 < (r_1 + r_2) \cdot (2)^{-1} = r_3$.



Из неравенства $r_1 < r_2$ также можно получить $r_1 + r_2 < r_2 + r_2 = 2 \cdot r_2$, умножив которое на положительное число $(2)^{-1}$, приходим к $r_3 < r_2$. ■

VIII. (свойство Архимеда для Q_1) а) пусть $r_1, r_2 \in Q_1$ и $r_1, r_2 > 0$, тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $r_2 < n \cdot r_1$.

б) пусть $r_1, r_2, \varepsilon \in Q_1$ и $\varepsilon > 0$, тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $r_2 < r_1 + n \cdot \varepsilon$.

Доказательство. а) из теоремы 4.1 (пункт (3)) можно считать, что $r_1 = (a, b)$, $r_2 = (c, d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Нам необходимо найти такое $n \in \mathbb{N}$, чтобы $r_2 < n \cdot r_1$, что равносильно $(n, 1)(a, b) - (c, d) > 0$ или $(nad - bc, bd) > 0$. Учитывая, что $bd > 0$, достаточно получить $nad - bc > 0$. По свойству Архимеда для $(\mathbb{N}, \leq)$ для натуральных чисел ad и bc найдется такое натуральное число n , что $n(ad) > bc$, откуда и следует требуемое $nad - bc > 0$.

б) если $r_2 \leq r_1$, то, складывая это неравенство с неравенством $0 < \varepsilon$, получим $r_2 < r_1 + \varepsilon$ и $n = 1$ — искомое. Пусть теперь $r = r_2 - r_1 > 0$. Применив (а) к положительным числам r и ε , найдем такое натуральное число n , что $r < n \cdot \varepsilon$. Откуда $r_2 - r_1 < n \cdot \varepsilon$ или $r_2 < r_1 + n \cdot \varepsilon$. ■

1.5. Множество действительных чисел

Долгое время математический анализ развивался без строго построения своего основного множества — действительной (или вещественной) прямой. Активные попытки предпринимались разными математиками с начала девятнадцатого века. Прорывным оказался 1872 год. В этом году почти одновременно вышли три работы представителей немецкой математической школы, в которых множество $\mathbb{R}$ было построено совершенно разными способами. К. Вейерштрасс¹¹ определил $\mathbb{R}$ как множество бесконечных десятичных дробей. Г. Кантор¹² рассматривал все фундаментальные последовательности на

¹¹Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик, «отец современного анализа», профессор (с 1856) Берлинского университета, основные работы посвящены математическому и функциональному анализу, дифференциальной геометрии и линейной алгебре; построил пример функции, непрерывной на отрезке, но не имеющей производной ни в одной точке; учениками Вейерштрасса были Г. Кантор, С.В. Ковалевская, М.Г. Миттаг-Лефлер, И.Л. Фукс и др.

¹²Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, создатель теории множеств, первый президент Германского математического общества, инициатор созыва первого Международного конгресса математиков в Цюрихе (1897); доказал несчетность множества действительных чисел, автор диагонального метода; родился в Санкт-Петербурге в семье биржевого маклера, четыре года (с 1853) учился в старейшей петербургской школе (Петришуле), семья Канторов жила в доме 24 по 11-й линии на Васильевском острове, в 1850 году в этом же доме поселился выдающийся русский математик П.Л. Чебышев.



множестве рациональных чисел и считал вещественным числом множество всех эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей. И, наконец, Р. Дедекинд¹³ в качестве элементов $\mathbb{R}$ взял сечения во множестве рациональных чисел. Мы будем использовать *метод сечений* Дедекинда, геометрически очень простой, кроме того, сечение можно легко определить в любом линейно упорядоченном множестве.

Пусть $(X, \leq)$ — ЛУМ, $A \subseteq X$ и $A \neq \emptyset$. Из курса алгебры десятого класса помним, что понятие наименьшего и минимального элемента в A совпадают, при этом *наименьшим* в A называется такой элемент a , который удовлетворяет двум условиям: $a \in A$ и $a \leq b$ для каждого $b \in A$. Обозначается он через $a = \min A$. Аналогично определяется *наибольший* элемент в A и обозначается через $\max A$.

Определение. Пусть $(X, \leq)$ — ЛУМ. Упорядоченная пара его подмножеств (A, B) называется *сечением* множества X , если одновременно выполняется:

- 1) $A \cup B = X$,
- 2) $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$,
- 3) $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a < b$,

при этом A называется *нижним классом* сечения, а множество B — его *верхним классом*.

Пусть (A, B) — сечение линейно упорядоченного множества X . Любое сечение можно отнести к одному из следующих четырех типов.

I. Во множестве A есть максимальный элемент, а в B нет минимального элемента.

II. Во множестве A нет максимального элемента, а в B есть минимальный элемент.

Сечения первых двух типов называются *сечениями с рубежом*. Если (A, B) — сечение первого типа и $a = \max A$, то a называется его *рубежом*. Зная рубеж и тип сечения очень легко сечение полностью восстановить. Например, x^* — рубеж сечения (C, D) второго типа, тогда сразу догадываемся, что $C = \{c \in X : c < x^*\}$ и $D = \{d \in X : x^* \leq d\}$.

III. Во множестве A есть максимальный элемент и во множестве B есть минимальный элемент.

¹³Юлиус Вильгельм Рихард Дедекинд (1831–1916) — немецкий математик, ученик Гаусса и Дирихле, основные работы посвящены теории алгебраических чисел; дал определение идеала, ввел понятие кольца; сформулировал в 1888 году (почти одновременно с Пеано) полную систему аксиом арифметики, а также принцип математической индукции.



Сечение третьего типа называется *скачком*. Попробуйте посечь множества $(\mathbb{N}, \leq)$ или $(\mathbb{Z}, \leq)$. Если будете всё делать правильно, у вас всегда будут получаться скачки.

IV. Во множестве A нет максимального элемента и во множестве B нет минимального элемента.

Сечение четвертого типа называется *щелью*. Совсем непросто построить пример щели, сделаем это в следующей теореме.

Теорема 5.1. 1) в $(\mathbb{Q}, \leq)$ нет скачков.
2) в $(\mathbb{Q}, \leq)$ есть щели.

Доказательство. 1) о/п: предположим, что (A, B) — скачок в $(\mathbb{Q}, \leq)$. Обозначим через $r_1 = \max A$ и $r_2 = \min B$. В силу плотности порядка на $\mathbb{Q}$ (седьмое свойство из предыдущего параграфа) найдется такое $r_3 \in \mathbb{Q}$, что $r_1 < r_3 < r_2$. Условие $r_3 > r_1 = \max A$ дает $r_3 \notin A$. Неравенство $r_3 < r_2 = \min B$ гарантирует, что $r_3 \notin B$. Отсюда $r_3 \notin A \cup B = \mathbb{Q}$. ✕.

2) достаточно найти хотя бы одну щель в $(\mathbb{Q}, \leq)$. Определим два подмножества рациональных чисел:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \quad \vee \quad (r > 0 \& r^2 < 2)\},$$

$$B = \{s \in \mathbb{Q} : s > 0 \& s^2 > 2\}.$$

Осталось проверить, что (A, B) — щель. Из соображений делимости легко¹⁴ доказать, что нет ни одного рационального числа, квадрат которого равен 2, поэтому $A \cup B = \mathbb{Q}$. Очевидно, что $1 \in A$ и $3/2 \in B$, поэтому $A, B \neq \emptyset$. Выберем произвольные $a \in A$, $b \in B$ и докажем, что $a < b$. Это достаточно проверить только для $a > 0$. Предположим, что это не так и для каких-то двух элементов выполняется обратное неравенство $0 < b \leq a$. Умножив его на $0 < b \leq a$ (это можно сделать по шестому свойству порядка на $\mathbb{Q}$), получим $2 < b^2 \leq a^2$, что противоречит выбору $a \in A$. Итак, (A, B) — сечение в $(\mathbb{Q}, \leq)$.

Докажем, что в A нет максимального элемента. О/п: существует рациональное число $r_1 = \max A$. Тогда $1 < r_1 < 2$ и $r_1^2 < 2$. Кроме того, умножив неравенство $1 < r_1$ на $r_1 \leq r_1$, получим $r_1 < r_1^2$. Обозначим теперь через $\varepsilon = 2 - r_1^2$. Очевидно, что $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $r^* = r_1 + \frac{\varepsilon}{4}$. Сразу выполняется: $r^* \in \mathbb{Q}$ и $r_1 < r^*$. Оценим квадрат этого числа (в первом

¹⁴О/п: нашлась несократимая дробь a/b для которой $a^2/b^2 = 2$, откуда $a^2 = 2b^2$ — четное число, поэтому a^2 делится на 4 и b^2 также четно; в результате, a/b — сократимая дробь. ✕.



неравенстве мы используем $r_1^2 = 2 - \varepsilon$ и $r_1 < r_1^2$):

$$\begin{aligned}(r^*)^2 &= r_1^2 + \frac{r_1 \cdot \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} < 2 - \varepsilon + \frac{r_1^2 \cdot \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} = 2 - \varepsilon + \frac{(2 - \varepsilon) \cdot \varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} = \\ &= 2 - \varepsilon + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16} = 2 - \frac{7\varepsilon^2}{16} < 2 \Rightarrow r^* \in A.\end{aligned}$$

Условия $r_1 = \max A$, $r_1 < r^*$ и $r^* \in A$ противоречивы.

Осталось доказать, что в B нет минимального элемента. О/п: существует рациональное число $s_1 = \min B$. Тогда $1 < s_1 < 2$ и $s_1^2 > 2$. Обозначим через $\delta = s_1^2 - 2$. Очевидно, что $\delta \in \mathbb{Q}$ и $\delta > 0$. Рассмотрим $s^* = s_1 - \frac{\delta}{4}$. Сразу выполняется: $s^* \in \mathbb{Q}$ и $s^* < s_1$. Оценим квадрат этого числа (в первом неравенстве мы используем $s_1^2 = 2 + \delta$ и $s_1 < 2$ или $-s_1 \cdot \delta > -2 \cdot \delta$):

$$(s^*)^2 = s_1^2 - \frac{s_1 \cdot \delta}{2} + \frac{\delta^2}{16} > 2 + \delta - \frac{2 \cdot \delta}{2} + \frac{\delta^2}{16} = 2 + \frac{\delta^2}{16} > 2 \Rightarrow s^* \in B.$$

Условия $s_1 = \min B$, $s^* < s_1$ и $s^* \in B$ противоречивы. ■

Вещественная прямая $\mathbb{R}$ должна отличаться от $\mathbb{Q}$ своей непрерывностью, т.е. полным отсутствием щелей.

Определение. Действительной прямой называется множество $\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- 1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ — поле;
- 2) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;
- 3) операции $+_{\mathbb{R}}$ и $\cdot_{\mathbb{R}}$ продолжают операции $+_{\mathbb{Q}}$ и $\cdot_{\mathbb{Q}}$ соответственно;
- 4) $(\mathbb{R}, \leq)$ — ЛУМ, в котором любое сечение имеет рубеж.

Сразу определим элементы нужного нам множества R_1 , которое станет моделью для действительной прямой.

Определение. Для каждого $r \in \mathbb{Q}$ обозначим через $A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\}$, $B_r = \{s \in \mathbb{Q} : s > r\}$, тогда $\tilde{r} = (A_r, B_r)$ будем называть рациональным сечением в $(\mathbb{Q}, \leq)$. Пусть $\tilde{\mathbb{Q}} = \{\tilde{r} : r \in \mathbb{Q}\}$ — множество всех рациональных сечений и $\mathbb{J}$ — множество всех щелей в $(\mathbb{Q}, \leq)$, тогда $R_1 = \tilde{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{J}$.

Нетрудно заметить, что R_1 — это множество всех таких сечений $(\mathbb{Q}, \leq)$, что в их верхнем классе нет минимального элемента. Элементы множества R_1 будем обозначать так: α , β , γ и т.д. Если $\alpha = (A, B) \in \mathbb{J}$ (т.е. α — щель), то α называется *иррациональным сечением* и в будущем будет соответствовать иррациональному числу. Определим порядок на R_1 .



Определение. Пусть $\alpha = (A, B), \beta = (C, D) \in R_1$. Считаем, что $\alpha \leq \beta$ (соответственно $\alpha < \beta$), если $A \subseteq C$ ($A \subseteq C$ и $A \neq C$, т.е. $A \subset C$).

Полезно будет понять, как можно сравнивать рациональные сечения со всеми остальными.

Лемма 5.2. Пусть $\alpha = (A, B) \in R_1$ и $r \in \mathbb{Q}$. Тогда

- 1) $\tilde{r} \leq \alpha \Leftrightarrow r \in A$,
- 2) $\alpha < \tilde{r} \Leftrightarrow r \in B$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) $\tilde{r} \leq \alpha \Leftrightarrow A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\} \subseteq A$, но $r \in A_r \subseteq A$, поэтому $r \in A$.

$\Leftarrow$) пусть теперь $r \in A$, тогда для любого $q \in \mathbb{Q}$, для которого $q \leq r$, выполняется $q \notin B$ (иначе $r < q$). Учитывая, что $A \cup B = \mathbb{Q}$ и $q \notin B$, получим $q \in A$. Мы проверили, что $A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\} \subseteq A$, что дает $\tilde{r} \leq \alpha$.

2) $\Rightarrow$) пусть $\alpha < \tilde{r}$, тогда A строго содержится в A_r , поэтому найдется такое $q_0 \in A_r \setminus A \Rightarrow q_0 \in B$ (поскольку $q_0 \in \mathbb{Q} = A \cup B$ и $q_0 \notin A$). Вспомним, что $r = \max A_r$, поэтому $q_0 \leq r$, что дает $r \in B$.

$\Leftarrow$) пусть $r \in B$, тогда для всех $t \in A$ по определению сечения выполняется $t < r$, поэтому $t \in A_r$ и $A \subseteq A_r$. Кроме того, $r \in A_r \setminus A$. В результате, A строго содержится в A_r , поэтому $\alpha < \tilde{r}$.

Теорема 5.3. $(R_1, \leq)$ — ЛУМ.

Доказательство. Выберем произвольные $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$, $\gamma = (E, F) \in R_1$.

1) поскольку $A \subseteq A$, выполняется $\alpha \leq \alpha$, что дает рефлексивность.
 2) если одновременно выполняются $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то $A \subseteq C$ и $C \subseteq A$, откуда $A = C$ и $\alpha = \beta$, поэтому антисимметричность проверена.

3) если одновременно выполняются $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \gamma$, то $A \subseteq C$ и $C \subseteq E$, откуда $A \subseteq E$ и $\alpha \leq \gamma$. Мы проверили транзитивность.

4) осталось доказать линейность порядка. Если $\alpha = \beta$, то уже всё доказано, поэтому будем считать, что $\alpha \neq \beta$, что равносильно $A \neq C$. Возможны два случая: $C \setminus A \neq \emptyset$ или $A \setminus C \neq \emptyset$. Б.о.о. считаем, что найдется такой элемент $r_0 \in C \setminus A$. Дважды воспользуемся предыдущей леммой. Из $r_0 \in C$ следует, что $\tilde{r}_0 \leq \beta$. Из $r_0 \notin A$ следует сначала $r_0 \in B$, а затем — $\alpha < \tilde{r}_0$. Два полученных неравенства и транзитивность порядка дают $\alpha < \beta$. Точно так же из условия $A \setminus C \neq \emptyset$ можно доказать, что $\beta < \alpha$. Линейность



порядка доказана. ■

Лемма 5.4. Пусть $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D) \in R_1$ и $\alpha < \beta$. Тогда найдется такое $r \in \mathbb{Q}$, что $\alpha < \tilde{r} < \beta$.

Доказательство. Строгое неравенство $\alpha < \beta$ дает $A \subset C$ и существование такого $r_1 \in C \setminus A$. Из $r_1 \notin A$ сразу получаем $r_1 \in B$. Вспомним, что B не имеет минимального элемента, поэтому в B найдется такой элемент r , что $r < r_1$. Условие $r \in B$ по лемме 5.2 дает $\alpha < \tilde{r}$. Включение $r_1 \in C$ по той же лемме равносильно $\tilde{r}_1 \leq \beta$. Но неравенство $r < r_1$ сразу приводит к $A_r \subset A_{r_1}$ и $\tilde{r} < \tilde{r}_1$, что по транзитивности порядка дает $\tilde{r} < \beta$. В результате, $\alpha < \tilde{r} < \beta$ и r — искомое рациональное число. ■

Поскольку $(R_1, \leq)$ — ЛУМ, в нем можно рассматривать сечения. Предыдущая лемма дает отсутствие скачков в $(R_1, \leq)$. Оказывается, в этом множестве нет ни одной щели! Этот удивительный факт установлен в следующей теореме, которая называется *теоремой Дедекинда*

Теорема 5.5. Любое сечение в $(R_1, \leq)$ имеет рубеж.

Доказательство. Рассмотрим произвольное сечение (A^*, B^*) в $(R_1, \leq)$. Если это сечение с рубежом, то доказывать нечего, а скачком (A^*, B^*) быть не может. Поэтому предположим, что (A^*, B^*) — щель, и найдем противоречие. По определению сечения, у нас есть три свойства:

- 1) $A^* \cup B^* = R_1$,
- 2) $A^* \neq \emptyset$ и $B^* \neq \emptyset$,
- 3) $\forall \alpha \in A^*, \forall \beta \in B^* \Rightarrow \alpha < \beta$.

Теперь определим два множества рациональных чисел

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : \tilde{r} \in A^*\} \quad \text{и} \quad B = \{s \in \mathbb{Q} : \tilde{s} \in B^*\}$$

и докажем, что они обладают тремя хорошо знакомыми нам свойствами.

а) учитывая, что для любого $q \in \mathbb{Q}$ следует, что $\tilde{q} \in R_1 = A^* \cup B^*$, получим, что $q \in A$ или $q \in B$. Отсюда $\mathbb{Q} = A \cup B$.

б) поскольку $A^* \neq \emptyset$, найдется $\gamma = (E, F) \in A^*$. Выберем произвольное рациональное число $r_0 \in E$, тогда $\tilde{r}_0 \leq \gamma$ (по лемме 5.2), поэтому $\tilde{r}_0 \notin B^*$, откуда $\tilde{r}_0 \in A^*$ и $r_0 \in A$. Мы доказали непустоту множества A . Аналогично доказывается, что $B \neq \emptyset$.

в) выберем произвольные $r \in A$ и $s \in B$, тогда $\tilde{r} \in A^*$, $\tilde{s} \in B^*$. Условие (3) дает $\tilde{r} < \tilde{s}$, что приводит к $A_r \subset A_s$ или $r < s$.



Из (а), (б) и (в) следует, что $\alpha^* = (A, B)$ является сечением в $(\mathbb{Q}, \leq)$. Установим еще одно свойство α^* .

г) покажем, что в верхнем классе сечения α^* нет минимального элемента. О/п: существует $q_0 = \min B$. Вспомним, что в B^* нет минимального элемента, поэтому найдутся такие $\beta_1, \beta_2 \in B^*$, что $\beta_1 < \beta_2 < \tilde{q}_0$. Пора применить предыдущую лемму и найти такое рациональное число $q_1 \in \mathbb{Q}$, что $\beta_1 < \tilde{q}_1 < \beta_2$. Неравенство $\beta_1 < \tilde{q}_1$ дает $\tilde{q}_1 \in B^*$ или $q_1 \in B$. А неравенства $\tilde{q}_1 < \beta_2 < \tilde{q}_0$ приводят к $q_1 < q_0$, поэтому q_0 не может быть минимальным элементом в B .

Итак, α^* — сечение в $(\mathbb{Q}, \leq)$ без минимального элемента в своем верхнем классе. Поэтому $\alpha^* \in R_1 = A^* \cup B^*$, что дает $\alpha^* \in A^*$ или $\alpha^* \in B^*$. Рассмотрим отдельно эти два случая.

I. Пусть $\alpha^* \in A^*$. Докажем, что $\alpha^* = \max A^*$. О/п: найдется такое $\alpha_1 \in A^*$, что $\alpha^* < \alpha_1$. По предыдущей лемме обнаружим такое рациональное число r_1 , что $\alpha^* < \tilde{r}_1 < \alpha_1$. Неравенство $\alpha^* < \tilde{r}_1$ по лемме 5.2 дает $r_1 \in B$, а условия $\tilde{r}_1 < \alpha_1 \in A^*$ приводят к $\tilde{r}_1 \in A^*$ и $r_1 \in A$. В результате $r_1 \in A \cap B = \emptyset$. $\nearrow \nwarrow$ Таким образом, $\alpha^* = \max A^*$ и сечение (A^*, B^*) с рубежом, т.е. не является щелью. Противоречие.

II. Пусть $\alpha^* \in B^*$. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что $\alpha^* = \min B^*$, поэтому α^* — рубеж сечения (A^*, B^*) . $\nearrow \nwarrow$

■

Операциями на множестве R_1 займемся в следующих двух параграфах.

1.6. Правильно расположенные и близкие множества

Некоторые множества, состоящие только из рациональных чисел, однозначно определяют действительное число. Опишем эту ситуацию, которая часто будет встречаться в наших дальнейших исследованиях.

Определение. Пусть $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Q}$ и $F_1, F_2 \neq \emptyset$. Множества F_1 и F_2 называются правильно расположенными, если для любых элементов $r \in F_1$ и $s \in F_2$ следует, что $r \leq s$. Множества F_1 и F_2 называются близкими, если для каждого положительного $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдется хотя бы одна пара элементов $r_0 \in F_1$ и $s_0 \in F_2$, что $|s_0 - r_0| < \varepsilon$.

Например, нижний и верхний классы любого сечения $\mathbb{Q}$ — правильно расположенные множества. Если множества $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Q}$ пересекаются между собой, то они всегда являются близкими.



Определение. Пусть $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Q}$ и $\alpha \in R_1$. Говорят, что α разделяет множества F_1 и F_2 , если любых $r \in F_1$ и $s \in F_2$ следует, что $\tilde{r} \leq \alpha \leq \tilde{s}$.

Теорема 6.1. Пусть $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{Q}$.

1) если F_1 и F_2 правильно расположены, то найдется элемент $\alpha \in R_1$, который разделяет F_1 и F_2 .

2) если F_1 и F_2 правильно расположены и близкие, то найдется единственный элемент $\alpha \in R_1$, который разделяет F_1 и F_2 .

Доказательство. 1) с помощью F_2 определим два подмножества рациональных чисел: $X = \{r \in \mathbb{Q} : \text{для каждого } b \in F_2 \Rightarrow r \leq b\}$ и $Y = \mathbb{Q} \setminus X$. Тогда выполняются следующие свойства.

1) очевидно, что $X \cup Y = \mathbb{Q}$.

2) $X \neq \emptyset$, поскольку $F_1 \subseteq X$ и $F_1 \neq \emptyset$. Известно, что $F_2 \neq \emptyset$, поэтому выберем $b_0 \in F_2$ и рассмотрим $b_0 + 1$. Очевидно, что $b_0 < b_0 + 1$, поэтому $b_0 + 1 \notin X \Rightarrow b_0 + 1 \in Y$. Следовательно, $Y \neq \emptyset$.

3) выберем произвольные $r \in X$ и $s \in Y$. Поскольку $s \notin X$, найдется какой-нибудь элемент $b_1 \in F_2$, для которого $b_1 < s$. Но из $r \in X$ сразу следует $r \leq b_1$, поэтому из двойного неравенства $r \leq b_1 < s$ получим $r < s$.

4) в Y нет минимального элемента. О/п, нашелся $s^* = \min Y$. Снова, из $y^* \notin X$, найдем некоторый элемент $b^* \in F_2$, для которого $b^* < s^*$. Из плотности порядка на $\mathbb{Q}$ быстро находим такое рациональное число s_0 , что $b^* < s_0 < s^*$. Неравенство $b^* < s_0$ дает $s_0 \in Y$, а неравенство $s_0 < s^*$ противоречит $s^* = \min Y$. $\nearrow \nwarrow$.

Из (1)–(4) следует, что $\alpha = (X, Y)$ — сечение в $(\mathbb{Q}, \leq)$, причем в верхнем классе α нет минимального элемента. Отсюда $\alpha \in R_1$ и осталось доказать, что оно искомого.

Учитывая, что $F_1 \subseteq X$, получим, что для любого $r \in F_1$ следует, что $r \in X$, поэтому $\tilde{r} \leq \alpha$ (по лемме 5.2) (*).

Выберем теперь произвольный элемент $b \in F_2$. По определению множества X для каждого $r \in X$ верно $r \leq b$, поэтому $X \subseteq A_b$, что означает $\alpha = (X, Y) \leq (A_b, B_b) = \tilde{b}$ (**).

Из (*) и (**) следует, что α разделяет F_1 и F_2 .

2) существование разделяющего α уже доказано в (1) осталось проверить, то близость F_1 и F_2 обеспечивает единственность. О/п: нашелся такой элемент $\beta \in R_1 \setminus \{\alpha\}$ и β также разделяет F_1 и F_2 . Неравенство $\alpha \neq \beta$ и линейность порядка на R_1 дают: $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$. Б.о.о. считаем, что $\alpha < \beta$.



Применив два раза лемму 5.4, найдем такие $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, что $\alpha < \tilde{q}_1 < \tilde{q}_2 < \beta$ и обозначим через $\varepsilon_0 = q_2 - q_1 > 0$. Тогда для любых $r \in F_1$ и $s \in F_2$ выполняется

$$\tilde{r} \leq \alpha < \tilde{q}_1 < \tilde{q}_2 < \beta \leq \tilde{s},$$

откуда $|s - r| > |q_2 - q_1| = \varepsilon_0$, поэтому F_1 и F_2 близкими не являются. $\nearrow \nwarrow$. ■

Кстати, мы давно уже имеем дело с правильно расположенными и близкими множествами.

Следствие 1. Пусть $\alpha = (A, B) \in R_1$, тогда A и B — правильно расположенные близкие множества, и α — единственный элемент из R_1 , который их разделяет.

Доказательство. Правильная расположенность A и B сразу следует из определения сечения, проверим их близость. Выберем произвольное рациональное $\varepsilon > 0$ и по одному элементу $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$. Пусть $n^* = \min K$, где $K = \{n \in \mathbb{N} : a_0 + n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in B\}$. Из свойства Архимеда для $(\mathbb{Q}, \leq)$ следует, что найдется такое натуральное число n_1 , что $b_0 < a_0 + n_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, поэтому $n_1 \in K$, $K \neq \emptyset$ и число n^* определено корректно. Замечаем, что $n^* - 1 \notin K$, поэтому $r = a_0 + (n^* - 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in A$, $s = a_0 + n^* \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in B$ и $|s - r| = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Близость множеств A и B доказана.

Из леммы 5.2 следует, что для любых $r \in A$ и $s \in B$ выполнено двойное неравенство $\tilde{r} \leq \alpha < \tilde{s}$, поэтому α разделяет A и B . Единственность такого элемента из R_1 гарантируется предыдущей теоремой. ■

Следствие 2. Пусть $X_1 \subseteq X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$, $X_2, Y_2 \subseteq \mathbb{Q}$. Если X_1 , Y_1 правильно расположены и близкие, элемент $\gamma_1 \in R_1$ их разделяет, а также найдется элемент $\gamma_2 \in R_1$, разделяющий X_2 и Y_2 , то $\gamma_1 = \gamma_2$, а множества X_2 , Y_2 являются правильно расположенными и близкими.

Доказательство. Элемент $\gamma_2 \in R_1$ по условию разделяет X_2 и Y_2 , поэтому они правильно расположены. Из близости X_1 и Y_1 для произвольного положительного $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдется хотя бы одна пара элементов $r_0 \in X_1$ и $s_0 \in Y_1$, что $|s_0 - r_0| < \varepsilon$. Поскольку $r_0 \in X_2$ и $s_0 \in Y_2$, множества X_2 и Y_2 также являются близкими. Снова учитывая включения $X_1 \subseteq X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$ и то, что γ_2 разделяет X_2 и Y_2 , получаем, что γ_2 разделяет X_1 и Y_1 . Из предыдущей теоремы получаем равенство γ_1 и γ_2 . ■

В следующем параграфе будут популярны «срезки» множеств. Определим



их и докажем несколько простых свойств.

Определение. Пусть $r_0 \in X \subseteq \mathbb{Q}$, тогда следующие два множества называются срезкой множества X по r_0 : $X|_{\geq r_0} = \{x \in X : x \geq r_0\}$ и $X|_{\leq r_0} = \{x \in X : x \leq r_0\}$.

Определение. Пусть $r_0 \in X \subseteq \mathbb{Q}$, тогда следующие два множества называются строгой срезкой множества X по r_0 : $X|_{> r_0} = \{x \in X : x > r_0\}$ и $X|_{< r_0} = \{x \in X : x < r_0\}$.

Следствие 3. Пусть X, Y — правильно расположенные близкие множества и $r_0 \in X, s_0 \in Y$. Тогда

- 1) множества $X|_{\geq r_0}$ и $Y|_{\leq s_0}$ правильно расположены и близкие;
- 2) множества $X|_{> r_0}$ и Y правильно расположены и близкие;
- 3) множества X и $Y|_{\leq s_0}$ правильно расположены и близкие.

Доказательство. Из определения очевидно следует, что при переходе к непустым подмножествам правильная расположенность сохраняется. Остается проверить только близость.

1) в силу близости X и Y для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ найдутся такие $r \in X$ и $s \in Y$, что $|s - r| = s - r < \varepsilon$. Теперь надо рассмотреть несколько случаев.

1-й случай: при $r \geq r_0$ и $s \leq s_0$ сразу получим $r \in X|_{\geq r_0}$, $s \in Y|_{\leq s_0}$ и пара r, s — искомая.

2-й случай: при $r \leq r_0$ и $s \leq s_0$ получим $0 \leq s - r_0 \leq s - r < \varepsilon$ и пара r_0, s — искомая.

3-й случай: при $r \geq r_0$ и $s \geq s_0$ получим $0 \leq s_0 - r \leq s - r < \varepsilon$ и пара r, s_0 — искомая.

4-й случай: при $r \leq r_0$ и $s \geq s_0$ получим $0 \leq s_0 - r_0 \leq s - r < \varepsilon$ и пара r_0, s_0 — искомая.

Теперь близость множеств в (2) и (3) следует из (1) и предыдущего следствия. ■

1.7. Операции с действительными числами

Сначала определим, как можно складывать, умножать и делить два почти любых непустых подмножества из $\mathbb{Q}$. Напомним, что в $\mathbb{Q}$ вместо записи $r \cdot s^{-1}$ (для ненулевого s) мы договорились использовать $\frac{r}{s}$ или r/s .



Определение. Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{Q}$ и $X, Y \neq \emptyset$. Тогда

- 1) $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$,
- 2) $X \cdot Y = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$,
- 3) $-X = \{-x : x \in X\}$,
- 4) если $0 \notin Y$, то $\frac{X}{Y} = X/Y = \left\{\frac{x}{y} : x \in X, y \in Y\right\}$.

Например, если $X = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 2\}$ и $Y = \{s \in \mathbb{Q} : s \geq 3\}$, то $X + Y = \{t \in \mathbb{Q} : t \geq 5\}$, $X \cdot Y = \{t \in \mathbb{Q} : t \geq 6\}$ и $X/Y = \{t \in \mathbb{Q} : t > 0\}$.

Определение. Для произвольных $\alpha = (A, B), \beta = (C, D) \in R_1$ их суммой называется такое $\gamma \in R_1$, которое разделяет множества $A + C$ и $B + D$ (обозначение: $\gamma = \alpha + \beta$).

Теорема 7.1. I. Сумма на R_1 определена корректно.

II. $(R_1, +)$ — абелева группа.

Доказательство. I. а) пусть $\alpha = (A, B), \beta = (C, D) \in R_1$. Выберем произвольные $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ и $d \in D$, тогда $a < b$ и $c < d$, откуда $a + c < b + d$ (свойство V(г) порядка на множестве рациональных чисел). В результате, $A + C$ и $B + D$ — правильно расположенные множества.

б) рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. В конце предыдущего параграфа было доказано, что A и B (также, как C и D), являются близкими множествами, поэтому найдутся такие $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $c_0 \in C$ и $d_0 \in D$, что $|b_0 - a_0| = b_0 - a_0 < \varepsilon/2$ и $|d_0 - c_0| = d_0 - c_0 < \varepsilon/2$, откуда $|(b_0 + d_0) - (a_0 + c_0)| < \varepsilon$. Учитывая, что $a_0 + c_0 \in A + C$ и $b_0 + d_0 \in B + D$, мы доказали близость множеств $A + C$ и $B + D$.

Из (а), (б) и теоремы 6.1 следует существование и единственность такого $\gamma \in R_1$, которое разделяет множества $A + C$ и $B + D$. Корректность суммы доказана.

II. Пусть $\alpha = (A, B), \beta = (C, D), \gamma = (E, F) \in R_1$.

1) поскольку сложение на $\mathbb{Q}$ коммутативно, для множеств рациональных чисел также выполняется $A + C = C + A$ и $B + D = D + B$, откуда $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

2) ассоциативность сложения на $\mathbb{Q}$ также влечет ассоциативность сложение подмножеств из $\mathbb{Q}$, поэтому $(A + C) + E = A + (C + E)$ и $(B + D) + F = B + (D + F)$, откуда $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

3) вспомним, что $\tilde{0}$ — это сечение множества $\mathbb{Q}$ с рубежом $0 \in \mathbb{Z}$, который является максимальным элементом в нижнем классе $\tilde{0} = (A_0, B_0)$. Докажем, что $\tilde{0}$ — нейтральный элемент в $(R_1, +)$. Уже зная о коммутативности сложения, достаточно проверить, что $\beta + \tilde{0} = \beta$. Для этого выберем



произвольные $c \in C$, $d \in D$, $r \in A_0$ и $s \in B_0$. Сложив неравенства $c \leq r$ и $r \leq 0$, получим $c + r \leq c$ (*). Аналогично из неравенств $d \leq d$ и $0 < s$ получаем $d < d + s$ (**). Мы знаем, что $\tilde{c} \leq \beta < \tilde{d}$, поэтому (*) и (**) теперь нам дают, что β разделяет множества $C + A_0$ и $D + B_0$. Учитывая единственность такого разделяющего числа (доказано в I), получим $\beta + \tilde{0} = \beta$.

4) для произвольного $\beta = (C, D)$ рассмотрим такое $\beta_1 \in R_1$, которое разделяет множества $-D$ и $-C$. Правильная расположенность и близость множеств $-D$ и $-C$ очевидны, поэтому существование и единственность β_1 гарантируется теоремой 6.1. Теперь выберем произвольные $c \in C$, $d \in D$, $-d_1 \in -D$ и $-c_1 \in -C$. Сложив неравенства $c < d_1$ и $-d_1 \leq -d_1$, получим $-d_1 + c < 0$. Аналогично поступая с неравенствами $c_1 < d$ и $-c_1 \leq -c_1$, приходим к $0 < -c_1 + d$. Получим двойное неравенство $-d_1 + c < 0 < -c_1 + d$, которое нам дает, что 0 разделяет множества $-D + C$ и $-C + D$, отсюда $\beta_1 + \beta = \tilde{0}$ (опять, единственность такого разделяющего числа гарантируется пунктом I) и β_1 — обратный элемент к β по сложению. Как принято в аддитивных группах, элемент β_1 обозначается через $-\beta$.

■

Следствие 1. Пусть $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D) \in R_1$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, $C_1 \subseteq C$, $D_1 \subseteq D$. Если A_1, B_1 и C_1, D_1 образуют пары правильно расположенных и близких множеств, то $A_1 + C_1$ и $B_1 + D_1$ также правильно расположены и близки, причем $\alpha + \beta$ является единственным разделяющим их числом.

Доказательство. Правильная расположенность и близость $A_1 + C_1$ и $B_1 + D_1$ доказывается точно так же, как и при проверке корректности сложения на R_1 . Второе следствие теоремы 6.1 дает, что $\alpha + \beta$ — единственное разделяющее их число.

■

Следствие 2. Для произвольных $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D) \in R_1$ выполняется равенство $-(\alpha + \beta) = -\alpha + (-\beta)$.

Доказательство. Элемент $\gamma_1 = -(\alpha + \beta)$ должен (по (4) из предыдущей теоремы) разделять множества $X_1 = -(B + D)$ и $Y_1 = -(A + C)$. Элемент γ_2 (снова, по (4) и по определению сложения на R_1) должен разделять множества $X_2 = (-B) + (-D)$ и $Y_2 = (-A) + (-C)$. Из свойств операций на $\mathbb{Q}$ следует $X_1 = X_2$ и $Y_1 = Y_2$. Применив теперь второе следствие теоремы 6.1,



получим $\gamma_1 = \gamma_2$.

■

Для определения произведения $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D) \in R_1$ просто перемножать множества A и C будет неудачной идеей — это произведение содержит большие положительные числа и правильная расположенность нарушится. Поэтому целиком нижние классы A и C не рассматриваются, а используются только их «срезки». Перед определением произведения на R_1 отметим еще простой факт о расположении элементов этого множества относительно нуля. Из леммы 5.2 следует, что $\alpha = (A, B) < \tilde{0} \Leftrightarrow 0 \in B \Leftrightarrow 0 \in (-B) \Leftrightarrow \tilde{0} < (-\alpha)$. Отсюда следует (после рассмотрения тривиального случая $\alpha = \tilde{0}$), что $\alpha \leq \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{0} \leq (-\alpha)$.

Определение. Пусть $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D) \in R_1$.

1) если $\alpha, \beta \geq \tilde{0}$, то их произведением (обозначается через $\alpha \cdot \beta$) называется такое $\gamma \in R_1$, которое разделяет $(A|_{\geq 0}) \cdot (C|_{\geq 0})$ и $B \cdot D$.

2) если $\alpha \geq \tilde{0}$ и $\beta \leq \tilde{0}$, то их произведением называется $-(\alpha \cdot (-\beta))$.

3) если $\alpha \leq \tilde{0}$ и $\beta \geq \tilde{0}$, то их произведением называется $-((- \alpha) \cdot \beta)$.

4) если $\alpha \leq \tilde{0}$ и $\beta \leq \tilde{0}$, то их произведением называется $(-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Теорема 7.2. I. Произведение на R_1 определено корректно.

II. $(R_1, \cdot)$ — абелева группа.

Доказательство. I. Пусть $\alpha = (A, B)$ и $\beta = (C, D) \in R_1$. Поскольку обратные по сложению на R_1 определяются однозначно, то достаточно проверить корректность умножения только в случае $\alpha, \beta \geq \tilde{0}$.

а) выберем произвольные $a \in A|_{\geq 0}$, $b \in B$, $c \in C|_{\geq 0}$ и $d \in D$, тогда $0 \leq a < b$ и $0 \leq c < d$, откуда $a \cdot c < b \cdot d$ (свойство VI(в) порядка на множестве рациональных чисел). В результате, $(A|_{\geq 0}) \cdot (C|_{\geq 0})$ и $B \cdot D$ — правильно расположенные множества.

б) рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Сначала выберем два вспомогательных числа: $b_0 \in B$ и $d_0 \in D$. Теперь воспользуемся близостью $A|_{\geq 0}$, B и найдем такие $a_1 \in A|_{\geq 0}$ и $b_1 \in B$, что $|b_1 - a_1| = b_1 - a_1 < \frac{\varepsilon}{2d_0}$. Снова воспользуемся близостью, но уже множеств $C|_{\geq 0}$, D и подберем такие $c_1 \in C|_{\geq 0}$ и $d_1 \in D$, для которых $|d_1 - c_1| = d_1 - c_1 < \frac{\varepsilon}{2b_0}$. Причем, при выборе d_1 можно считать, что $d_1 \leq d_0$ (если вдруг окажется, что подходящее d_1 больше, чем d_0 , число d_1 можно заменить на d_0 и еще уменьшить разность $d_1 - c_1$). Теперь займемся оценкой разности произведений:

$$|b_1 d_1 - a_1 c_1| = b_1 d_1 - a_1 c_1 = b_1 d_1 - a_1 d_1 + a_1 d_1 - a_1 c_1 =$$



$$= d_1(b_1 - a_1) + a_1(d_1 - c_1) < d_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2d_0} + a_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2b_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В предпоследнем переходе мы использовали два факта: из $0 < d_1 \leq d_0$ следует $(d_1/d_0) \leq 1$; а из $0 < a_1 < b_0$ получаем, что $(a_1/b_0) < 1$.

Из (а), (б) и теоремы 6.1 следует существование и единственность такого $\gamma \in R_1$, которое разделяет множества $(A|_{\geq 0}) \cdot (C|_{\geq 0})$ и $B \cdot D$. Корректность умножения доказана.

II. Пусть $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$ и $\gamma = (E, F) \in R_1$.

1) при $\alpha, \beta \geq \tilde{0}$ из коммутативности умножения на $\mathbb{Q}$ получаем, что множества $(A|_{\geq 0}) \cdot (C|_{\geq 0})$ и $(C|_{\geq 0}) \cdot (A|_{\geq 0})$ одинаковые. Аналогично равны множества $B \cdot D$ и $D \cdot B$. Отсюда $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

При $\alpha \geq \tilde{0}$ и $\beta \leq \tilde{0}$ по определению и доказанной уже коммутативности для неотрицательных элементов R_1 имеем

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta)) = -((- \beta) \cdot \alpha) = \beta \cdot \alpha.$$

Точно также рассматривается случай $\alpha \leq \tilde{0}$ и $\beta \geq \tilde{0}$.

При $\alpha \leq \tilde{0}$ и $\beta \leq \tilde{0}$ по определению и доказанной уже коммутативности для неотрицательных элементов R_1 имеем

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta) = (-\beta) \cdot (-\alpha) = \beta \cdot \alpha.$$

Коммутативность произведения на R_1 доказана.

2) при $\alpha, \beta, \gamma \geq \tilde{0}$ из ассоциативности умножения на $\mathbb{Q}$ получаем ассоциативность умножения множеств, откуда $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Пусть теперь только один из множителей отрицателен. Уже доказанная коммутативность позволяет рассмотреть только случай $\alpha \leq \tilde{0}$, $\beta, \gamma \geq \tilde{0}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \left(-((- \alpha) \cdot \beta) \right) \cdot \gamma = -\left(((- \alpha) \cdot \beta) \cdot \gamma \right) = \\ &= -\left((- \alpha) \cdot (\beta \cdot \gamma) \right) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \end{aligned}$$

В первом, втором и четвертом переходах мы использовали определение умножения, а в третьем — уже доказанную возможность перекинуть скобки в случае неотрицательных множителей.

Пусть два множителя отрицательны. Уже доказанная коммутативность позволяет рассмотреть только случай $\alpha, \beta \leq \tilde{0}$, $\gamma \geq \tilde{0}$. Тогда

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = ((- \alpha) \cdot (- \beta)) \cdot \gamma = (- \alpha) \cdot ((- \beta) \cdot \gamma) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$



В первом и третьем переходах мы использовали определение умножения, а во втором — уже доказанную возможность перекинуть скобки в случае неотрицательных множителей.

И, наконец, рассмотрим случай $\alpha, \beta, \gamma \leq \tilde{0}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= ((-\alpha) \cdot (-\beta)) \cdot \gamma = -\left(((-\alpha) \cdot (-\beta)) \cdot (-\gamma) \right) = \\ &= -\left((-\alpha) \cdot ((-\beta) \cdot (-\gamma)) \right) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \end{aligned}$$

В первом, втором и четвертом переходах мы использовали определение умножения, а в третьем — уже доказанную возможность перекинуть скобки в случае неотрицательных множителей. Ассоциативность умножения на R_1 доказана!

3) докажем, что $\tilde{1} = (A_1, B_1)$ — нейтральный элемент по умножению. Достаточно проверить, что $\beta \cdot \tilde{1} = \beta$. При $\beta \geq \tilde{0}$ выберем произвольную четверку рациональных чисел $c \in C|_{\geq 0}$, $d \in D$, $0 \leq r \leq 1$ и $s > 1$. Перемножая неравенства $0 \leq c \leq c$ и $0 \leq r \leq 1$, получим $c \cdot r \leq c$. Аналогично перемножив неравенства $0 < d \leq d$ и $1 < s$, приходим к неравенству $d < d \cdot s$. Учитывая, что $\tilde{c} \leq \beta < \tilde{d}$, получим, что β разделяет множества $(C|_{\geq 0}) \cdot (A_1|_{\geq 0})$ и $D \cdot B_1$, откуда $\beta \cdot \tilde{1} = \beta$. При $\beta \leq 0$ выполняется $\beta \cdot \tilde{1} = -\left((-\beta) \cdot \tilde{1} \right) = -\left((-\beta) \right) = \beta$.

4) для $\alpha = (A, B) \neq \tilde{0}$ найдем обратный по умножению. Начнем со случая $\alpha > \tilde{0}$ и рассмотрим два множества: $1/B$ и $1/(A|_{>0})$.

а) выбрав произвольные $a \in A|_{>0}$ и $b \in B$, получим двойное неравенство $0 < a < b$, которое после умножения на положительное число $a^{-1} \cdot b^{-1}$, даст $1/b < 1/a$. Отсюда $1/B$ и $1/(A|_{>0})$ — правильно расположенные множества.

б) рассмотрим произвольное положительное $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Выберем вспомогательное число $a_0 \in A|_{>0}$. Далее вспомним, что $A|_{>0}$ и B — близкие множества, поэтому найдется пара элементов $a_1 \in A|_{>0}$ и $b_1 \in B$, что $|b_1 - a_1| = b_1 - a_1 < \varepsilon \cdot a_0^2$. При этом можно считать, что $a_1 \geq a_0$ (так, если окажется, что подходящее a_1 меньше a_0 , то a_1 заменяем на a_0 и улучшаем оценку). Теперь оценим разность

$$\left| \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} \right| = \frac{b_1 - a_1}{a_1 \cdot b_1} < \frac{\varepsilon \cdot a_0^2}{a_1 \cdot b_1} < \frac{\varepsilon \cdot a_0^2}{a_0^2} = \varepsilon.$$

Мы установили, что $1/B$ и $1/(A|_{>0})$ — близкие множества.



Из (а), (б) и теоремы 6.1 следует существование и единственность такого $\gamma \in R_1$, которое разделяет множества $1/B$ и $1/(A|_{>0})$. Осталось проверить, что $\alpha \cdot \gamma = \tilde{1}$. Выберем произвольную четверку $a \in A|_{>0}$, $b \in B$, $1/b^* \in 1/B$ и $1/a^* \in 1/(A|_{>0})$. Из $0 < a < b^*$ (умножением на положительное $1/b^*$) получим $\frac{a}{b^*} < 1$. А из двойного неравенства $0 < a^* < b$ (умножением на положительное $1/a^*$) получим $1 < \frac{b}{a^*}$. Таким образом, $\tilde{1}$ разделяет множества $(A|_{>0}) \cdot \frac{1}{B}$ и $B \cdot \frac{1}{A|_{>0}}$, что дает $\alpha \cdot \gamma = \tilde{1}$. Если же $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ и для него найдется обратный элемент по умножению, обозначим его через γ и докажем, что $-\gamma$ — искомый. Действительно, $\alpha \cdot (-\gamma) = (-\alpha) \cdot \gamma = \tilde{1}$. ■

Следствие. Пусть $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D) \in R_1$, $\alpha, \beta \geq \tilde{0}$, $A_1 \subseteq A|_{\geq 0}$, $B_1 \subseteq B$, $C_1 \subseteq C|_{\geq 0}$, $D_1 \subseteq D$. Если A_1, B_1 и C_1, D_1 образуют пары правильно расположенных и близких множеств, то $A_1 \cdot C_1$ и $B_1 \cdot D_1$ также правильно расположены и близки, причем $\alpha \cdot \beta$ является единственным разделяющим их числом.

Доказательство. Правильная расположенность и близость $A_1 \cdot C_1$ и $B_1 \cdot D_1$ доказывается точно так же, как и при проверке корректности умножения на R_1 . Второе следствие теоремы 6.1 дает, что $\alpha \cdot \beta$ — единственное разделяющее их число. ■

Теорема 7.3. В $(R_1, +, \cdot)$ выполняется дистрибутивность, т.е. для любых $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$ следует, что $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

Доказательство. При проверке свойства дистрибутивности для произвольной тройки $\alpha = (A, B)$, $\beta = (C, D)$ и $\gamma = (E, F) \in R_1$ обозначим через $\gamma_1 = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$, $\gamma_2 = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ и докажем равенство γ_1 и γ_2 .

1-й случай: $\alpha, \beta, \gamma \geq \tilde{0}$. Дистрибутивность на $\mathbb{Q}$ сразу дает, что

$$X_1 = (A|_{\geq 0} + C|_{\geq 0}) \cdot E|_{\geq 0} \subseteq (A|_{\geq 0} \cdot E|_{\geq 0}) + (C|_{\geq 0} \cdot E|_{\geq 0}) = X_2,$$

$$Y_1 = (B + D) \cdot F \subseteq B \cdot F + D \cdot F = Y_2$$

(действительно, если взять произвольный элемент $(b + d) \cdot f \in Y_1$, то из дистрибутивности на $\mathbb{Q}$ следует $(b + d) \cdot f = b \cdot f + d \cdot f \in Y_2$). Элемент γ_1 разделяет X_1 и Y_1 , а γ_2 — множества X_2 и Y_2 , тогда второе следствие из теоремы 6.1 дает $\gamma_1 = \gamma_2$.

2-й случай: $\alpha, \beta \geq \tilde{0}$ и $\gamma \leq \tilde{0}$. Тогда определение умножения на отрицательный элемент из R_1 , установленная дистрибутивность для неотрицатель-



ных элементов R_1 и второе следствие теоремы 7.1 дают

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot \gamma &= -\left((\alpha + \beta) \cdot (-\gamma)\right) = -\left((\alpha) \cdot (-\gamma) + \beta \cdot (-\gamma)\right) = \\ &= -\left((\alpha) \cdot (-\gamma)\right) + \left(-\left(\beta \cdot (-\gamma)\right)\right) = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma. \end{aligned}$$

3-й случай: $\alpha, \gamma \geq \tilde{0}$, $\alpha + \beta > \tilde{0}$ и $\beta < \tilde{0}$. Учитывая, что $\alpha + \beta > \tilde{0}$, найдем такие $a_0 \in A$ и $c_0 \in C$, что $a_0 + c_0 \geq 0$. По третьему следствию теоремы 6.1, пары $A|_{\geq a_0}$, B и $C|_{\geq c_0}$, $D|_{\leq 0}$ являются правильно расположенными и близкими. Применяя первое следствие теоремы 7.1, приходим к тому, что $\alpha + \beta$ разделяет $A|_{\geq a_0} + C|_{\geq c_0}$ и $B + D|_{\leq 0}$. Теперь по следствию из предыдущей теоремы получим, что множества

$$X = \left(A|_{\geq a_0} + C|_{\geq c_0}\right) \cdot E|_{\geq 0} \quad \text{и} \quad Y = \left(B + D|_{\leq 0}\right) \cdot F$$

близкие и правильно расположенные, а γ_1 — единственный элемент, который их разделяет. Обозначим это утверждение через $(*)$.

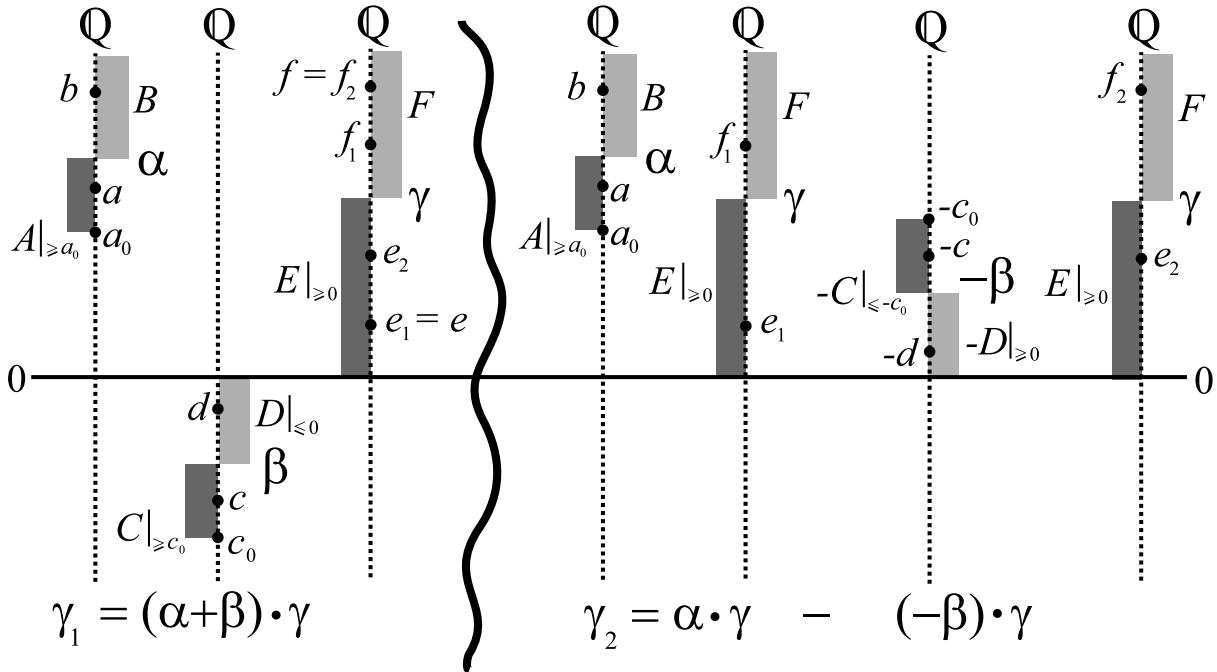


Рис. 1

Теперь выясним, что разделяет $\gamma_2 = \alpha \cdot \gamma + \left(-\left((-\beta) \cdot \gamma\right)\right)$. По следствию из предыдущей теоремы произведение $\alpha \cdot \gamma$ является единственным элементом R_1 , который разделяет $A|_{\geq a_0} \cdot E|_{\geq 0}$ и $B \cdot F$ (утверждение (а)).



Аналогично, произведение $(-\beta) \cdot \gamma$ — единственный элемент из R_1 , разделяющий $(-D)|_{\geq 0} \cdot E|_{\geq 0}$ и $(-C)|_{\leq -c_0} \cdot F$ (утверждение (б)). Для произвольного набора элементов $a \in A|_{\geq a_0}$, $b \in B$, $c \in C|_{\geq c_0}$, $d \in D|_{\leq 0}$, $e_1, e_2 \in E|_{\geq 0}$, $f_1, f_2 \in F$ (рис. 1) утверждения (а) и (б) дают:

$$\widetilde{ae_1} \leq \alpha \cdot \gamma \leq \widetilde{bf_1}, \quad (1)$$

$$-\widetilde{de_2} \leq (-\beta) \cdot \gamma \leq -\widetilde{cf_2} \quad \text{или} \quad \widetilde{cf_2} \leq \beta \cdot \gamma \leq \widetilde{de_2}. \quad (2)$$

По первому следствию теоремы 7.1 элемент γ_2 — единственный, который для произвольного такого набора удовлетворяет двойному неравенству:

$$\widetilde{ae_1} + \widetilde{cf_2} \leq \gamma_2 \leq \widetilde{bf_1} + \widetilde{de_2}. \quad (**)$$

Обозначим через $e = \max\{e_1, e_2\} \in E|_{\geq 0}$ и $f = \min\{f_1, f_2\} \in F$. Из $a \geq 0$ и $e_1 \leq e$ (используя свойство VI(a) порядка на $\mathbb{Q}$) получим $ae_1 \leq ae$, а из двух неравенств $d \leq 0$ и $e_2 \leq e$ получим (используя свойство VI(д) порядка на $\mathbb{Q}$), что $de \leq de_2$. Аналогично, из $e \leq f_2$ и $c \leq 0$ имеем $cf_2 \leq ce$, а также неравенства $e \leq f$ и $d \leq 0$ приводят к $df \leq de \leq de_2$. Совсем просто получается неравенство $bf \leq bf_1$. Отсюда

$$\widetilde{ae_1} + \widetilde{cf_2} \leq \widetilde{ae} + \widetilde{ce} \leq \gamma_1 \leq \widetilde{bf} + \widetilde{df} \leq \widetilde{bf_1} + \widetilde{de_2}. \quad (***)$$

Центральное двойное неравенство в $(***)$ обеспечивается утверждением $(*)$, дистрибутивностью на $\mathbb{Q}$ ($ae + ce = (a + c)e$) и простым замечанием, что для рациональных чисел верно $\widetilde{r + s} = \widetilde{r} + \widetilde{s}$ (подробнее — в следующей теореме). Таким образом, γ_1 также удовлетворяет $(**)$ и поэтому $\gamma_1 = \gamma_2$!

Все остальные случаи знаков α , β , $\alpha + \beta$ и γ сводятся к трем рассмотренным случаям, используя определения умножения на отрицательный элемент из R_1 и второе следствие теоремы 7.1. Дистрибутивность доказана. ■

Теорема 7.4. В R_1 существует изоморфная копия $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Доказательство. Напомним, что для любого $r \in \mathbb{Q}$ было определено сечение $\widetilde{r} = (A_r, B_r)$ множества рациональных чисел, которое имеет рубеж, причем $r = \max A_r$. Уже давно введенное множество $\widetilde{\mathbb{Q}} = \{\widetilde{r} : r \in \mathbb{Q}\}$ будет искомым. Биекция f определяется просто: $f(\widetilde{r}) = r$ для каждого $r \in \mathbb{Q}$. Все свойства биекции очевидны, осталось проверить, что f сохраняет результат сложения и умножения. Для начала выберем произвольные элементы $\widetilde{r} = (A_r, B_r)$, $\widetilde{s} = (A_s, B_s) \in \widetilde{\mathbb{Q}}$.



I. Сложение. Поскольку $r = \max A_r$ и $s = \max A_s$ для любых $a \in A_r$, $b \in B_r$, $c \in A_s$, $d \in B_s$ выполняются неравенства $a \leq r < b$ и $c \leq s < d$. Сложив их, приходим к $a + c \leq r + s < b + d$, откуда $r + s$ разделяет множества $A_r + A_s$ и $B_r + B_s$. Из корректности сложения на R_1 получаем, что $\widetilde{r + s} = \widetilde{r} + \widetilde{s}$, поэтому

$$f(\widetilde{r +_{R_1} s}) = f(\widetilde{r + s}) = r +_{\mathbb{Q}} s = f(\widetilde{r}) +_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{s}).$$

Сохранение сложения доказано, но обратим внимание на еще один факт. Поскольку $-r$ разделяет множества $-B_r$ и $-A_r$ и обратный по сложению в R_1 также должен разделять эти множества (и определен однозначно), выполняется

$$-_{R_1} \widetilde{r} = \widetilde{-r} \quad \text{или} \quad f(-_{R_1} \widetilde{r}) = -r = -_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{r}),$$

т.е. мы проверили, что биекция f сохраняет обратные по сложению.

II. Умножение. Начнем со случая $\widetilde{r}, \widetilde{s} \geq \widetilde{0}$, что равносильно $r, s \geq 0$. Для любых $a \in A_r|_{\geq 0}$, $b \in B_r$, $c \in A_s|_{\geq 0}$, $d \in B_s$ выполняются неравенства $0 \leq a \leq r < b$ и $0 \leq c \leq s < d$. Умножив их, приходим к двойному неравенству $a \cdot c \leq r \cdot s < b \cdot d$, откуда рациональное число $r \cdot s$ разделяет множества $(A_r|_{\geq 0}) \cdot (A_s|_{\geq 0})$ и $B_r \cdot B_s$. Из корректности умножения на R_1 получаем, что $\widetilde{r \cdot s} = \widetilde{r} \cdot \widetilde{s}$, поэтому

$$f(\widetilde{r \cdot_{R_1} s}) = f(\widetilde{r \cdot_{\mathbb{Q}} s}) = r \cdot_{\mathbb{Q}} s = f(\widetilde{r}) \cdot_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{s}).$$

Случаи одного или двух отрицательных множителей доказываются аналогично с использованием сохранения f обратных по сложению. Например, рассмотрим случай $\widetilde{r} \leq \widetilde{0}$ и $\widetilde{s} \geq \widetilde{0}$, тогда

$$\begin{aligned} f(\widetilde{r \cdot_{R_1} s}) &= f\left(-_{R_1}\left((-_{R_1} \widetilde{r}) \cdot \widetilde{s}\right)\right) = -_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{-r \cdot_{\mathbb{Q}} s}) = \\ &= -_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{-r \cdot_{\mathbb{Q}} s}) = -_{\mathbb{Q}}(-r \cdot_{\mathbb{Q}} s) = r \cdot_{\mathbb{Q}} s = f(\widetilde{r}) \cdot_{\mathbb{Q}} f(\widetilde{s}). \end{aligned}$$

■

Следствие. R_1 является множеством действительных чисел.

Доказательство. Следует из теоремы Дедекинда (теорема 5.5) и всех трех теорем этого параграфа.

■



1.8. Бесконечные десятичные дроби

В десятом классе при доказательстве теорем Кантора мы использовали представление действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Для обоснования этого изложим необходимый кусочек теории К. Вейерштрасса. Нам понадобятся множество десятичных цифр $C_0 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ и все натуральные степени десятки.

Определение. Для каждого натурального n число 10^n определяется следующим образом: $10^1 = 10$ и $10^{n+1} = 10^n \cdot 10$.

Определение. Пусть $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in C_0$ для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Конечной десятичной дробью (кдд) называется любое число вида:

- 1) $a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}$ при $a_0 \geq 0$,
- 2) $a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \dots - \frac{a_n}{10^n}$ при $a_0 < 0$,
- 3) $-0, a_1 a_2 \dots a_n = -\frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \dots - \frac{a_n}{10^n}$.

Множество всех кдд обозначается через $\mathbb{Q}_f$. Число перед запятой называется целой частью кдд, каждая из цифр после запятой — десятичными цифрами кдд.

Очевидно, что конечная десятичная дробь является рациональным числом со знаменателем 10^n для подходящего $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\mathbb{Q}_f \subseteq \mathbb{Q}$. Обратного включения нет, поскольку $1/3 \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_f$ (иначе $10 : 3$).

Определение. Пусть $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in C_0$ для $i \in \mathbb{N}$. Бесконечной десятичной дробью (бдд) $\tilde{\alpha}$ называется любое из следующих выражений $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ или $-0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, при условии, что нет периода из девяток, т.е. не существует такого $k \in \mathbb{N}$, что $a_n = 9$ для всех $n \geq k$. Множество всех бдд обозначается через $\tilde{\mathbb{R}}$. Число перед запятой называется целой частью бдд, каждая из цифр после запятой — десятичными цифрами бдд. Считаем по определению, что $0, 0 \dots 0 \dots = -0, 0 \dots 0 \dots$.

Определение. Пусть $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Считаем $\tilde{\alpha} \geq 0$, если ее целая часть $a_0 \geq 0$. Бдд $\tilde{\alpha} < 0$, если ее целая часть $a_0 < 0$ или $\tilde{\alpha} = -0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и при этом у $\tilde{\alpha}$ есть хотя бы одна ненулевая десятичная цифра.

Определение. Для бдд $\tilde{\alpha} = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ будем называть n -ым приближением по недостатку число $\sigma_n(\tilde{\alpha}) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ при $\tilde{\alpha} \geq 0$ и число $\sigma_n(\tilde{\alpha}) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n}$ при $\tilde{\alpha} < 0$. Для бдд $\tilde{\alpha} = -0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ будем называть n -ым приближением по недостатку число $\sigma_n(\tilde{\alpha}) = -0, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n}$.



Определение. Для бдд $\tilde{\alpha} = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ и всех $n \in \mathbb{N}$ будем называть n -ым приближением по избытку число $\Sigma_n(\tilde{\alpha}) = a_0, a_1a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ при $\tilde{\alpha} \geq 0$ и число $\Sigma_n(\tilde{\alpha}) = a_0, a_1a_2 \dots a_n$ при $\tilde{\alpha} < 0$. Для бдд $\tilde{\alpha} = -0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ будем называть n -ым приближением по избытку число $\Sigma_n(\tilde{\alpha}) = -0, a_1a_2 \dots a_n$.

Например, зная несколько десятичных цифр после запятой у представления числа π в виде бдд, можно получить, что

$$\sigma_4(\pi) = 3,1415, \quad \Sigma_4(\pi) = 3,1416, \quad \sigma_3(-\pi) = -3,142, \quad \Sigma_3(-\pi) = -3,141.$$

Сразу из определений следует, что для всех $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется, что $\sigma_n(\tilde{\alpha})$ и $\Sigma_n(\tilde{\alpha})$ являются кдд, поэтому всегда рациональны. О том, как упорядочены между собой различные приближения $\tilde{\alpha}$, поговорим в следующей лемме.

Лемма 8.1. Для любых $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$ и всех натуральных чисел $n, k \in \mathbb{N}$ из условия $n < k$ следует

$$\sigma_n(\tilde{\alpha}) \leq \sigma_k(\tilde{\alpha}) < \Sigma_k(\tilde{\alpha}) \leq \Sigma_n(\tilde{\alpha}).$$

Доказательство. Обозначим слева направо через (1), (2) и (3) неравенства, которые нужно проверить и рассмотрим два случая: $\tilde{\alpha} \geq 0$ и $\tilde{\alpha} < 0$.

1-й случай: $\tilde{\alpha} \geq 0$. Пусть $\tilde{\alpha} = a_0, a_1a_2 \dots a_n \dots$. При $n < k$ верно

$$\sigma_n(\tilde{\alpha}) = a_0, a_1a_2 \dots a_n \leq a_0, a_1a_2 \dots a_na_{n+1} \dots a_k = \sigma_k(\tilde{\alpha}),$$

поэтому неравенство (1) выполняется. Неравенство (2) очевидно, так как по определению $\Sigma_k(\tilde{\alpha}) - \sigma_k(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{10^k} > 0$. При доказательстве (3) воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned} \Sigma_k(\tilde{\alpha}) &= a_0, a_1a_2 \dots a_na_{n+1} \dots a_k + \frac{1}{10^k} \leq a_0, a_1a_2 \dots a_n \underbrace{9 \dots 9}_{k-n} + \frac{1}{10^k} = \\ &= a_0, a_1a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} = \Sigma_n(\tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

и неравенство (3) также проверено.

2-й случай: $\tilde{\alpha} < 0$. Доказательство аналогично предыдущему случаю. ■

Следствие. Для любого $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$ обозначим через $F_1(\tilde{\alpha}) = \{\sigma_n(\tilde{\alpha}) : n \in \mathbb{N}\}$ и $F_2(\tilde{\alpha}) = \{\Sigma_n(\tilde{\alpha}) : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $F_1(\tilde{\alpha})$ и $F_2(\tilde{\alpha})$ — правильно расположенные и близкие множества.



Доказательство. Правильная расположенность сразу следует из предыдущей леммы, проверим близость. Выберем произвольное $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$. По индукции легко доказывается, что $10^n > n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Из свойства Архимеда для $(\mathbb{Q}, \leq)$ (свойство VIII) следует существование такого $n \in \mathbb{N}$, что $n \cdot \varepsilon > 1$, откуда $10^n \cdot \varepsilon > 1$ или $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Из определения мы знаем, что $\Sigma_n(\tilde{\alpha}) - \sigma_n(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$, поэтому близость $F_1(\tilde{\alpha})$ и $F_2(\tilde{\alpha})$ также установлена. ■

Замечание 1. При доказательстве леммы и ее следствия мы не пользовались отсутствием периода из девяток, поэтому эти результаты справедливы в более общем случае.

Замечание 2. В предыдущем параграфе был установлен изоморфизм между $(\tilde{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$ и $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. Кроме операций этот изоморфизм сохраняет и отношение порядка. Всё это позволяет вместо сечения $\tilde{r}$ (с рубежом $r \in \mathbb{Q}$, который является максимальным элементом в нижнем классе сечения) рассматривать рациональное число r и вместо $\alpha = \tilde{r}$ или $\alpha > \tilde{r}$ записывать соответственно $\alpha = r$ или $\alpha > r$.

Теорема 8.2. *Существует биекция $f : R_1 \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$, причем для каждого $\alpha \in R_1$ ее образом будет такая бдд $\tilde{\alpha}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо: $\sigma_n(\tilde{\alpha}) \leq \alpha \leq \Sigma_n(\tilde{\alpha})$ (*) (другими словами, α является разделяющим числом для множеств $F_1(\tilde{\alpha})$ и $F_2(\tilde{\alpha})$).*

Доказательство. I. Построение f . Определим f в несколько этапов.

1-й случай: $\alpha \in \mathbb{Q}_f$, т.е. $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$. Положим по определению $f(\alpha) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n 00 \dots = \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Выполнение условия (*) очевидно.

2-й случай: $\alpha > 0$ и $\alpha \notin \mathbb{Q}_f$. Пусть $\alpha = (A, B)$ — сечение в $\mathbb{Q}$. Докажем по индукции следующее утверждение $T(n)$: «Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует и единственна такая конечная десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$, что $a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ ».

Б.И. Заметим, что во множестве A есть хотя бы одно целое число k_0 (значит, и счетное множество целых чисел). Действительно, $A \neq \emptyset$, поэтому существует $r_0 = p_0/q_0 \in A$, причем можно считать, что $q_0 \in \mathbb{N}$ (по теореме 4.1). Если $p_0 \geq 0$, то $0 \leq r_0$ и $k_0 = 0$ подходит. При $p_0 < 0$ умножив на него неравенство $\frac{1}{q_0} \leq 1$, получим $p_0 \leq \frac{p_0}{q_0} = r_0 \in A$, откуда $k_0 = p_0$ — исконое. Условие $B \neq \emptyset$ позволяет выбрать $s_0 \in B$, а свойство Архимеда для $\mathbb{Q}$ гарантирует существование такого натурального n_1 , что $k_0 + n_1 \geq s_0$,



поэтому целое число $k_0 + n_1 \in B$. Найдем $n^* = \min\{n \in \mathbb{N} : k_0 + n \in B\}$ и обозначим через $a_0 = k_0 + n^* - 1$. По выбору n^* выполняется $a_0 \in A$ и $a_0 + 1 \in B$, что дает $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ (неравенства строгие, поскольку $\alpha \notin \mathbb{Q}_f$). Единственность такого целого числа следует из очень простого факта: если $b_0 \in \mathbb{Z}$ и $b_0 \neq a_0$, то интервалы $(a_0; a_0 + 1)$ и $(b_0; b_0 + 1)$ не пересекаются (из линейности порядков на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$). Теперь разделим интервал $(a_0; a_0 + 1)$ на десять равных частей с помощью конечных десятичных дробей: $x_0 = a_0, 0$; $x_1 = a_0, 1$; $x_2 = a_0, 2$; $\dots$, $x_9 = a_0, 9$; $x_{10} = a_0 + 1$. Учитывая, что $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ и $\alpha \notin \mathbb{Q}_f$, найдется единственная такая цифра $a_1 \in C_0$, что $a_0, a_1 < \alpha < a_0, a_1 + \frac{1}{10}$ и база индукции доказана.

Ш.И. По предположению индукции найдется единственная такая кдд $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$, что $a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$. Повторим рассуждения базы индукции для интервала $(a_0, a_1 a_2 \dots a_n; a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n})$ (разделив его на десять равных частей) найдем единственную такую цифру $a_{n+1} \in C_0$, что $a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}}$. Шаг индукции доказан.

Теперь положим $f(\alpha) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \tilde{\alpha}$ и докажем, что $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Покажем, что периода из девяток при таком построении не возникнет. О/п: найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geq k$ выполняется $a_n = 9$. Положим $\beta = a_0, a_1 a_2 \dots a_k + \frac{1}{10^k}$. Тогда при всех $n \geq k$ верно:

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \beta = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n},$$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n < \alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$$

(в первом двойном неравенстве мы использовали простое равенство с превращением девяток $a_0, a_1 \dots a_k \underbrace{9 \dots 9}_{n-k} + \frac{1}{10^n} = a_0, a_1 \dots a_k + \frac{1}{10^k} = \beta$). В результа-

те, α и β разделяют близкие и правильно расположенные множества (см. первое замечание предыдущей леммы), поэтому $\alpha = \beta \in \mathbb{Q}_f$. $\bowtie$.

Выполнение условия (*) следует из нахождения десятичных цифр $\tilde{\alpha}$, т.е. утверждения $T(n)$.

3-й случай: $\alpha < 0$. Тогда $-\alpha > 0$ и из предыдущего случая уже определено $f(-\alpha) = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Положим $f(\alpha) = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$.

Важное условие (*) также выполняется, поскольку из двойного неравенства $a_0, a_1 a_2 \dots a_n < -\alpha < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$, после умножения на (-1) , следует $-a_0, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n} < \alpha < -a_0, a_1 a_2 \dots a_n$.



II. Соответствие f — биекция?

1) всюду определенность следует из построения f .

2) рассмотрим произвольное $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ и множества $F_1(\tilde{\alpha})$ и $F_2(\tilde{\alpha})$. Из предыдущей леммы и теоремы 6.1 следует существование и единственность такого $\alpha \in R_1$, которое разделяет $F_1(\tilde{\alpha})$ и $F_2(\tilde{\alpha})$. По определению f имеем $f(\alpha) = \tilde{\alpha}$ и сюръективность f проверена.

3) однозначность f следует из единственности определения десятичных цифр (утверждение $T(n)$), а также из однозначного определения обратного элемента по сложению в R_1 (третий случай предыдущего пункта доказательства).

4) предположив, что f не инъективно, найдем пару различных $\alpha, \beta \in R_1$, для которых $f(\alpha) = f(\beta) = \tilde{\gamma}$. Тогда α и β разделяют близкие и правильно расположенные множества $F_1(\tilde{\gamma})$ и $F_2(\tilde{\gamma})$ и поэтому совпадают. $\bowtie$.

Напомним, что периодическую дробь $\tilde{\alpha} = a_0, a_1 \dots a_k b_1 \dots b_m b_1 \dots b_m \dots$ с периодом $b_1 \dots b_m$ записывают так: $\tilde{\alpha} = a_0, a_1 \dots a_k (b_1 \dots b_m)$. Например, $7/3 = 2, (3)$.

На множестве $\tilde{\mathbb{R}}$ можно определить операции сложения, умножения и порядок, используя кдд для бдд $\tilde{\alpha}$. Но придется преодолеть несколько технических сложностей. Например, в этой теории должно выполняться равенство $0, (4) + 0, (5) = 1$. После корректного определения операций и порядка на $\tilde{\mathbb{R}}$ окажется, что построенная биекция в предыдущей теореме является изоморфизмом, сохраняющим операции и порядок (т.е. $(R_1, +, \cdot, \leq) \cong (\tilde{\mathbb{R}}, +, \cdot, \leq)$). Мы делать этого не будем, поскольку одна модель действительной прямой у нас уже построена. Тем временем мы дошли до предела.

Глава 2

Предел последовательности

2.1. Метрические пространства

Определение. Пусть X — произвольное множество. Метрикой (или функцией расстояния) на множестве X называется произвольное отображение $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее трем свойствам¹:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ для любых $(x, y) \in X \times X$, причем $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $(x, y) \in X \times X$ (симметричность);
- 3) для всех $x, y, z \in X$ выполняется $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (неравенство треугольника).

Множество X с функцией расстояния на нем называется *метрическим пространством* и кратко обозначается — МП. Рассмотрим несколько примеров метрических пространств.

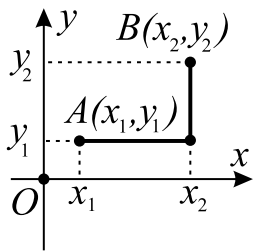


Рис. 2

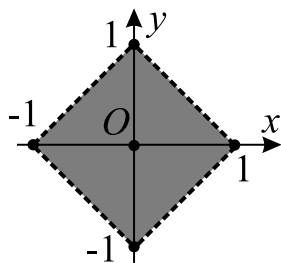


Рис. 3

Пример 1. На $\mathbb{R}$ рассмотрим функцию $d(x, y) = |y - x|$, определенную для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Выполнение условий (1) и (2) сразу следует из свойств модуля, проверим неравенство треугольника. Выберем произвольную тройку $x, y, z \in \mathbb{R}$ и рассмотрим три случая, сразу полагая (б.о.о.), что $x \leq y$. Если $z \in [x; y]$, то $|y - x| = y - x = y - z + z - x = |y - z| +$

$+|z - x|$ и (3) выполняется. При $z \leq x$ верно $|y - x| = y - x \leq y - z = |y - z|$ и (3) выполняется. И, наконец, при $z \geq y$ верно $|y - x| = y - x \leq z - x = |z - x|$ и неравенство треугольника выполняется.

Пример 2. На координатной плоскости $xOy = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ выберем две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Расстояние между ними

¹Договоримся вместо $d((x, y))$ писать $d(x, y)$.



зададим формулой $d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. На рис. 2 число $d(A, B)$ равно сумме длин двух выделенных отрезков. Свойства (1) и (2) определения очевидно выполняются, а выполнение (3) следует из предыдущего примера. Эта функция называется *расстоянием в мегаполисе* — движение в городе напрямую часто невозможно и приходится двигаться вдоль проложенных улиц (в примере — параллельно координатным осям). Неожиданно в этом метрическом пространстве выглядит множество всех точек, удаленных от начала координат на расстояние меньше 1. Это множество выделено темным цветом на рис. 3 (граница в это множество не входит и поэтому она изображена штриховой линией).

Пример 3. Для произвольного множества X определим на любой паре его элементов x и y функцию $d(x, y)$ двумя очень простыми правилами. Число $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Во всех остальных случаях $d(x, y) = 1$. Снова, свойства (1) и (2) определения метрики очевидно выполняются. Свойство (3) требует проверки только при $y \neq x$. Выберем произвольное $z \in X$, тогда $z \neq y$ или $z \neq x$ (напомним, что в математике «или» не исключает возможности выполнения обоих условий). Поэтому $d(x, z) + d(z, y) \geq 1 = d(x, y)$ и неравенство треугольника для данной функции доказано. Эта функция называется *дискретной метрикой*, а X с этой метрикой — *дискретным метрическим пространством*.

Далее исследуем классическую функцию на выполнение свойств (1)–(3), но прежде докажем *неравенство Коши²-Буняковского³-Шварца⁴*, название которого часто сокращают до *КБШ*. Знак умножения между действительными числами далее, где это удобно, будем опускать.

Теорема 1.1. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)}. \quad (*)$$

²Огюстен Луи Коши (1789–1857) — французский математик, написавший более 700 математических работ; заложил основы теории рядов, определителей, дифференциальных уравнений, создал теорию функций комплексного переменного; ввел понятие конечной группы; его имя внесено в список величайших ученых Франции, помещенный на первом этаже Эйфелевой башни.

³Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889) — русский математик, педагог, историк математики, вице-президент академии наук (1864–1889); внес значительный вклад в развитие теории чисел и теории вероятностей.

⁴Карл Герман Амантус Шварц (1843–1921) — немецкий математик, его основные работы посвящены математическому анализу и его приложениям к геометрии; доказал изопериметрическое свойство шара, а также возможность конформного отображения на круг любой выпуклой области и любой односвязной области; автор контрпримера в теории площади поверхности, который называется *сапогом Шварца*.



Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 = Ax^2 + 2Cx + B,$$

где $A = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $C = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ и $B = \sum_{i=1}^n b_i^2$. Рассмотрим два случая.

1-й случай: $A = 0$. Тогда $a_i = 0$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, поэтому (*) превращается в верное неравенство $0 \leq 0$.

2-й случай: $A \neq 0$. Тогда $A > 0$ и $f(x)$ — квадратичная функция, для которой $f(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Равносильное условие на дискриминант этой функции: $D \leq 0$ или $D/4 \leq 0$. Получим $D/4 = C^2 - AB \leq 0$, откуда $C^2 \leq AB$ или $|C| \leq \sqrt{AB}$ (**). При $C < 0$ неравенство (*) очевидно выполняется, а при $C \geq 0$ из (**) получим $C \leq \sqrt{AB}$, что дает (*). ■

Теорема 1.2. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n X_i$ (где $X_i = \mathbb{R}$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Выберем две произвольные точки $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ и определим функцию

$$d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Тогда функция d является метрикой на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Свойства (1) и (2) сразу следуют из определения d . Докажем (3). Для этого выберем произвольную точку $C(z_1, z_2, \dots, z_n)$ и проверим выполнение неравенства $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, т.е.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2}. \quad (\heartsuit)$$

Для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через $a_i = z_i - x_i$, $b_i = y_i - z_i$, тогда

$$a_i + b_i = y_i - x_i \text{ и нам необходимо доказать неравенство } \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \text{ Обе части этого неравенства неотрицательны, поэтому}$$



после возведения его в квадрат и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно по КБШ. ■

Замечание. Функция d из предыдущей теоремы называется *евклидовой метрикой* на $\mathbb{R}^n$. Далее, если специально не оговаривается, на $\mathbb{R}^n$ рассматривается именно эта функция расстояния.

Определение. Пусть (X, d) — МП и $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Для любой точки $x_0 \in X$ ее ε -окрестностью (соответственно ε -шаром) называется множество $O_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) < \varepsilon\}$ ($B_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq \varepsilon\}$). Проколотой ε -окрестностью точки x_0 называется множество $\check{O}_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Пример 4. На множествах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ (с евклидовыми метриками) для произвольной точки и произвольного $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ изобразим ε -окрестность, ε -шар и проколотую ε -окрестность. Для $\mathbb{R}$ неравенство $\sqrt{(x - x_0)^2} < \varepsilon$ равносильно $|x - x_0| < \varepsilon$ или двойному неравенству $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, поэтому искомые множества представлены на рис. 4. На $\mathbb{R}^2$ зафиксируем точку $A_0(x_0, y_0)$, и для произвольной точки $A(x, y)$ неравенство $d(A_0, A) < \varepsilon$ перепишем в виде $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ — это круг радиуса ε с центром в A_0 без ограничивающей его окружности (рис. 5). Рядом (рис. 6 и рис. 7 соответственно) представлены ε -шар и проколотая ε -окрестность точки A_0 .

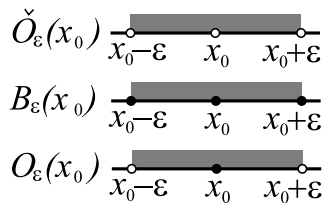


Рис. 4

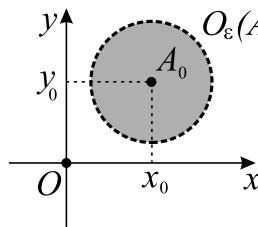


Рис. 5

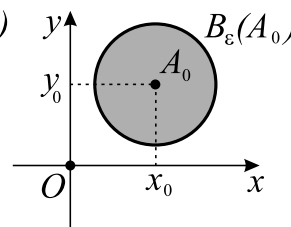


Рис. 6

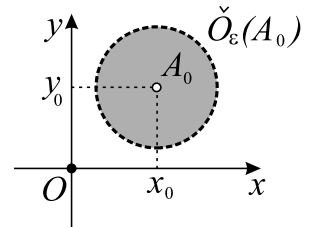


Рис. 7

Произвольная точка x метрического пространства (X, d) может быть по-разному расположена относительно множества $A \subseteq X$. Выделяют несколько типов точек. Обратите внимание на использование кванторов в следующих



определениях и на то, в каких случаях требуют включение $x \in A$, а в каких — нет.

I. Точка $x \in A$ называется *внутренней* точкой множества A , если существует такая $O_\varepsilon(x)$, что $O_\varepsilon(x) \subseteq A$. Через $\text{Int } A$ или $\overset{\circ}{A}$ обозначают множество всех внутренних точек множества A .

II. Точка $x \in X$ называется *граничной* точкой множества A , если для любой $O_\varepsilon(x)$ одновременно выполняются условия: $O_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ и $O_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Через $\text{Bnd } A$ обозначают множество всех граничных точек множества A .

III. Точка $x \in X$ называется *предельной* точкой множества A , если для любой $O_\varepsilon(x)$ выполняется $\check{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Через A' обозначают множество всех предельных точек множества A .

IV. Точка $x \in A$ называется *изолированной* точкой множества A , если существует такая $O_\varepsilon(x)$, что $\check{O}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Через $'A$ обозначают множество всех изолированных точек множества A .

V. Точка $x \in X$ называется *внешней* точкой множества A , если существует такая $O_\varepsilon(x)$, что $O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Через $\text{Ext } A$ обозначают множество всех внешних точек множества A .

Пример 5. Рассмотрим $\mathbb{R}$ и его подмножество $A = [0; 1) \cup \{2\}$. Тогда $\overset{\circ}{A} = (0; 1)$, $\text{Bnd } A = \{0, 1, 2\}$, $A' = [0; 1]$, $'A = \{2\}$, а множество его внешних точек равно $\text{Ext } A = (-\infty; 0) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$. Единственная изолированная точка этого множества, $x_0 = 2$, обладает окрестностью, например $O_{0,5}(2)$, для которой $\check{O}_{0,5}(2) \cap A = \emptyset$.

Определение. Пусть (X, d) — МП и $V \subseteq X$. Множество V называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней (т.е. $\overset{\circ}{V} = V$).

Семейство всех открытых множеств (оно называется *топологией* на X) обладает следующими свойствами.

Теорема 1.3. Пусть (X, d) — МП. Тогда

- 1) $\emptyset$ и X — открытые множества;
- 2) если V_i — открытое множество для каждого $i \in I$ (где I — произвольное множество индексов), то $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ — открытое множество;
- 3) если V_i — открытое множество для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $U = \bigcap_{i=1}^n V_i$ — открытое множество;



4) для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и каждого элемента $x \in X$, множество $O_\varepsilon(x)$ открыто.

Доказательство. 1) для $\emptyset$ определение формально выполняется, так как в нем нет ни одной точки, для которой не выполняется определение «быть внутренней». Для X также определение выполнено, так как даже любая окрестность каждой точки из X содержится в X .

2) для произвольного $x \in V$ найдем сначала индекс $i_0 \in I$, для которого $x \in V_{i_0}$. Поскольку V_{i_0} — открытое множество, найдется $O_\varepsilon(x)$, для которой $O_\varepsilon(x) \subseteq V_{i_0} \subseteq V$. Отсюда каждая точка множества V является его внутренней точкой, поэтому V открыто.

3) если $x \in U = \bigcap_{i=1}^n V_i$, то $x \in V_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Используя открытость V_i найдем $O_{\varepsilon_i}(x)$, для которой $O_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i$. Теперь определим $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$. Из неравенства $\varepsilon \leq \varepsilon_i$ следует, что $O_\varepsilon(x) \subseteq O_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, поэтому $O_\varepsilon(x) \subseteq U$. Мы проверили, что U — открытое множество.

4) выберем произвольную точку $y \in O_\varepsilon(x)$, тогда $\delta = \varepsilon - d(x, y) > 0$. Достаточно доказать, что $O_\delta(y) \subseteq O_\varepsilon(x)$ (тогда каждая точка из $O_\varepsilon(x)$ является внутренней точкой этого множества). Для любого $z \in O_\delta(y)$ по неравенству треугольника имеем:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \varepsilon - d(x, y) + d(y, x) = \varepsilon \Rightarrow z \in O_\varepsilon(x).$$

■

Антиподами открытых являются замкнутые множества.

Определение. Множество F в метрическом пространстве (X, d) называется замкнутым, если $V = X \setminus F$ — открытое множество.

Теорема 1.4. Пусть (X, d) — МП. Тогда

1) $\emptyset$ и X — замкнутые множества;
 2) если F_i — замкнутое множество для каждого $i \in I$ (где I — произвольное множество индексов), то $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ — замкнутое множество;

3) если F_i — замкнутое множество для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $K = \bigcup_{i=1}^n F_i$ — замкнутое множество.



Доказательство. 1) очевидно, так как $X \setminus \emptyset = X$ и $X \setminus X = \emptyset$ — открытые множества.

2) по доказанным в десятом классе законам де Моргана⁵ получим

$$X \setminus F = X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i \in I} V_i,$$

где V_i — открытые множества и по (2) предыдущей теоремы множество $X \setminus F$ открыто, а F — замкнутое множество.

3) снова применим законы де Моргана

$$X \setminus K = X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus F_i) = \bigcap_{i=1}^n V_i,$$

где V_i — открытые множества для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) и по (3) предыдущей теоремы множество $X \setminus K$ открыто, а K — замкнутое множество. ■

Определение. Пусть $A \subseteq X$, где (X, d) — МП. Замыканием множества A называется $[A] = A \cup A'$.

Теорема 1.5. Для любого $A \subseteq X$ верно, что $[A]$ — замкнутое множество.

Доказательство. Пусть $F = A \cup A'$ и докажем, что $V = X \setminus F$ открыто. Выберем произвольную точку $x \in V$, тогда $x \notin A'$, поэтому найдется такая $O_\varepsilon(x)$, что $\check{O}_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Учитывая, что $x \notin A$, получим более сильное утверждение: $O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Вспомним, что $O_\varepsilon(x)$ — открытое множество, поэтому для любой точки $y \in O_\varepsilon(x)$ найдется такая окрестность $O_\delta(y)$, что $O_\delta(y) \subseteq O_\varepsilon(x)$, откуда $O_\delta(y) \cap A = \emptyset$. Поэтому $y \notin A \cup A'$ и $y \in V = X \setminus F$. Мы доказали, что $O_\varepsilon(x) \subseteq V$, что дает открытость V и замкнутость F . ■

Следствие. Пусть $A \subseteq X$, где (X, d) — МП. Тогда множество A замкнуто $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть A — замкнутое множество, тогда для каждой точки $x \in X \setminus A$ найдется такая окрестность $O_\varepsilon(x)$, что $O_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$, т.е. $O_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$ и $x \notin A'$. Откуда $A' \subseteq A$.

⁵Огастес де Морган (1806–1871) — шотландский математик и логик, его работы посвящены основаниям алгебры, арифметике, математическому анализу, теории вероятностей и логике; один из основоположников формальной алгебры; основатель Лондонского математического общества и его первый президент (с 1866).



$\Leftrightarrow$) если $A' \subseteq A$, то $A \cup A' = A$ и по предыдущей теореме A — замкнутое множество. ■

Упражнения

1. Обобщите законы де Моргана ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ и $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$) с двух множеств на их произвольное количество.
2. Докажите, что $\text{Int } A$ и $\text{Ext } A$ — открытые множества для любого $A \subseteq X$, где (X, d) — МП.
3. Покажите, что $[A] = A \cup \text{Bnd } A$ для любого $A \subseteq X$, где (X, d) — МП.
4. Покажите, что $[A] = \text{Int } A \cup \text{Bnd } A$ для любого $A \subseteq X$, где (X, d) — МП.
5. Покажите, что $[A] = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ — замкнутое множество и } A \subseteq F\}$ для любого $A \subseteq X$, где (X, d) — МП.
6. Напомним, что $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ называется степенью множества X или множеством всех его подмножеств. Отображение $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, действующее по правилу $f(A) = [A]$ называется *оператором замыкания Куратовского*⁶. Докажите или опровергните (т.е. постройте контрпример) следующие включения и равенства (для любого $A \subseteq X$, где (X, d) — МП): $A \subseteq [A]$; $[A \cup B] = [A] \cup [B]$; $[A \cap B] = [A] \cap [B]$; $[[A]] = [A]$.

2.2. Предел последовательности

В этом параграфе будем рассматривать произвольное метрическое пространство X с метрикой d на нем.

Определение. Последовательностью во множестве X называется произвольное отображение $f : \mathbb{N} \rightarrow X$, при этом $x_n = f(n)$ называется n -ым членом этой последовательности. Последовательность обозначается любым из следующих способов: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{x_n\}$.

Определение. Окрестностью точки $a \in X$ называется $O(a)$ — произвольное открытое множество, которое содержит эту точку.

Так, например, $O_\varepsilon(a)$ — окрестность точки a для любого положительного числа $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Следующее определение — центральное в этом параграфе, в нем для привлечения внимания специально выделены кванторы.

⁶Казимеж Куратовский (1896–1980) — польский математик, основные его работы относятся к топологии, теории графов, теории множеств и теории функций действительного переменного; основатель польской топологической школы; президент Польского математического общества (1946–1953).



Определение. Пусть $a \in X$ и $\{x_n\}$ — последовательность в X . Элемент a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой $O(a)$ существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n > N$ выполняется $x_n \in O(a)$. При этом пишут $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и говорят, что $\{x_n\}$ сходится к a . Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если у нее есть предел.

Номер N в определении зависит от окрестности $O(a)$ и обычно чем меньше окрестность, тем больший номер приходится выбирать. Прежде, чем мы рассмотрим несколько примеров, докажем одно простое и полезное утверждение, которое позволит в дальнейшем вместо $O(a)$ рассматривать только очень простые окрестности — $O_\varepsilon(a)$.

Теорема 2.1. Пусть $a \in X$ и $\{x_n\} \subseteq X$. Тогда

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \left(\forall O_\varepsilon(a) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a) \right).$$

Доказательство. $\Rightarrow$) очевидно, поскольку $O_\varepsilon(a)$ — открытое множество и $a \in O_\varepsilon(a)$.

$\Leftarrow$) из определения открытого множества для $O(a)$ найдем такую окрестность $O_\varepsilon(a)$, что $O_\varepsilon(a) \subseteq O(a)$. Для $O_\varepsilon(a)$ по условию найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n > N$ выполняется включение $x_n \in O_\varepsilon(a) \subseteq O(a)$. Таким образом, номер N для $O(a)$ также является искомым и определение предела мы проверили. ■

Пример 1. Пусть $p \in \mathbb{R}$. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} = 0$. Для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдем такое натуральное число N , которое удовлетворяет неравенству $N > \frac{|p|}{\varepsilon}$ (например, в качестве N можно взять $\left[\frac{|p|}{\varepsilon} \right] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, т.е. наибольшее целое, не превосходящее x ; существование $[x]$ доказано в теореме 8.2). Тогда для любого $n > N$ выполняется $n > \frac{|p|}{\varepsilon}$ или $\frac{|p|}{n} < \varepsilon$. Последнее неравенство можно переписать в виде $\left| \frac{p}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ и, по предыдущей теореме, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} = 0$.

Пример 2. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $a \geq 1$. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. При $a = 1$ это утверждение очевидно, далее считаем, что $a > 1$. Вспомним, что одним из первых применений метода математической индукции было доказательство неравенства Бернулли⁷: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$, $b > -1$

⁷Якоб Бернулли (1655–1705) — швейцарский математик, профессор Базельского университета (с 1687),



выполняется $(1 + b)^n \geq 1 + nb$. Пусть $c = 1 + b$, тогда для всех $c > 0$ получим $c^n \geq 1 + n(c - 1)$. Подставим теперь в это неравенство $c = \sqrt[n]{a}$ и придем при $a > 1$ к

$$a \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a - 1}{n}. \quad (*)$$

В предыдущем примере мы установили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - 1}{n} = 0$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что при всех натуральных $n > N$ выполнено $|\frac{a-1}{n}| < \varepsilon$ или $-\varepsilon < \frac{a-1}{n} < \varepsilon$. Тогда из (*) получим, что при всех натуральных $n > N$ выполнено

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a - 1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \in O_\varepsilon(1).$$

Снова, используя результат предыдущей теоремы, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

В метрическом пространстве если последовательность сходится, то предел определяется однозначно.

Теорема 2.2. Пусть $a, b \in X$, $\{x_n\} \subseteq X$. Если одновременно выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, то $a = b$.

Доказательство. О/п: $a \neq b$, тогда $\varepsilon = d(a, b)/2 > 0$. Докажем, что $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. Иначе нашлась бы точка $x \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b)$, которая по неравенству треугольника привела бы нас к противоречимому условию $2\varepsilon = d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Теперь дважды воспользуемся определением предела:

$$\text{для } O_\varepsilon(a) \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a), \quad (*)$$

$$\text{для } O_\varepsilon(b) \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(b). \quad (**)$$

Выберем хотя бы одно $n > \max\{N_1, N_2\}$, тогда из (*) и (**) получим $x_n \in O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b)$, что противоречит доказанному $O_\varepsilon(a) \cap O_\varepsilon(b) = \emptyset$. ■

Заметим, что предыдущая теорема не утверждает, что у любой последовательности существует и единственный предел (а всего лишь: «если у последовательности есть предел, то он один»). Есть много примеров расходящихся последовательностей (т.е. тех, у которых предела не существует).

его работы посвящены математическому анализу, механике и теории вероятностей; ввел термин «интеграл»; доказал расходимость гармонического ряда.



Пример 3. Докажем, что последовательность $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, которая задается формулой $x_n = (-1)^n$ не имеет предела. О/п: есть такое $a \in \mathbb{R}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. При $a \neq \pm 1$ возьмем в качестве $\varepsilon = \min\{|a - 1|, |a + 1|\} > 0$. Тогда $x_n \notin O_\varepsilon(a)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$. При $a = 1$ (соответственно $a = -1$) в $O_1(a)$ не попадают все члены x_n с нечетными (четными) номерами. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$. В результате, ни одно число из $\mathbb{R}$ не может быть пределом $\{x_n\}$.

Определение. Пусть $A \subseteq X$. Множество A называется *ограниченным*, если найдется хотя бы одна точка $x_0 \in X$ и хотя бы одна ее окрестность $O_\varepsilon(x_0)$, для которой $A \subseteq O_\varepsilon(x_0)$.

Следующая теорема дает *необходимое условие существования предела* у последовательности.

Теорема 2.3. Пусть $\{x_n\} \subseteq X$. Если $\{x_n\}$ сходится, то $\{x_n\}$ — ограниченное множество.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и докажем, что в качестве x_0 можно взять a . Сначала для $O_1(a)$ найдем по определению предела такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in O_1(a)$. Это означает, что вне $O_1(a)$ может находиться только конечное число членов $\{x_n\}$. Теперь определим в качестве $\varepsilon_0 = \max_{i=1}^n \{1, d(a, x_i)\} + 1$. Тогда $d(a, x_j) < \varepsilon_0$ уже при всех $j \in \mathbb{N}$, поэтому $\{x_n\} \subseteq O_{\varepsilon_0}(a)$ и $\{x_n\}$ — ограниченное множество. ■

Последовательность, которая задается формулой $x_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$), не является ограниченным множеством, поэтому не имеет предела. Заметим также, что условие предыдущей теоремы не является достаточным, поскольку последовательность из третьего примера ограничена и расходится.

2.3. Лемма Вейерштрасса. Число Эйлера

До конца этой главы в качестве основного объекта будем рассматривать $(\mathbb{R}, d)$ — МП, наделенное евклидовой метрикой $d(x, y) = |y - x|$. В этом пространстве ε -окрестность произвольной точки (или числа) $a \in \mathbb{R}$ имеет очень простой вид: $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Перепишем общее определение предела для данного МП.

Определение. Пусть $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \mathbb{R}$. Число a является *пределом*



последовательности $\{x_n\}$ (как обычно, записываем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Определение. Пусть $F \subseteq \mathbb{R}$. Множество F ограничено сверху (соответственно снизу), если найдется $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$), что при всех $x \in F$ выполняется $x \leq M$ ($x \geq m$). При этом число M (соответственно m) называется верхней (нижней) границей множества F . Множество F называется ограниченным, если оно одновременно ограничено сверху и снизу.

В предыдущем параграфе уже были введены ограниченные множества в произвольном МП. Только что введенное понятие ограниченности в $\mathbb{R}$ совпадает с общим понятием. Действительно, если $F \subseteq O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, то в качестве границ можно выбрать числа $m = x_0 - \varepsilon$ и $M = x_0 + \varepsilon$. Наоборот, если $F \subseteq [m; M]$, то $F \subseteq O_\varepsilon(m)$, где в качестве ε можно взять, например, $\varepsilon = |M - m| + 1$.

Заметим, что из существования одной верхней (или нижней) границы множества F сразу следует существование бесконечного числа таких границ. Действительно, если M — верхняя граница F , то $M + p$, при $p \geq 0$, также будет верхней границей этого множества.

Определение. Пусть $F \subseteq \mathbb{R}$ и $F \neq \emptyset$. Если F ограничено сверху, то супремумом⁸ этого множества называется наименьшая из его верхних границ (обозначение: $\sup F$). Для ограниченного снизу множества F его инфимумом⁹ называется наибольшая из его нижних границ (обозначение: $\inf F$).

Пример 1. Для полуинтервала $F = [-1; 2)$ выполнено: $\inf F = -1 = \min F$ и $\sup F = 2$. Обратите внимание, что максимума в F нет, поскольку максимум должен по определению лежать в этом множестве.

Теорема 3.1. Пусть $F \subseteq \mathbb{R}$ и $F \neq \emptyset$. Если F ограничено сверху (соответственно снизу), то существует единственное такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\alpha = \sup F$ ($\alpha = \inf F$).

Доказательство. 1-й случай: F ограничено сверху.

I. Существование. Обозначим через $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall a \in F \Rightarrow a \leq y\}$ — множество верхних границ для F . Пусть также $X = \mathbb{R} \setminus Y$. Докажем, что пара (X, Y) является сечением в $\mathbb{R}$.

1) сразу из определения X и Y следует, что $X \cup Y = \mathbb{R}$.

⁸От латинского *supremum* — самый высокий.

⁹От латинского *infimum* — самый низкий.



2) $Y \neq \emptyset$, поскольку у F есть хотя бы одна верхняя граница. Из $F \neq \emptyset$ найдем $a_0 \in F$ и заметим, что $a_0 - 1 < a_0$, поэтому $a_0 - 1 \notin Y \Rightarrow a_0 - 1 \in X$. Мы проверили, что $X \neq \emptyset$.

3) выберем произвольные $x \in X$ и $y \in Y$. Поскольку число x не является верхней границей F , найдется такой элемент $a^* \in F$, что $x < a^*$. Но из определения Y следует, что $a^* \leq y$, отсюда (по транзитивности порядка) следует, что $x < y$.

Итак, (X, Y) — сечение в $\mathbb{R}$ и по теореме Дедекинда (теорема 5.5 первой главы) оно имеет рубеж α . Если $\alpha = \min Y$, то сразу из определения следует, что $\alpha = \sup F$. Осталось доказать, что $\alpha \notin X$. О/п: $\alpha \in X$, т.е. $\alpha = \max X$. Тогда $\alpha \notin Y$, поэтому α не является верхней границей F , что позволяет найти такое число $a_1 \in F$, что $\alpha < a_1$. Найдем такое $r \in \mathbb{Q}$, что $\alpha < \tilde{r} < a_1$. Условие $\max X = \alpha < \tilde{r}$ дает $\tilde{r} \in Y$, но $\tilde{r} < a_1$ противоречит тому, что $\tilde{r} \in Y$. ∇ .

II. Единственность. О/п: нашлось $\beta \in \mathbb{R}$, что $\beta = \sup F$ и $\alpha \neq \beta$. Из линейности порядка на $\mathbb{R}$ получим $\alpha < \beta$ или $\beta < \alpha$. Из $\alpha < \beta$ и α — верхняя граница F следует, что $\beta \neq \sup F$. Из $\beta < \alpha$ и β — верхняя граница F следует, что $\alpha \neq \sup F$. ∇ .

2-й случай: F ограничено снизу. Аналогично доказательству первого случая. ■

Числа $\sup F$ и $\inf F$ (если они существуют) называются *точными границами* множества F . В следующей лемме отметим их важное свойство.

Лемма 3.2. 1) пусть $\alpha = \sup F$. Тогда для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется такой элемент $a_1 \in F$, что $\alpha - \varepsilon < a_1 \leq \alpha$.

2) пусть $\beta = \inf F$. Тогда для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ найдется такой элемент $a_2 \in F$, что $\beta \leq a_2 < \beta + \varepsilon$.

Доказательство. 1) при $\varepsilon > 0$ выполняется $\alpha - \varepsilon < \alpha = \sup F$, поэтому $\alpha - \varepsilon$ не является верхней границей множества F , поэтому найдется хотя бы один элемент $a_1 \in F$, для которого $\alpha - \varepsilon < a_1$. Неравенство $a_1 \leq \alpha$ очевидно.

2) доказывается аналогично (1). ■

Определение. Пусть $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*, *убывающей*, *строго убывающей*), если при любых $n \in \mathbb{N}$ выполняется $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$,



$x_n \geq x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$). Соответствующие обозначения: $\{x_n\} \nearrow$, $\{x_n\} \nearrow\nearrow$, $\{x_n\} \searrow$, $\{x_n\} \searrow\searrow$. Если $\{x_n\} \nearrow$ или $\{x_n\} \searrow$, то $\{x_n\}$ называется *монотонной последовательностью*. Если $\{x_n\} \nearrow\nearrow$ или $\{x_n\} \searrow\searrow$, то $\{x_n\}$ называется *строго монотонной последовательностью*.

Следующее утверждение, очень популярное в математическом анализе и являющееся достаточным условием существования предела, называется *леммой Вейерштрасса*.

Лемма 3.3. Пусть $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Если последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, то она сходится. Более того, если $\{x_n\} \nearrow$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n\}$; если же $\{x_n\} \searrow$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $\{x_n\} \nearrow$ (для $\{x_n\} \searrow$ доказательство аналогично). По теореме 3.1 найдем $\alpha = \sup F$ и докажем по определению предела, что $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Для произвольного положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ по предыдущей лемме найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, что верно двойное неравенство $\alpha - \varepsilon < x_N \leq \alpha$. Учитывая $\{x_n\} \nearrow$, для любых $n > N$ будет выполняться условие

$$\alpha - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \alpha \Rightarrow x_n \in (\alpha - \varepsilon; \alpha + \varepsilon) = O_\varepsilon(\alpha),$$

и мы доказали, что $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. ■

Заметим, что в лемме Вейерштрасса при $\{x_n\} \nearrow$ достаточно потребовать, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была ограничена только сверху, поскольку, благодаря своему возрастанию, она ограничена снизу x_1 . Аналогично для $\{x_n\} \searrow$ можно требовать только ограниченность снизу.

Напомним, что для любого натурального n определен *факториал* этого числа: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. По определению, $0! = 1$. Кроме того, *геометрической прогрессией* с первым членом $b \in \mathbb{R}$ и знаменателем $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ называется рекуррентно заданная последовательность $\{b_n\}$, для которой $b_1 = b$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Явная формула для $\{b_n\}$ легко выводится по индукции — $b_{n+1} = b_1 \cdot q^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Для любой последовательности чисел $\{x_n\}$ определена сумма первых ее n членов $n \in \mathbb{N}$ формулой

$$S_n = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Лемма 3.4. 1) для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $2^{k-1} \leq k!$;



2) пусть $q \in (0; 1)$, тогда для любого $b_1 > 0$ выполняется неравенство

$$S_n = b_1 + b_1 q + \dots + b_1 q^{n-1} < \frac{b_1}{1 - q}.$$

Доказательство. 1) докажем индукцией по $k \in \mathbb{N}$. База индукции очевидна, поскольку $1 \leq 1$.

Ш.И. Предположим, что $2^{k-1} \leq k!$. Тогда $2^k \leq 2k! \leq (k+1) \cdot k! = (k+1)!$ и шаг доказан.

2) рассмотрим разность $S_n - q \cdot S_n$. После сокращения многих слагаемых, имеем $S_n - q \cdot S_n = b_1 - b_1 q^n$. По условию $1 - q \neq 0$, поэтому

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} < \frac{b_1}{1 - q}.$$

В последнем переходе мы использовали $0 < q^n < 1$ или $0 < 1 - q^n < 1$. ■

Теорема 3.5. Пусть $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Доказательство. По лемме Вейерштрасса достаточно проверить монотонность и ограниченность $\{x_n\}$.

I. Монотонность. Докажем, что $\{x_n\} \nearrow$. Подстановкой легко проверяется, что $x_1 = 2 < 9/4 = x_2$. Далее считаем, что $n \geq 2$. Воспользуемся

формулой бинома Ньютона (т.е. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ при $n \in \mathbb{N}$) и

формулой для биномиальных коэффициентов $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Получим

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)! \cdot n^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k! \cdot n^k} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!}. \end{aligned} \quad (*)$$



Точно также преобразуем x_{n+1} :

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}{k!}.$$

Поскольку при всех $n \in \mathbb{N}$ верно $0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, каждое слагаемое, начиная с третьего, у x_{n+1} больше соответствующего слагаемого у x_n . Кроме того, у x_{n+1} на одно положительное слагаемое больше. Отсюда $x_n < x_{n+1}$ при $n \geq 2$ и $\{x_n\} \nearrow$.

II. Ограниченность. Очевидно, что x_1 и x_2 меньше трех. Далее в представлении (*) заменим числитель каждой дроби на единицу и получим ограничение сверху для x_n , а в последних двух переходах используем оба пункта предыдущей леммы. При $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Из I, II и леммы Вейерштрасса следует, что $\{x_n\}$ сходится. ■

Определение. Число $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется числом Эйлера¹⁰.

Замечание. Число Эйлера иррационально, поэтому представляется бесконечной непериодической дробью, начало которой выглядит так

$$e = 2,7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995 \dots$$

2.4. Арифметические операции с пределами последовательностей

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой (или БМП), если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

¹⁰Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский, немецкий и русский математик, считается одним из величайших математиков в истории, автор более 850 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, оптике, баллистике, теории музыки; родоначальник теории графов; почти полжизни провел в России, хорошо знал русский язык и часть учебников публиковал на русском; первые русские академики-математики были учениками Эйлера.



Ранее было доказано, что для любого $p \in \mathbb{R}$ последовательность $\{p/n\}$ является БМП. Далее обсудим как определяются арифметические операции на последовательностях. Некоторые помнят, что для нахождения суммы двух подмножеств рациональных чисел рассматривают всевозможные попарные суммы их элементов. Совсем по-другому складывают последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Они являются функциями, поэтому складываются только элементы с одинаковыми номерами, т.е. $z(n) = z_n = x_n + y_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Аналогично и с другими арифметическими операциями.

Определение. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$. Тогда

1) суммой $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{x_n + y_n\}$ (которая обозначается через $\{x_n\} + \{y_n\}$);

2) произведением $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ (которая обозначается через $\{x_n\} \cdot \{y_n\}$);

3) если $y_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то частным $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ (которая обозначается через $\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$);

4) произведением $\{x_n\}$ на константу M называется последовательность $\{M \cdot x_n\}$ (которая обозначается через $M \cdot \{x_n\}$).

Выясним, как ведут себя БМП относительно арифметических операций.

Теорема 4.1. 1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — БМП, то $\{x_n + y_n\}$ также является БМП.

2) если $\{x_n\}$ — БМП, то для любого числа $M \in \mathbb{R}$ последовательность $\{M \cdot x_n\}$ также является БМП.

3) если $\{x_n\}$ — БМП, а $\{y_n\}$ — ограниченная последовательность, то $\{x_n \cdot y_n\}$ также является БМП.

4) если $\{x_n\}$ — БМП, а у $\{y_n\}$ есть предел, то $\{x_n \cdot y_n\}$ также является БМП.

Доказательство. 1) распишем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ по определению:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (**)$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда для любого натурального $n > N$ с помощью (*) и (**) получим $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$.



2) если $M = 0$, то последовательность $\{M \cdot x_n\}$ состоит только из нулей и очевидно выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot x_n) = 0$. Пусть теперь $M \neq 0$, тогда расписав определение предела для $\varepsilon_1 = \varepsilon/|M| > 0$, найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех номерах $n > N$ выполнено $|x_n| < \varepsilon/|M|$, поэтому $|M \cdot x_n| = |M| \cdot |x_n| < \varepsilon$ и мы проверили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot x_n) = 0$.

3) ограниченность $\{y_n\}$ позволит найти такую константу $M > 0$, что двойное неравенство $-M \leq y_n \leq M$ выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$. Снова распишем определение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и для $\varepsilon_1 = \varepsilon/M > 0$ найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех номерах $n > N$ выполнено $|x_n| < \varepsilon/M$, поэтому $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \varepsilon$ и мы проверили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$.

4) следует из (3), поскольку из существования предела у $\{y_n\}$ следует (по теореме 2.3) ограниченность этой последовательности. ■

Связь сходящихся последовательностей с БМП выражена в следующем утверждении.

Лемма 4.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n - a\} \text{ — БМП.}$

Доказательство. По определению предела имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \right) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0.$$

■

Теорема 4.3. Пусть $M \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot x_n) = M \cdot a$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

4) если $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$;

5) если $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. 1) по предыдущей лемме обе последовательности $\{x_n - a\}$, $\{y_n - b\}$ — БМП, тогда по теореме 4.1 также БМП будет суммарная последовательность $\{x_n + y_n - (a + b)\}$. Снова применив предыдущую лемму, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$.



2) последовательно применив предыдущую лемму и теорему 4.1, получим, что $\{x_n - a\}$, $\{M \cdot (x_n - a)\}$ — БМП. Откуда $\{M \cdot x_n - M \cdot a\}$ — БМП и по предыдущей лемме $\lim_{n \rightarrow \infty} (M \cdot x_n) = M \cdot a$.

3) представим разность $x_n y_n - ab$ в виде

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - a y_n + a y_n - ab = y_n(x_n - a) + a(y_n - b).$$

Заметим, что последовательность $\{y_n(x_n - a)\}$ является произведением сходящейся последовательности $\{y_n\}$ на БМП и по теореме 4.1 является БМП. Последовательность $\{a(y_n - b)\}$ является произведением константы на БМП и по теореме 4.1 является БМП. Таким образом, последовательность $x_n y_n - ab$ мы представили в виде суммы двух БМП, поэтому она также является БМП. Теперь в очередной раз осталось применить предыдущую лемму и получить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

4) поскольку $b \neq 0$, выполняется $|b| > 0$ и поэтому существует (по лемме 5.4 из предыдущей главы) такое число $r \in \mathbb{Q}$, что $0 < r < |b|$. Заметим, что $O(b) = (-\infty; -r) \cup (r; \infty)$ — открытое множество и $b \in O(b)$, поэтому $O(b)$ — окрестность b . Расписав определение $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ для этой окрестности, найдем такой номер $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_1$ выполняется $y_n \in O(b)$, т.е. $|y_n| > r$ (*). Теперь выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и для $\varepsilon_1 = \varepsilon \cdot r^2 > 0$ снова распишем определение $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и найдем такой номер $N_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_2$ выполняется $|y_n - b| < \varepsilon \cdot r^2$ (**). В результате, выбрав для произвольного $\varepsilon > 0$ номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, для произвольного $n > N$ из (*) и (**) получим

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{|y_n - b|}{r \cdot r} < \frac{\varepsilon \cdot r^2}{r^2} = \varepsilon.$$

Мы проверили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

5) следует из (3) и (4). ■

Предыдущая теорема позволяет переходить к пределу в двух, трех, ..., в k слагаемых. Важно, чтобы число k было изначально фиксировано и не зависело от n . Например, теорема не разрешает перейти к пределу в сумме $\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ слагаемых}}$, поскольку количество слагаемых не фиксировано, а растет с увеличением n . Если не прислушаться к этому дружескому совету,



то после формального перехода к пределу можно получить противоречивое $1 = 0$. Рассмотрим несколько примеров правильного использования предыдущих теорем.

Пример 1. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{250n - n^2 + 7}{2n^2 + 15n + 3}$. Сразу перейти к пределу в числителе и знаменателе не получится, поскольку конечных пределов там нет и свойство (5) предыдущей теоремы применять нельзя (оно работает только при $a, b \in \mathbb{R}$, причем $b \neq 0$). Эта ситуация называется неопределенностью типа $(-\infty) : \infty$ и требует дополнительных действий. Обычно достаточно числитель и знаменатель разделить на максимальную степень, вызывающую эту неопределенность, в данном случае — на n^2 , тогда получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{250n - n^2 + 7}{2n^2 + 15n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{250}{n} - 1 + \frac{7}{n^2}}{2 + \frac{15}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{250}{n} - 1 + \frac{7}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{15}{n} + \frac{3}{n^2})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{250}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} = \frac{0 - 1 + 0}{2 + 0 + 0} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$. Попытка воспользоваться (1) предыдущей теоремы при переходе к пределу в каждом слагаемом опять приведет к неопределенности, теперь правда другого типа: $\infty - \infty$. Избавиться от неопределенности в данном случае поможет умножение и деление на сопряженное и получение уже знакомой нам неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - n) \cdot (\sqrt{n^2 + 4n} + n)}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Внешне очевидное равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(n)} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)}$ (при условии существования конечного $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$) следует из непрерывности степенной функции с рациональным показателем (см. восьмой параграф третьей главы).

Пример 3. Ранее было доказано, что при $a \geq 1$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Покажем, что при $a \in (0; 1)$ это также выполняется. Очевидно, что $1/a > 1$ и по (4) предыдущей теоремы можно получить

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$



Пример 4. Докажем, что при $q \in (0; 1)$ выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Пусть $x_n = q^n$ и $y_n = q^{n+1}$. Легко заметить, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничена снизу нулем. Применяя лемму Вейерштрасса, получим существование числа $a \in \mathbb{R}$, для которого $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Поскольку $y_n = x_{n+1}$, у последовательности $\{y_n\}$ точно такой же предел (действительно, найденный по определению предела $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для $\varepsilon > 0$ номер N также подойдет и для последовательности $\{y_n\}$). Отсюда

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q \cdot x_n = q \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q \cdot a.$$

Из равенства $a = q \cdot a$ при $q \in (0; 1)$ получим $a = 0$.

Пример 5. Покажем, что если $q \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Случай $q \in (0; 1)$ разобран выше, случай $q = 0$ очевиден, остается разобраться с $q \in (-1; 0)$. Для всех $q \in (-1; 0)$ справедливо представление $q^n = (-1)^n \cdot |q|^n$. В предыдущем примере мы доказали, что $\{|q|^n\}$ — БМП. Последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, поэтому по первой теореме этого параграфа получим, что $\{q^n\}$ — БМП, поскольку является произведением ограниченной последовательности на БМП.

Пример 6. Пусть $q, b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $|q| < 1$, $x_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ — сумма первых членов последовательности $\{x_n\}$. Напомним, что при этих условиях последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*. Суммой всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Найдем S , при этом будем использовать формулу для S_n , доказанную в лемме 3.4:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = \\ &= \frac{b_1}{1 - q} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right) = \frac{b_1}{1 - q}. \end{aligned}$$

2.5. Предельный переход в неравенствах

В этом параграфе разберемся с возможностью предельных переходов в неравенствах для последовательностей и с помощью предельных переходов исследуем сумму обратных факториалов, которая очень быстро сходится к числу Эйлера.



Теорема 5.1. 1) предположим, что $x_n \geq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, тогда $a \geq 0$.

2) пусть $x_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тогда $a \leq b$.

Доказательство. 1) о/п: $a < 0$. Тогда $O(a) = (-\infty; 0)$ — окрестность числа a , поскольку это открытое множество и $a \in (-\infty; 0)$. Расписав определение $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, для $O(a)$ найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in O(a)$, т.е. $x_n < 0$. $\nearrow$.

2) обозначим через $z_n = y_n - x_n$, тогда из теоремы 4.3 следует, что последовательность $\{z_n\}$ имеет предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b - a$. По условию $z_n \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Применяя (1), получим $b - a \geq 0$ или $a \leq b$. ■

Замечание. Даже если знак исходного неравенства строгий в условиях (1) и (2) предыдущей теоремы, знак итогового неравенства должен быть нестрогим, иначе теорема может оказаться не верна. Например, $1/n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$. Или $-1/n < 1/n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)$.

Следующая теорема называется *принципом двух полицейских*¹¹. Ссылаясь на нее, будем использовать сокращение П2П.

Теорема 5.2. Пусть $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и также известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, тогда $\{z_n\}$ имеет предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ из $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

найдем такой номер $N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \Rightarrow x_n \in O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, (*)

найдем такой номер $N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \Rightarrow y_n \in O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. (**)

Теперь положим $N = \max\{N_1, N_2\}$, тогда из (*) и (**) при всех натуральных $n > N$ будут выполняться неравенства $a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon$, откуда $z_n \in O_\varepsilon(a)$. Мы проверили, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. ■

В математическом анализе часто возникают бесконечные суммы: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Если $x_n \in \mathbb{R}$, то $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ называется *числовым рядом*, а $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$ — его

¹¹Или принципом двух милиционеров.



частичной суммой. Говорят, что числовой ряд *сходится* к числу $S \in \mathbb{R}$, если $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ и пишут $S = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, говорят, что ряд *расходится*. Так, в одном из примеров предыдущего параграфа мы доказали, что при $b_1, q \in \mathbb{R}$ и $|q| < 1$ верно $\sum_{i=1}^{\infty} b_1 q^{i-1} = \frac{b_1}{1-q}$. Наша ближайшая задача — исследовать на сходимость ряд из обратных к факториалам и доказать, что число Эйлера обладает замечательным свойством: $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Напомним, что факториал определяется в нуле следующим образом: $0! = 1$.

Определение. Пусть $y_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$ для любого натурального $k \in \mathbb{N}$ (т.е. $y_k = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!}$ — частичная сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$).

Теорема 5.3. Пусть $y_k = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) $\{y_k\}$ $\nearrow$;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = e$;
- 3) $0 < e - y_k < \frac{1}{k \cdot k!}$.

Доказательство. 1) очевидно, поскольку $y_{k+1} - y_k = 1/(k+1)! > 0$.

2) по определению $e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Нам уже известно (по теореме 3.5) что последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху тройкой, строго возрастает и элемент x_n можно представить (при $n \geq 2$) в виде

$$x_n = 1 + 1 + \sum_{i=2}^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)}{i!}. \quad (*)$$

Все слагаемые в правой части этого представления неотрицательны. Теперь зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и будем рассматривать все x_n , у которых номер $n \geq k$. Отбросим слагаемые в представлении (*), начиная с индекса $i = k+1$ до $i = n$, получим при всех $n \geq k$ неравенство

$$x_n \geq 1 + 1 + \sum_{i=2}^k \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)}{i!}. \quad (**)$$



Заметим, что в правой части неравенства $(**)$ количество слагаемых равно $k + 1$ — фиксированное число, не зависящее от n , поэтому в $(**)$ можно (по теореме 4.3) перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$: $e \geq 1 + 1 + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} = y_k$. Мы доказали, что $y_k \leq e$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно находится связь между x_k и y_k . Действительно,

$$x_k = 1 + 1 + \sum_{i=2}^k \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)}{i!} \leq 1 + 1 + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} = y_k.$$

Итак, при всех $k \in \mathbb{N}$ мы получили двойное неравенство $x_k \leq y_k \leq e$ $(***)$. Поскольку $e = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$, благодаря $(***)$ и П2П, получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = e$.

3) рассмотрим произвольное $m \in \mathbb{N}$ и оценим разность $y_{k+m} - y_k$ (в первом переходе мы уменьшили знаменатели положительных дробей, а во втором — воспользовались оценкой суммы первых членов геометрической прогрессии с $b_1 = 1$ и знаменателем $q = \frac{1}{k+2}$ — см. лемму 3.4):

$$\begin{aligned} y_{k+m} - y_k &= \frac{1}{(k+1)!} + \dots + \frac{1}{(k+m)!} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(k+2) \cdot \dots \cdot (k+m)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(k+1)!} \left(1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \frac{1}{(k+2)^{m-1}} \right) < \\ &< \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k+2}} = \frac{k+2}{(k+1)(k+1)!}. \end{aligned}$$

Итак, при любых $m \in \mathbb{N}$ имеем оценку $0 \leq y_{k+m} - y_k < \frac{k+2}{(k+1)(k+1)!}$ $(\heartsuit)$. Переходя к пределу в $(\heartsuit)$ при $m \rightarrow \infty$, получим $0 \leq e - y_k \leq \frac{k+2}{(k+1)(k+1)!}$. Осталось только проверить, что $\frac{k+2}{(k+1)(k+1)!} < \frac{1}{k \cdot k!}$. После равносильных преобразований это неравенство преобразуется к выполняющемуся при всех $k \in \mathbb{N}$ неравенству $k(k+2) < (k+1)^2$. ■

Упражнения

1. Найдите 51-ю и 52-ю цифру после запятой у числа Эйлера и докажите, что эти цифры верные.



2. Докажите, что $e \notin \mathbb{Q}$.

3. Гармоническим рядом называется ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Докажите, что он расходится.

4. Попробуйте доказать, что число Эйлера трансцендентно, т.е. не является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

2.6. Три леммы

Уточним, что отрезком $[x; y]$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ называется $\{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\}$. Поэтому при $y < x$ отрезок $[x; y]$ является пустым множеством и далее по умолчанию считаем, что левый конец отрезка не превосходит его правого конца.

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n; b_n]\}$ ($[a_n; b_n] \subseteq \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$) называется вложенной, если $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Последовательность отрезков $\{[a_n; b_n]\}$ ($[a_n; b_n] \subseteq \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$) называется стягивающейся, если она вложенная и длины этих отрезков стремятся к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$.

Пример 1. Последовательность отрезков $\{[0; 1 + \frac{1}{n}]\}$ является вложенной (поскольку $\{1/n\} \searrow$), но не является стягивающейся. Нетрудно посчитать $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n) = 1 \neq 0$.

Следующее утверждение обычно называют *леммой Кантора о стягивающейся последовательности отрезков*.

Лемма 6.1. 1) если $\{[a_n; b_n]\}$ вложенная, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \neq \emptyset$.

2) если $\{[a_n; b_n]\}$ стягивающаяся, то существует (единственное) такое число $c^* \in \mathbb{R}$, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{c^*\}$, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c^*$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c^*$.

Доказательство. 1) условие вложенности, т.е. $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]$ можно переписать в виде тройного неравенства $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, которое выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда сразу получим важную информацию о последовательности левых концов и последовательности правых концов этих отрезков: $\{a_n\} \nearrow$ и $\{b_n\} \searrow$. Кроме того, $\{a_n\}, \{b_n\} \subseteq [a_1; b_1]$, поэтому



они обе ограничены. Применяя к каждой из них лемму Вейерштрасса, получим их сходимости, т.е. существование таких $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c_2$. В неравенстве $a_n \leq b_n$ теперь можно перейти к пределу (по теореме 5.1) и получить $c_1 \leq c_2$. Из леммы Вейерштрасса также имеем $c_1 = \sup\{a_n\}$ и $c_2 = \inf\{b_n\}$, откуда при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n \leq c_1 \leq c_2 \leq b_n$. Это означает, что $\emptyset \neq [c_1; c_2] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$.

2) непустота пересечения отрезков доказана в (1), осталось доказать единственность общей точки. О/п: нашлись две различные точки $p, q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. Б.о.о. положим $p < q$, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $a_n \leq p < q \leq b_n$, откуда $0 < q - p \leq b_n - a_n$. Учитывая данное нам условие $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n - a_n| = 0$, можно применить П2П и получить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (q - p) = 0$. Но $q - p$ является константой, не зависящей от n , поэтому нулевой предел возможен только в случае $q - p = 0$ или $q = p$. $\nearrow \searrow$.

Итак, можно обозначить единственную общую точку всех отрезков через c^* , тогда из неравенств $a_n \leq c^* \leq b_n$ получим $0 \leq c^* - a_n \leq (b_n - a_n)$. Снова применив П2П, обнаруживаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (c^* - a_n) = 0$, что дает $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c^*$. Точно так же, но только из неравенств $0 \leq b_n - c^* \leq (b_n - a_n)$ и П2П, придем к $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c^*$. ■

Определение. Для произвольной $\{x_n\} \subseteq X$ и любой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ рассмотрим члены исходной последовательности с этими номерами, тогда $\{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}$.

Если вспомнить, что последовательность — это отображение $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, то всякая ее подпоследовательность является ограничением этого отображения на бесконечное подмножество из $\mathbb{N}$. Например, для последовательности, которая задается формулой $f(n) = \sin \frac{\pi n}{2}$ можно заметить, что подпоследовательность с четными номерами $x_2, x_4, x_6, \dots$ составлена только из нулей (точнее, элементы этой подпоследовательности можно записать в виде упорядоченных пар, составляющих отображение: $(2, 0), (4, 0), (6, 0), \dots$). Можно рассмотреть ее подпоследовательность, у которой номера дают остаток один при делении на 4: $x_1, x_5, x_9, \dots$. Учитывая, что верно равенство $\sin \frac{\pi \cdot (4l+1)}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot l \right) = 1$, все элементы этой подпоследовательности



равны единице. Эти примеры могут натолкнуть нас на гипотезу, что из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Ее подтверждением является следующий результат, принадлежащий Больцано¹² и Вейерштрассу.

Лемма 6.2. Пусть $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Если $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, то она содержит сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Для ограниченной последовательности $\{x_n\}$ найдутся два числа $m, M \in \mathbb{R}$, что $m \leq x_n \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Индукцией по $k \in \mathbb{N}$ докажем утверждение $T(k)$: «Найдутся отрезки $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_k; b_k]$ обладающие для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ свойствами (1)–(3), где

- 1) отрезок $[a_i; b_i]$ содержит бесконечное число членов (будем использовать сокращение б.ч.ч.) последовательности $\{x_n\}$;
- 2) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем;
- 3) длина каждого следующего отрезка в два раза меньше длины предыдущего отрезка.»

Б.И.: $k = 1$ и $k = 2$. В качестве $[a_1; b_1]$ положим отрезок $[m; M]$. Выберем $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ — середину этого отрезка и рассмотрим две половины исходного отрезка — отрезки $[a_1; c_1]$ и $[c_1; b_1]$. По крайней мере один из них содержит б.ч.ч. исходной последовательности $\{x_n\}$ (действительно, если бы каждая половина содержала только по конечному числу членов, то их объединение, т.е. $[a_1; b_1]$, также содержит конечное число членов $\{x_n\}$, а это не так). Теперь в качестве $[a_2; b_2]$ выберем ту из половин, которая содержит б.ч.ч. последовательности $\{x_n\}$ (если б.ч.ч. содержат обе половины, для определенности, будем выбирать левую). Такой выбор обеспечивает для $[a_1; b_1], [a_2; b_2]$ выполнение (1), (2) и (3), поэтому база доказана.

Ш.И. Предположим, что отрезки $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_k; b_k]$ со свойствами (1)–(3) уже построены. Найдём середину $c_k = (a_k + b_k)/2$ отрезка $[a_k; b_k]$ и повторяя рассуждения Б.И. к отрезку $[a_k; b_k]$, найдём ту его половину, которая содержит б.ч.ч. последовательности $\{x_n\}$, и обозначим ее через $[a_{k+1}; b_{k+1}]$. Свойства (1)–(3) выполняются.

Как итог нашего построения мы получили вложенную последовательность

¹²Бернард Больцано (1781–1848) — чешский математик, философ, основные его работы относятся к теории множеств, математическому анализу и математической логике; уточнил понятия непрерывности и предела, заложил основы сходимости рядов; считал математический метод единственным методом научного исследования.



отрезков $\{[a_k, b_k]\}$, длины которых удовлетворяют соотношению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} = (b_1 - a_1) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

Таким образом, $\{[a_k, b_k]\}$ — стягивающаяся и по лемме Кантора найдется единственное такое число $c^* \in \mathbb{R}$, что $c^* = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$. (*)

Теперь осталось определить искомую подпоследовательность. В качестве x_{n_1} выберем любой элемент $\{x_n\}$. Далее, отрезок $[a_2; b_2]$ содержит б.ч.ч. исходной последовательности, поэтому найдем такой номер $n_2 > n_1$, что $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$. Пусть для каждого натурального числа из $\{1, 2, \dots, k\}$ найдены такие номера $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, что $x_{n_i} \in [a_i; b_i]$. По построению отрезок $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ содержит б.ч.ч. последовательности $\{x_n\}$, что позволяет выбрать очередной номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}; b_{k+1}]$.

Найденная подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ обладает свойством: $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. (**)

Из (*), (**) и П2П получим $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c^*$.

■

Еще одно определение, которое можно ввести в любом метрическом пространстве (более того, в любом пространстве¹³, где заданы открытые множества).

Определение. Пусть (X, d) — МП, $K \subseteq X$, $U_i \subseteq X$ для каждого $i \in I$. Семейство $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ называется покрытием множества K , если $K \subseteq \cup_{i \in I} U_i$ (т.е. для каждого $x \in K$ найдется хотя бы один индекс $i_0 \in I$, для которого $x \in U_{i_0}$). Если $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_1$ — покрытие K , то $\mathcal{U}_1$ называется подпокрытием покрытия $\mathcal{U}$. Семейство $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ называется открытым (соответственно замкнутым), если для каждого $i \in I$ множество U_i открыто (замкнуто).

Пример 2. Пусть $K = [0; 1] \subseteq \mathbb{R}$ и $\mathcal{U} = \{\{x\} : x \in K\}$ — замкнутое покрытие K одноточечными множествами (то, что любой синглетон $\{x_0\}$ замкнут, следует из открытости множества $(-\infty; x_0) \cup (x_0; \infty)$). Из этого бесконечного покрытия (в нем континуум элементов) нельзя выделить никакого собственного подпокрытия, поскольку, удалив хотя бы одно множество $\{x_0\}$ из этого семейства, мы получим, что x_0 не покрывается ни одним элементом $\mathcal{U}$.

¹³Такие пространства называются *топологическими*.



Пример 3. Пусть $K = \mathbb{R}$ и $\mathcal{U} = \{(-n; n) : n \in \mathbb{N}\}$ — счетное открытое покрытие действительной прямой расширяющейся системой интервалов. В $\mathcal{U}$ можно найти много подпокрытий, но нет ни одного конечного подпокрытия. Просто в конечном подсемействе $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}$ можно найти наибольший интервал $(-n^*; n^*)$, который содержит все остальные интервалы из $\mathcal{U}_1$, и этот интервал не покрывает, например, число $n^* + 1$, поэтому $\mathcal{U}_1$ не может быть покрытием всей действительной прямой.

Пример 4. Пусть $K = [0; 100] \subseteq \mathbb{R}$, $\varepsilon = \frac{1}{10^{34}}$ и $\mathcal{U} = \{O_\varepsilon(x) : x \in K\}$ — бесконечное (оно содержит континуум элементов) открытое покрытие K . Несложно убедиться, что если на этом отрезке равномерно выбирать точки $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = 100$, где $n = 10^{36} + 1$ и $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{10^{34}}$, то $\mathcal{U}_1 = \{O_\varepsilon(x_i) : i \in \mathbb{N}, i \leq 10^{36} + 1\}$ является конечным подпокрытием покрытия $\mathcal{U}$. Но гораздо проще воспользоваться следующим результатом, который называется *леммой Гейне*¹⁴-*Бореля*¹⁵-*Лебега*¹⁶

Лемма 6.3. Пусть $K = [a; b] \subseteq \mathbb{R}$, тогда любого открытого покрытия K можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ — открытое покрытие отрезка $K = [a; b]$. Рассмотрим множество

$$F = \{x \in [a; b] : [a; x] \text{ можно покрыть конечным числом элементов } \mathcal{U}\}.$$

Сразу заметим, что $[a; a] = \{a\}$ покрывается одним элементом из $\mathcal{U}$, поэтому $a \in F$ и $F \neq \emptyset$. Кроме того, из определения F следует, что $F \subseteq [a; b]$. Применяя к F теорему 3.1, найдем $c^* = \sup F$. Включение $F \subseteq [a; b]$ также дает, что $c^* \in [a; b]$. Докажем, что c^* обладает двумя свойствами: $c^* \in F$ и $c^* = b$.

I. $c^* \in F$? Из $c^* \in [a; b]$ и $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ — покрытие $[a; b]$ найдем такой индекс $i_0 \in I$, что $c^* \in U_{i_0}$. Вспомним, что U_{i_0} — открытое множество, поэтому найдется такая $O_\varepsilon(c^*)$, что $O_\varepsilon(c^*) \subseteq U_{i_0}$. Условие

¹⁴Генрих Эдуард Гейне (1821–1881) — немецкий математик, с 1848 года профессор университета в Галле (в 1864–1865 — ректор), основные его исследования относятся к основаниям математики, теории функций и математической физике; работал вместе с Шварцем и Кантором над обоснованием анализа в смысле Вейерштрасса; член Гёттингенского научного общества.

¹⁵Эмиль Борель (1871–1956) — французский математик, президент Парижской академии наук (с 1934), был видным политическим деятелем; его работы относятся к теории функций, математическому анализу, геометрии, алгебры и т.д.; внес важный вклад в теорию расходящихся рядов; в 1921–1928 годах опубликовал основополагающие работы по теории игр.

¹⁶Анри Леон Лебег (1875–1941) — французский математик, член Парижской академии наук (с 1921); основные его исследования относятся к теории функций и теории интегрирования; построил (в 1902) новую теорию интегрирования, ввел понятия меры множества и измеримой функции.



$c^* = \sup F$ и лемма 3.2 позволяют для $O_\varepsilon(c^*)$ найти такой элемент $x_0 \in F$, что $c^* - \varepsilon < x_0 \leq c^*$. Из $x_0 \in F$ получим конечный набор $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ элементов $\mathcal{U}$, которые покрывают $[a; x_0]$. Заметим, что $[x_0; c^*]$ покрывается окрестностью $O_\varepsilon(c^*)$, которая содержится в U_{i_0} , поэтому $[a; c^*]$ покрывается $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}, U_{i_0}$ и $c^* \in F$.

II. $c^* = b$? О/п: $c^* < b$. В предыдущем пункте уже найдены U_{i_0} и $O_\varepsilon(c^*)$, что $O_\varepsilon(c^*) \subseteq U_{i_0}$. Рассмотрим $x_1 = \min\{c^* + \frac{\varepsilon}{2}, b\}$. Тогда $x_1 > c^*$, $x_1 \in [a; b]$ (так как $x_1 \leq b$) и $[c^*; x_1]$ содержится в $O_\varepsilon(c^*) \subseteq U_{i_0}$, поэтому $[a; x_1]$ покрывается $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}, U_{i_0}$ и $x_1 \in F$. Условия $x_1 \in F$, $c^* = \sup F$ и $x_1 > c^*$ противоречивы. Следовательно, $c^* = b$.

Из $c^* \in F$ и $c^* = b$ получим, что отрезок $K = [a; b]$ можно покрыть конечным числом элементов $\mathcal{U}$ и лемма доказана. ■

Упражнения

1. Пусть $K \subseteq X$, (X, d) — МП. Если из любого открытого покрытия K можно выделить конечное подпокрытие, то K называется *компактом* в X . Докажите, что любой компакт в $\mathbb{R}$ является ограниченным множеством.
2. Докажите, что любой компакт замкнут.
3. Докажите критерий компактности в $\mathbb{R}$: множество K — компакт, если K — замкнутое и ограниченное множество.
4. Сформулируйте и докажите критерий компактности в $\mathbb{R}^n$.
5. Найдите счетное компактное подмножество в $\mathbb{R}$, которое не содержит ни одного нетривиального отрезка.
6. Найдите континуальное компактное подмножество в $\mathbb{R}$, которое не содержит ни одного нетривиального отрезка.

Глава 3

Предел функции. Непрерывность

3.1. Предел функции в точке

Напомним, что окрестностью точки $x \in \mathbb{R}$ называется $O(x)$ — произвольное открытое множество (на $\mathbb{R}$ мы договорились рассматривать только евклидову метрику $d(x, y) = |y - x|$). Частным случаем окрестности является $O_\delta(x)$ — окрестность радиуса $\delta > 0$ и с центром в точке x . Выбросив из $O(x)$ и $O_\delta(x)$ точку x , мы получим проколотые окрестности: $\check{O}(x)$ и $\check{O}_\delta(x)$. Точка x называется предельной точкой множества $A \subseteq \mathbb{R}$, если для любой $O_\delta(x)$ выполняется $\check{O}_\delta(x) \cap A \neq \emptyset$, а через A' обозначают множество всех предельных точек множества A . В этом определении можно заменить $O_\delta(x)$ и $\check{O}_\delta(x)$ на $O(x)$ и $\check{O}(x)$ соответственно. Смысл предельной точки для A прост: вблизи этой точки всегда должны быть другие точки из множества A . Например, для $A = [0; 4) \cup \{5\}$ выполняется, что $A' = [0; 4]$.

Для функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in A'$ перед строгим определением предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ сначала обсудим, что это понятие должно означать. Во-первых, предел функции можно рассматривать только в предельной точке x_0 ее области определения, поскольку нам нужно много близких к x_0 точек из A . Во-вторых, значение функции в самой точке x_0 никак не влияет на предел, часто значение функции в x_0 даже не будет существовать. Наконец, чем ближе аргумент к x_0 , тем значение функции должно быть ближе к числу a (рис. 8). Интуитивное понятие близости формализуем с помощью метрики или окрестностей точек. Дадим сразу несколько определений предела функции и для удобства ссылок занумеруем их римскими цифрами.

В следующих четырех определениях считаем, что $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = D(f)$ — область определения функции и $x_0 \in A'$. Кванторы выделяем цветом для привлечения внимания. Первое определение записано с помощью



произвольных окрестностей точки a .

I. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если для любой $O(a)$ — окрестности точки a существует хотя бы одна $O(x_0)$ — окрестность x_0 , что $f(\check{O}(x_0) \cap A) \subseteq O(a)$.

Второе определение формулируется с помощью произвольных ε -окрестностей точки a .

II. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если для любой $O_\varepsilon(a)$ — окрестности точки a существует хотя бы одна $O_\delta(x_0)$ — окрестность x_0 , что $f(\check{O}_\delta(x_0) \cap A) \subseteq O_\varepsilon(a)$.

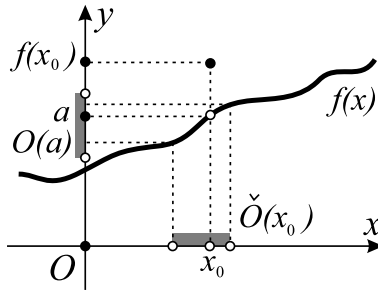


Рис. 8

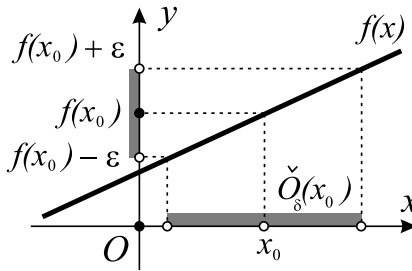


Рис. 9

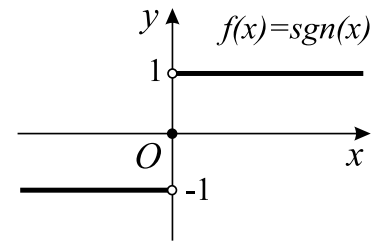


Рис. 10

Третье определение дано на языке $\varepsilon - \delta$, в нем окрестности переписаны с помощью стандартной метрики на $\mathbb{R}$.

III. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует хотя бы одно $\delta > 0$, что для всех $x \in A$, которые удовлетворяют двойному неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, следует, что $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Наконец, последнее определение называется *определением предела функции по Гейне*. Кстати, последовательности $\{x_n\}$ из этого определения называются *последовательностями Гейне*.

IV. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, если для любой $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

В зависимости от конкретного примера функции или конкретного утверждения нам будет удобно пользоваться различными определениями предела функции, этим объясняется большая их коллекция. Сначала рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов функций по определению, а затем докажем теорему об эквивалентности этих четырех определений.

Пример 1. Пусть $f(x) = kx + b$ — линейная функция и $x_0 \in \mathbb{R}$ (рис. 9). Докажем, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot x_0 + b = f(x_0)$. При $k = 0$ функция $f(x) \equiv b$



(т.е. $f(x) = b$ для всех $x \in \mathbb{R}$) и для произвольной $O_\varepsilon(b)$ можно взять $O_1(x_0)$, тогда для любых $x \in \check{O}_1(x_0)$ верно $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$, откуда $f(\check{O}_1(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(b)$ и мы проверили второе определение.

Пусть теперь $k \neq 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим в качестве $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|} > 0$, тогда для всех x , которые удовлетворяют двойному неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, следует, что $|kx + b - kx_0 - b| = |k| \cdot |x - x_0| < |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$. Мы проверили выполнение третьего определения.

Пример 2. Пусть $f(x) = 1$ при всех $x \neq 0$ и $f(0) = 3$, тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Доказательство аналогично случаю константы из предыдущего примера. Заметим, что предел функции в $x_0 = 0$ **не равен** значению функции в этой точке (для предела важно поведение функции вблизи точки x_0 , а не в самой точке x_0).

Пример 3. Рассмотрим $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ — функцию знака. Напомним, что по определению: $\operatorname{sgn}(x) = 1$ при $x > 0$; $\operatorname{sgn}(x) = -1$ при $x < 0$; $f(0) = 0$ (рис. 10). Опять, случай константы из первого примера дает $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ при $x_0 \neq 0$. Нас будет интересовать случай $x_0 = 0$. Докажем, что не существует $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. О/п: предположим, что $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ и рассмотрим последовательность $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (мы проверили, что $\{x_n\}$ является последовательностью Гейне). По четвертому определению предела должно выполняться $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$, но $f(x_n) = (-1)^n$, а последовательность $\{(-1)^n\}$ не имеет предела. $\nexists$.

Теорема 1.1. *Определения I–IV равносильны.*

Доказательство. $I \Rightarrow II$) рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(a)$. Для нее по I найдется такая $O(x_0)$ — окрестность x_0 , что $f(\check{O}(x_0) \cap A) \subseteq O(a)$. Множество $O(x_0)$ открыто, поэтому существует такая $O_\delta(x_0)$, что $O_\delta(x_0) \subseteq O(x_0)$. Тогда $f(\check{O}_\delta(x_0) \cap A) \subseteq f(\check{O}(x_0) \cap A) \subseteq O(a)$ и мы проверили выполнение определения II.

$II \Leftrightarrow III$) заметим, что эти два определения отличаются только обозначениями, действительно:

$$x \in \check{O}_\delta(x_0) \cap A \Leftrightarrow (x \in A \quad \& \quad 0 < |x - x_0| < \delta),$$

$$\text{а также} \quad f(x) \in O_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



$\Pi \Rightarrow \text{IV}$) рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(a)$. По Π существует хотя бы одна такая $O_\delta(x_0)$, что $f(\check{O}_\delta(x_0) \cap A) \subseteq O_\varepsilon(a)$ (*). Теперь воспользуемся тем, что $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, и найдем для $O_\delta(x_0)$ такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно $x_n \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Применив (*), получим, что при всех $n > N$ верно $f(x_n) \in O_\varepsilon(a)$. Мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ и IV выполняется.

$\text{IV} \Rightarrow \text{I}$) о/п: первое определение не выполняется, тогда существует такая $O(a)$, что какую бы мы не рассматривали $O(x_0)$ — окрестность x_0 , верно $f(\check{O}(x_0) \cap A) \not\subseteq O(a)$ (**). Для получения противоречия нам достаточно будет применить более слабый вариант (**), а именно: для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $f(\check{O}_{1/n}(x_0) \cap A) \not\subseteq O(a)$ (***) . Из (***) найдем для любого $n \in \mathbb{N}$ такое число $x_n \in \check{O}_{1/n}(x_0) \cap A$, что $f(x_n) \notin O(a)$. Условие $x_n \in \check{O}_{1/n}(x_0) \cap A$ нам дает, что $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ и $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Но из условия $f(x_n) \notin O(a)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует, что число a не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это утверждение противоречит IV . ■

В следующей лемме установим очень простую характеристику предельных точек данного множества (она справедлива для любого метрического пространства).

Лемма 1.2. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и $A \neq \emptyset$. Тогда $x_0 \in A' \Leftrightarrow$ найдется хотя бы одна последовательность $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если $x_0 \in A'$, то для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ верно $\check{O}_{1/n}(x_0) \cap A \neq \emptyset$, что позволяет нам выбрать $x_n \in \check{O}_{1/n}(x_0) \cap A$. Тогда $\{x_n\}$ — искомая, поскольку неравенство $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ дает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

$\Leftarrow$) пусть такая последовательность $\{x_n\}$ нашлась. Рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(x_0)$. Из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ найдем такой номер N , что при всех $n > N$ выполняется $x_n \in O_\varepsilon(x_0)$. Поскольку $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$ выполняется более сильное утверждение: $x_n \in \check{O}_\varepsilon(x_0) \cap A$. Откуда $\check{O}_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$ и $x_0 \in A'$. ■

Следующее утверждение называется *теоремой о единственности предела функции*. Предупреждение для оптимистов: эта теорема вовсе не утверждает, что у любой функции в любой предельной точке области ее определения существует предел.



Теорема 1.3. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ и $x_0 \in A'$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $a = b$.

Доказательство. Условие $x_0 \in A'$ дает $A \neq \emptyset$ и (по предыдущей лемме) найдется последовательность $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Дважды применив определение IV, получим, что одновременно выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Из единственности предела для последовательности получим $a = b$. ■

Напомним, что функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена на множестве $B \subseteq A$, если $\{f(x) : x \in B\}$ — ограниченное множество, т.е. найдутся такие два числа $m, M \in \mathbb{R}$, что при всех $x \in B$ выполняется двойное неравенство $m \leq f(x) \leq M$. Следующее утверждение называют *необходимым условием существования предела функции*.

Теорема 1.4. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ и $x_0 \in A'$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, то найдется такая окрестность $O_\delta(x_0)$, что $f(x)$ ограничена на множестве $O_\delta(x_0) \cap A$.

Доказательство. Применим для $\varepsilon = 1$ определение II и найдем такую $O_\delta(x_0)$, что $f(\check{O}_\delta(x_0) \cap A) \subseteq O_1(a)$, т.е.

$$\forall x \in \check{O}_\delta(x_0) \cap A \Rightarrow a - 1 < f(x) < a + 1 \quad (*).$$

Теперь рассмотрим два случая.

1-й случай: $x_0 \notin A$, тогда вместо $x \in \check{O}_\delta(x_0) \cap A$ можно написать, что $x \in O_\delta(x_0) \cap A$. Поэтому из (*) следует, что $O_\delta(x_0)$, $m = a - 1$ и $M = a + 1$ являются искомыми.

2-й случай: $x_0 \in A$. Определим

$$m = \min\{a - 1, f(x_0)\} \quad \text{и} \quad M = \max\{a + 1, f(x_0)\},$$

тогда из (*) следует, что $O_\delta(x_0)$, m и M являются искомыми. ■

3.2. Арифметические операции и пределы функций

Напомним, что сумма функций f и g задана на $D(f) \cap D(g)$ правилом: для $x \in D(f) \cap D(g)$ выполняется $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Аналогично



определяются разность, произведение и частное функций. Только для частного функций f и g область определения (возможно) придется еще более уменьшить до $D(f/g) = (D(f) \cap D(g)) \setminus \{x \in D(g) : g(x) = 0\}$.

Теорема 2.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ и $x_0 \in (A \cap B)'$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = a - b$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;
- 4) для любого $k \in \mathbb{R}$ верно $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot a$;
- 5) если $b \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ при всех $x \in B$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. 1) рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subseteq (A \cap B) \setminus \{x_0\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Из определения предела функции по Гейне получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$. Используя свойства пределов последовательностей относительно арифметических операций (теорема 4.3 предыдущей главы), получаем $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_n) + g(x_n)) = a + b$, что по четвертому определению предела дает $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$.

Утверждения (2)–(5) доказываются аналогично (1). ■

Следующая теорема называется *предельным переходом в неравенствах для функций*.

Теорема 2.2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, а также $x_0 \in (A \cap B)'$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ и найдется хотя бы одна последовательность $\{x_n\} \subseteq (A \cap B) \setminus \{x_0\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ и $f(x_n) \leq g(x_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$.

Доказательство. Из определения предела функции по Гейне имеем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b$. Теперь по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей (теорема 5.1 предыдущей главы) сразу получим, что $a \leq b$. ■



Обратите внимание, насколько слабое условие было в предыдущей теореме: для достижения результата достаточно было одной последовательности с нужным свойством. В следующей теореме (*принцип двух полицейских для функций*) нам придется еще и доказывать существование предела у «промежуточной» функции, поэтому двойное неравенство должно выполняться на **любой** последовательности из $A \setminus \{x_0\}$, сходящейся к x_0 .

Теорема 2.3. Пусть $D(f) = D(g) = D(h) = C$, $x_0 \in C'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$. Если для любого $x \in C$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность Гейне, т.е. $\{x_n\} \subseteq C \setminus \{x_0\}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. На элементах этой последовательности выполняется двойное неравенство $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Применяя определение предела функции по Гейне, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = a$. Теперь П2П для последовательностей (теорема 5.2 предыдущей главы) нам дает $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = a$. Таким образом, определение предела по Гейне для функции $h(x)$ выполняется и $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$. ■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$). Для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}$ найдем $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Для этого используем первую теорему этого параграфа и сначала перейдем к пределу в каждом слагаемом (по (1)), затем вынесем постоянный множитель за знак предела (по (4)) и, перейдем к пределу в каждом множителе (по (3)) и, наконец, воспользуемся уже доказанным результатом о линейной функции (в предыдущем параграфе мы нашли $\lim_{x \rightarrow x_0} (kx + b) = kx_0 + b$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= a_n \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) + a_0 = \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0). \end{aligned}$$

Пример 2. Найдем $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6}$. Сразу перейти к пределу в числителе и знаменателе не получится, поскольку $x_0 = 2$ является корнем знаменателя и числителя (получили неопределенность типа $0 : 0$). Разложим числитель и знаменатель на множители, сократим на $(x - 2)$ (это можно сделать, поскольку x выбирается в проколотой окрестности $x_0 = 2$, поэтому $x - 2 \neq 0$),



перейдем к пределу в числителе и знаменателе (по (5) из первой теоремы), воспользовавшись уже известным результатом о линейной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x-3)} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Пример 3. Чуть позже в этой главе мы докажем непрерывность квадратного корня, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{kx+b} = \sqrt{kx_0+b}$ при $kx_0+b \geq 0$. Пока воспользуемся этим фактом при нахождении следующего предела (в нем избавиться от неопределенности типа $0:0$ помогает умножение числителя и знаменателя на сопряженное выражение и сокращение множителя, вызывающего эту неопределенность):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.3. Первый замечательный предел

Вспомним некоторые понятия и факты из курса тригонометрии. На координатной плоскости через ω_1 обозначим единичную окружность $\omega(O, 1)$ — она также называется *тригонометрической* окружностью. Углом $\angle AOB$ будем называть часть плоскости, ограниченную парой лучей с общей вершиной (рис. 11, закрашенное множество). Пусть $A, B \in \omega_1$, тогда *дугой* AB (на которую опирается угол $\angle AOB$) называют множество $\overset{\frown}{AB} = \angle AOB \cap \omega_1$. *Ломаной* называется объединение отрезков следующего вида: $z = \cup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$. Вершины, звенья и смежные звенья z определяются очевидным образом. Ломаная z называется *простой*, если ее несмежные звенья не пересекаются, а смежные пересекаются только по общей вершине. Ломаная $z = \cup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ называется *вписанной* в $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 11), если все вершины этой ломаной лежат на $\overset{\frown}{AB}$ и $A = A_1$, $B = A_{n+1}$ (т. е. концы ломаной совпадают с концами дуги). Длиной ломаной z называют число $l(z) = \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$, а длиной дуги $\overset{\frown}{AB}$ —

$$l\left(\overset{\frown}{AB}\right) = \sup \left\{ l(z) : z \text{ — простая ломаная, вписанная в } \overset{\frown}{AB} \right\}.$$



Непустота числового множества в фигурных скобках очевидна, поскольку в дугу $\widehat{AB}$ вписана ломаная $[AB]$. Ограниченность сверху этого множества доказывается в курсе геометрии одиннадцатого класса, поэтому $l(\widehat{AB})$ определена корректно. После этого вводится число π — это длина половины единичной окружности. Там же доказывается теорема о том, что для любого числа $x \in [0; 2\pi]$ найдется такая дуга $\widehat{P_0P_x}$, отложенная от точки $P_0(1, 0)$ в положительном направлении, длина которой равна x (в этом случае говорят, что величина этой дуги, или величина угла $\angle P_0OP_x$, равна x радиан). При $x < 0$ дугу $\widehat{P_0P_x}$ откладывают от точки P_0 в отрицательном направлении. Теперь легко определяются основные тригонометрические функции. В этом параграфе нам достаточно знать, что для всех $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ ордината точки P_x — это $\sin x$, ее абсцисса — это $\cos x$, а $\operatorname{tg} x = (\sin x)/(\cos x)$ — это ордината точки T_x (рис. 12), которая является пересечением луча $[OP_x]$ с прямой $x = 1$ (поэтому прямая $x = 1$ называется *осью тангенсов*). Ключевым при выводе первого замечательного предела (сокращенно — 1ЗП) является двойное неравенство, которое доказывается в следующей лемме.

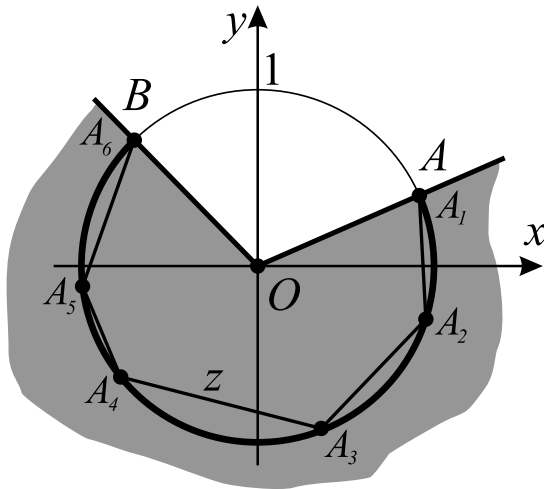


Рис. 11

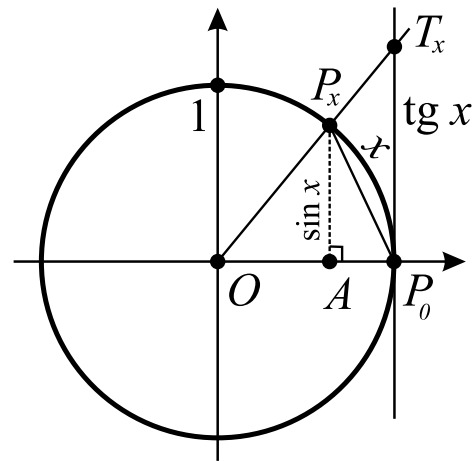


Рис. 12

Лемма 3.1. Для всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ выполняется $\sin x < x \leq \operatorname{tg} x$.

Доказательство. Пусть P_x — такая точка ω_1 , что дуга $\widehat{P_0P_x}$ отложена от точки $P_0(1, 0)$ в положительном направлении и ее длина равна x . Обозначим через $A = \operatorname{Pr}_{(Ox)}(P_x)$. Учитывая, что $[P_0P_x]$ — одна из ломаных, вписанных в $\widehat{P_0P_x}$, из определения $l(\widehat{P_0P_x}) = x$ получим, что $|P_0P_x| \leq x$.



Соотношение между катетом и гипотенузой в прямоугольном треугольнике AP_0P_x дает $\sin x = |P_xA| < |P_0P_x|$, откуда $\sin x < x$ при всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Теперь докажем второе неравенство. Для этого рассмотрим произвольную простую ломаную $z = \cup_{i=1}^n [A_iA_{i+1}]$, вписанную в P_0P_x (рис. 13). Также введем некоторые обозначения: a — ось тангенсов, $\{B_i\} = [OA_i) \cap a$ при всех индексах $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Кроме того, через каждую точку B_i (при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) проведем прямую, параллельную (A_iA_{i+1}) , и обозначим через C_{i+1} точку пересечения такой прямой с лучом $[OA_{i+1})$ (рис. 13). Равнобедренность треугольника OA_iA_{i+1} и $(A_iA_{i+1}) \parallel (B_iC_{i+1})$ дают равнобедренность треугольника OB_iC_{i+1} , откуда $\widehat{OC_{i+1}B_i} < 90^\circ$. Поэтому для смежного угла справедливо $\widehat{B_iC_{i+1}B_{i+1}} > 90^\circ$ и в тупоугольном треугольнике $B_iC_{i+1}B_{i+1}$ получим соотношение для сторон $|B_iB_{i+1}| > |B_iC_{i+1}| \geq |A_iA_{i+1}|$. Последнее неравенство выполняется, поскольку коэффициент подобия треугольников OB_iC_{i+1} и OA_iA_{i+1} равен $k_i = |OB_i|/|OA_i| \geq 1$. Таким образом, для всей длины ломаной z получили оценку

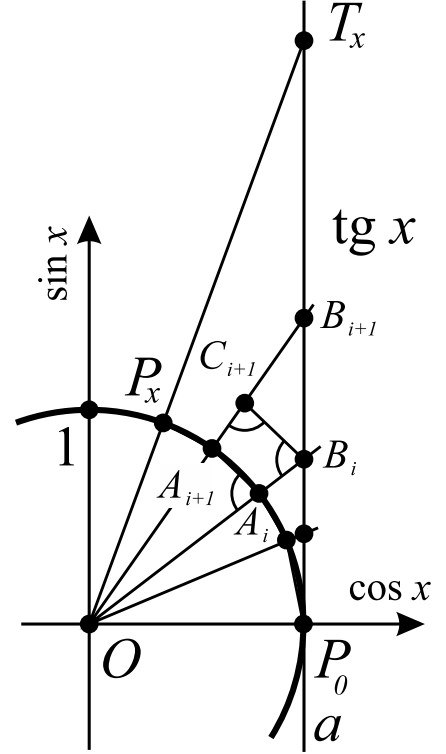


Рис. 13

$$l(z) = \sum_{i=1}^n |A_iA_{i+1}| < \sum_{i=1}^n |B_iB_{i+1}| = |P_0T_x| = \operatorname{tg} x.$$

Эта оценка дает нам, что $\operatorname{tg} x$ — это одна из верхних границ для числового множества $\{l(z) : z \text{ — простая ломаная, вписанная в } P_0P_x\}$ и по определению длины дуги из равенства $x = l(\overset{\sim}{P_0P_x})$ получим $x \leq \operatorname{tg} x$.

Теорема 3.2. Верно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Для всех $x \in (0; \pi/2)$ верно, что x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ — положительные числа, поэтому на этом множестве двойное неравенство из предыдущей леммы можно преобразовать следующим образом

$$\sin x < x \leq \operatorname{tg} x \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \cos x - 1 \leq \frac{\sin x}{x} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x.$$

Теперь, последовательно используя формулу косинуса двойного угла (для $2 \cdot \frac{x}{2}$), условие $\sin(x/2) \in (0; 1)$ и первое неравенство предыдущей леммы, получаем оценку сверху: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x$. В результате, для всех $x \in (0; \pi/2)$ выполнено двойное неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x. \quad (*)$$

Учтем, что функции $\frac{\sin x}{x}$ и $|x|$ являются четными, поэтому неравенство $(*)$ можно продолжить на симметричное множество, а именно

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) = \check{O}_{\frac{\pi}{2}}(0) \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < |x|. \quad (**)$$

Далее докажем по третьему определению предела функции (т.е. на языке $\varepsilon - \delta$), что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем в качестве $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Тогда для всех $x \in \check{O}_{\delta}(0)$ можно применить $(**)$ и получить, что

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < |x| < \delta \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

■

3.4. Второй замечательный предел

Сначала обсудим, что такое бесконечные пределы и предел функции на бесконечности. Для этого нам понадобится несколько определений.

Определение. Для произвольного действительного числа $r \in \mathbb{R}$ будем называть r -окрестностью бесконечности (соответственно минус бесконечности) множество $O_r(\infty) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > r\} = (r; \infty)$ ($O_r(-\infty) = (-\infty; r)$).

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $D(f) = A$ — не ограниченное сверху (соответственно снизу) множество. Будем считать, что $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ($a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$), если для любой $O_\varepsilon(a)$ найдется хотя бы одна $O_r(\infty)$ ($O_r(-\infty)$) такая, что для всех $x \in A \cap O_r(\infty)$ ($x \in A \cap O_r(-\infty)$) выполняется, что $f(x) \in O_\varepsilon(a)$ (рис. 14).

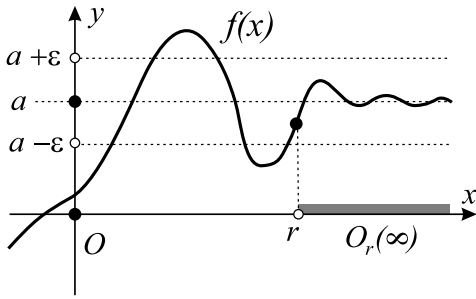


Рис. 14

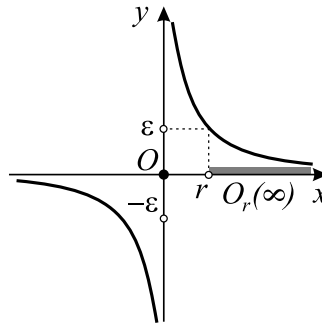


Рис. 15

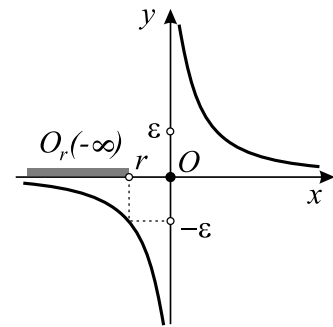


Рис. 16

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Докажем по определению, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем в качестве $r = 1/\varepsilon$ (рис. 15). Тогда для любого $x \in O_r(\infty)$ выполняется $x > 1/\varepsilon$ или $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. Последнее означает, что $\frac{1}{x} \in O_\varepsilon(0)$ и мы проверили, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Пример 2. Также по определению установим, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем в качестве $r = -1/\varepsilon$ (рис. 16). Тогда для любого $x \in O_r(-\infty)$ выполняется $x < -1/\varepsilon < 0$ или $-\varepsilon < \frac{1}{x} < 0$. Последнее означает, что $\frac{1}{x} \in O_\varepsilon(0)$ и мы проверили, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

С последовательностями, которые сходятся к бесконечности, мы уже встречались: обозначение $n \rightarrow \infty$ стало для нас привычным. В общем случае, сходимость последовательности к ∞ или к $-\infty$ определяется так.

Определение. Пусть $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), если для любой $O_r(\infty)$ ($O_r(-\infty)$) существует хотя бы один номер $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ выполняется, что $x_n \in O_r(\infty)$ ($x_n \in O_r(-\infty)$).

Ожидаемой является связь пределов функций с пределами последовательностей на бесконечности (или минус бесконечности).

Лемма 4.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $D(f) = A$ — не ограниченное сверху (соответственно снизу) множество. Тогда $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ($a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) $\Leftrightarrow$ для любой последовательности $\{x_n\} \subseteq A$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), выполняется, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Доказательство. Аналогично доказательству $\text{II} \Rightarrow \text{IV}$ и $\text{IV} \Rightarrow \text{I}$ теоремы 1.1.





Сведение пределов функций к пределам последовательностей позволяет (как это сделано в теореме 2.1) перенести арифметические операции с пределами последовательностей на пределы функций $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ на бесконечности (или минус бесконечности). Важно только потребовать, чтобы множество $A \cap B$ было также не ограничено сверху (или снизу — для пределов на минус бесконечности).

Пример 3. Найдем предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x-3x^2}{x^2+2x+5}$. Поспешная попытка перейти к пределу в числителе и знаменателе приведет к неопределенности типа $-\infty : \infty$. Поэтому сначала поделим на старшую степень переменной (т.е. на x^2) числитель и знаменатель и перейдем к пределу в них, несколько раз используя результат первого примера:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x-3x^2}{x^2+2x+5} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 3}{1 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + 5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0+0-3}{1+0+0} = -3.$$

Еще один результат о последовательностях, который нам понадобится в доказательстве основной теоремы.

Лемма 4.2. Если $\{y_k\} \subseteq \mathbb{N}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} = e$.

Доказательство. Вспомним, что $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (по теореме 3.5 предыдущей главы) и последовательность $\{x_n\}$, которая задается формулой $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, строго возрастает (обозначим это утверждение через $(*)$).

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ по $(*)$ найдем такой номер N , что при всех $n > N$ выполняется двойное неравенство $e - \varepsilon < x_n < e$ $(**)$.

Теперь воспользуемся $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \infty$ и для $O_N(\infty) = (N; \infty)$ найдем такой номер $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k > K$ выполняется $y_k \in O_N(\infty)$, поэтому $y_k > N$ и можно применить $(**)$ (не будем забывать, что $y_k \in \mathbb{N}$ и $\{x_n\} \nearrow$):

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{N+1}\right)^{N+1} \leq \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} < e.$$

Последнее означает, что $\left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} \in O_\varepsilon(e)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} = e$. ■

Полезный критерий существования предела функции при $x \rightarrow x_0$ можно сформулировать через *односторонние* пределы при $x \rightarrow x_0 + 0$ (в этом случае говорят, что x сходится к x_0 *справа*) и $x \rightarrow x_0 - 0$ (т.е. x сходится к x_0 *слева*).



Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in A'$. Будем считать, что $a = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ (соответственно $a = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$), если для любой $O_\varepsilon(a)$ существует такая $O_\delta(x_0)$, что при всех $x \in A \cap \check{O}_\delta(x_0)$ и $x > x_0$ ($x < x_0$) следует, что $f(x) \in O_\varepsilon(a)$.

Обратите внимание, что x выбирается только из правой (соответственно левой) половины $\check{O}_\delta(x_0)$. В первом параграфе этой главы мы доказали, что функция знака $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$. Но эта функция имеет оба односторонних предела. По определению быстро доказывается, что для нее $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -1$ (здесь $x_0 = 0$). Теперь ясна необходимость в следующем критерии.

Лемма 4.3. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in A'$. Тогда существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow$ существуют оба односторонних предела ($\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$) и они равны между собой.

Доказательство. $\Rightarrow$) очевидно, поскольку из $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ сразу следует, что $a = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $a = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

$\Leftarrow$) пусть теперь $a = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $a = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$. Тогда для произвольной $O_\varepsilon(a)$ два раза распишем определение односторонних пределов и

найдем такую $O_{\delta_1}(x_0)$, что при всех $x \in A \cap \check{O}_{\delta_1}(x_0)$ и $x > x_0$ следует, что $f(x) \in O_\varepsilon(a)$ (*);

также найдем такую $O_{\delta_2}(x_0)$, что при всех $x \in A \cap \check{O}_{\delta_2}(x_0)$ и $x < x_0$ следует, что $f(x) \in O_\varepsilon(a)$ (**).

Теперь положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда из (*) и (**) имеем, что для всех $x \in A \cap \check{O}_\delta(x_0)$ следует, что $f(x) \in O_\varepsilon(a)$ и мы доказали, что $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. ■

Каждое из трех равенств следующей теоремы называется *вторым замечательным пределом* (или 2ЗП).

Теорема 4.4. Выполняются следующие равенства:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$



Доказательство. 1) рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, для которой верно $x_n \rightarrow \infty$. Можно считать, что $x_n \geq 1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, из $x_n \rightarrow \infty$ для $O_1(\infty) = (1; \infty)$ можно найти такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ следует, что $x_n \in O_1(\infty)$, т.е. $x_n > 1$. Ясно также, что предел последовательности не зависит от первых ее N членов (т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к a тогда и только тогда, когда при отбрасывании конечного количества ее членов, получается подпоследовательность, которая сходится к a).

Определим теперь $y_n = [x_n]$ — целая часть числа x_n при всех $n \in \mathbb{N}$. Из определения целой части числа сразу получим $y_n \leq x_n < y_n + 1$ (*). Учитывая нашу договоренность (что $\{x_n\} \subseteq [1; \infty)$), получим $\{y_n\} \subseteq \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ и по лемме 4.2 выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e$ (**).

Из (*) и положительности рассматриваемых чисел, получим

$$y_n \leq x_n < y_n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y_n + 1} < \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{y_n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{y_n}. \quad (***)$$

Теперь воспользуемся строгим возрастанием показательной функции $f(x) = a^x$ при $a > 1$ (что будет доказано в этой главе без использования 23П), строгим возрастанием степенной функции $g(x) = x^q$ при $q > 0$ на множестве $x \in (0; \infty)$ и тем, что в каждой части итогового неравенства (***) все выражения принимают значения больше 1. Поэтому из

$$1 < 1 + \frac{1}{y_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{y_n} \quad \text{и} \quad 1 \leq y_n \leq x_n < y_n + 1 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{y_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n + 1}. \quad (\heartsuit)$$

Найдем, используя (**), два предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)^{y_n + 1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n + 1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Применяя П2П, из ($\heartsuit$) получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, что по лемме 4.1

дает $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.



2) сразу сделаем замену $y = -x$, тогда из $x \rightarrow -\infty$ получим $y \rightarrow \infty$ и можно воспользоваться предыдущим результатом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

3) на этот раз сделаем замену $y = \frac{1}{x}$ и найдем два односторонних предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Осталось применить лемму 4.3 и получить, что $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

■

3.5. Непрерывность функции в точке и на множестве

Напомним, что понятие $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ определялось только если x_0 — предельная точка области определения функции $f(x)$, поэтому следующее определение состоит из двух частей.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in A$. Если x_0 — изолированная точка $A = D(f)$, то $f(x)$ считается непрерывной в этой точке. В случае $x_0 \in A'$ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $B \subseteq A$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Функция $f(x)$ называется непрерывной, если она непрерывна на всём множестве $A = D(f)$.

Пример 1. Пусть $f(x) = 0$ при всех $x \neq 0$ и $f(0) = 1$. Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$ и эта функция разрывна в $x_0 = 0$. Во всех остальных точках она непрерывна.

Пример 2. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — произвольный многочлен. Было доказано, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ (см. первый пример второго параграфа), поэтому $f(x)$ — непрерывная функция.



Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ и произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Оценим для каждого $x \in O_\delta(x_0)$ (т.е. $|x - x_0| < \delta$) разность

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\sin x - \sin x_0| = 2 \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| < \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

В первом неравенстве мы использовали то, что модуль косинуса не превосходит единицы, а во втором — первой оценкой из леммы 3.1. В результате, мы по определению проверили, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ и синус является непрерывной функцией.

Установим простой критерий непрерывности функции в точке через последовательности.

Лемма 5.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in A$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow$ для каждой последовательности $\{x_n\} \subseteq A$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Доказательство. $\Rightarrow$) рассмотрим два случая.

1-й случай: x_0 — изолированная точка A . Тогда найдется такая окрестность $O_\delta(x_0)$, что $\check{O}_\delta(x_0) \cap A = \emptyset$. Теперь рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subseteq A$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Для $O_\delta(x_0)$ найдется номер N , что при всех $n > N$ выполняется $x_n \in O_\delta(x_0) \cap A = \{x_0\}$, т.е. $x_n = x_0$. Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

2-й случай: $x_0 \in A'$. Используя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для произвольной $O_\varepsilon(f(x_0))$ найдем такую $O_\delta(x_0)$, что $f(A \cap O_\delta(x_0)) \subseteq O_\varepsilon(f(x_0))$ (*). Мы не стали прокалывать $O_\delta(x_0)$, поскольку очевидно, что $f(x_0) \in O_\varepsilon(f(x_0))$. Теперь рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subseteq A$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Для $O_\delta(x_0)$ найдется номер N , что при всех $n > N$ выполняется включение $x_n \in O_\delta(x_0)$, тогда из (*) следует, что $f(x_n) \in O_\varepsilon(f(x_0))$. Мы доказали, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

$\Leftarrow$) снова рассмотрим два случая.

1-й случай: x_0 — изолированная точка A . Тогда по определению $f(x)$ непрерывна в этой точке.



2-й случай: $x_0 \in A'$. Рассмотрим любую (последовательность Гейне) $\{x_n\} \subseteq A \setminus \{x_0\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. По данному нам условию выполняется, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Тогда, используя определение предела функции по Гейне (определение IV), получим $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

■

Теорема 5.2. 1) пусть обе функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in A \cap B$, тогда

- а) функции $f + g$ и $f - g$ непрерывны в точке x_0 ;
- б) для любой константы $k \in \mathbb{R}$ функция $k \cdot f(x)$ непрерывна в x_0 ;
- в) функция $f \cdot g$ непрерывна в точке x_0 ;
- г) если $g(x_0) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке x_0 .

2) если $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$, $f(A) \subseteq C$ и $h : C \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $h \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. 1) если x_0 — изолированная точка множества $A \cap B$, то непрерывность в (а)–(г) следует из определения. Пусть теперь $x_0 \in (A \cap B)'$. Тогда из свойств пределов функций относительно арифметических операций (теорема 2.1) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Мы проверили непрерывность суммы функций в точке x_0 . Аналогично доказываются остальные утверждения в (а)–(г).

2) рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subseteq A$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. По предыдущей лемме получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Обозначим через $y_n = f(x_n)$ и $y_0 = f(x_0)$. Поскольку $\{y_n\} \subseteq C$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ и функция $h(y)$ непрерывна в точке y_0 , мы снова можем применить ту же лемму и получить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = h(y_0)$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} h(f(x_n)) = h(f(x_0))$. Наконец, в третий раз применяя предыдущую лемму (только теперь в обратную сторону), находим, что композиция $h \circ f$ непрерывна в точке x_0 .

■

Следствие. Функции $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны на своей области определения.

Доказательство. Одна из формул приведения нам дает представления для косинуса: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Теперь непрерывность косинуса следу-



ет из непрерывности линейной функции и непрерывности синуса (второй и третий примеры этого параграфа). Непрерывность $\operatorname{tg} x = \sin / \cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$ на своих областях определения следует из (1г) предыдущей теоремы. ■

Следующее утверждение называется *теоремой Коши о нуле*.

Теорема 5.3. Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой $f(a) \cdot f(b) < 0$ (т.е. на концах отрезка функция принимает значения разных знаков), то существует такое число $x_0 \in (a; b)$, что $f(x_0) = 0$.

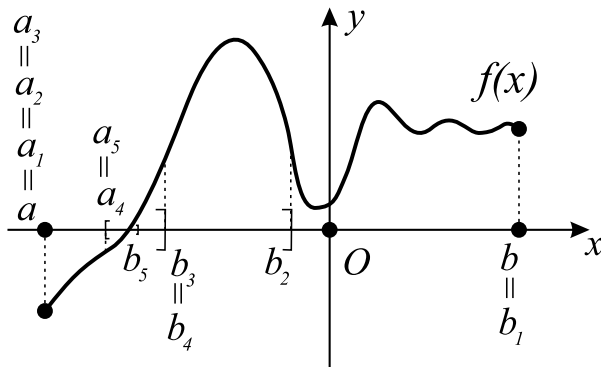


Рис. 17

Доказательство. О/п: предположим, что $f(x) \neq 0$ при всех $x \in [a; b]$. Б.о.о. можно считать, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (рис. 17). Иначе можно перейти к рассмотрению функции $g(x) = -f(x)$ с нужным свойством.

Докажем индукцией по $n \in \mathbb{N}$ утверждение $T(n)$: найдутся такие отрезки $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $\dots$, $[a_n; b_n]$, что каждый следующий является половиной предыдущего, а также для лю-

бых натуральных $i \leq n$ выполняется $f(a_i) < 0$ и $f(b_i) > 0$.

Б.И. В качестве отрезка $[a_1; b_1]$ возьмем отрезок $[a; b]$. Затем выберем его середину $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Учитывая, что $c_1 \in (a; b)$, по нашему предположению $f(c_1) \neq 0$. Если $f(c_1) > 0$, то по определению будем считать, что $[a_2; b_2] = [a_1; c_1]$. Если же $f(c_1) < 0$, то в качестве отрезка $[a_2; b_2]$ возьмем отрезок $[c_1; b_1]$. Условия $T(2)$ выполняются.

Ш.И. Если отрезки $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $\dots$, $[a_n; b_n]$ с нужными свойствами уже существуют, применим рассуждения базы к отрезку $[a_n; b_n]$ и определим в качестве $[a_{n+1}; b_{n+1}]$ ту из его половин, для которой $f(a_{n+1}) < 0$ и $f(b_{n+1}) > 0$. Шаг индукции доказан.

В результате индуктивных рассуждений мы получим стягивающуюся последовательность отрезков $\{[a_n; b_n]\}$ (на рис. 17 приведена первая пятерка из этой последовательности). Применив к этой последовательности лемму Кантора (лемма 6.1 из предыдущей главы), получим точку x_0 , для которой выполняются равенства: $\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i] = \{x_0\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$.



Последние два равенства, непрерывность $f(x)$ в точке x_0 и лемма 5.1 нам дают, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x_0)$. Теперь осталось перейти в неравенствах $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ к пределу (это можно сделать по теореме 5.1 из предыдущей главы) и получить $f(x_0) \leq 0$ и $f(x_0) \geq 0$, откуда $f(x_0) = 0$. Итак, $x_0 \in [a; b]$ и $f(x_0) = 0$. $\nearrow$

Теорема Коши имеет много полезных следствий, первое из которых — *обобщенный метод интервалов*. Он применяется не только для многочленов или дробно-рациональных функций, но и для функций достаточно общего вида.

Следствие 1. Пусть множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ содержит все нули функции $f(x)$, точки разрыва (т.е. точки, не являющиеся точками непрерывности) и точки, в которых она не определена. Также будем считать, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Тогда на каждом из промежутков $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $\dots$, $(x_{n-1}; x_n)$, $(x_n; \infty)$ функция $f(x)$ знакопостоянна (т.е. принимает значения только одного знака).

Доказательство. О/п: нашелся промежуток, в котором можно выбрать такие точки a и b , что $f(a) \cdot f(b) < 0$. Б.о.о. считаем, что $a < b$. Тогда отрезок $[a; b]$ содержится в выбранном промежутке, на нем функция $f(x)$ определена и непрерывна. Применяя предыдущую теорему, найдем такую точку $x_0 \in (a; b)$, для которой $f(x_0) = 0$. Но $x_0 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. $\nearrow$

Следующий результат в математическом анализе принято называть *теоремой о промежуточном значении*.

Следствие 2. Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то она принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Если $f(a) = f(b)$, то утверждение очевидно. Б.о.о. считаем, что $f(a) < f(b)$ и выберем произвольное число $y_0 \in (f(a); f(b))$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - y_0$. Функция $g(x)$ непрерывна (по теореме 5.2) как разность непрерывной функции и константы. Кроме того, $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ и $g(b) = f(b) - y_0 > 0$. Осталось применить теорему Коши и обнаружить такую точку $x_0 \in (a; b)$, для которой верно $f(x_0) - y_0 = g(x_0) = 0$, что дает $y_0 = f(x_0) \in E(f)$ (напомним, что $E(f)$ — множество всех значений функции f). $\blacksquare$



Следующее утверждение называется *теоремой Брауэра¹ о неподвижной точке*.

Следствие 3. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — такая непрерывная функция, для которой $f([a; b]) \subseteq [a; b]$. Тогда найдется такая точка $x_0 \in [a; b]$, что $f(x_0) = x_0$.

Доказательство. Если $f(a) = a$ или $f(b) = b$, то в качестве x_0 можно выбрать один из концов этого отрезка. Далее считаем, что $f(a) \neq a$ и $f(b) \neq b$. По условию $f([a; b]) \subseteq [a; b]$, поэтому последние неравенства превращаются в $a < f(a)$ и $f(b) < b$. Теперь рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - x$. Функция $g(x)$ непрерывна (по теореме 5.2) как разность непрерывной функции и многочлена первой степени. Кроме того, $g(a) = f(a) - a > 0$ и $g(b) = f(b) - b < 0$. Осталось применить теорему Коши и обнаружить такую точку $x_0 \in (a; b)$, для которой $f(x_0) - x_0 = g(x_0) = 0$, что дает $f(x_0) = x_0$.

■

3.6. Строго монотонные функции и их обратные

Напомним некоторые понятия, которые обсуждались в десятом классе. Для функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ *обратной* называется такая функция $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнены два условия: $B = E(f) = f(A)$ и для каждого $x \in A \Rightarrow g(f(x)) = x$. Заметим, что из этого определения следует, что $g(B) = A$ и для любого $y \in B \Rightarrow f(g(y)) = y$. Для обратной функции мы использовали обозначение $g = f^{-1}$. Из сделанного замечания сразу следует, что $g^{-1} = f$. В теории множеств для произвольного соответствия $\varphi : X \rightarrow Y$ также использовалось похожее обозначение φ^{-1} для обратного соответствия, которое задавалось правилом: $(a, b) \in \varphi \Leftrightarrow (b, a) \in \varphi^{-1}$. Эти обозначения согласованы между собой, поскольку любая функция — это множество упорядоченных пар вида $(x_0, f(x_0))$, и $(x_0, f(x_0)) \in f \Leftrightarrow g(f(x_0)) = x_0$, т.е. $(f(x_0), x_0) \in g$. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обратимой*, если на

¹Лейтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966) — голландский математик, профессор (1912–1951) Амстердамского университета; работы относятся к конструктивной логике, основаниям математики, топологии; оказал существенное влияние на развитие топологии в 20–30 годы; дал строгое топологическое определение размерности, доказал теорему Жордана для случая n -мерного сферического пространства, лежащего в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве; доказал теорему о неподвижной точке; член Лондонского королевского общества с 1948 года.



множестве $B = E(f)$ существует функция, обратная к f . В десятом классе был установлен простой критерий обратимости: для функции f существует обратная $\Leftrightarrow f$ — инъективное соответствие. При этом $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется *инъективной*, если при любых $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in A = D(f)$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Пример 1. Для функции $f(x) = x^2|_{x \leq 0}$ обратной функцией будет $g(x) = -\sqrt{x}$. Действительно, $E(f) = [0; \infty) = D(g)$ и для каждого $x \leq 0$ выполняется $g(f(x)) = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x$.

Для нахождения обратной для функции, которая задается формулой, достаточно поменять местами переменные x и y и из полученного соотношения выразить y через x .

Пример 2. Для функции $f(x) = ax + b$ (при $a \neq 0$) найдем обратную функцию. От уравнения $y = ax + b$ перейдем к $x = ay + b$, откуда $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ и $g(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ — искомая обратная функция. Ясно, что $E(f) = \mathbb{R} = D(g)$ и для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$g(f(x)) = \frac{1}{a}(ax + b) - \frac{b}{a} = x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = x.$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая задается формулой $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ и найдем для нее обратную. Заметим, что $f(x)$ строго возрастает на этом отрезке, будучи композицией двух строго возрастающих функций и $f([0; 1]) = [0; \sqrt{2}]$. На множестве $[0; \sqrt{2}]$ найдем функцию $g = f^{-1}$, рассмотрев сначала уравнение $x = \sqrt{y^2 + y}$, из которого при $x \geq 0$ получим $y^2 + y - x^2 = 0$ и две зависимости $y = -1 \pm \sqrt{1 + 4x^2}$. Искомой будет строго возрастающая $g(x) = -1 + \sqrt{1 + 4x^2}$ на отрезке $[0; \sqrt{2}]$.

При рассмотрении предыдущего примера могли возникнуть несколько вопросов. Является ли квадратный корень непрерывной функцией, чтобы можно было воспользоваться теоремой о промежуточном значении и получить $E(f) = [0; \sqrt{2}]$? Почему из двух зависимостей мы выбрали ту, которая задает строго возрастающую функцию? Ответы будут даны в следующей теореме. Напомним, что из курса геометрии следует, что *промежутком* на прямой является любое ее выпуклое подмножество, и семейство всех промежутков на прямой полностью исчерпывается следующими типами множеств: отрезок, полуинтервал, интервал, луч, луч без вершины и вся прямая.

Теорема 6.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — строго монотонная и непрерывная функция, а множество A является промежутком. Тогда

1) f обратима;



- 2) $B = f(A)$ также является промежутком;
- 3) функция $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, которая обратна к f , имеет тот же характер монотонности;
- 4) функция g непрерывна;
- 5) графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$.

Доказательство. Б.о.о. считаем, что f строго возрастает на A .

1) достаточно проверить инъективность f , для чего выберем различные $x_1, x_2 \in A$. При $x_1 < x_2$ получим $f(x_1) < f(x_2)$, а при $x_2 < x_1$ получим $f(x_2) < f(x_1)$. Поэтому из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$ и f обратима.

2) выберем произвольные точки $y_1, y_2 \in B$ и будем для определенности считать, что $y_1 \leq y_2$. Из $B = f(A)$ найдем такие $x_1, x_2 \in A$, что $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Условие $f \nearrow$ дает, что $x_1 \leq x_2$. Выпуклость множества A (так как по условию A — промежуток) обеспечивает включение $[x_1; x_2] \subseteq A$, поэтому $f(x)$ определена на всём этом отрезке и непрерывна на нем. Применяя теорему о промежуточном значении, получим, что $[y_1; y_2] \subseteq E(f) = B$. В результате, B — выпуклое множество, т.е. промежуток.

3) докажем, что $g \nearrow$. О/п: нашлись такие два числа $y_1, y_2 \in B$, что $y_1 < y_2$, но $x_1 = g(y_1) \geq g(y_2) = x_2$. Учитывая $f \nearrow$, из неравенства $x_1 \geq x_2$ получим $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.е. $y_1 \geq y_2$. $\nearrow \times$.

4) установим непрерывность g в произвольной точке $y_0 \in B$. Сразу обозначим через $x_0 = g(y_0)$ и рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(x_0)$. Достаточно рассмотреть два случая.

1-й случай: x_0 — внутренняя точка A . Тогда найдется такое положительное $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, что $[x_0 - \varepsilon_1; x_0 + \varepsilon_1] = B_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq A$ (рис. 18). Обозначим через $x_1 = x_0 - \varepsilon_1$ и $x_2 = x_0 + \varepsilon_1$, тогда $x_1, x_2 \in A$ и из $x_1 < x_0 < x_2$ и $f \nearrow$ мы получим

$$y_1 = f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2) = y_2.$$

Теперь обозначим через $\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} > 0$ и покажем, что оно искомое. Действительно, для любого $y \in O_\delta(y_0)$ будет выполняться двойное неравенство $y_1 < y < y_2$ и уже доказанное условие $g \nearrow$ нам даст цепочку $x_1 = g(y_1) < g(y) < g(y_2) = x_2$, поэтому $g(y) \in O_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq O_\varepsilon(x_0)$. Мы проверили непрерывность $g(y)$ в точке y_0 .

2-й случай: x_0 — граничная точка A . Учитывая, что A — промежуток, получаем, что $x_0 = \max A$ или $x_0 = \min A$. Б.о.о. будем считать, что $x_0 = \max A$ (рис. 19), тогда из $g \nearrow$ следует, что $y_0 = \max B$. Найдем такое



положительное $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$, что $x_1 = x_0 - \varepsilon_1 \in A$. Из $x_1 < x_0$ и $f \nearrow$ получим, что $y_1 = f(x_1) < f(x_0) = y_0$. Положим $\delta = y_0 - y_1$ и докажем, что оно искомое. Действительно, для любого $y \in O_\delta(y_0) \cap B = (y_1; y_0]$ будет выполняться двойное неравенство $y_1 < y \leq y_0$ и уже доказанное условие $g \nearrow$ нам даст $x_1 = g(y_1) < g(y) \leq g(y_0) = x_0$, поэтому $g(y) \in O_{\varepsilon_1}(x_0) \subseteq O_\varepsilon(x_0)$. Непрерывность $g(y)$ в точке y_0 доказана.

Мы не рассмотрели случай одноточечных множеств A и B , т.е. они имеют вид $A = \{x_0\}$ и $B = \{y_0\}$. Но тогда y_0 является изолированной точкой множества B и непрерывность функции g очевидна.

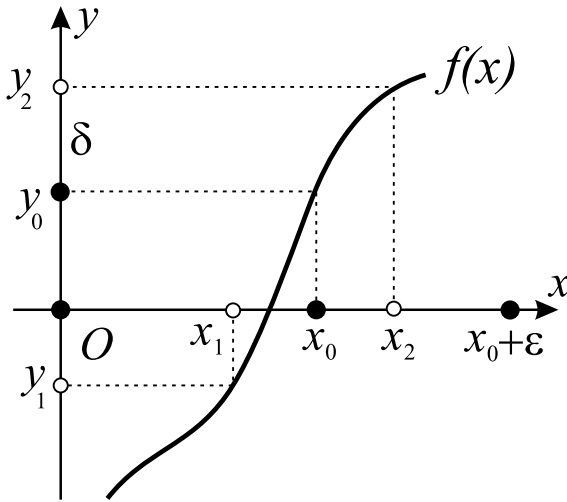


Рис. 18

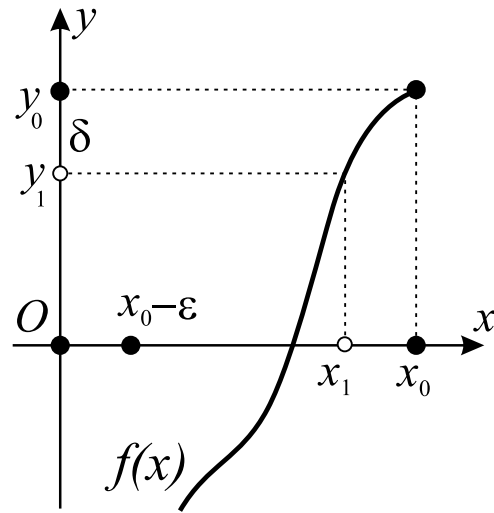


Рис. 19

5) вспомним, что множество $\Gamma(f) = \left\{ (x, f(x)) : x \in A \right\}$ называется графиком функции f . В начале параграфа мы заметили, что $(x_0, y_0) \in \Gamma(f) \Leftrightarrow (y_0, x_0) \in \Gamma(g)$. Очевидно, что точки (x_0, y_0) и (y_0, x_0) симметричны относительно прямой l , содержащей биссектрису первого и третьего координатных углов, т.е. задающейся уравнением $y = x$. Отсюда $S_l(\Gamma(f)) = \Gamma(g)$. ■

Следствие. Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ и $\text{arcctg} x$ являются непрерывными на своих областях определения.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы и следствия из теоремы 5.2. ■



3.7. Непрерывные функции на отрезке

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ и $B \neq \emptyset$. Функция f ограничена на B , если найдутся такие два числа $m, M \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in B$ следует, что $m \leq f(x) \leq M$. Функция f называется ограниченной, если она ограничена на $A = D(f)$.

Следующее утверждение называется *первой теоремой Вейерштрасса*.

Теорема 7.1. Любая непрерывная функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ является ограниченной.

Доказательство. Сразу используем определение непрерывности функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in [a; b]$ и распишем его для $\varepsilon = 1$ (настроит любое фиксированное положительное ε). Итак, для x_0 и $O_1(f(x_0))$ найдется такая $O_{\delta(x_0)}(x_0)$, что для любого $x \in [a; b] \cap O_{\delta(x_0)}(x_0)$ следует, что $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$. Для каждой точки x_0 будет подбираться своя окрестность с таким свойством (поэтому радиусы могут отличаться) и все они образуют $\{O_{\delta(x_0)}(x_0) : x_0 \in [a; b]\}$ — открытое покрытие отрезка $[a; b]$. Применив к этому покрытию лемму Гейне-Бореля-Лебега (лемма 6.3), найдем его конечное подпокрытие, т.е. такое конечное семейство

$$\{O_{\delta(x_1)}(x_1), O_{\delta(x_2)}(x_2), \dots, O_{\delta(x_n)}(x_n)\},$$

которое по-прежнему покрывает $[a; b]$.

Теперь определим две константы:

$$m = \min_{i=1}^n \{f(x_i) - 1\}, \quad M = \max_{i=1}^n \{f(x_i) + 1\}.$$

Докажем, что m и M являются искомыми границами. Выберем произвольную точку $x \in [a; b]$ и по определению покрытия найдем такое $k \leq n$, что $x \in O_{\delta(x_k)}(x_k)$. Выбор констант m , M и окрестности $O_{\delta(x_k)}(x_k)$ дает цепочку неравенств:

$$m \leq f(x_k) - 1 < f(x) < f(x_k) + 1 \leq M,$$

откуда $D(f) = f([a; b]) \subseteq [m; M]$, т.е. f — ограниченная функция. ■

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $B \neq \emptyset$ и функция $f(x)$ ограничена на B . Действительные числа $m(f, B) = \inf\{f(x) : x \in B\}$ и $M(f, B) = \sup\{f(x) : x \in B\}$ называются (соответственно) минимальным



и максимальным значениями $f(x)$ на множестве B . Если найдется такое $x_1 \in B$ (соответственно $x_2 \in B$), что $f(x_1) = M(f, B)$ ($f(x_2) = m(f, B)$), то говорят, что функция f достигает своего максимального (минимального) значения на множестве B .

Пример 1. Если $f(x) = 1/x$ и $B = (1; \infty)$, то $f(x)$ ограничена на B , причем $m(f, B) = 0$ и $M(f, B) = 1$. Очевидно, что $f(x)$ не достигает на B ни своего максимального (из-за $f \searrow_B$, при всех $x \in B$ следует, что $f(x) < 1$), ни минимального (так как уравнение $1/x = 0$ не имеет решений) значения.

Следующее утверждение называется *второй теоремой Вейерштрасса*.

Теорема 7.2. Любая непрерывная функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ достигает и свое максимальное, и минимальное значение.

Доказательство. Из первой теоремы Вейерштрасса следует ограниченность f , поэтому существуют $M^* = M(f, [a; b])$ и $m^* = m(f, [a; b])$.

I. Докажем, что найдется такое число $x_1 \in [a; b]$, что $f(x_1) = M^*$. О/п: при всех $x \in [a; b]$ выполняется $f(x) < M^*$. Тогда рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \frac{1}{M^* - f(x)}$. Эта функция положительна на $[a; b]$ и непрерывна на нем (по теореме 5.2). По первой теореме Вейерштрасса для $g(x)$ можно найти такую константу $C > 0$, что для всех $x \in [a; b]$ выполняется $g(x) < C$. Учитывая, что $C > 0$ и $M^* - f(x) > 0$, для всех $x \in [a; b]$ получим

$$\frac{1}{M^* - f(x)} < C \Leftrightarrow \frac{1}{C} < M^* - f(x) \Leftrightarrow f(x) < M^* - \frac{1}{C} < M^*.$$

В результате, мы нашли верхнюю границу $M^* - \frac{1}{C}$ для множества $E(f)$, которая строго меньше M^* . Это противоречит определению константы M^* , ведь $M^* = \sup\{f(x) : x \in [a; b]\}$.

II. Докажем, что найдется такое число $x_2 \in [a; b]$, что $f(x_2) = m^*$. О/п: при всех $x \in [a; b]$ выполняется $f(x) > m^*$. Тогда рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = \frac{1}{f(x) - m^*}$. Эта функция положительна на $[a; b]$ и непрерывна на нем (по теореме 5.2). По первой теореме Вейерштрасса для $h(x)$ можно найти такую константу $D > 0$, что для всех $x \in [a; b]$ выполняется $h(x) < D$. Учитывая, что $D > 0$ и $f(x) - m^* > 0$, для всех $x \in [a; b]$ получим

$$\frac{1}{f(x) - m^*} < D \Leftrightarrow \frac{1}{D} < f(x) - m^* \Leftrightarrow f(x) > m^* + \frac{1}{D} > m^*.$$



В результате, мы нашли нижнюю границу $m^* + \frac{1}{D}$ для множества $E(f)$, которая строго больше m^* . Это противоречит определению константы m^* , ведь $m^* = \inf\{f(x) : x \in [a; b]\}$.

■

Следствие. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x)$ — непрерывная функция, тогда $E(f) = [m^*; M^*]$, где $M^* = M(f, [a; b])$ и $m^* = m(f, [a; b])$.

Доказательство. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса (а также теорема 3.1 из предыдущей главы) дают существование m^* , M^* и таких чисел $x_1, x_2 \in [a; b]$, что $f(x_1) = M^*$ и $f(x_2) = m^*$. Ясно, что из определения констант m^* , M^* следует, что $E(f) \subseteq [m^*; M^*]$. Проверим обратное включение $[m^*; M^*] \subseteq E(f)$. Б.о.о. будем считать, что $x_1 \leq x_2$. На отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна, поэтому по теореме о промежуточном значении (следствие 2 из теоремы 5.3) получим, что $[m^*; M^*] \subseteq f([x_1; x_2]) \subseteq E(f)$.

■

Упражнения

1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $f(x)$ непрерывна на A . Докажите, что f обратима тогда и только тогда, когда она строго монотонна.
2. Пусть K — компакт в $\mathbb{R}$ (определение см. на стр. 85). Докажите, что если $f(x)$ — непрерывная на K функция, то $f(K)$ также является компактом в $\mathbb{R}$.
3. Выведите из предыдущего упражнения первую и вторую теоремы Вейерштрасса.

3.8. Степень с рациональным показателем

Сначала определим степень с целым показателем.

Определение. 1) для любого $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ считаем, что $a^1 = a$ и $a^{n+1} = a^n \cdot a$;

2) для любого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$ считаем, что $a^0 = 1$ и $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

В следующем утверждении описываются алгебраические свойства степеней с целым показателем.

Теорема 8.1. Для любых $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $p, q \in \mathbb{Z}$ выполняются:

- 1) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$;
- 2) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
- 3) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Доказательство. Случаи $p = 0$ и/или $q = 0$ очевидно проверяются, поэтому далее считаем показатели p и q ненулевыми.



1) 1-й случай: $p = n \in \mathbb{N}$. Докажем это утверждение индукцией по n .

Б.И. выполняется, поскольку $(a \cdot b)^1 = ab = a^1 \cdot b^1$.

Ш.И. По определению и индуктивному предположению получим

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot a \cdot b = (a^n \cdot b^n) \cdot a \cdot b = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

2-й случай: $p = -n$, $n \in \mathbb{N}$. Используем определение отрицательной целой степени и результат первого случая:

$$(a \cdot b)^{-n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}.$$

2) 1-й случай: $p = n$, $q = k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Докажем это утверждение индукцией по k .

Б.И. очевидно следует из определения, поскольку $a^n \cdot a^1 = a^{n+1} = a^{n+k}$.

Ш.И. По определению и индуктивному предположению получим

$$a^n \cdot a^{k+1} = a^n \cdot (a^k \cdot a) = (a^n \cdot a^k) \cdot a = a^{n+k} \cdot a = a^{n+k+1} = a^{n+(k+1)}.$$

2-й случай: $p = n$, $q = -k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Линейность порядка на $\mathbb{N}$ позволяет нам рассмотреть три варианта расположения n и k . При $n = k$ имеем $a^n \cdot a^{-n} = a^n / a^n = 1 = a^0 = a^{n+(-n)}$. При $n > k$ число n можно представить в виде суммы двух натуральных чисел $n = (n - k) + k$ и воспользоваться первым случаем:

$$a^n \cdot a^{-k} = \frac{a^{n-k+k}}{a^k} = \frac{a^{n-k} \cdot a^k}{a^k} = a^{n-k} = a^{n+(-k)}.$$

При $n < k$ число k можно представить в виде суммы двух натуральных чисел $k = (k - n) + n$ и воспользоваться первым случаем:

$$a^n \cdot a^{-k} = \frac{a^n}{a^k} = \frac{a^n}{a^{(k-n)+n}} = \frac{a^n}{a^{k-n} \cdot a^n} = \frac{1}{a^{k-n}} = a^{n-k} = a^{n+(-k)}.$$

3-й случай: $p = -n$, $q = k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Из второго случая и коммутативности умножения и сложения на $\mathbb{R}$: $a^{-n} \cdot a^k = a^k \cdot a^{-n} = a^{k+(-n)} = a^{(-n)+k}$.

4-й случай: $p = -n$, $q = -k$, $n, k \in \mathbb{N}$. Из определения умножения на отрицательную целую степень и из первого случая имеем:

$$a^{-n} \cdot a^{-k} = \frac{1}{a^n \cdot a^k} = \frac{1}{a^{n+k}} = a^{-(n+k)} = a^{(-n)+(-k)}.$$

3) 1-й случай: $q = k$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем это утверждение индукцией по k .



Б.И. очевидна, поскольку $(a^p)^1 = a^p = a^{p \cdot 1}$.

Ш.И. По определению, индуктивному предположению и уже доказанному свойству (2), получим

$$(a^p)^{k+1} = (a^p)^k \cdot a^p = a^{pk} \cdot a^p = a^{pk+p} = a^{p(k+1)}.$$

2-й случай: $q = -k$, $k \in \mathbb{N}$. Определение отрицательной целой степени и предыдущий случай нам дают

$$(a^p)^{-k} = \frac{1}{(a^p)^k} = \frac{1}{a^{pk}} = a^{-pk} = a^{p \cdot (-k)}.$$

■

В следующей теореме установим *функциональные свойства степени с целым показателем*.

Теорема 8.2. 1) для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^n$ строго возрастает на множестве $[0; \infty)$.

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $g(x) = x^{-n}$ строго убывает на множестве $(0; \infty)$.

3) для любого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $a \geq 0$ найдется единственное такое число $b \geq 0$, что $b^n = a$;

4) для любого нечетного $n \in \mathbb{N}$ функция $f(x) = x^n$ строго возрастает на всей числовой прямой;

5) для любого нечетного $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $a \in \mathbb{R}$ найдется единственное такое число $b \in \mathbb{R}$, что $b^n = a$.

Доказательство. 1) выберем произвольные $x_1, x_2 \geq 0$, для которых $x_1 < x_2$. Используя формулу сокращенного умножения представим разность $f(x_2) - f(x_1)$ в виде произведения двух положительных чисел:

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2) снова выберем произвольные $x_1, x_2 > 0$, для которых $x_1 < x_2$. Уже доказано, что $x_1^n < x_2^n$, откуда $\frac{1}{x_2^n} < \frac{1}{x_1^n}$ или $g(x_2) < g(x_1)$ и мы проверили строгое убывание $g(x)$ на открытом луче $(0; \infty)$.

3) ранее (см. стр. 101) было доказано, что любой многочлен задает непрерывную функцию, поэтому $f(x) = x^n$ — непрерывная, строго возрастающая функция на отрезке $[0; a+1]$ для любого $a \geq 0$. Из неравенства Бернулли (в десятом классе по индукции было доказано, что при всех натуральных n и $x > -1$ выполняется, что $(1+x)^n \geq 1+nx$) имеем оценку

$$f(1+a) = (1+a)^n \geq 1+na \geq 1+a > a \geq 0 = f(0).$$



Используя теорему о промежуточном значении, найдем такое $b \in [0; a + 1]$, что $f(b) = a$, т.е. $b^n = a$. Единственность такого числа следует из строго возрастания $f(x)$ на луче $[0; \infty)$.

4) случай $0 \leq x_1 < x_2$ разобран в (1). Случай $x_1 < 0 \leq x_2$ очевиден: $f(x_1) < 0 \leq f(x_2)$. Осталось рассмотреть вариант $x_1 < x_2 \leq 0$. Сразу получим $0 \leq (-x_2) < (-x_1)$ и воспользуемся (1) и нечетностью $n \in \mathbb{N}$: $(-x_2)^n < (-x_1)^n \Rightarrow -x_2^n < -x_1^n \Rightarrow x_1^n < x_2^n \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

5) начнем с существования. При $a \geq 0$ существование b с нужным свойством была доказана в (3). Пусть теперь $a < 0$ и рассмотрим положительное число $(-a)$. Для него по (3) найдется такое $d \geq 0$, что $d^n = -a$. Докажем, что число $b = -d$ — искомое. Действительно, в силу нечетности n получим, что $b^n = (-d)^n = -(d^n) = -(-a) = a$.

Единственность найденного b следует из строго возрастания $f(x) = x^n$ на всем $\mathbb{R}$, что было доказано для нечетных степеней в (4). ■

Определение. Для любого четного $n \in \mathbb{N}$ и неотрицательного $x \in \mathbb{R}$ корнем n -ой степени из x называется такое $y \geq 0$, что $y^n = x$ (обозначение: $y = \sqrt[n]{x}$).

Определение. Для любого нечетного $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $x \in \mathbb{R}$ корнем n -ой степени из x называется такое $y \in \mathbb{R}$, что $y^n = x$ (обозначение: $y = \sqrt[n]{x}$).

Замечание. Корректность этих двух определений установлена в (3) и (5) предыдущей теоремы.

Следствие 1. Для любого **четного** $n \in \mathbb{N}$ выполняются утверждения:

а) функция $f(x) = x^n|_{[0; \infty)}$ является обратной функцией к функции $h(x) = \sqrt[n]{x} : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (рис. 20);

б) $h(x)$ — строго возрастающая и непрерывная функция на всей своей области определения;

в) для любого $x \geq 0$ верно, что $x = (\sqrt[n]{x})^n$ и $x = \sqrt[n]{x^n}$.

Доказательство. а) проверим сначала, что $E(h) = [0; \infty) = D(f)$. Действительно, для любого $a \geq 0$ из определения корня n -ой степени следует, что $\sqrt[n]{a^n} = a$, поэтому $[0; \infty) \subseteq E(h)$. Обратное включение также гарантируется определением: корни четной степени принимают только неотрицательные значения. В третий раз применив определение, получим $f(h(x)) = (\sqrt[n]{x})^n = x$ для всех $x \in D(h) = [0; \infty)$. В результате, f и h — обратные друг к другу функции.



б) следует из (а), первого пункта предыдущей теоремы, непрерывности любого многочлена и теоремы 6.1.

в) в (а) было доказано, что $f(h(x)) = x$ и $h(f(x)) = x$ при всех $x \geq 0$, откуда и следуют нужные тождества. ■

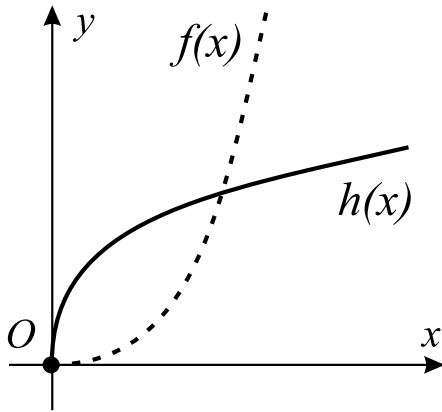


Рис. 20

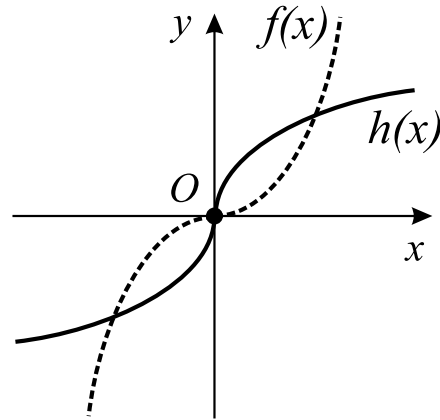


Рис. 21

Следствие 2. Для любого **нечетного** $n \in \mathbb{N}$ выполняются утверждения:

а) функция $f(x) = x^n$ является обратной к $h(x) = \sqrt[n]{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
 б) $h(x)$ — строго возрастающая и непрерывная функция на всей своей области определения (рис. 21);

в) для любого $x \in \mathbb{R}$ верно, что $x = (\sqrt[n]{x})^n$ и $x = \sqrt[n]{x^n}$.

Доказательство. а) проверим сначала, что $E(h) = \mathbb{R} = D(f)$. Действительно, для любого $a \in \mathbb{R}$ из определения корня n -ой степени следует, что $\sqrt[n]{a^n} = a$, поэтому $\mathbb{R} \subseteq E(h)$. Обратное включение очевидно. Во второй раз применив определение, получим $f(h(x)) = (\sqrt[n]{x})^n = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. В результате, f и h — обратные друг к другу функции.

б) следует из (а), четвертого пункта предыдущей теоремы, непрерывности любого многочлена и теоремы 6.1.

в) в (а) было доказано, что $f(h(x)) = x$ и $h(f(x)) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда и следуют нужные тождества. ■

Определение. 1) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и $a \geq 0$ считаем, что $a^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;

2) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ считаем, что $a^{\frac{-k}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-k}$;

3) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ считаем, что $a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{-k}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{-k}$;



4) для любых $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ считаем, что $a^{\frac{0}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1$.

Лемма 8.3. 1) для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ и $a > 0$ выполняется тождество $\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n = a^k$.

2) пусть $n, n_1 \in \mathbb{N}$, $k, k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a, b > 0$ и $\frac{k}{n} = \frac{k_1}{n_1}$. Тогда выполняется, что $a^{\frac{k}{n}} = b^{\frac{k_1}{n_1}} \Leftrightarrow a = b$.

Доказательство. 1) при $k = 0$ получаем $1 = 1$. Пусть $k \neq 0$, тогда воспользуемся предыдущими следствиями 1 и 2, определением $a^{\frac{k}{n}}$ и алгебраическими свойствами степени с целым показателем (теорема 8.1):

$$\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k.$$

2) пусть $n^* = n \cdot n_1 \in \mathbb{N}$ и $l^* = k \cdot n_1 = n \cdot k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Из (1) и (2) теоремы 8.2 следует, что функции $f(x) = x^{n^*}$ и $g(x) = x^{l^*}$ строго монотонны и поэтому инъективны на множестве $(0; \infty)$. Обозначим через $a_1 = a^{\frac{k}{n}}$ и $b_1 = b^{\frac{k_1}{n_1}}$, тогда по предыдущей лемме и теореме 8.1 имеем:

$$f(a_1) = \left(a^{\frac{k}{n}}\right)^{n \cdot n_1} = \left(\left(a^{\frac{k}{n}}\right)^n\right)^{n_1} = \left(a^k\right)^{n_1} = a^{k \cdot n_1} = a^{l^*}, \quad (*)$$

$$f(b_1) = \left(b^{\frac{k_1}{n_1}}\right)^{n \cdot n_1} = \left(\left(b^{\frac{k_1}{n_1}}\right)^{n_1}\right)^n = \left(b^{k_1}\right)^n = b^{k_1 \cdot n} = b^{l^*}. \quad (**)$$

Теперь, учитывая $a_1, b_1 > 0$, инъективность $f(x)$ и $g(x)$ на множестве $(0; \infty)$, а также равенства (*) и (**), получим, что

$$a_1 = b_1 \Leftrightarrow f(a_1) = f(b_1) \Leftrightarrow a^{l^*} = b^{l^*} \Leftrightarrow g(a) = g(b) \Leftrightarrow a = b.$$

■

Определение. Пусть $a > 0$ и $r = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$, тогда $a^r = a^{\frac{k}{n}}$.

Замечание. Рассмотрим две дроби, которые задают рациональное число r , т.е. $r = \frac{k}{n}$ и $r = \frac{k_1}{n_1}$. При возведении в степень для показателей $\frac{k}{n}$ и $\frac{k_1}{n_1}$ можно считать, что $n, n_1 \in \mathbb{N}$, тогда при $a > 0$ в предыдущей лемме было установлено равенство $a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{k_1}{n_1}}$, что доказывает корректность возведения положительного числа в рациональную степень.

Следующее утверждение называется *алгебраическими свойствами степени с рациональным показателем*.



Теорема 8.4. Для любых $a, b > 0$ и $r, s \in \mathbb{Q}$ выполняются:

$$1) (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r ;$$

$$2) a^r \cdot a^s = a^{r+s} ;$$

$$3) (a^r)^s = a^{rs} .$$

Доказательство. Можно считать, что $r = \frac{k}{n}$, $s = \frac{k_1}{n}$ где $k, k_1 \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ (т.е. сразу приводим дроби к общему знаменателю). Из (1) теоремы 8.2 следует, что $f(x) = x^n$ строго возрастает на открытом луче $(0; \infty)$, поэтому для положительных a_1 и a_2 условия $a_1 = a_2$ и $f(a_1) = f(a_2)$ равносильны.

1) обозначим через a_1 и a_2 левую и правую части равенства (1) и посчитаем $f(a_1)$ и $f(a_2)$, используя предыдущую лемму и свойства степени с целым показателем, доказанные в теореме 8.1:

$$f(a_1) = \left((a \cdot b)^{\frac{k}{n}} \right)^n = (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k,$$

$$f(a_2) = \left(a^{\frac{k}{n}} \cdot b^{\frac{k}{n}} \right)^n = \left(a^{\frac{k}{n}} \right)^n \cdot \left(b^{\frac{k}{n}} \right)^n = a^k \cdot b^k.$$

Из $f(a_1) = f(a_2)$ следует $a_1 = a_2$.

2) обозначим через a_1 и a_2 левую и правую части равенства (2) и найдем $f(a_1)$ и $f(a_2)$, используя предыдущую лемму и теорему 8.1:

$$f(a_1) = \left((a)^{\frac{k}{n}} \cdot (a)^{\frac{k_1}{n}} \right)^n = \left((a)^{\frac{k}{n}} \right)^n \cdot \left((a)^{\frac{k_1}{n}} \right)^n = a^k \cdot a^{k_1} = a^{k+k_1},$$

$$f(a_2) = \left((a)^{\frac{k+k_1}{n}} \right)^n = a^{k+k_1}.$$

Из $f(a_1) = f(a_2)$ следует $a_1 = a_2$.

3) также из (1) теоремы 8.2 следует, что $F(x) = x^{n^2}$ строго возрастает на открытом луче $(0; \infty)$, поэтому для положительных a_1 и a_2 условия $a_1 = a_2$ и $F(a_1) = F(a_2)$ равносильны. Обозначим через a_1 и a_2 левую и правую части равенства (3) и найдем $F(a_1)$ и $F(a_2)$, используя предыдущую лемму и теорему 8.1:

$$F(a_1) = \left(\left((a)^{\frac{k}{n}} \right)^{\frac{k_1}{n}} \right)^{n^2} = \left((a)^{\frac{k}{n}} \right)^{n \cdot k_1} = \left(\left((a)^{\frac{k}{n}} \right)^n \right)^{k_1} = (a^k)^{k_1} = a^{k \cdot k_1},$$

$$F(a_2) = \left(a^{\frac{k \cdot k_1}{n^2}} \right)^{n^2} = a^{k \cdot k_1}.$$

Из $F(a_1) = F(a_2)$ следует $a_1 = a_2$.





Следствие. Для любых $a, b > 0$ и $r, s \in \mathbb{Q}$ выполняется $(a/b)^r = a^r/b^r$.

Доказательство. Будем использовать (1) и (3) предыдущей теоремы:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(a \cdot b^{-1}\right)^r = a^r \cdot (b^{-1})^r = a^r \cdot b^{-r} = \frac{a^r}{b^r}.$$

■

Следующее утверждение называется *функциональными свойствами степени с рациональным показателем*.

Теорема 8.5. 1) для любого положительного $r \in \mathbb{Q}$ функция $t(x) = x^r$ строго возрастает на множестве $(0; \infty)$;

2) для любого отрицательного $r \in \mathbb{Q}$ функция $t(x) = x^r$ строго убывает на множестве $(0; \infty)$;

3) если $a > 1$, то для любых рациональных $r, s \in \mathbb{Q}$ выполняется, что $r < s \Leftrightarrow a^r < a^s$;

4) если $a \in (0; 1)$, то для любых рациональных $r, s \in \mathbb{Q}$ выполняется, что $r < s \Leftrightarrow a^r > a^s$.

Доказательство. 1) для рационального $r > 0$ найдем такие натуральные числа k, n , что $r = \frac{k}{n}$. Обозначим через $h(x) = \sqrt[n]{x}$ и $f(x) = x^k$. Из определения рациональной степени получим, что

$$t(x) = x^r = x^{\frac{k}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k = f(h(x)) = (f \circ h)(x).$$

Из строгого возрастания функций $h(x)$ и $f(x)$ на открытом луче $(0; \infty)$ следует строгое возрастание на этом множестве и функции $t(x)$.

2) для рационального $r < 0$ найдем такие натуральные числа k, n , что $r = \frac{-k}{n}$. Обозначим через $h(x) = \sqrt[n]{x}$ и $g(x) = x^{-k}$. Из определения рациональной степени получим, что

$$t(x) = x^r = x^{\frac{-k}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^{-k} = g(h(x)) = (g \circ h)(x).$$

Из строгого возрастания функций $h(x)$ и строгого убывания $g(x)$ на открытом луче $(0; \infty)$ следует строгое убывание на нем функции $t(x)$.

3) пусть $a > 1$. Из (1) и (2), а также из предыдущей теоремы для $r, s \in \mathbb{Q}$ получим, что

$$\begin{aligned} r < s &\Leftrightarrow s - r > 0 \Leftrightarrow t(x) = x^{s-r} \nearrow_{(0; \infty)} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1^{s-r} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^{s-r} - 1 > 0 \Leftrightarrow a^r \cdot (a^{s-r} - 1) > 0 \Leftrightarrow a^s - a^r > 0 \Leftrightarrow a^r < a^s. \end{aligned}$$



4) пусть $a \in (0; 1)$, тогда $1/a > 1$. Из (3) следует, что неравенства $r < s$ и $(1/a)^r < (1/a)^s$ равносильны. По следствию из предыдущей теоремы

$$\left(\frac{1}{a}\right)^r < \left(\frac{1}{a}\right)^s \Leftrightarrow \frac{1^r}{a^r} < \frac{1^s}{a^s} \Leftrightarrow a^s < a^r.$$

■

3.9. Показательная функция

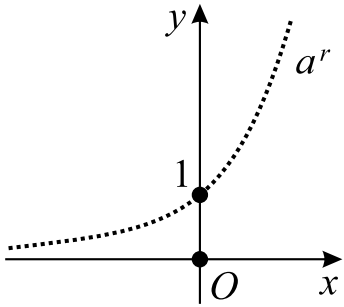


Рис. 22

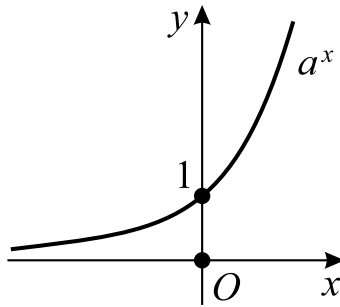


Рис. 23

Замечание. В этом параграфе будем считать, что для действительных чисел a и b выполняются неравенства: $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Эти числа будут основаниями показательной функции, которая пока задана только на множестве $\mathbb{Q}$ — в предыдущем параграфе

мы определили a^r для каждого $r \in \mathbb{Q}$ (рис. 22). Описанный ниже способ позволяет *доопределить по непрерывности* a^x с множества $\mathbb{Q}$ на всё множество $\mathbb{R}$ (рис. 23).

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $x_0 = r \in \mathbb{Q}$, то считаем, что $a^{x_0} = a^r$. Если же $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, то выберем строго возрастающую последовательность $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойством $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и положим $a^{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$. Функция $f(x) = a^x$, определенная на всем $\mathbb{R}$, называется показательной функцией.

Теорема 9.1. Определение показательной функции корректно, т.е.

- 1) для каждого $x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ найдется строго возрастающая последовательность $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойством $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$;
- 2) из $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{r_n\} \nearrow$ и $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ следует, что $\{a^{r_n}\}$ сходится;
- 3) для любой последовательности $\{s_k\} \subseteq \mathbb{Q}$, такой, что выполняется $\{s_k\} \nearrow$ и $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{s_k}$.

Доказательство. 1) по лемме 5.4 из первой главы для любого натурального n между числами $x_0 - \frac{1}{n}$ и $x_0 - \frac{1}{n+1}$ можно вставить рациональное число r_n . Тогда $\{r_n\} \nearrow$, поскольку $r_n < x_0 - \frac{1}{n+1} < r_{n+1}$. Применение П2П к двойному неравенству $x_0 - \frac{1}{n} < r_n < x_0 - \frac{1}{n+1}$ дает $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$, поэтому $\{r_n\}$ — искомая.



2) начнем со случая $a > 1$. По теореме 8.5 (свойство 3) получим, что $\{a^{r_n}\} \nearrow$. Применяя то же самое свойство, из неравенства $r_n < [x_0] + 1$ (где $[x_0]$ — целая часть x_0) получим $a^{r_n} < a^{[x_0]+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. По лемме Вейерштрасса ограниченная сверху и строго возрастающая последовательность $\{a^{r_n}\}$ имеет предел.

При $a \in (0; 1)$ по теореме 8.5 (свойство 4) получим, что $\{a^{r_n}\} \searrow$, эта последовательность ограничена снизу нулем, поэтому также сходится.

3) в (2) было установлено существование $C_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ и $C_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{s_k}$. Осталось проверить равенство $C_1 = C_2$.

Снова начнем со случая $a > 1$. Условия $\{r_n\} \nearrow$, $\{s_k\} \nearrow$, $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ позволяют для каждого $n \in \mathbb{N}$ выбрать такое $k_n \in \mathbb{N}$, что $r_n < s_{k_n} < x_0$, причем $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ (действительно, в полуинтервал $(r_n; x_0]$ попадут все s_k , начиная с некоторого номера, поэтому выбор подходящего k_n будет огромен). Из неравенств $r_n < s_{k_n}$ и $a > 1$ получим $a^{r_n} < a^{s_{k_n}}$. В этом неравенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получим, что $C_1 \leq C_2$ (подпоследовательность $a^{s_{k_n}}$ сходится к тому же пределу, что и a^{s_k}). Похожим образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем $n_k \in \mathbb{N}$, для которого $s_k < r_{n_k} < x_0$, причем $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Из неравенств $s_k < r_{n_k}$ и $a > 1$ получим $a^{s_k} < a^{r_{n_k}}$. В этом неравенстве перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$ и получим, что $C_2 \leq C_1$. Из двух полученных неравенств следует, что $C_1 = C_2$.

При $a \in (0; 1)$ сразу имеем $1/a > 1$. Поэтому по предыдущему случаю и из алгебраических свойств степеней с рациональным показателем получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{s_k} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{r_n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{s_k}} \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2} \Leftrightarrow C_1 = C_2.$$

■

Теорема 9.2. 1) пусть $\{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{s_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = 1$.

2) пусть $\{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{s_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^{x_0}$.

Доказательство. 1) аналогично (2) предыдущей теоремы можно установить, что $\{a^{s_n}\}$ строго монотонна и ограничена, поэтому, применив лемму Вейерштрасса, получим $C = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$. В примере 3 на стр. 76 было доказано, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = 1$, что дает $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{1/k} = 1$.



Начнем со случая $a > 1$. Рассуждая аналогично доказательству пункта (3) предыдущей теоремы, найдем подпоследовательность s_{n_k} со свойством $0 < s_{n_k} < 1/k$ и $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Неравенства $0 < s_{n_k} < 1/k$ и $a > 1$ нам дают $1 = a^0 < a^{s_{n_k}} < a^{1/k}$. По П2П получим $C = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{s_{n_k}} = 1$.

При $a \in (0; 1)$ сразу имеем $1/a > 1$. Поэтому по предыдущему случаю и из алгебраических свойств степеней с рациональным показателем получим

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} \right)^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{s_n}} = \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = 1.$$

2) рассмотрим произвольное $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, а также произвольную последовательность $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойствами: $\{r_n\} \nearrow$ и $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. По предыдущей теореме мы знаем, что $\{a^{r_n}\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^{x_0}$. Монотонность и ограниченность последовательности $\{a^{s_n}\}$ и лемма Вейерштрасса дают нам $C = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$. Теперь рассмотрим разность $a^{s_n} - a^{r_n} = a^{r_n} (a^{s_n - r_n} - 1)$ (*). Заметим, что $s_n - r_n = s_n + (-r_n)$, поэтому $\{s_n - r_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - r_n) = 0$ (поскольку $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$). Применив (1), получим $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n - r_n} = 1$, т.е. $\{a^{s_n - r_n} - 1\}$ — БМП. Поэтому (*) дает представление последовательности $\{a^{s_n} - a^{r_n}\}$ в виде произведения сходящейся последовательности на БМП. Из теоремы 4.1 второй главы получим, что $\{a^{s_n} - a^{r_n}\}$ — БМП, поэтому

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{s_n} - a^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = C - a^{x_0} \Leftrightarrow C = a^{x_0}.$$

■

Заметим, что предыдущие две теоремы будут справедливы и для случая $x_0 = r \in \mathbb{Q}$. Действительно, при $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{r_n\} \nearrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ получим $\{r - r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{r - r_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (r - r_n) = 0$. Применив первый пункт предыдущей теоремы, получим $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r - r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^r}{a^{r_n}}$, откуда $a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$. Если же $\{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{s_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = r$ получим $\{s_n - r\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{s_n - r\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - r) = 0$. Применив первый пункт предыдущей теоремы, получим $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n - r} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{s_n} / a^r)$, откуда $a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}$.

Следующий результат называется теоремой о функциональных свойствах показательной функции.

Теорема 9.3. 1) пусть $a > 1$. Тогда для любых $r, s \in \mathbb{Q}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ из условия $r < x_0 < s$ следует, что $a^r < a^{x_0} < a^s$.



2) пусть $a \in (0; 1)$. Тогда для любых $r, s \in \mathbb{Q}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ из двойного неравенства $r < x_0 < s$ следует, что $a^s < a^{x_0} < a^r$.

3) при $a > 1$ функция $f(x) = a^x$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.

4) при $a \in (0; 1)$ функция $f(x) = a^x$ строго убывает на $\mathbb{R}$.

5) функция $f(x) = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. 1) выберем две последовательности $\{r_n\}, \{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{r_n\} \nearrow$, таких, что $\{s_n\} \searrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$. Выше было установлено, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^{x_0}$. Интервал $(r; s) = O(x_0)$ является некоторой окрестностью x_0 , поэтому, дважды используя определение предела, мы сможем найти такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ следует, что $r_n, s_n \in (r; s)$. Для доказательства нам достаточно выбрать одно натуральное число $n_0 > N$, тогда из $a > 1$ и теоремы 8.5 (третье свойство) будет следовать, что

$$a^r < a^{r_{n_0}} \leq \sup\{a^{r_n} : n \in \mathbb{N}\} = a^{x_0} = \inf\{a^{s_n} : n \in \mathbb{N}\} \leq a^{s_{n_0}} < a^s.$$

2) подготовительная работа будет повторять предыдущий пункт, но из-за $a \in (0; 1)$ теперь используем четвертое свойство теоремы 8.5, по нему $\{a^{r_n}\} \searrow$, $\{a^{s_n}\} \nearrow$ и $a^{x_0} = \inf\{a^{r_n} : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{a^{s_n} : n \in \mathbb{N}\}$, поэтому

$$a^r > a^{r_{n_0}} \geq \inf\{a^{r_n} : n \in \mathbb{N}\} = a^{x_0} = \sup\{a^{s_n} : n \in \mathbb{N}\} \geq a^{s_{n_0}} > a^s.$$

3) выберем произвольные $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, для которых $x_1 < x_2$. Известно, что существует такое рациональное $r \in \mathbb{Q}$, что $x_1 < r < x_2$, тогда из (1) получим $a^{x_1} < a^r$ и $a^r < a^{x_2}$, откуда и следует $f(x) \nearrow$.

4) выберем произвольные $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, для которых $x_1 < x_2$. Известно, что существует такое рациональное $r \in \mathbb{Q}$, что $x_1 < r < x_2$, тогда из (2) получим $a^{x_1} > a^r$ и $a^r > a^{x_2}$, откуда и следует $f(x) \searrow$.

5) докажем непрерывность $f(x) = a^x$ в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Сначала выберем две последовательности $\{r_n\}, \{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, $\{r_n\} \nearrow$, $\{s_n\} \searrow$ и таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$. В предыдущих двух теоремах было установлено, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^{x_0}$ (*). Теперь рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(f(x_0))$. Дважды расписывая определение предела последовательности из (*) найдем такой номер N , что при всех $n > N$ будет выполняться $a^{r_n}, a^{s_n} \in O_\varepsilon(f(x_0))$. Выберем хотя бы один номер $n_0 > N$ и обозначим через $\delta = \min\{x_0 - r_{n_0}, s_{n_0} - x_0\}$, тогда для всех $x \in O_\delta(x_0)$ будет следовать, что $r_{n_0} < x < s_{n_0}$. Теперь, применив (3) или (4), получим, что



$f(x) = a^x$ лежит между $a^{r_{n_0}}$ и $a^{s_{n_0}}$, которые попали в $O_\varepsilon(f(x_0))$. Откуда $f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0))$ и $f(x)$ непрерывна в x_0 . ■

Следующий результат называется теоремой об *алгебраических свойствах* показательной функции.

Теорема 9.4. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется:

- 1) $a^{x_1} \cdot b^{x_1} = (a \cdot b)^{x_1}$;
- 2) $a^{x_1} / b^{x_1} = (a / b)^{x_1}$;
- 3) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;
- 4) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$.

Доказательство. 1) выберем последовательность $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойствами: $\{r_n\} \nearrow$ и $x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$. Из теоремы 9.1 и алгебраических свойств степени с рациональным показателем имеем:

$$a^{x_1} \cdot b^{x_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b)^{r_n} = (a \cdot b)^{x_1}.$$

2) доказывается аналогично (1).

3) теперь выберем две последовательности $\{r_n\}, \{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойствами: $\{r_n\} \nearrow$, $\{s_n\} \nearrow$, $x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $x_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Из теоремы 9.1 и алгебраических свойств степени с рациональным показателем имеем:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n+s_n} = a^{x_1+x_2}.$$

4) снова выберем две последовательности $\{r_n\}, \{s_k\} \subseteq \mathbb{Q}$ со свойствами: $\{r_n\} \nearrow$, $\{s_k\} \nearrow$, $x_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ и $x_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$. Уже доказано, что функция $f(x) = a^x$ непрерывна. Кроме того, представив $s_k = l_k/m_k$ ($l_k \in \mathbb{Z}$, $m_k \in \mathbb{N}$ при всех $k \in \mathbb{N}$), получим, что функция $g(x) = x^{s_k} = (\sqrt[m_k]{x})^{l_k}$ непрерывна при $x > 0$ как композиция двух непрерывных функций. Вспомним, что непрерывность функции $h(x)$ в $x_0 \in D'(h)$ обеспечивается равенством $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = h(x_0) = h(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$. Поэтому непрерывность равносильна возможности переставить местами знак функции h и знак предела. Воспользуемся этим в третьем и пятом переходах в следующей цепочке

$$\begin{aligned} (a^{x_1})^{x_2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (a^{x_1})^{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \right)^{s_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n})^{s_k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n \cdot s_k} = a^{\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cdot s_k} = a^{x_1 \cdot x_2}. \end{aligned}$$

■



Следствие. Пусть $a < b$. Тогда для всех $x > 0$ верно $a^x < b^x$, а при всех $x < 0$ выполнено $a^x > b^x$.

Доказательство. Условие $a < b$ (с учетом $a > 0$) равносильно неравенству $(b/a) > 1$. Теперь строгое возрастание функции $(b/a)^x$ и алгебраические свойства показательной функции нам дают:

$$x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x > \left(\frac{b}{a}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{b^x}{a^x} > 1 \Leftrightarrow b^x > a^x;$$

$$x < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^x < \left(\frac{b}{a}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{b^x}{a^x} < 1 \Leftrightarrow b^x < a^x.$$

■

В десятом классе мы обсудили схему исследования произвольной функции. По этому алгоритму изучим свойства показательной функции и построим ее график.

Исследование функции $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

I. $D(f) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Следует из первой теоремы этого параграфа.

■

II. $E(f) = (0; \infty)$.

Доказательство. Выберем произвольное $y_0 > 0$.

1-й случай: $a > 1$. По неравенству Бернулли получим оценку для натуральных степеней $a^n = \left(1 + (a - 1)\right)^n \geq 1 + n(a - 1)$. Очевидно, что при $a - 1 > 0$ получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + n(a - 1)\right) = \infty$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 1/\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^n\right) = 0$. Учитывая, что $0 < y_0 < \infty$, найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ будет выполняться $0 < a^{-n} < y_0 < a^n < \infty$. Выберем одно натуральное число $n_0 > N$ и рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = a^x$ на отрезке $[-n_0; n_0]$. Из неравенства $a^{-n_0} < y_0 < a^{n_0}$ и теоремы о промежуточном значении (второе следствие на стр. 105) следует, что найдется такое $x_0 \in [-n_0; n_0]$, для которого $f(x_0) = y_0$.

2-й случай: $a \in (0; 1)$. Тогда $(1/a) > 1$ и по предыдущему случаю найдется x_0 , что $(1/a)^{x_0} = y_0$. Отсюда $f(-x_0) = a^{-x_0} = 1/(a^{x_0}) = (1/a)^{x_0} = y_0$.



Мы доказали, что $(0; \infty) \subseteq E(f)$. Из результатов предыдущего параграфа получим, что $a^r > 0$ при всех $r \in \mathbb{Q}$. Тогда свойства (1) и (2) теоремы 9.3 дают $a^x > 0$ и обратное включение $E(f) \subseteq (0; \infty)$.

■

III. Функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, т.е. $f(x)$ — функция общего вида.

Доказательство. Если бы $f(x)$ была четной, то $f(1) = f(-1)$, откуда $a = a^{-1}$ или $a^2 = 1$, что дает $a = \pm 1$. ✕

Если бы $f(x)$ была нечетной, то $f(-1) = -f(1)$ или $f(-1) = -a < 0$, что противоречит предыдущему пункту. ✕

■

IV. Функция $f(x)$ не является периодической.

Доказательство. О/п: нашелся период $T \neq 0$. Тогда $f(0) = f(0 + T)$, т.е. $a^0 = a^T$, откуда $T = 0$. ✕

■

V. Точки пересечения графика $\Gamma(f)$ с координатными осями.

Очевидно, что $f(0) = 1$, откуда $(0, 1)$ — точка пересечения $\Gamma(f)$ с осью ординат. Из II следует, что $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда $\Gamma(f) \cap (Ox) = \emptyset$.

VI. Промежутки знакопостоянства.

Из II следует, что $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, откуда $\mathbb{R}$ — единственный промежуток знакопостоянства.

VII. Промежутки монотонности.

Из (3) и (4) пунктов теоремы 9.3 следует, что при $a > 1$ функция $f(x)$ ↗ на всем множестве $\mathbb{R}$, а при $a \in (0; 1)$ верно, что $f(x)$ ↘ на всей числовой прямой.

VIII. Точки максимума и минимума.

Точек экстремума у $f(x)$ нет, поскольку $f(x)$ — строго монотонная функция, заданная на открытом множестве.

IX. Асимптоты.

У функции могут быть вертикальные асимптоты вида $x = x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$) и асимптоты, задающиеся уравнением $y = kx + b$, на ∞ или $-\infty$. Напомним определения.

Определение. Прямая $x = x_0$ (где $x_0 \in \mathbb{R}$) называется вертикальной асимптотой для $g(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.



Следствие 1. Пусть $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$ и $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , тогда прямая $x = x_0$ не является вертикальной асимптотой для $g(x)$.

Доказательство. Действительно, из непрерывности модуля и непрерывности $g(x)$ в точке x_0 следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = |g(x_0)| \neq \infty$.

Следствие 2. Функция $f(x) = a^x$ не имеет вертикальных асимптот.

Доказательство. Следует из (5) теоремы 9.3 и предыдущего следствия.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой для функции $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ на ∞ (соответственно на $-\infty$), если множество A не ограничено сверху (снизу) и $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx - b) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - kx - b) = 0$).

Пример 1. Для функции $g(x) = x + \frac{1}{x}$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, поскольку $\lim_{x \rightarrow 0} |x + \frac{1}{x}| = \lim_{x \rightarrow 0} |\frac{1}{x}| = \infty$. Кроме того, прямая $y = x$ является асимптотой $g(x)$ на обеих бесконечностях, поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ (см. примеры на стр. 97).

Выясним как находить асимптоты для $g(x)$ на ∞ и $-\infty$.

Теорема 9.5. Пусть $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $A = D(g)$ не ограничено сверху (соответственно снизу). Тогда прямая $y = kx + b$ является асимптотой для функции $g(x)$ на ∞ (на $-\infty$) $\Leftrightarrow$ выполняются одновременно равенства (1) и (2), где

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = k$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = k$);
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx) = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - kx) = b$).

Доказательство. Рассуждения для двух типов асимптот схожи, поэтому ограничимся только асимптотами для $g(x)$ на ∞ .

$\Rightarrow$) если прямая $y = kx + b$ — асимптота для функции $g(x)$ на ∞ , то из $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx - b) = 0$ и арифметических свойств пределов функций получим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx) = b$ и (2) выполняется. Теперь мы знаем, что у функции $g(x) - kx$ на ∞ есть конечный предел, поэтому $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x) - kx}{x} \right) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{g(x)}{x} - k \right) = 0$. Последнее равенство равносильно (1).

$\Leftarrow$) из $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx) = b$ сразу получим, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - kx - b) = 0$, что дает требуемое.



Теорема 9.6. 1) при $a > 1$ функция $f(x) = a^x$ не имеет асимптоты на ∞ , но прямая $y = 0$ является асимптотой для этой функции на $-\infty$.

2) при $a \in (0; 1)$ функция $f(x) = a^x$ не имеет асимптоты на $-\infty$, но прямая $y = 0$ является асимптотой для этой функции на ∞ .

Доказательство. 1) о/п: на ∞ нашлась асимптота $y = kx + b$ для $f(x)$, тогда по предыдущей теореме выполнено $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$ (*). Поэтому для любой сходящейся к ∞ последовательности $\{x_n\}$ соотношение (*) также должно быть верным, в частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = k$ (**). Теперь сделаем оценку при $n \geq 2$, используя бином Ньютона и неотрицательность каждого слагаемого в разложении:

$$\begin{aligned} a^n &= \left(1 + (a - 1)\right)^n = 1 + n \cdot (a - 1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (a - 1)^2 + \dots + (a - 1)^n \geq \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot (a - 1)^2 \Rightarrow \frac{a^n}{n} \geq \frac{n-1}{2} \cdot (a - 1)^2 \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это противоречит (**), т.е. конечности предела последовательности $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$.

Осталось проверить, что $y = 0$ — асимптота для $f(x)$ на $-\infty$. Выберем произвольную $O_\varepsilon(0)$. В пункте II было доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0$, поэтому найдется такой номер N , что при всех $n > N$ верно $0 < a^{-n} < \varepsilon$. Пусть $n^* > N$. В силу строго возрастания $f(x) = a^x$ при всех $x \in O_{-n^*}(-\infty)$ следует, что $x < -n^*$ и $0 < a^x < a^{-n^*} < \varepsilon$, поэтому $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Мы доказали, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0) = 0$, т.е. $y = 0$ является асимптотой для $f(x)$ на $-\infty$.

2) при $a \in (0; 1)$ сразу получим $1/a > 1$ и, сделав замену $t = -x$, вычислим следующий предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (a^x - 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = 0.$$

Поэтому прямая $y = 0$ является асимптотой для $f(x) = a^x$ на ∞ .

Предположив, что для $f(x)$ найдется прямая $y = kx + b$, являющейся асимптотой на $-\infty$, по предыдущей теореме получим, что

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1/a)^{-x}}{-x} = - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1/a)^t}{t}.$$

Последнее противоречит (1) — там было установлено, что функция $\frac{(1/a)^t}{t}$ не имеет конечного предела при $t \rightarrow \infty$.





X. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сразу следует из (5) теоремы 9.3. ■

XI. С учетом I–X на рис. 24 и 25 изображены графики $f(x) = a^x$ при $a > 1$ и $a \in (0; 1)$ (соответственно).

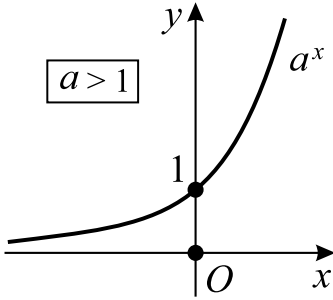


Рис. 24

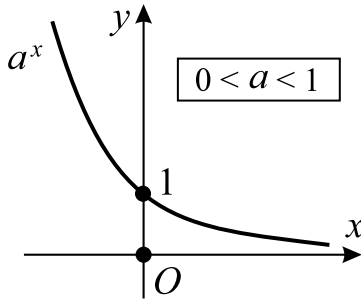


Рис. 25

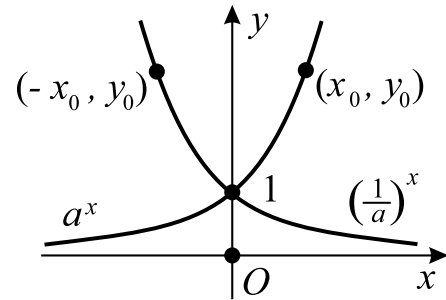


Рис. 26

XII. Графики функций $f(x) = a^x$ и $f_1(x) = (1/a)^x$ симметричны относительно оси (Oy) (рис. 26).

Доказательство. Справедливы следующие переходы:

$$(x_0, y_0) \in \Gamma(f) \Leftrightarrow a^{x_0} = y_0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0} = y_0 \Leftrightarrow (-x_0, y_0) \in \Gamma(f_1).$$

Осталось заметить, что точки (x_0, y_0) и $(-x_0, y_0)$ симметричны друг другу относительно оси (Oy) (рис. 26). ■

3.10. Логарифмическая функция

Замечание. В этом параграфе также будем считать, что для действительных чисел a и b выполняются неравенства: $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Но здесь эти числа чаще всего будут основаниями логарифмической функции.

Определение. Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $x > 0$. Логарифмом числа x по основанию a называется такое $y \in \mathbb{R}$, что $a^y = x$ (обозначение: $y = \log_a x$).

Для десятичных логарифмов (т.е. по основанию 10) и натуральных логарифмов (т.е. по основанию e) приняты (соответственно) следующие обозначения: $\lg x$ и $\ln x$.



Следствие 1. *Определение логарифмической функции корректно.*

Доказательство. Для каждого **положительного** $x_0 \in \mathbb{R}$ по свойствам II и VII показательной функции найдется такой единственный показатель $y_0 \in \mathbb{R}$, что $a^{y_0} = x_0$, поэтому соответствие $g(x) = \log_a x$ всюду определено на открытом луче $(0; \infty)$ и однозначно, действует в $\mathbb{R}$ и поэтому является функцией. ■

Пример 1. Сразу по определению можно получить, что $\log_3 \frac{1}{81} = -4$, $\lg 100 = 2$ и $\ln e^{-5} = -5$.

Равенство в следующем утверждении называется *первым логарифмическим тождеством*.

Следствие 2. 1) для любых $x \in \mathbb{R}$ верно $\log_a a^x = x$.

2) функция $g(x) = \log_a x$ является обратной к показательной функции $f(x) = a^x$.

Доказательство. 1) следует из определения, поскольку $a^x = a^x$.

2) сразу заметим, что из свойства II показательной функции имеем равенство множеств $E(f) = (0; \infty) = D(g)$. Теперь из (1) для каждого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $g(f(x)) = \log_a a^x = x$. Отсюда $g(x)$ — обратная к $f(x)$. ■

Равенство в следующем утверждении называется *вторым логарифмическим тождеством*.

Следствие 3. Для любого $x > 0$ выполняется $a^{\log_a x} = x$.

Доказательство. Из того, что $g(x) = \log_a x$ — обратная к $f(x) = a^x$ следует, что и $f(x)$ является обратной к функции $g(x)$. Поэтому для каждого $x \in D(g) = (0; \infty)$ будет выполняться, что

$$x = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x}.$$

В следующем утверждении докажем основные *алгебраические свойства* логарифмов.

Теорема 10.1. Для любых $x_1, x_2 > 0$ выполняется:

- 1) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;
- 2) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$;
- 3) при всех $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a x_1^\alpha = \alpha \cdot \log_a x_1$;



4) при всех $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \log_{a^\beta} x_1 = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a x_1$;

5) $\log_a x_1 = \frac{\log_b x_1}{\log_b a}$ (формула перехода к новому основанию).

Доказательство. Обозначим через $y_1 = \log_a x_1$ и $y_2 = \log_a x_2$. Тогда по определению сразу имеем $x_1 = a^{y_1}$ и $x_2 = a^{y_2}$. Далее будем использовать алгебраические свойства показательной функции (теорема 9.4) и первое логарифмическое тождество.

1) $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a (a^{y_1} \cdot a^{y_2}) = \log_a a^{y_1+y_2} = y_1 + y_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$.

2) проверяется аналогично (1).

3) $\log_a x_1^\alpha = \log_a (a^{y_1})^\alpha = \log_a a^{\alpha \cdot y_1} = \alpha \cdot y_1 = \alpha \cdot \log_a x_1$.

4) сделаем несложные преобразования с показателями степеней:

$$\log_{a^\beta} x_1 = \log_{a^\beta} a^{y_1} = \log_{a^\beta} a^{(\beta \cdot \frac{1}{\beta} \cdot y_1)} = \log_{a^\beta} (a^\beta)^{\frac{1}{\beta} \cdot y_1} = \frac{1}{\beta} \cdot y_1 = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a x_1.$$

5) учитывая, что $\log_b a \neq 0$ (по-прежнему, $a, b \neq 1$ и $a, b > 0$), и используя свойство (3), можно получить

$$\log_b x_1 = \log_b a^{y_1} = y_1 \cdot \log_b a = \log_a x_1 \cdot \log_b a \Rightarrow \log_a x_1 = \frac{\log_b x_1}{\log_b a}.$$

■

Следствие 1. При всех $a, b \neq 1$ и $a, b > 0$ верно $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Доказательство. Из формулы перехода к новому основанию (свойство (5) предыдущей теоремы) получим, что $\log_a b = (\log_b b) / (\log_b a) = 1 / (\log_b a)$, откуда и следует требуемое.

■

Следствие 2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ выполняется:

1) при $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

2) при $x_1, x_2 < 0 \Rightarrow \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a (-x_1) + \log_a (-x_2)$.

Доказательство. 1) повторяет (1) предыдущей теоремы.

2) достаточно заметить, что при $x_1, x_2 < 0$ выполняются неравенства $(-x_1), (-x_2) > 0$, $x_1 \cdot x_2 = (-x_1) \cdot (-x_2)$ и можно применить (1).

■

Следствие 3. Для любого **четного** $n \in \mathbb{N}$ и $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$ выполняется:

1) $\log_a x^n = n \cdot \log_a |x|$ при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) $\log_{c^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_{|c|} x$.



Доказательство. При проверке (1) и (2) достаточно заметить, что при **четном** $n \in \mathbb{N}$ верно $x^n = |x|^n$, $c^n = |c|^n$ и применить свойства (3) и (4) предыдущей теоремы. ■

Теперь запустим привычный алгоритм для определения свойств функции $g(x) = \log_a x$ и построения $\Gamma(g)$.

Исследование функции $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

I. $D(g) = (0; \infty)$.

Доказательство. Проверено в первом следствии после определения логарифма. ■

II. $E(g) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Поскольку из первого логарифмического тождества следует, что для каждого $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a a^y = y \in E(g)$. ■

III. Функция $g(x)$ не является ни четной, ни нечетной, т.е. $g(x)$ — функция общего вида.

Доказательство. Сразу следует из того, что множество $D(g) = (0; \infty)$ не симметрично относительно начала координат. ■

IV. Функция $g(x)$ не является периодической.

Доказательство. Чуть позже будет доказано, что $g(x)$ строго монотонна, поэтому если $T \neq 0$ и $x, x + T > 0$, то $g(x) \neq g(x + T)$. ■

V. Точки пересечения графика $\Gamma(g)$ с координатными осями.

Очевидно, что $g(1) = 0$ (так как $a^0 = 1$), откуда $(1, 0)$ — точка пересечения $\Gamma(g)$ с осью абсцисс. Из-за строгой монотонности $g(x)$, других точек пересечения $\Gamma(g)$ с (Ox) нет. Отсутствие точки пересечения $\Gamma(g)$ с осью (Oy) объясняется очень просто: $0 \notin D(g)$.

VI. Промежутки монотонности. Функция $g(x)$ ↗ при $a > 1$. Функция $g(x)$ ↘ при $a \in (0; 1)$.

Доказательство. В пункте (2) второго следствия после определения логарифма мы получили, что $g(x)$ является обратной к $f(x) = a^x$ поэтому



характеры монотонности этих двух функций совпадают (по теореме 6.1): при $a > 1 \Rightarrow g(x) \nearrow$, а при $a \in (0; 1) \Rightarrow g(x) \searrow$.

VII. Точки максимума и минимума.

Точек экстремума у $g(x)$ нет, поскольку $g(x)$ — строго монотонная функция, заданная на открытом множестве.

VIII. Промежутки знакопостоянства.

Характер монотонности $g(x)$ (свойство VI) и единственная точка в пересечении $\Gamma(g)$ с осью (Ox) (свойство V) дают нам два промежутка знакопостоянства функции $g(x)$.

При $a > 1$ неравенство $g(x) > 0$ выполняется на множестве $(1; \infty)$, а неравенство $f(x) < 0$ — на интервале $(0; 1)$.

При $a \in (0; 1)$ неравенство $g(x) > 0$ выполняется на интервале $(0; 1)$, а неравенство $f(x) < 0$ — на открытом луче $(1; \infty)$.

IX. Логарифмическая функция непрерывна на всей своей области определения.

Доказательство. Функция $g(x)$ — обратная к $f(x) = a^x$, поэтому достаточно применить теорему 6.1.

X. Асимптоты. Функция $g(x)$ имеет единственную вертикальную асимптоту $x = 0$, других асимптот у нее нет.

Доказательство. 1-й случай: $a > 1$. Для произвольной $O_r(-\infty)$ найдем такое $\delta > 0$, что $\log_a \delta = r$ (существование δ следует из II). Из-за строгого возрастания $g(x)$ получим, что при всех $x \in (0; \delta) = \check{O}_\delta(0) \cap D(g)$ выполняется, что $g(x) < \log_a \delta = r$, т.е. $g(x) \in O_r(-\infty)$. Мы доказали, что $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ или $\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = \infty$, т.е. $x = 0$ — вертикальная асимптота. Других вертикальных асимптот для $g(x)$ не будет, поскольку в каждой точке $x_0 \in D(g)$ функция $g(x)$ непрерывна (см. первое следствие на стр. 127).

Теперь покажем, что прямая $y = kx + b$ не может быть асимптотой для $g(x)$ на ∞ . Иначе, после применения теоремы 9.5 и замены $t = \log_a x$, получим:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{a^t} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a^t}{t}} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

С учетом $g(x) \nearrow$ последний предел означает, что b — верхняя граница для $E(g)$, что противоречит II.



2-й случай: $a \in (0; 1)$. Как и первом случае, по определению можно доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$, т.е. $x = 0$ — вертикальная асимптота. Других вертикальных асимптот для $g(x)$ не будет из-за непрерывности $g(x)$.

Предположив существование асимптоты для $g(x)$ на ∞ , воспользуемся посчитанными пределами из первого случая (что можно сделать, поскольку $1/a > 1$):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a x}{x} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_{1/a} x}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

С учетом $g(x) \searrow$ последний предел означает, что b — нижняя граница для $E(g)$, что противоречит II. ■

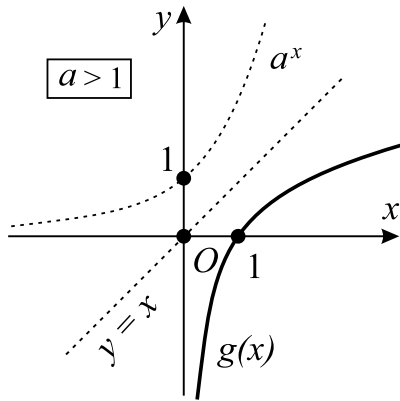


Рис. 27

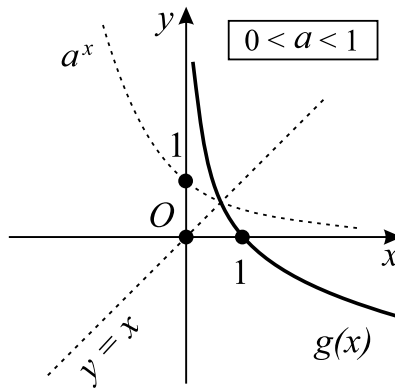


Рис. 28

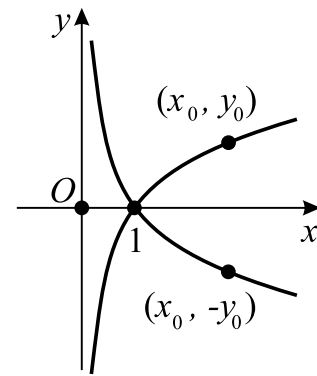


Рис. 29

XI. Поскольку $g(x) = \log_a x$ и $f(x) = a^x$ обратны, по теореме 6.1 достаточно $\Gamma(g)$ получить как симметричный образ $\Gamma(f)$ относительно прямой $y = x$. На рис. 27 и 28 изображены графики $g(x) = \log_a x$ при $a > 1$ и $a \in (0; 1)$ (соответственно).

XII. Графики функций $g(x) = \log_a x$ и $g_1(x) = \log_{1/a} x$ симметричны относительно оси (Ox) (рис. 29).

Доказательство. Справедливы следующие переходы:

$$(x_0, y_0) \in \Gamma(g) \Leftrightarrow y_0 = \log_a x_0 \Leftrightarrow -y_0 = \log_{1/a} x_0 \Leftrightarrow (x_0, -y_0) \in \Gamma(g_1).$$

Осталось заметить, что точки (x_0, y_0) и $(x_0, -y_0)$ симметричны друг другу относительно оси (Ox) (рис. 29). ■

Глава 4

Производная

4.1. Определение производной. Касательная к графику

В этой главе в качестве основного метрического пространства мы рассматриваем множество $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой $d(x, y) = |y - x|$. Эта функция расстояния порождает на $\mathbb{R}$ систему открытых множеств, с помощью которых определяются внутренние точки для произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}$. Через $\overset{\circ}{A}$ (или $\text{Int } A$) мы обозначали множество всех внутренних точек множества A . Кроме того, *промежуток* на прямой называется произвольное ее выпуклое подмножество (т.е. вместе с любой парой своих точек содержащее и отрезок, который их соединяет). Полный список промежутков: отрезки, полуинтервалы, интервалы, лучи, открытые лучи и вся прямая.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Если $\bar{x} \in A$, причем $\bar{x} \neq x_0$, то разность $\Delta x = \bar{x} - x_0$ называется приращением аргумента, а разность $\Delta f = f(\bar{x}) - f(x_0)$ называется приращением функции. Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 . Обозначения:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x_0} \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$ и B — это множество всех точек, в которых существует производная у $f(x)$, т.е. $B = \{x_0 \in \overset{\circ}{A} : \exists f'(x_0)\}$. Тогда функция $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, определенная правилом $g(x_0) = f'(x_0)$ для каждого $x_0 \in B$, называется производной функции $f(x)$ и обозначается $g(x) = f'(x)$.

Для некоторых функций найдем их производные, используя только определение.



Пример 1. Для константы, т.е. функции $f(x) = p$ для любого $x \in \mathbb{R}$ производная ищется особенно просто. В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p - p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Таким образом, производная константы всюду равна нулю.

Пример 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдем производную $f(x) = x^n$. В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется (используем формулу бинома Ньютона и простые равенства $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - (x_0)^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0)^n + n \cdot (x_0)^{n-1} \Delta x + C_n^2 (x_0)^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - (x_0)^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(n \cdot (x_0)^{n-1} + C_n^2 (x_0)^{n-2} (\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right) = n \cdot (x_0)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.

Пример 3. Найдем производную $f(x) = \sin x$. В любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется (используем 13П и непрерывность косинуса):

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0. \end{aligned}$$

В результате, $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 4. Для функции $f(x) = \cos x$ производная ищется аналогично предыдущему примеру, с той лишь разницей, что

$$\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

откуда $(\cos x)' = -\sin x$.

Пример 5. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ и $x_0 = 0$. Посчитаем два односторонних предела (они были определены на стр. 99):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Односторонние пределы оказались разными, поэтому предела у отношения $\Delta f / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ нет и производной у $f(x) = |x|$ в нуле не существует. Во всех остальных точках производная у этой функции есть и она равна 1 (при $x_0 > 0$) или -1 (для всех $x_0 < 0$).

Определим касательную к $\Gamma(f)$ в произвольной точке $(x_0, f(x_0))$ и выясним, как с помощью производной можно найти ее уравнение.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $\bar{x} \in A \setminus \{x_0\}$ и $M_0(x_0, f(x_0))$, $\bar{M}(\bar{x}, f(\bar{x}))$ — две различные точки графика функции $f(x)$. Тогда прямая $(M_0\bar{M})$ называется секущей для $\Gamma(f)$. Касательной к $\Gamma(f)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей $(M_0\bar{M})$ при $\bar{M} \rightarrow M_0$ (т.е. при одновременном выполнении условий: $\bar{x} \rightarrow x_0$ и $f(\bar{x}) \rightarrow f(x_0)$).

На рис. 30 штриховыми линиями проведены несколько секущих для графика функции $f(x)$ и сплошная прямая l^* — касательная к $\Gamma(f)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

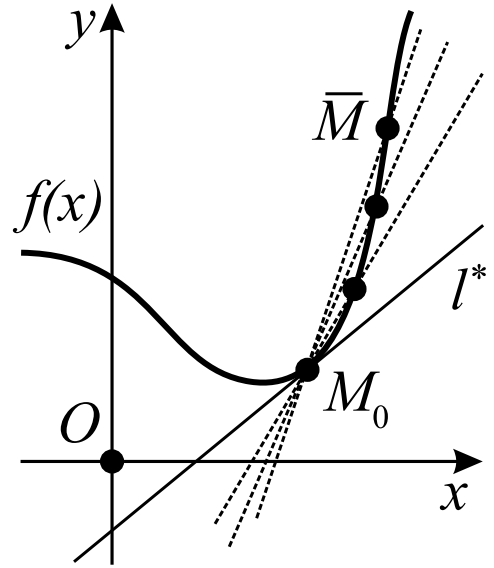


Рис. 30

Теорема 1.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ и существует $f'(x_0)$. Тогда в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ к графику функции $f(x)$ можно провести касательную, причем она будет задаваться уравнением $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Доказательство. Пусть уравнение $(M_0\bar{M})$ имеет вид $y = kx + b$. Найдем коэффициенты k и b в этом уравнении, подставляя в него координаты точек $M_0(x_0, f(x_0))$, $\bar{M}(\bar{x}, f(\bar{x}))$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f(\bar{x}) = k\bar{x} + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0) = kx_0 + b, \\ f(\bar{x}) - f(x_0) = k(\bar{x} - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}, \\ b = f(x_0) - \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0} \cdot x_0. \end{cases} \end{aligned}$$



Равносильные переходы в системах обеспечивались условием $\bar{x} \neq x_0$. Теперь в уравнении секущей $(M_0\bar{M})$

$$y = \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0} \cdot x + f(x_0) - \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0} \cdot x_0$$

перейдем к пределу при $\bar{x} \rightarrow x_0$ и получим уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, которое легко преобразуется к искомому уравнению $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

■

Пример 6. Запишем уравнение касательной к графику степенной функции $f(x) = \frac{1}{27}x^4$ в точке $(3, 3)$. Из второго примера почти сразу следует, что $f'(x) = \frac{4}{27}x^3$. Подставляя $x_0 = 3$, получим $f'(x_0) = 4$ и $f(x_0) = \frac{1}{27} \cdot 3^4 = 3$. По предыдущей теореме искомое уравнение имеет вид $y = 4(x - 3) + 3$ или $y = 4x - 9$.

Результат в следующем утверждении считают *геометрическим смыслом производной*.

Следствие 1. Пусть существует $f'(x_0)$ и l^* — касательная к $\Gamma(f)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона прямой l^* к положительному направлению оси (Ox) .

Доказательство. В теореме было доказано, что $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент прямой l^* , которая является касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Из курса геометрии десятого класса известно, что $k = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона прямой l^* к положительному направлению оси (Ox) .

■

Следствие 2. Пусть $f(x) = ax^n$, где $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда касательная к $\Gamma(f)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ проходит также через точку с координатами $(\frac{n-1}{n}x_0, 0)$.

Доказательство. Из второго примера и свойства пределов функций (утверждение (4) теоремы 2.1 предыдущей главы) получим, что $f'(x) = anx^{n-1}$, поэтому уравнение касательной к $\Gamma(f)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = anx_0^{n-1}(x - x_0) + ax_0^n \quad \text{или} \quad y = anx_0^{n-1} \cdot x - a(n-1)x_0^n.$$

При $x_0 = 0$ касательная совпадает с осью (Ox) и утверждение очевидно. Далее будем считать, что $x_0 \neq 0$ и найдем точку пересечения касательной



с осью абсцисс. Из уравнения $0 = anx_0^{n-1} \cdot x - a(n-1)x_0^n$ сразу получим $0 = nx - (n-1)x_0$ или $x = (n-1)x_0/n$.

Предыдущее следствие дает простой способ построения с помощью циркуля и линейки касательной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ к степенной функции $f(x) = ax^n$ ($n \geq 2$) с натуральным показателем: необходимо разделить отрезок $[0; x_0]$ на n равных частей и провести прямую через предпоследнюю точку деления и точку M_0 .

Теорема 1.2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ и существует $f'(x_0)$. Тогда приращение функции в точке x_0 можно представить в виде

$$\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

причем выполняется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Доказательство. Пусть существует конечный предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, тогда обозначим через

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0), \quad (*)$$

откуда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$. Из (*) также можно получить, что $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Следствие. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Если существует $f'(x_0)$, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \\ &= f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

откуда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Тем самым мы доказали, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 .

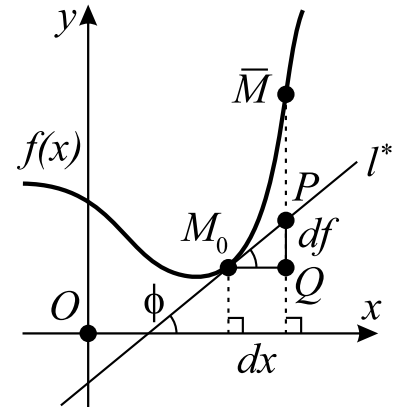


Рис. 31

Определение. Дифференциалом независимой переменной x в точке x_0



называется $dx = \Delta x$. Дифференциалом функции $f(x)$ (или зависимой переменной) в точке x_0 называется $df = f'(x_0) \cdot dx$.

Замечания. 1) геометрический смысл дифференциала легко получается из геометрического смысла производной ($f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона касательной l^* к положительному направлению оси абсцисс). Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 — это приращение касательной l^* к $\Gamma(f)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, которое соответствует данному приращению аргумента. Например, в случае $f'(x_0) > 0$ (рис. 31), мы сразу найдем, что число $f'(x_0) \cdot \Delta x = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta x$ является длиной катета PQ в прямоугольном треугольнике M_0PQ .

2) *продифференцировать* функцию $f(x)$ — означает найти ее дифференциал, т.е. $df = f'(x) \cdot dx$. Например, мы уже знаем, что $dx^n = nx^{n-1} \cdot dx$ при натуральных n .

3) из-за представления $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ дифференциал функции, т.е. $df = f'(x_0) \cdot \Delta x$, считают *главной частью* приращения функции Δf , поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = 0 \cdot 0 = 0$. На рис. 31 не похоже, что $df = PQ$ является главной частью $\Delta f = Q\overline{M}$, но нужно учесть, что при $\Delta x \rightarrow 0$ величина $P\overline{M} = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ стремительно приближается к нулю.

4.2. Производная и арифметические операции

Начнем этот параграф с простых правил нахождения производной суммы, произведения и частного функций.

Теорема 2.1. Пусть функции f и g заданы на промежутке $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ и существуют $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$. Тогда

1) функция $f + g$ имеет производную в точке x_0 , причем $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, т.е. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

2) функция $f - g$ имеет производную в точке x_0 , причем $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$, т.е. $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$;

3) функция $f \cdot g$ имеет производную в точке x_0 , причем $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$, т.е. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

4) если $p \in \mathbb{R}$, то $(p \cdot f)'(x_0) = p \cdot f'(x_0)$, т.е. $(p \cdot f)'(x) = p \cdot f'(x)$;

5) если $g(x_0) \neq 0$, то $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, т.е. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$;



б) если $g(x_0) \neq 0$, то $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$, т.е.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство. 1) воспользуемся определением производной и алгебраическими свойствами пределов функций:

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

2) доказывается аналогично (1).

3) из последнего результата предыдущего параграфа следует, что функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , поэтому $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$. Теперь

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

4) в первом примере предыдущего параграфа было установлено, что производная константы тождественно равна нулю, поэтому (4) сразу следует из (3).

5) снова из непрерывности $g(x)$ в точке x_0 получим $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) \neq 0$, откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \end{aligned}$$

6) следует из (3) и (5), поскольку $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$.

■

Мы уже знаем, что непрерывная и строго монотонная функция, заданная на промежутке, имеет обратную функцию. В следующей теореме научимся находить производную от обратной функции к данной.



Теорема 2.2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, где A — промежуток на $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ и существует $f'(x_0)$, причем $f'(x_0) \neq 0$. Если функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на A , то обратная к ней функция $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, причем $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. По теореме 6.1 из предыдущей главы следует существование, непрерывность и строгая монотонность функции $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, которая является обратной к $f(x)$. Кроме того, из этой теоремы мы получим, что B — промежуток на $\mathbb{R}$ и y_0 — внутренняя точка этого промежутка. Выберем произвольное значение $\bar{y} \in B \setminus \{y_0\}$. Строгая монотонность $g(y)$ дает $\bar{x} = g(\bar{y}) \neq g(y_0) = x_0$, а непрерывность этой функции влечет $\bar{x} = g(\bar{y}) \rightarrow g(y_0) = x_0$ при $\bar{y} \rightarrow y_0$ (здесь мы используем вместо $\lim_{\bar{y} \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ синонимичное обозначение « $g(\bar{y}) \rightarrow g(y_0)$ при $\bar{y} \rightarrow y_0$ »). Заметим также, что для обратных функций f и g условия $\bar{x} = g(\bar{y})$ и $x_0 = g(y_0)$ соответственно равносильны условиям $f(\bar{x}) = \bar{y}$ и $f(x_0) = y_0$. Теперь докажем по определению существование $g'(y_0)$ и найдем ее значение:

$$g'(y_0) = \lim_{\bar{y} \rightarrow y_0} \frac{g(\bar{y}) - g(y_0)}{\bar{y} - y_0} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x_0} \frac{\bar{x} - x_0}{f(\bar{x}) - f(x_0)} = \frac{1}{\lim_{\bar{x} \rightarrow x_0} \frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

Оформим результат предыдущей теоремы в виде алгоритма и используем его в нахождении производной арксинуса.

Алгоритм (вычисление производной обратной функции). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — обратные друг к другу функции, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \overset{\circ}{B}$. Для нахождения $g'(x_0)$ достаточно:

- 1) определить такое число $x_1 \in \overset{\circ}{A}$, что $f(x_1) = x_0$;
- 2) вычислить $f'(x_1)$;
- 3) убедившись, что $f'(x_1) \neq 0$, получить $g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_1)}$.

Пример 1. Найдем производную для функции $g(x) = \arcsin x$. Сразу определяем $B = D(g) = [-1; 1]$, $f(x) = \sin x$, $A = D(f) = [-\pi/2; \pi/2]$. На первом шаге для произвольной точки $x_0 \in (-1; 1)$ найдем такое число $x_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$, что $\sin x_1 = x_0$. По определению арксинуса, таким числом будет $x_1 = \arcsin x_0$. Используя третий пример первого параграфа, найдем



$f'(x_1) = \cos x_1 = \cos(\arcsin x_0)$. Учитывая, что $x_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$, убеждаемся, что $f'(x_1) \neq 0$. Чтобы избавиться в ответе от знаков тригонометрических функций, в основное тригонометрическое тождество $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ подставим $\alpha = \arcsin x_0$ и получим, что $\cos^2(\arcsin x_0) = 1 - x_0^2$. Заметим, что благодаря условию $\arcsin x_0 \in (-\pi/2; \pi/2)$ не будет проблем с выбором знака у правой части после извлечения корня: $\cos(\arcsin x_0) = \sqrt{1 - x_0^2}$. Окончательно получим $g'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}}$ или $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ при всех $x \in (-1; 1)$.

Композицию двух (и большего числа) функций часто называют *сложной функцией*, поэтому следующий результат называется *теоремой о производной сложной функции*.

Теорема 2.3. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$, $h = g \circ f$, множества A и B являются промежутками и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, $y_0 = f(x_0) \in \overset{\circ}{B}$. Если существуют $f'(x_0)$ и $g'(y_0)$, то в точке x_0 функция $h(x)$ также имеет производную, причем $h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ (в общем случае, $h'(x) = (g)'_y \cdot (f)'_x$)¹.

Доказательство. Из существования $g'(y_0)$ по теореме 1.2 сразу получим представление

$$\Delta g = g'(y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta y) \cdot \Delta y, \quad (*)$$

причем выполняется $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha(\Delta y) = 0$. Следствие из той же теоремы гарантирует, что существование $f'(x_0)$ влечет непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 , что дает $\Delta y \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, где $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Теперь разделим обе части соотношения (*) на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(y_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha(\Delta y) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \\ &= g'(y_0) \cdot f'(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

■

Рассмотрим пару примеров на нахождение производной композиции двух и большего числа функций.

Пример 2. Найдём производную от $h(x) = \sin(x^2)$. Здесь $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$, $f'(x) = 2x$ и $(g(y))'_y = \cos y$. Из предыдущей теоремы сразу

¹Запись $(g)'_y$ означает, что мы находим производную функции g , считая y независимой переменной.



получаем, что $h'(x) = 2x \cdot \cos y = 2x \cdot \cos x^2$.

Пример 3. Найдем производную функции $q(x) = \sin^2(\omega x + \varphi_0)$, где ω и φ_0 являются постоянными числовыми параметрами. Эта функция может быть представлена в виде композиции трех функций²: $q(x) = (h \circ g \circ f)(x)$, где $y = f(x) = \omega x + \varphi_0$, $z = g(y) = \sin y$ и $h(z) = z^2$. Быстро находим $f'(x) = \omega$, $(g(y))'_y = \cos y$ и $(h(z))'_z = 2z$. Дважды применив предыдущую теорему, получим

$$q'(x) = (2z) \cdot (\cos y) \cdot \omega = \omega \cdot 2 \sin(\omega x + \varphi_0) \cdot \cos(\omega x + \varphi_0) = \omega \sin(2\omega x + 2\varphi_0).$$

Замечание. Для сложной функции $h(x) = f_n(f_{n-1}(\dots f_1(x)))$, которая имеет n -ый порядок «сложности», можно не вводить n промежуточных переменных, а обойтись только одной, обозначив предпоследнюю из действующих функций через y и сделать первый шаг к победе: $h'(x) = (f_n)'_y \cdot (y)'_x$. При этом $y(x)$ имеет уже $(n-1)$ -ый порядок «сложности» и при вычислении ее производной в качестве промежуточной переменной можно снова использовать y .

4.3. Производные элементарных функций

Для нахождения производных от степенной, показательной и логарифмической функций дополним нашу скромную коллекцию замечательных пределов с помощью следующей теоремы. Продолжая нумерацию замечательных пределов, первое и второе утверждения этой теоремы будем считать *третьим замечательным* пределом (сокращенно — 3ЗП), следом идет *четвертый замечательный* предел (4ЗП) и завершают формулировку теоремы два схожих предела, каждый из которых будем называть *пятым замечательным* пределом (5ЗП).

Теорема 3.1. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2) при всех $a > 0$ и $a \neq 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.

3) для любых $a \in \mathbb{R}$ верно $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$.

4) при всех $a > 0$ и $a \neq 1$ выполняется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

²Можно считать, что у этой функции «сложность» третьего порядка.



Доказательство. 1) последовательно используя алгебраические свойства логарифмов, непрерывность логарифмической функции³ и, наконец, второй замечательный предел, получим

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1.\end{aligned}$$

2) следует из (1) и формулы перехода в логарифме к новому основанию, поскольку $\log_a(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln a}$.

3) заметим сначала, что любая степенная функция $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$, $x > 0$) непрерывна, поскольку из тождества $x^a = e^{a \ln x}$, справедливого при всех $x > 0$, следует, что $f(x)$ можно представить в виде композиции двух непрерывных функций ($g(x) = a \ln x$ и $h(x) = e^x$). Теперь сделаем замену $y = (1+x)^a - 1$, откуда $y+1 = (1+x)^a$ и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ (как раз в силу установленной выше непрерывности). Из ограничения $x > -1$ имеем $y > -1$, что позволяет прологарифмировать последнее равенство и получить $\ln(1+y) = \ln(1+x)^a = a \cdot \ln(1+x)$, откуда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} &= \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{y \cdot a \cdot \ln(1+x)}{x \cdot \ln(1+y)} = \\ &= a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = a \cdot 1 \cdot 1 = a.\end{aligned}$$

4) заменив $y = a^x - 1$, из непрерывности показательной функции получим $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Равенство $y+1 = a^x$ дает $y > -1$ и $\ln(1+y) = x \cdot \ln a$, откуда $x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \ln a \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = (\ln a) \cdot 1 = \ln a.$$

5) сразу следует из (4). ■

Функции в следующих тринадцати пунктах называются *простейшими*. Выясним, как находить их производные.

³Непрерывность $f(x)$ в точке x_0 позволяет вместо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ записать $f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.



I. Пусть $f(x) = p$ для любого $x \in \mathbb{R}$ (константу, или постоянную функцию, часто задают тождеством $f(x) \equiv p$ и говорят, что $f(x)$ тождественно равна константе), тогда $f'(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. См. первый пример первого параграфа этой главы. ■

II. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = x^n$ — степенная функция с натуральным показателем и областью определения $D(f) = \mathbb{R}$, тогда $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. См. второй пример первого параграфа этой главы. ■

III. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) = x^a$ — степенная функция с произвольным показателем и областью определения $D(f) = (0; \infty)$, тогда $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ для всех $x > 0$.

Доказательство. Выберем произвольное $x_0 > 0$ и найдем по определению $f'(x_0)$, воспользовавшись четвертым замечательным пределом:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^a - x_0^a}{\Delta x} = x_0^{a-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} = a \cdot x_0^{a-1}.$$

IV. Пусть $f(x) = \sin x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, тогда $f'(x) = \cos x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. См. третий пример первого параграфа этой главы. ■

V. Пусть $f(x) = \cos x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, тогда $f'(x) = -\sin x$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. См. четвертый пример первого параграфа этой главы. ■

VI. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, тогда $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k/2 : k \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Используем правило нахождения производной частного функций:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



VII. Пусть $f(x) = \operatorname{ctg} x$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$, тогда $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$ для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$.

Доказательство. В очередной раз используем правило нахождения производной частного функций:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}' x &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

VIII. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) = a^x$ — показательная функция с областью определения $D(f) = \mathbb{R}$, тогда $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Выберем произвольное $x_0 \in \mathbb{R}$ и найдем по определению $f'(x_0)$, воспользовавшись пятым замечательным пределом:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \cdot \ln a.$$

Следствие. Для любого $x \in \mathbb{R}$ следует, что $(e^x)' = e^x$.

Доказательство. Очевидно следует из предыдущего утверждения.

IX. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$ и $g(x) = \log_a x$ — логарифмическая функция с областью определения $D(f) = (0; \infty)$, тогда $g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ для всех $x > 0$.

Доказательство. *Первый способ.* Выберем произвольное $x_0 > 0$ и найдем по определению $g'(x_0)$, воспользовавшись третьим замечательным пределом:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \\ &= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \end{aligned}$$

Второй способ. Функция $g(x)$ является обратной к $f(x) = a^x$, поэтому можно запустить алгоритм нахождения производной обратной функции.



Сначала для произвольного $x_0 > 0$ найдем такое $x_1 \in \mathbb{R}$, что $a^{x_1} = x_0$. Таким числом будет $x_1 = \log_a x_0$. Затем убеждаемся, что $f'(x_1) = a^{x_1} \cdot \ln a \neq 0$, и применяем теорему 2.2:

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{a^{\log_a x_0} \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

■

X. Пусть $g(x) = \arcsin x$, тогда $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для любого $x \in (-1; 1)$.

Доказательство. См. первый пример второго параграфа этой главы.

■

XI. Пусть $g(x) = \arccos x$, тогда $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для любого числа $x \in (-1; 1)$.

Доказательство. Учитывая, что равенство $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ выполняется для любого $x \in [-1; 1]$ и производная константы тождественно равна нулю, получим, что $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для всех $x \in (-1; 1)$.

■

XII. Пусть $g(x) = \operatorname{arctg} x$, тогда $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Функция $g(x)$ является обратной к $f(x) = \operatorname{tg} x$, ограниченной на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$, поэтому снова используем алгоритм для нахождения производной обратной функции. Сначала для произвольного $x_0 \in \mathbb{R}$ найдем такое $x_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$, что $\operatorname{tg} x_1 = x_0$. Таким числом будет $x_1 = \operatorname{arctg} x_0$. Затем убеждаемся, что $f'(x_1) = 1/\cos^2 x_1 \neq 0$, и применяем теорему 2.2:

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_1)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x_0) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x_0)} = \frac{1}{1 + x_0^2}.$$

В предпоследнем переходе мы в хорошо известное тригонометрическое тождество $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ подставили вместо φ число (или угол) $\operatorname{arctg} x_0$.

■

XIII. Пусть $g(x) = \operatorname{arcctg} x$, тогда $g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Учитывая, что равенство $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ выполняется для любого $x \in \mathbb{R}$ и производная константы тождественно равна нулю, получим, что $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

■



Замечание. Функции, которые получаются из простейших с помощью **конечного** числа применения арифметических операций, взятия композиции функций и перехода к обратной функции (если это возможно), называются *элементарными* функциями. Ясно, что если мы сложим две элементарные функции, то вновь получится элементарная функция. Это же касается разности, произведения, частного, композиции и унарной операции перехода к обратной функции (последняя применяется только к тем элементарным функциям, которые имеют обратные). Результаты второго и третьего параграфа приводят нас к следующему важному факту: **производная от элементарной функции также является элементарной**. Другими словами, класс элементарных функций устойчив (или замкнут) относительно взятия производной.

4.4. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа

Напомним некоторые определения.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если найдется такая $O_\delta(x_0) \subseteq A$, что при всех $x \in O_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geq f(x_0)$). Точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$, если она является точкой максимума или точкой минимума для $f(x)$.

Квадратичная функция всегда имеет единственную точку экстремума, а $f(x) = \sin x$ — счетное число различных точек экстремума, которые задаются формулой $\frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) в точке x_0 , если найдется такая $O_\delta(x_0) \subseteq A$, что:

- 1) для каждого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ выполняется $f(x) < f(x_0)$ (соответственно, $f(x) > f(x_0)$);
- 2) для каждого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется $f(x) > f(x_0)$ (соответственно, $f(x) < f(x_0)$).

Введенные выше свойства будем обозначать через $f \nearrow_{x_0}$ и $f \searrow_{x_0}$. Сразу из определения следует, что $f \nearrow_{x_0}$ тогда и только тогда, когда выполняется $(-f) \searrow_{x_0}$. Ясно, что если функция строго возрастает на некотором промежутке, то она и строго возрастает в любой его внутренней точке. Однако



существуют примеры непрерывных функций, которые строго возрастают в точке x_0 , но не возрастают ни на какой окрестности этой точки.

Перед основными результатами этого параграфа установим пару вспомогательных фактов.

Лемма 4.1. Если $f \nearrow_{x_0}$ или $f \searrow_{x_0}$, то x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

Доказательство. Сразу следует из определений. ■

Лемма 4.2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

1) если $f'(x_0) > 0$, то $f \nearrow_{x_0}$.

2) если $f'(x_0) < 0$, то $f \searrow_{x_0}$.

Доказательство. 1) обозначим через $a = f'(x_0)$ и рассмотрим функцию $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, определенную на множестве $A \setminus \{x_0\}$. Из определения производной сразу следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$. Поскольку $a > 0$, множество $O(a) = (0; \infty)$ является окрестностью числа a . По определению предела для $O(a)$ мгновенно найдем такую $O_\delta(x_0) \subseteq A$ (здесь мы воспользовались тем, что x_0 — внутренняя точка множества A), что при всех $x \in \check{O}_\delta(x_0)$ выполнено $g(x) \in O(a)$, т.е. $g(x) > 0$ или

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \quad (*)$$

а) если $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, то $x - x_0 < 0$ и из (*) получаем $f(x) - f(x_0) < 0$ или $f(x) < f(x_0)$.

б) для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ имеем $x - x_0 > 0$ и из (*) получаем $f(x) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x) > f(x_0)$.

Из (а) и (б) следует, что $f \nearrow_{x_0}$.

2) пусть $f_1(x) = -f(x)$, тогда $f'_1(x_0) > 0$. Из (1) получим $f_1 \nearrow_{x_0}$, что дает $f \searrow_{x_0}$. ■

Следующее утверждение называется *теоремой Ферма*⁴ или *необходимым условием существования экстремума*.

⁴Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик; получил юридическое образование и (с 1631г) был советником кассационной палаты Тулузского парламента; математикой занимался в свободное время и при жизни почти не печатался; работал в теории чисел, где известность получили великая и малая теоремы Ферма, а также в аналитической геометрии и математическом анализе; установил законы дифференцирования и интегрирования степени, вывел формулы интегрирования по частям.



Теорема 4.3. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $f'(x_0) \neq 0$.

1-й случай: $f'(x_0) > 0$. Предыдущие две леммы дают $f \nearrow_{x_0}$ и x_0 не является точкой экстремума. $\nearrow$.

2-й случай: $f'(x_0) < 0$. Предыдущие две леммы дают $f \searrow_{x_0}$ и x_0 не является точкой экстремума. $\searrow$.

■

Обратить теорему Ферма не получится. Например, функция $f(x) = x^3$ имеет нулевую производную при $x_0 = 0$, но ни одной точки экстремума у этой функции нет, поскольку она строго возрастает на всей числовой прямой.

Следующий результат называется *теоремой Ролля*⁵.

Теорема 4.4. Пусть $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ и функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$;
- 2) для каждого $x \in (a; b)$ существует $f'(x)$;
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тогда найдется такая точка $x_0 \in (a; b)$, для которой $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ позволяет применить к $f(x)$ вторую теорему Вейерштрасса (теорема 7.2 третьей главы) и найти такие $x_1, x_2 \in [a; b]$, что

$$f(x_1) = m^* = \inf\{f(x) : x \in [a; b]\},$$

$$f(x_2) = M^* = \sup\{f(x) : x \in [a; b]\}.$$

Теперь рассмотрим два случая.

1-й случай: $m^* = M^*$. В этом случае функция на всем отрезке принимает только одно значение $p = m^* = M^*$ и поэтому имеет нулевую производную во всех внутренних точках этого отрезка. В качестве x_0 можно взять $\frac{a+b}{2}$.

2-й случай: $m^* \neq M^*$. Тогда $x_1 \neq x_2$ и либо $x_1 \in (a; b)$, либо $x_2 \in (a; b)$ (действительно, предположив, что $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ мы по третьему условию теоремы получим $m^* = f(x_1) = f(x_2) = M^*$). Б.о.о. $x_2 \in (a; b)$ (рис. 32). Тогда x_2 является точкой максимума функции $f(x)$ (в качестве $O_\delta(x_2)$ можно взять любую окрестность этой точки, которая целиком содержится в интер-

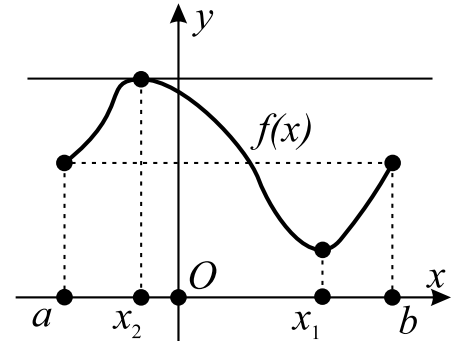


Рис. 32

⁵Мишель Ролль (1652–1719) — французский математик, изучал математику самостоятельно; основные работы посвящены алгебре, где разработал первый систематический метод решения линейного диофантового уравнения с двумя переменными и правило отыскания верхней границы действительных корней алгебраического уравнения; выступал с критикой анализа бесконечно малых и геометрии Декарта.



вале $(a; b)$). По второму условию теоремы следует существование $f'(x_2)$, а теорема Ферма дает $f'(x_2) = 0$. Таким образом, $x_0 = x_2$ — искомая точка. ■

О геометрическом смысле теоремы Ролля пойдет речь в следующем утверждении.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, тогда найдется такое число $x_0 \in (a; b)$, что касательная к графику функции $f(x)$, проведенная в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, будет параллельна оси Ox (рис. 32).

Доказательство. Из теоремы Ролля находим число $x_0 \in (a; b)$, для которого $f(x_0) = 0$. Тогда уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y = 0 \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, что задает прямую, параллельную Ox и точка M_0 — искомая. ■

Следующее утверждение называется *теоремой Лагранжа*⁶.

Теорема 4.5. Пусть $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ и функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$;
- 2) для каждого $x \in (a; b)$ существует $f'(x)$. Тогда найдется такая точка $x_0 \in (a; b)$, для которой $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Сразу замечаем, что $g(x)$, являясь разностью функции $f(x)$ и линейной функции $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$, непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную во всех внутренних точках этого отрезка (поскольку любая

⁶Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — французский математик и механик, основные работы посвящены механике, геометрии, алгебре, математическому анализу и теории дифференциальных уравнений; в основу динамики положил сочетание принципа возможных перемещений с принципом Даламбера; дал общее решение проблемы колебания струны; в математическом анализе построил формулы остаточного члена ряда Тейлора, создал теорию условных экстремумов, ввел тройные интегралы; в теории аналитических функций построил ряд, носящий его имя, и доказал несколько теорем, сформулированных П. Ферма; разработал общий метод решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка; пять раз был удостоен Премии Парижской академии наук, в частности — за теорию либрации Луны (1764) и за теорию движений спутников Юпитера (1766); Наполеон любил обсуждать с деликатным и ироничным Лагранжем философские вопросы, он пожаловал Лагранжу титул графа, должность сенатора и орден Почётного легиона.



линейная функция, как и любой многочлен, имеет производную на всём множестве $\mathbb{R}$). Посчитаем значения функции $g(x)$ на концах отрезка $[a; b]$:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0,$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

В результате, функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, поэтому найдется такая точка $x_0 \in (a; b)$, в которой $g'(x_0) = 0$. Теперь в $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ осталось подставить x_0 и получить

$$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

■

В следующем утверждении обсудим геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Следствие 1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, тогда найдется такое число $x_0 \in (a; b)$, что касательная к графику функции $f(x)$, проведенная в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, будет параллельна прямой (KL) , где $K(a, f(a))$ и $L(b, f(b))$ (рис. 33).

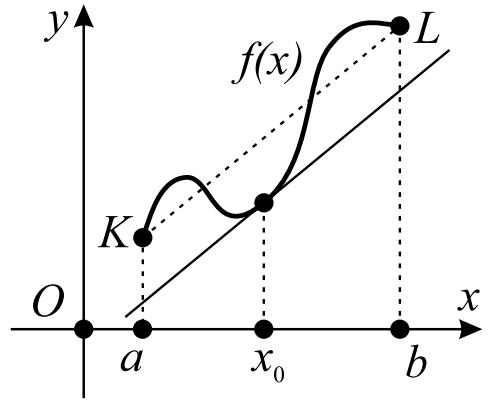


Рис. 33

Доказательство. По предыдущей теореме найдем число $x_0 \in (a; b)$, для которого $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k_0$, поэтому уравнение касательной l_0 в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ принимает вид $y = k_0(x - x_0) + f(x_0)$ (использовали формулу из теоремы 1.1). Из курса геометрии 10 класса нам известно, что уравнение прямой (KL) имеет вид $y = k_1 \cdot x + b_1$, причем $k_1 = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — угол наклона прямой (KL) к положительному направлению оси (Ox) . Подставляя координаты точек K и L в уравнение $y = k_1 \cdot x + b_1$ получим систему: $f(a) = k_1 \cdot a + b_1$ и $f(b) = k_1 \cdot b + b_1$. Из этой системы находим $k_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Равенство



$k_1 = k_0$ обеспечивает параллельность (напомним, что совпадающие прямые также считаются параллельными) прямых (KL) и l_0 , поэтому точка M_0 — искомая. ■

Формула, доказанная в следующем утверждении, называется *формулой Лагранжа конечных приращений* (или сокращенно — ФЛКП).

Следствие 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, тогда найдется такое число $x_0 \in (a; b)$, что приращение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ может быть выражено формулой

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Доказательство. Из равенства $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ сразу следует, что $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$. ■

Упражнения

1. Приведите пример функции, заданной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, строго возрастающей в некоторой точке x_0 , но не возрастающей ни на какой окрестности этой точки.
2. Усиьте результат предыдущего примера, построив непрерывную функцию на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, строго возрастающую в некоторой точке x_0 , но не возрастающую ни на какой окрестности этой точки.
3. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на промежутке A , имеющая производную во всех внутренних точках множества A . Докажите, что если уравнение $f'(x) = 0$ имеет n ($n \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$) различных корней, то уравнение $f(x) = 0$ не может иметь на множестве A более $n + 1$ корня.
4. Решите уравнение $3 \cdot 2^{x+2} - 7x = 17$.

4.5. Производная и свойства функций

Теорема 5.1. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток, $f(x)$ непрерывна на A и существует производная во всех $x \in \overset{\circ}{A}$. Тогда $f(x)$ является константой (т.е. $f(x) \equiv C$, где $C \in \mathbb{R}$, или, то же самое, $f(x) = C$ для всех $x \in A$) тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) это свойство было проверено в первом примере первого параграфа этой главы.



$\Leftarrow$) если множество A одноточечно или пустое, то утверждение очевидно. Пусть теперь $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 < x_2$. В силу выпуклости множества A справедливо включение $[x_1; x_2] \subseteq A$. Значит, на отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет производную во всех точках интервала $(x_1; x_2)$. Таким образом, на этом отрезке $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и по ФЛКП найдется такая точка $x_0 \in (x_1; x_2)$, для которой

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) = 0 \cdot (x_2 - x_1) = 0,$$

откуда $f(x_2) = f(x_1)$ (мы использовали очевидное включение $(x_1; x_2) \subseteq \overset{\circ}{A}$, из которого следует $f'(x_0) = 0$). Это может выполняться только для постоянной функции на A (иначе для $f(x)$ нашлись бы такие две точки $x_1, x_2 \in A$, для которых $f(x_1) \neq f(x_2)$). В обратную сторону утверждение доказано. ■

Заметим, что требование на A быть промежутком существенно. Действительно, функция $f(x) : [0; 1] \cup [2; 3] \rightarrow \mathbb{R}$, и принимающая на левом отрезке только значение 1, а на правом — только 2, имеет нулевую производную во всех внутренних точках своей области определения, в то же время, $f(x)$ константой не является. Следующее утверждение поможет ввести понятие неопределенного интеграла.

Следствие. Если функции $F(x)$ и $G(x)$ заданы и непрерывны на промежутке $A \subseteq \mathbb{R}$ и для любой точки $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ выполнено $F'(x_0) = G'(x_0)$, то найдется такое число $C \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in A$ справедливо равенство $G(x) = F(x) + C$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = G(x) - F(x)$. Заметим, что $h(x)$ непрерывна на A и во всех точках $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ выполняется равенство $h(x_0) = G(x_0) - F(x_0) = 0$. По предыдущей теореме следует, что $h(x)$ является константой на всём A , поэтому найдется такое число $C \in \mathbb{R}$, что для любого $x \in A$ справедливо $C = h(x) = G(x) - F(x)$ или $G(x) = F(x) + C$. ■

Теорема 5.2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток, $f(x)$ непрерывна на A и существует производная во всех $x \in \overset{\circ}{A}$. Тогда

- 1) $f \nearrow_A \Leftrightarrow$ для всех $x \in \overset{\circ}{A}$ выполняется $f'(x) \geq 0$;
- 2) если для всех $x \in \overset{\circ}{A}$ выполняется $f'(x) > 0$, то $f \nearrow\nearrow_A$;
- 3) $f \searrow_A \Leftrightarrow$ для всех $x \in \overset{\circ}{A}$ выполняется $f'(x) \leq 0$;



4) если для всех $x \in \overset{\circ}{A}$ выполняется $f'(x) < 0$, то $f \searrow_A$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) выберем произвольное $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ и рассмотрим функцию $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, определенную на $A \setminus \{x_0\}$. В силу $f \nearrow_A$ выполняется $g(x) \geq 0$ при любом $x \in A \setminus \{x_0\}$. Действительно, при $x < x_0$ верно $f(x) - f(x_0) \leq 0$, поэтому $g(x) \geq 0$. А при $x > x_0$ верно $f(x) - f(x_0) \geq 0$, поэтому снова $g(x) \geq 0$. Из неотрицательности $g(x)$, существования $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ и предельного перехода в неравенствах для функций (теорема 2.2 из третьей главы) следует, что $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq 0$.

$\Leftarrow$) рассмотрим произвольные $x_1, x_2 \in A$, для которых $x_1 < x_2$. На отрезке $[x_1; x_2]$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет производную во всех его внутренних точках (в силу выпуклости A выполняются два включения: $[x_1; x_2] \subseteq A$ и $(x_1; x_2) \subseteq \overset{\circ}{A}$). Мы проверили выполнение условий теоремы Лагранжа, поэтому применяя ФЛКП, имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$ для некоторой точки $x_0 \in (x_1; x_2)$. Учитывая $f'(x_0) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, получим $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ или $f(x_1) \leq f(x_2)$. Мы доказали, что $f \nearrow_A$.

2) точно также для произвольных $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ проверяем выполнение для $f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2]$ условий теоремы Лагранжа и по ФЛКП представляем $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$ для некоторой точки $x_0 \in (x_1; x_2)$. Только теперь $f'(x_0) > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$ дают строгое неравенство $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_1) < f(x_2)$. Мы доказали, что $f \nearrow\!\!\nearrow_A$.

3) доказывается аналогично (1).

4) доказывается аналогично (2). ■

Заметим сразу, что условия (2) и (4) предыдущей теоремы обратить не получится. Так, например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой, но ее производная в нуле обращается в ноль, поэтому неравенство $f'(x) > 0$ не выполняется на всём $\mathbb{R}$.

Пример 1. Исследуем на монотонность $f(x) = x^3 + 2x^2 + 7x + 2023$. Найдем $f'(x) = 3x^2 + 4x + 7$ и быстро выясним, что дискриминант этой квадратичной функции отрицателен, что означает $f'(x) > 0$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. По предыдущей теореме получим, что $f \nearrow\!\!\nearrow$.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Будем говорить, что $f'(x)$ при переходе через x_0 меняет свой знак с «+» на «-» (соответственно с «-» на «+»), если найдется такая $O_\delta(x_0) \subseteq \overset{\circ}{A}$, для которой одновременно выполняются два свойства:



- 1) для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ верно, что $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$);
 2) для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ верно, что $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$).

Следующее утверждение называется *первым достаточным условием существования экстремума*.

Теорема 5.3. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $f(x)$ непрерывна на A . Если $f'(x)$ при переходе через точку $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ меняет знак, то x_0 — точка экстремума для функции $f(x)$, причем:

- 1) если знак меняется с «+» на «-», то x_0 — точка максимума;
 2) если знак меняется с «-» на «+», то x_0 — точка минимума.

Доказательство. 1) найдем $O_\delta(x_0) \subseteq \overset{\circ}{A}$ из определения смены знака производной с «+» на «-» и выберем в качестве $\varepsilon = \delta/2$. Тогда $[x_0 - \varepsilon; x_0] \subseteq A$, на этом отрезке функция $f(x)$ непрерывна и имеет положительную производную во всех его внутренних точках. Применяя предыдущую теорему (пункт (2)), получим $f(x) \nearrow_{[x_0 - \varepsilon; x_0]}$ (обозначим это свойство через $(*)$). Аналогичными рассуждениями приходим к непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ и отрицательной производной этой функции на интервале $(x_0; x_0 + \varepsilon)$, что по предыдущей теореме дает $f(x) \searrow_{[x_0; x_0 + \varepsilon]}$ (это свойство обозначим уже через $(**)$). Из $(*)$ и $(**)$ получим, что для всех $x \in O_\varepsilon(x_0)$ выполняется $f(x) \leq f(x_0)$, т.е. x_0 — точка максимума.

2) обозначим через $g(x) = -f(x)$, тогда $g'(x)$ меняет знак переходе через точку x_0 с «+» на «-», и по доказанному в (1) получим, что x_0 — точка максимума для $g(x)$, поэтому x_0 — точка минимума для $f(x)$. ■

Пример 2. Найдем экстремумы у $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 101$. Быстро найдем производную этой функции, т.е. $f'(x) = 6x^2 + 30x + 36 = 6(x^2 + 5x + 6)$. Смена знака у этой функции будет происходить в точке $x_1 = -3$ с «+» на «-», и в точке $x_2 = -2$ с «-» на «+». Поэтому x_1 — точка максимума $f(x)$, а x_2 — ее точка минимума.

Отметим интересную особенность предыдущей теоремы: в точке x_0 производной у $f(x)$ может и не существовать, поскольку в теореме требуют существование производной в некоторой проколотой окрестности точки x_0 . Это позволяет применить эту теорему, например, к функции $f(x) = |x|$, которая не имеет производную в точке $x_0 = 0$, но ее производная меняет знак при переходе через эту точку с «-» на «+». Мы лишаемся такой возможности в следующей теореме, которая называется *вторым достаточным*



условием существования экстремума.

Определение. Второй производной функции $f(x)$ называется производная ее первой производной (т.е. $f''(x) = (f'(x))'$).

Так, для функции из предыдущего примера, $f''(x) = 12x + 30$.

Теорема 5.4. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $f(x)$ непрерывна на A и существует $f'(x)$ в некоторой окрестности $O_\delta(x_0) \subseteq A$. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, причем:

- 1) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$;
- 2) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Доказательство. 1) условие $f''(x_0) < 0$ гарантирует (по лемме 4.2) выполнение $f'(x) \searrow_{x_0}$, поэтому существует такое $\varepsilon \leq \delta$, что при всех $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0)$ выполняется $f'(x) > f'(x_0) = 0$, а для любых $x \in (x_0; x_0 + \varepsilon)$ выполняется $f'(x) < f'(x_0) = 0$. Таким образом, $f'(x)$ при переходе через x_0 меняет знак с «+» на «-», и по предыдущей теореме x_0 — точка максимума.

2) доказывается аналогично (1). ■

Пример 3. Функцию $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 101$ снова исследуем на точки экстремума, но теперь используя второе достаточное условие. Мы уже знаем, что $f'(x) = 6(x^2 + 5x + 6)$ обращается в ноль только в двух точках ($x_1 = -3$ и $x_2 = -2$) и $f''(x) = 12x + 30$. Заметим, что $f''(-3) < 0$, поэтому $x_1 = -3$ — точка максимума, а $f''(-2) > 0$, поэтому $x_2 = -2$ — точка минимума.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Для нее $f'(x) = 2ax + b$ обращается в ноль в единственной точке $x_0 = -b/2a$. Поскольку $f''(x) = 2a$ является константой, при $a > 0$ точка x_0 является точкой минимума $f(x)$, а при $a < 0$ точка x_0 — точка максимума $f(x)$.

Пример 5. У функции $f(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2$ найдем все точки максимума и минимума. Используя правило нахождения производной у произведения, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - 1)(x - 3)^2 + 2(x - 1)^2(x - 3) = 2(x - 1)(x - 3)(2x - 4) = \\ &= 4(x - 1)(x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$



Уравнение $f'(x) = 0$ имеет три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$. Теперь

$$f''(x) = 4((x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)) = 4(3x^2 - 12x + 11).$$

Осталось заметить, что $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$ и $f''(3) > 0$, поэтому $x_1 = 1$ и $x_3 = 3$ — точки минимума, а $x_2 = 2$ — точка максимума функции $f(x)$.

Закончим этот параграф двумя алгоритмами, которые упрощают построение графиков и поиск максимального и минимального значений функций. В исследовании свойств функции $f(x)$ с помощью производной часто используют два термина. Внутренняя точка множества $D(f)$ называется *стационарной точкой* $f(x)$, если производная этой функции в этой точке равна нулю (т.е. касательная к графику функции $f(x)$ в точке со стационарной абсциссой, всегда параллельна оси Ox). Более общим является понятие *критической точки* — это внутренняя точка области определения функции $f(x)$, в которой производная равна нулю или не существует.

Алгоритм I (построение графика функции с использованием производной). Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, A — промежуток и $f(x)$ непрерывна на A . Для построения графика функции $f(x)$ достаточно:

1) найти все точки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из A , в которых $f'(x)$ равна нулю, не определена или терпит разрыв (т.е. найти все критические точки $f(x)$ и точки разрыва $f'(x)$);

2) считая, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ на каждом из интервалов $(-\infty; x_1) \cap A$, $(x_1; x_2)$, $\dots$, $(x_n; \infty) \cap A$ определить знак $f'(x)$, подставляя произвольную точку из интервала в $f'(x)$;

3) с учетом знаков производной из предыдущего пункта определить характер монотонности функции $f(x)$ на каждом из получившихся интервалов;

4) для каждого x_i найти $f(x_i)$ и отметить на координатной плоскости точки $M_i(x_i, f(x_i))$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

5) с учетом (3) и (4) построить $\Gamma(f)$ на каждом из интервалов.

Поскольку на интервале $(x_i; x_{i+1})$ нет нулей и точек разрыва функции $f'(x)$, из теоремы Коши (теорема 5.3 третьей главы) следует, что $f'(x)$ на этом промежутке принимает значения только одного знака, поэтому корректно проверять знак $f'(x)$ подстановкой только одной точки из этого интервала. Некоторые заметили, что соединять точки M_i и M_{i+1} можно по-разному, даже зная характер монотонности функции $f(x)$ на интервале $(x_i; x_{i+1})$. Поэтому мы добавим в следующем параграфе более тонкие инструменты исследова-



дования $f(x)$ (определение направления выпуклости и способы нахождения точек перегиба графика) и построим график непростой функции.

Теоретическая основа следующего алгоритма заложена первой и второй теоремами Вейерштрасса (теоремы 3.7 и 7.2 третьей главы) — любая непрерывная функция на отрезке достигает на нем свое максимальное значение $M(f, [a; b]) = \sup\{f(x) : x \in [a; b]\}$ и минимальное значение $m(f, [a; b]) = \inf\{f(x) : x \in [a; b]\}$, и для этого совсем не обязательно подставлять в $f(x)$ все точки этого отрезка.

Алгоритм II (нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке). Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Для определения $M(f, [a; b])$ и $m(f, [a; b])$ достаточно:

1) найти все точки $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ из A , в которых $f'(x)$ равна нулю, не определена или терпит разрыв (т.е. найти все критические точки $f(x)$ и точки разрыва $f'(x)$);

2) среди точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, используя первое или второе достаточные условия экстремума, находим все точки максимума $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ и точки минимума $\{q_1, q_2, \dots, q_l\}$;

3) подставляя в $f(x)$ концы отрезка и значения аргумента из предыдущего пункта, находим

$$M(f, [a; b]) = \max\{f(a), f(b), f(p_i) : 1 \leq i \leq k\},$$

$$m(f, [a; b]) = \min\{f(a), f(b), f(q_i) : 1 \leq j \leq l\}.$$

В случае, если на отрезке $[a; b]$ у непрерывной функции $f(x)$ есть единственная точка экстремума x^* , причем это, например, точка минимума, то третий шаг алгоритма можно существенно упростить: $m(f, [a; b]) = f(x^*)$ и $M(f, [a; b]) = \max\{f(a), f(b)\}$.

Пример 6. Найдём на отрезке $[-2; 4]$ наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = (x - 3)e^{|x+1|}$.

При $x \in [-2; -1]$ функция $f(x) = (x - 3)e^{-x-1}$, ее производная равна $f'(x) = e^{-x-1} - (x - 3)e^{-x-1} = e^{-x-1}(4 - x)$. Видим, что на этом отрезке $f(x)$ строго возрастает (поскольку на нем производная положительна) и не имеет точек экстремума. Минимальным значением $f(x)$ на этом отрезке будет $f(-2) = -5e$ и максимальным $f(-1) = -4$.

При $x \in [-1; 4]$ функция $f(x) = (x - 3)e^{x+1}$, ее производная равна $f'(x) = e^{x+1} + (x - 3)e^{x+1} = e^{x+1}(x - 2)$. Видим, что на этом отрезке $f(x)$ имеет единственную точку экстремума (в точке $x_0 = 2$ производная меняет



знак с минуса на плюс), причем x_0 является точкой минимума. Минимальным значением $f(x)$ на этом отрезке будет $f(2) = -e^3$ и максимальным значением — число $\max\{f(-1), f(4)\} = \max\{-4; e^5\} = e^5$.

Очевидно, что максимальным значением $f(x)$ на отрезке $[-2; 4]$ будет e^5 и достигаться оно будет при $x = 4$. Сравнивая $-5e$ и $-e^3$ или, то же самое, -5 и $-e^2$, получим, что минимальным значением $f(x)$ на отрезке $[-2; 4]$ будет $-e^3$ и достигаться оно будет при $x = 2$.

4.6. Направление выпуклости и точки перегиба

В этом параграфе будем считать, что функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ задана на промежутке A , непрерывна на нем и ее производная задана на всём множестве $\overset{\circ}{A}$ и также непрерывна на $\overset{\circ}{A}$. Если $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{A}$, то $[x_1; x_2] \subseteq A$ (в силу выпуклости A), откуда $(x_1; x_2) \subseteq \overset{\circ}{A}$ и $[x_1; x_2] \subseteq \overset{\circ}{A}$. Мы проверили, что $\overset{\circ}{A}$ также является промежутком. Каждая точка открытого множества является его внутренней точкой, поэтому $\text{Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A = \overset{\circ}{A}$ и при рассмотрении второй производной функции $f(x)$ мы вместо $x_0 \in \text{Int } \overset{\circ}{A}$ будем писать $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Теперь попробуем объединить четыре определения в одном.

Определение. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой вниз* (соответственно *строго выпуклой вниз*, *выпуклой вверх*, *строго выпуклой вверх*), если для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любых чисел $\lambda, \mu \in (0; 1)$, таких, что $\lambda + \mu = 1$, следует выполнение неравенства

$$f(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_2) \quad (1)$$

$$\left(\begin{aligned} &f(\lambda x_1 + \mu x_2) < \lambda f(x_1) + \mu f(x_2), \quad f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2), \\ &f(\lambda x_1 + \mu x_2) > \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \end{aligned} \right).$$

Договоримся использовать следующие обозначения для четырех видов выпуклости⁷ из определения (соответственно): $\smile$, $\simeq$, $\frown$, $\smile$.

Пример 1. Для любой линейной функции $h(x) = k \cdot x + b$ справедливо

$$\begin{aligned} h(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) &= k(\lambda \cdot x_1 + \mu \cdot x_2) + b = \lambda \cdot kx_1 + \mu \cdot kx_2 + \lambda \cdot b - \lambda \cdot b + b = \\ &= \lambda \cdot (kx_1 + b) + \mu \cdot kx_2 + b(1 - \lambda) = \lambda \cdot (kx_1 + b) + \mu \cdot kx_2 + \mu \cdot b = \end{aligned}$$

⁷В математике также принято называть «выпуклые вниз» функции «выпуклыми», а «выпуклые вверх» — «вогнутыми».



$$= \lambda \cdot (kx_1 + b) + \mu \cdot (kx_2 + b) = \lambda \cdot h(x_1) + \mu \cdot h(x_2),$$

поэтому для $h(x)$ одновременно верно $\succ$ и $\prec$, но не выполняется ни $\simeq$, ни $\hat{=}$.

Многие уже заметили, что связь $\lambda + \mu = 1$ позволяет исключить один из параметров и получить равносильное (1) следующее неравенство

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2), \quad (2)$$

которое должно выполняться для любых $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого $\lambda \in (0; 1)$. Изменение знака в (2) очевидно приводит к другим трем типам выпуклости.

На пути к геометрическому смыслу понятия выпуклости функции $f(x)$ вспомним один результат из курса геометрии для 10 класса.

Лемма 6.1. Пусть точки B, C, O, M выбраны из $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$) и $B \neq C$. Тогда M принадлежит интервалу BC тогда и только тогда, когда найдется число $\lambda \in (0; 1)$, для которого $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC}$, при этом выполняется $\lambda = |MC|/|BC|$.

Доказательство. Рассмотрим только случай $\mathbb{R}^2$ (рис. 34), для остальных множеств доказательство аналогично. Точка M лежит в интервале BC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{CM} \uparrow \overrightarrow{CB}$ и $0 < |CM| < |CB|$, т.е. найдется такой коэффициент $\lambda \in (0; 1)$, что $\overrightarrow{CM} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, причем из определения умножения вектора на скаляр сразу получится, что $\lambda = |CM|/|CB|$. Переписав последнее векторное равенство в виде $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$, приходим к $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC}$. ■

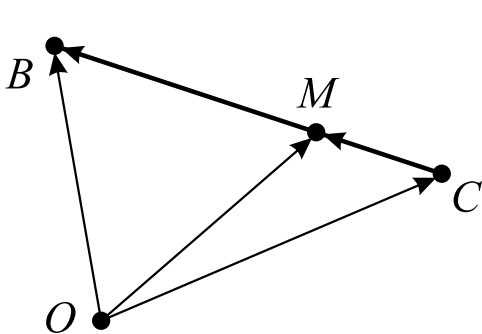


Рис. 34

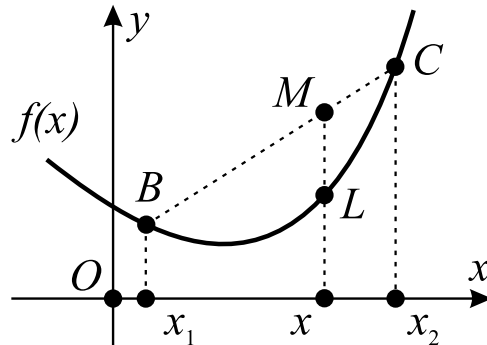


Рис. 35

Следствие 1. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, тогда каждое число x из интервала $(x_1; x_2)$ можно представить в виде

$$x = x_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + x_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$



Доказательство. Считаем, что точки $M(x)$, $B(x_1)$, $C(x_2)$ и $O(0)$ лежат на координатной прямой, тогда предыдущая лемма дает представление $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC}$, где $\lambda = |CM|/|CB| = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Приравнивая единственные координаты этих векторов (например, у вектора $\overrightarrow{OM}$ координата равна x), получим

$$x = x_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + x_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Следующее утверждение выражает *геометрический смысл* различных типов выпуклости.

Следствие 2. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Для произвольных $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого $x \in (x_1; x_2)$ обозначим три точки графика функции $f(x)$ через $B(x_1, f(x_1))$, $C(x_2, f(x_2))$, $L(x, f(x))$ и точку хорды $[BC]$ — через $M(x, y^*)$ (рис. 35). Тогда $f(x) \curvearrowright$ (соответственно $\curvearrowleft$, $\curvearrowright$, $\curvearrowleft$) тогда и только тогда, когда для произвольных $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого $x \in (x_1; x_2)$ точка L лежит ниже (строго ниже, выше, строго выше) точки M — точки хорды BC , имеющей с точкой L одинаковую абсциссу.

Доказательство. Из леммы следует, что выражение $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ при $\lambda \in (0; 1)$ описывает произвольный элемент $x \in (x_1; x_2)$, причем $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Три перпендикуляра, опущенных к оси Ox из точек B , M и C (рис. 35), параллельны между собой, что позволяет применить теорему Фалеса и получить, что число $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ также равно отношению $|CM|/|CB|$. Применяя лемму еще раз, получим $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OB} + (1 - \lambda) \overrightarrow{OC}$. Отсюда вторая координата точки M вычисляется по формуле $y^* = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$. Теперь же неравенство из определения

$$f(x) \leq \lambda \cdot f(x_1) + \mu \cdot f(x_2) = y^*$$

равносильно тому, что точка L лежит ниже точки M — точки хорды BC , имеющей с точкой L одинаковую абсциссу. Случаи $\curvearrowright$, $\curvearrowleft$, $\curvearrowright$ рассматриваются аналогично.

Лемма 6.2. Следующие условия равносильны:

- 1) $f(x) \curvearrowright$ (соответственно $\curvearrowleft$, $\curvearrowright$, $\curvearrowleft$);



2) для произвольных $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого промежуточного $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) \quad (\text{соответственно: } <, \geq, >); \quad (*)$$

3) для произвольных $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого промежуточного $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$(x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \geq 0$$

$$(\text{соответственно: } >, \leq, <); \quad (**)$$

4) для произвольных $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого промежуточного $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (\text{соответственно: } <, \geq, >). \quad (\heartsuit)$$

Доказательство. Утверждение (1) $\Leftrightarrow$ (2) очевидно, поскольку из первого следствия имеем равенства $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Утверждение (2) $\Leftrightarrow$ (3) также очевидно, поскольку $x_2 - x_1 > 0$.

Проверим, что (3) $\Leftrightarrow$ (4). Начиная с (**), в последнем переходе используем положительность $(x - x_1)$ и $(x_2 - x)$:

$$\begin{aligned} & (x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \geq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x_2 - x) \cdot f(x) - (x_2 - x) \cdot f(x_1) \leq (x - x_1) \cdot f(x_2) - (x - x_1) \cdot f(x) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x_2 - x) \cdot (f(x) - f(x_1)) \leq (x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \end{aligned}$$

■

Некоторые уже догадались, что неравенство ($\heartsuit$) (точнее, четыре неравенства ($\heartsuit$) с различными знаками) приведет к простым критериям различных направлений выпуклости. Докажем эти критерии в следующей теореме.

Теорема 6.3. Для функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется:

- 1) $f \cup \Leftrightarrow f'(x) \nearrow_{\circ}^A$;
- 2) $f \supset \Leftrightarrow f'(x) \nearrow_{\circ}^A$;



$$3) f \frown \Leftrightarrow f'(x) \searrow_A^\circ;$$

$$4) f \smile \Leftrightarrow f'(x) \swarrow_A^\circ.$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ по предыдущей лемме, из $f \smile$ следует, что для произвольных $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{A}$, таких, что $x_1 < x_2$, и любого $x \in (x_1; x_2)$ выполняется неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (\heartsuit)$$

Перейдем в $(\heartsuit)$ к пределу при $x \rightarrow x_1$ (поскольку x_1 и x_2 являются внутренними точками множества A , по нашим договоренностям, сделанным в начале параграфа, в этих точках существуют $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$) и получим

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (a)$$

Здесь мы использовали правило перехода к пределу в неравенствах, непрерывность $f(x)$ (в частности, $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$) и неравенство $x_2 - x_1 \neq 0$ для взятия предела от дроби в правой части.

Аналогично перейдем в $(\heartsuit)$ к пределу при $x \rightarrow x_2$ и получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \quad (b)$$

Из (a) и (b) получим $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, что дает $f'(x) \nearrow_A^\circ$.

$\Leftarrow$ пусть теперь $f'(x) \nearrow_A^\circ$. Для любых чисел $x_1, x_2 \in A$, таких, что $x_1 < x_2$, выберем произвольное $x \in (x_1; x_2)$. Заметим, что на отрезках $[x_1; x]$ и $[x; x_2]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и, дважды применяя ФЛКП, найдем такие $\alpha \in (x_1; x)$ и $\beta \in (x; x_2)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\alpha) \leq f'(\beta) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Центральное неравенство получилось из-за $\alpha < \beta$ и $f'(x) \nearrow_A^\circ$. Мы проверили выполнение неравенства $(\heartsuit)$, что по предыдущей лемме дает $f \smile$.

2) $\Leftarrow$ повторяя рассуждения предыдущего абзаца, из неравенства $\alpha < \beta$ и $f'(x) \nearrow_A^\circ$ теперь получим строгое неравенство $f'(\alpha) < f'(\beta)$:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\alpha) < f'(\beta) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$



что приводит к строгому неравенству $(\heartsuit)$ и $f \curvearrowright$.

$\Rightarrow$) пусть теперь $f \curvearrowright$ и докажем, что $f'(x) \nearrow_A^\circ$. Из $f \curvearrowright$ мы сразу получим $f \curvearrowleft$ и $f'(x) \nearrow_A^\circ$ (по уже доказанному в (1) критерию). Теперь предположим, что $f'(x) \nearrow_A^\circ$ не выполняется, поэтому найдутся такие $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{A}$, для которых $x_1 < x_2$ и $f'(x_1) = f'(x_2) = p$. Но тогда условие $f'(x) \nearrow_A^\circ$ нам дает, что при всех $t \in [x_1; x_2]$ будет выполняться, что $f'(t) = p$. Далее рассмотрим произвольное число $x \in (x_1; x_2)$ и, применяя дважды ФЛКП, мы найдем такие $\alpha \in (x_1; x)$ и $\beta \in (x; x_2)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\alpha) = p = f'(\beta) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

В результате, неравенство $(\heartsuit)$ превращается в равенство, но, по предыдущей лемме, для строго выпуклой вниз функции $f(x)$, оно должно быть со строгим знаком. $\nearrow$.

3) доказывается аналогично (1).

4) доказывается аналогично (2).

■

Следствие. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и существует $f''(x)$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) $f \curvearrowleft \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$;
- 2) если $f''(x) > 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$, то $f \curvearrowright$;
- 3) $f \curvearrowright \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$;
- 4) если $f''(x) < 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$, то $f \curvearrowleft$.

Доказательство. 1) из теоремы 5.2 следует, что условие $f'(x) \nearrow_A^\circ$ равносильно тому, что $f''(x) \geq 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$. Осталось применить (1) предыдущей теоремы.

2) снова, из теоремы 5.2 и условия $f''(x) > 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{A}$, следует, что $f'(x) \nearrow_A^\circ$ и по (2) предыдущей теоремы получим, что $f \curvearrowright$.

3) доказывается аналогично (1).

4) доказывается аналогично (2).

■

Обратить условия (2) и (4) предыдущего следствия не получится. Так, например, функция $f(x) = x^4$ строго выпукла вниз, поскольку $f'(x) = 4x^3$ строго возрастает на всей числовой прямой. Однако $f''(x) = 12x^2$ не является строго положительной функцией на всём множестве $\mathbb{R}$.



С помощью предыдущих утверждений исследуем на выпуклость несколько элементарных функций.

Пример 2. Для квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) быстро найдем $f''(x) = 2a$. При $a > 0$ получим $f \cup$, а при $a < 0$ — $f \cap$ (по (2) и (4) из предыдущего следствия).

Пример 3. Показательная функция $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) имеет положительную вторую производную, поскольку $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ и $f''(x) = a^x \cdot \ln^2 a$. Поэтому из (2) предыдущего следствия получим $f \cup$.

Пример 4. Для функции $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) найдем $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$ и $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}$. Учитывая положительность дроби $1/x^2$ на всём множестве $D(f) = (0; \infty)$, знак $f''(x)$ будет противоположен знаку $\ln a$. Таким образом, при $a > 1$ получим $f \cap$, а при $a \in (0; 1)$ — $f \cup$ (по (4) и (2) из предыдущего следствия).

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f(x)$, если найдется такая $O_\delta(x_0)$, что $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \subseteq A$ и на отрезках $[x_0 - \delta; x_0]$ и $[x_0; x_0 + \delta]$ функция $f(x)$ имеет разное направление выпуклости.

Пример 5. Для функции $f(x) = x^3$ найдем $f''(x) = 6x$. При $x > 0$ выполняется $f''(x) > 0$, поэтому $f \cup$ на множестве $[0; \infty)$. С другой стороны, при $x < 0$, выполняется $f''(x) < 0$, поэтому $f \cap$ на множестве $(-\infty; 0]$. Поэтому $x_0 = 0$ — единственная точка перегиба для $f(x)$.

Теорема 6.4. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

1) если x_0 — точка перегиба для $f(x)$ и существует $f''(x_0)$, то выполняется $f''(x_0) = 0$ (необходимое условие для точки перегиба).

2) если $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0 , то x_0 — точка перегиба для $f(x)$ (первое достаточное условие для точки перегиба).

3) если $f''(x)$ существует на некоторой окрестности x_0 , $f''(x_0) = 0$, и, кроме того, существует $f'''(x_0)$ и $f'''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка перегиба для $f(x)$ (второе достаточное условие для точки перегиба).

Доказательство. 1) пусть x_0 — точка перегиба для $f(x)$ и $O_\delta(x_0)$ — окрестность из определения точки перегиба. Б.о.о. будем считать, что на $[x_0 - \delta; x_0]$ функция $f \cup$, а на $[x_0; x_0 + \delta]$ функция $f \cap$. По теореме 6.3 получим $f'(x) \nearrow_{(x_0 - \delta; x_0)}$ и $f'(x) \searrow_{(x_0; x_0 + \delta)}$. Непрерывность $f'(x)$



в точке x_0 теперь дает нам, что x_0 — точка максимума для $f'(x)$. Действительно, возьмем произвольную точку $x^* \in (x_0 - \delta; x_0)$ и покажем, что $f'(x^*) \leq f'(x_0)$. Для этого выберем строго возрастающую последовательность $\{x_n\} \subseteq (x^*; x_0)$, которая сходится к x_0 (например, заданная формулой $x_n = x_0 - (x_0 - x^*)/2^n$). Из $f'(x) \nearrow_{(x_0-\delta; x_0)}$ получим неравенство $f'(x^*) \leq f'(x_n)$, переходя в котором к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим $f'(x^*) \leq f'(x_0)$. Аналогично доказывается, что если $t^* \in (x_0; x_0 + \delta)$, то $f'(x_0) \geq f'(t^*)$. Итак, x_0 — точка максимума для $f'(x)$, поэтому она является точкой экстремума для $f'(x)$, откуда $f''(x_0) = 0$ (по теореме 4.3, примененной к функции $g(x) = f'(x)$).

2) б.о.о. предположим, что $f''(x)$ меняет знак с «+» на «-» при переходе через x_0 , это дает нам такую $O_\delta(x_0)$, что $[x_0 - \delta; x_0 + \delta] \subseteq A$ и на интервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ и $(x_0; x_0 + \delta)$ функция $f''(x)$ принимает соответственно только положительные и только отрицательные значения, поэтому $f'(x)$ строго возрастает на левом отрезке и строго убывает — на правом (по теореме 5.2), отсюда (по теореме 6.3) функция $f(x)$ имеет на этих двух отрезках разное направление выпуклости и мы проверили, что x_0 — точка перегиба.

3) условия $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$ приводят к тому, что $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через x_0 и по (2) получим, что x_0 — точка перегиба. ■

Пример 6. Для функции $f(x) = \sin x$ найдем, что $f''(x) = -\sin x$ и $f'''(x) = -\cos x$. Уравнение $f''(x) = 0$ имеет своими корнями серию $t_k = \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $\cos t_k \neq 0$, поэтому t_k , и только они, являются точками перегиба $f(x)$.

Пример 7. Построим график функции $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$. Учитывая, что $T = 2\pi$ является периодом $f(x)$, достаточно⁸ построить $\Gamma(f)$ только на отрезке $[0; 2\pi]$. Сначала найдем нули у $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$. Решая уравнение $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ получим $\cos x = -1$ или $\cos x = -1/2$, отсюда серии $x = \pi + 2\pi k$ и $x = \pm(\pi/3) + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) являются нулями производной. Из этих серий на отрезок $[0; 2\pi]$ попадают три значения: $\pi/3$, π и $5\pi/3$. На рис. 36 отмечены знаки производной и характер монотонности функции $f(x)$, указывающие на то, что $x = \pi/3$ является точкой максимума для $f(x)$, а $x = 5\pi/3$ — точкой минимума для $f(x)$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Определим значения в стационарных точках и на концах отрезка: $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$, $f(\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$, $f(5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$. Отметим на $\Gamma(f)$ точки B , C , D , E и F с найденными координатами (рис. 38).

⁸Можно еще учесть нечетность $f(x)$ и ограничиться фрагментом $\Gamma(f)$ только на $[0; \pi]$.



Теперь займемся направлением выпуклости и точками перегиба для $f(x)$. Для этого найдем $f''(x) = -2\sin x - 4\sin 2x$ и ее нули.

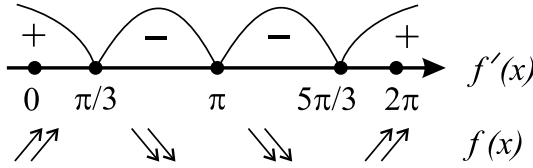


Рис. 36

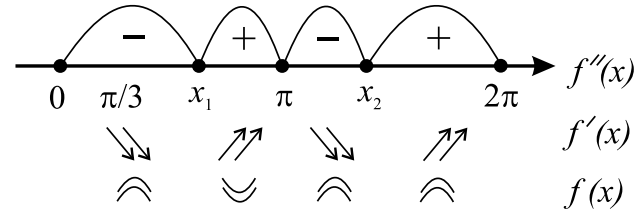


Рис. 37

Корнями уравнения $\sin x(1 + 4\cos x) = 0$ являются две серии: πk и $\pm \arccos(-1/4) + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Среди них на отрезок $[0; 2\pi]$ попадут пять значений: 0 , $x_1 = \arccos(-1/4)$, π , $x_2 = 2\pi - \arccos(-1/4)$ и 2π .

При переходе через свои нули множители $\sin x$ и $1 + 4\cos x$ меняют знак, общих нулей у них нет и, кроме того, эти множители входят в $f''(x)$ в первой степени (достаточно, что в нечетной степени). Поэтому $f''(x)$ меняет знак при переходе через каждый из своих нулей. На рис. 37 отмечены нули, знаки $f''(x)$, характер монотонности $f'(x)$ и направление выпуклости $f(x)$. Помня о периодичности $f(x)$, делаем вывод, что каждое из пяти значений на отрезке $[0; 2\pi]$ является точкой перегиба для функции $f(x)$.

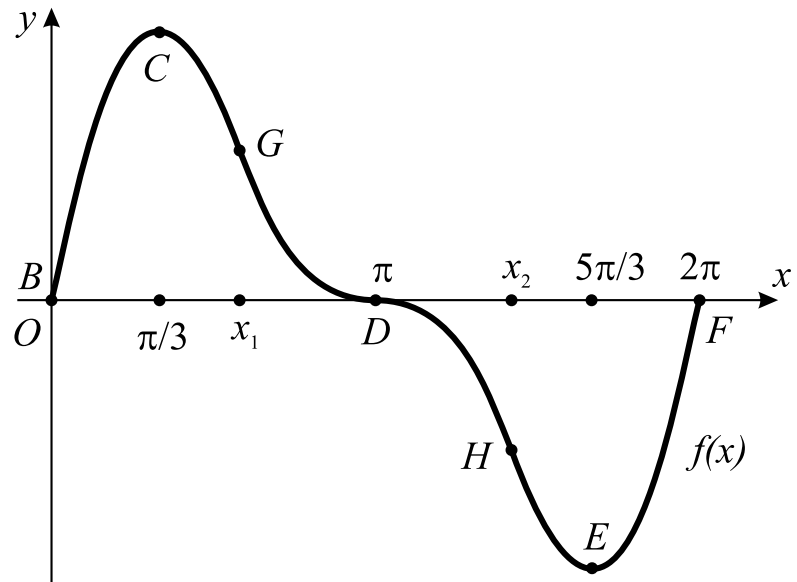


Рис. 38

Осталось вычислить значения функции $f(x)$ в двух точках перегиба: x_1 и x_2 . Вспомним, что $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, поэтому $\sin x_1 = \sqrt{15}/4$, $\sin 2x_1 = 2 \cdot (\sqrt{15}/4) \cdot (-1/4) = -\sqrt{15}/8$. Отсюда $f(x_1) = 3\sqrt{15}/8$ и $f(x_2) = f(2\pi - x_1) = f(-x_1) = -f(x_1) = -3\sqrt{15}/8$. Отметим на $\Gamma(f)$ точки G и H с найденными координатами (рис. 38). Учитывая направление выпуклости $f(x)$, соединим соседние точки и получим на рис. 38 эскиз $\Gamma(f)$. Для большей точности эскиза мы посчитали тангенс угла наклона касательной



в начале координат (т.е. $f'(0) = 4$) и тангенс угла наклона касательной в точке перегиба (т.е. $f'(x_1) = -9/4$).

В заключение параграфа немного обобщим соотношение (1) и получим *неравенство Йенсена*⁹.

Теорема 6.5. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ выпуклая вниз (соответственно выпуклая вверх) функция, тогда для произвольных $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ ($n \in \mathbb{N}$) и чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0; 1]$ таких, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ выполняется

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (\diamond)$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)).$$

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по n и проверять его только для $f \cup$ (для $f \cap$ доказательство получается простой сменой знака).

Б.И. Случай $n = 1$ очевиден (так как $f(1 \cdot x_1) = 1 \cdot f(x_1)$). Пусть $n = 2$. Равенства $\lambda_1 = 0$, или $\lambda_2 = 0$, или $x_1 = x_2$ приводят нас к случаю $n = 1$. Если же $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $x_1 \neq x_2$, то $(\diamond)$ сразу следует из (1) (ясно, что условие $x_1 < x_2$ несущественно, поскольку эти числа можно перенумеровать).

Ш.И. Предположим, что $(\diamond)$ верно для n (П.И.), и докажем это неравенство для $n + 1$. Заметим, что в случае $\lambda_i = 0$ (хотя бы при одном $i \leq n + 1$) либо при $x_i = x_j$ (хотя бы в одной паре различных $i, j \leq n + 1$), мы сразу находимся в условиях П.И. и $(\diamond)$ выполняется. Поэтому далее считаем, что $\lambda_i > 0$ (при всех $i \leq n + 1$) и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $i, j \leq n + 1$. Пусть $\lambda^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ и $\mu_i = \lambda_i / \lambda^*$ ($i \leq n$), $x^* = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$. Замечаем, что:

- 1) $\mu_i > 0$ при всех $i \leq n$;
- 2) $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, поэтому, в силу выпуклости A , выполняется $x^* \in A$;
- 3) $\lambda^* + \lambda_{n+1} = 1$.

Теперь, последовательно применяя базу и предположение индукции, получим

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = \\ & = f\left(\lambda^*(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = \\ & = f(\lambda^* x^* + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leq \lambda^* f(x^*) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \end{aligned}$$

⁹Иоган Йенсен (1859–1925) — датский математик и инженер, президент Датского Математического общества (1892–1903), кроме неравенства, носящего его имя, им была доказана формула Йенсена в комплексном анализе; между 1881 и 1924 годами он работал в Копенгагенской телефонной компании и математикой занимался в свободное время.



$$\begin{aligned}
&= \lambda^* f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_n x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\
&\leq \lambda^* (\mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) + \dots + \mu_n f(x_n)) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Поэтому неравенство ($\diamond$) для случая $(n+1)$ переменных также верно. ■

Замечание. Если предположить строгую выпуклость функции $f(x)$, положительность коэффициентов λ_i (при всех $i \leq n$) и выполнение условия $x_i \neq x_j$ хотя бы в одной паре переменных, то из доказательства предыдущей теоремы мы получим *строгое неравенство Йенсена*.

Рассмотрим несколько следствий предыдущей теоремы. Первое из них — классическое *неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим*.

Следствие 1. Пусть $x_i > 0$ при всех $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем равенство возможно только в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для нее $f''(x) = -1/x^2 < 0$ при всех $x > 0$, поэтому $f'(x) \searrow_{(0; \infty)}$ и $f \curvearrowright$. Для произвольных наборов параметров и переменных, удовлетворяющих условиям предыдущей теоремы, имеем

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \dots + \lambda_n \ln x_n \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \ln(x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}) \leq \ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.
\end{aligned}$$

Положим в последнем неравенстве $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ и получим, что

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

причем равенство, согласно сделанному выше замечанию, возможно только в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

Также докажем *неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим*.



Следствие 2. Пусть $x_i > 0$ при всех $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n},$$

причем равенство возможно только в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Доказательство. На этот раз в качестве вспомогательной функции выберем $f(x) = x \ln x : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Для нее $f'(x) = \ln x + 1$ строго возрастает на $(0; \infty)$, поэтому $f \simeq$. Для произвольных наборов параметров и переменных, удовлетворяющих условиям предыдущей теоремы, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \ln \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n (\lambda_i \cdot x_i \cdot \ln x_i). \quad (*)$$

Пусть теперь по определению

$$\lambda_i = \frac{\frac{1}{x_i}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}} \quad \text{при всех } i \leq n \quad \text{и} \quad a = \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_j}.$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda_i > 0$ и $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Подставив такие λ_i в (*), получим

$$\begin{aligned} \frac{n}{a} \cdot \ln \frac{n}{a} &\leq \frac{1}{a} \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i \Leftrightarrow n \cdot \ln \frac{n}{a} \leq \ln(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln \frac{n}{a} &\leq \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \Leftrightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \end{aligned}$$

причем равенство, согласно сделанному выше замечанию, возможно только в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. ■

Упражнения

1. Приведите пример функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (A — промежуток и существует непрерывная $f'(x)$ на $\overset{\circ}{A}$) для которой найдется такая точка $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, которая является точкой экстремума для $f'(x)$, но не является точкой перегиба $f(x)$.
2. Пусть $a, b \geq 0$, и $p, q > 1$ — сопряженные показатели, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите с помощью выпуклой вверх функции $f(x) = \ln x$ неравенство Юнга: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
3. Пусть $a_i, b_i > 0$ ($i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$) и $k > 1$ ($k \in \mathbb{R}$). С помощью выпуклой вниз функции $f(x) = x^k$ доказать неравенство Коши-Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^{\frac{k}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Глава 5

Интеграл

5.1. Неопределенный интеграл

Договоримся, что в этом параграфе функция $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ определена и непрерывна на промежутке A и $f : \overset{\circ}{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если для каждого $x \in \overset{\circ}{A}$ выполнено, что $F'(x) = f(x)$.

Например, для степенной функции $f(x) = x^7$ одной из первообразных будет $F(x) = \frac{1}{8} \cdot x^8 + 2023$ (здесь $A = \overset{\circ}{A} = \mathbb{R}$). Зная одну из первообразных функции $f(x)$, нетрудно описать всё семейство первообразных этой функции.

Следствие. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда $G(x)$ также является первообразной этой функции тогда и только тогда, когда найдется такая константа $C \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in A$ выполняется $G(x) = F(x) + C$.

Доказательство. $\Rightarrow$) будучи первообразной для $f(x)$, функция $G(x)$ должна быть непрерывной на A и во всех внутренних точках промежутка A должно выполняться равенство $G'(x) = f(x) = F'(x)$. Мы находимся в условиях следствия из теоремы 5.1 предыдущей главы, которое гарантирует существование такой константы $C \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in A$ выполняется $G(x) = F(x) + C$.

$\Leftarrow$) очевидно, что для константы $C \in \mathbb{R}$ функция $G(x) = F(x) + C$ непрерывна на A и для любого $x \in \overset{\circ}{A}$ выполнено $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. Отсюда $G(x)$ — первообразная для $f(x)$.

■

Это следствие позволит ввести понятие неопределенного интеграла.



Определение. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда выражение $F(x) + C$ (где C — произвольная вещественная постоянная) называется неопределенным интегралом функции (или от функции) $f(x)$ и обозначается через $\int f(x) dx$. При этом $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x) dx$ — подынтегральным выражением.

Обозначение $\int$ первым использовал Лейбниц для замены большой буквы «S» — первой буквы латинского слова *summa*. Сам термин «интеграл» предложил И. Бернулли¹.

Теорема 1.1. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Тогда

- 1) $(\int f(x) dx)' = f(x)$;
- 2) $\int F'(x) dx = F(x) + C$.

Доказательство. 1) действительно, в любой внутренней точке множества A справедливо $(F(x) + C)' = f(x)$, поэтому $f(x)$ является производной функции $F(x) + C$.

2) сразу следует из того, что $F(x)$ — это первообразная для функции $F'(x)$.

Замечания. 1) подынтегральное выражение $f(x) dx$ является дифференциалом функции $F(x)$, поскольку $f(x) = F'(x)$ и по определению выполняется $dF = F'(x) dx = f(x) dx$.

2) предыдущая теорема говорит о том, что взятие производной и нахождение неопределенного интеграла «почти» обратны друг к другу. Во втором свойстве теоремы мы возвращаемся к исходной функции с точностью до произвольной постоянной.

Второе замечание и результаты третьего параграфа предыдущей главы позволяют заполнить следующую таблицу. Интегралы из нее так и называются — *табличными*.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	A
$x^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$x^k, k \in \mathbb{Z}, k \leq -2$	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$	$A_1 = (-\infty; 0), A_2 = (0; \infty)$

¹Иоганн Бернулли (1667–1748) — швейцарский математик, младший брат Якоба Бернулли, ученик Лейбница и учитель Эйлера; по его конспекту был выпущен в 1696 г первый учебник по математическому анализу; ему принадлежит правило раскрытия неопределенности вида $0/0$ (так называемое «правило Лопиталья»), правило интегрирования рациональных дробей; поставил и решил задачу о брахистохроне, поставил задачу о геодезических линиях; основоположник математической физики; его научная корреспонденция составляет около 2500 писем.



$f(x)$	$\int f(x) dx$	A
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$A_1 = (-\infty; 0), A_2 = (0; \infty)$
$x^\alpha, \alpha \notin \mathbb{Z}, x > 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$(0; \infty)$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$A_k = (-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$A_k = (\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$(-1; 1)$

Обсудим стандартные методы нахождения неопределенных интегралов. Последнее утверждение в следующей теореме называется *линейной заменой под знаком интеграла*. Обычно в записи утверждений между знаками $\int$ и dx скобки не ставят (например, в левой части первых трех равенств следующей теоремы), поскольку считают эти символы операторными скобками.

Основные способы интегрирования

Теорема 1.2. *Выполняются следующие утверждения:*

- 1) $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$;
- 2) $\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$;
- 3) $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$;
- 4) пусть $\int f(t) dt = F(t) + C$ и $t = ax + b$ ($a \neq 0$), тогда $\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$.

Доказательство. 1) достаточно проверить, что производная от правой части равенства совпадает с подынтегральной функции в левой части равенства. По определению интеграла и правилу взятия производной от суммы



двух функций, получим

$$\left(\int f(x) dx + \int g(x) dx \right)' = \left(\int f(x) dx \right)' + \left(\int g(x) dx \right)' = f(x) + g(x).$$

2) доказывается аналогично (1).

3) доказывается аналогично (1).

4) по правилу нахождения производной сложной функции получим

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a} + C \right)'_x = \frac{1}{a} \cdot \left(F(t) \right)'_t \cdot (ax+b)'_x = \frac{1}{a} \cdot f(t) \cdot a = f(t) = f(ax+b).$$

■

Пример 1. По предыдущей теореме сведем к табличным интеграл

$$\int \frac{x^3+2}{x} dx = \int x^2 + \frac{2}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 2 \ln|x| + C = \frac{x^3}{3} + \ln x^2 + C.$$

Пример 2. Используя линейную замену $t = 7x + 15$, сразу находим

$$\int \cos(7x+15) dx = \frac{\sin(7x+15)}{7} + C.$$

Усилим свойство (4) предыдущей теоремы и докажем утверждение о замене под знаком интеграла.

Теорема 1.3. Пусть $t = h(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h'(x)$ — непрерывная на $\overset{\circ}{A}$ функция и $\int g(t) dt = G(t) + C$. Тогда $\int g(h(x)) \cdot h'(x) dx = G(h(x)) + C$.

Доказательство. Взяв производную от сложной функции в правой части, получим

$$\left(G(h(x)) + C \right)'_x = \left(G(t) \right)'_t \cdot (t)'_x = g(t) \cdot h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x),$$

что совпадает с подынтегральной функцией в левой части равенства.

■

Замечание. По определению дифференциала имеем $dh(x) = h'(x) dx$, поэтому утверждение предыдущей теоремы можно переписать в более удобном для решения задач виде $\int g(h(x)) dh(x) = G(h(x)) + C$. Кстати, переход от $h'(x) dx$ к $dh(x)$ называют *внесением функции $h'(x)$ под знак дифференциала*.



Пример 3. Учитывая, что $\sin x \, dx = -d \cos x$, можно найти

$$\int \cos^{14} x \sin x \, dx = - \int \cos^{14} x \, d \cos x = - \int t^{14} \, dt = -\frac{t^{15}}{15} + C = -\frac{\cos^{15} x}{15} + C.$$

Пример 4. Кроме очевидного равенства $\cos x \, dx = d \sin x$ при вычислении следующего интеграла используем основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - t^2$, где $t = \sin x$:

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cdot \cos x \, dx = \int \cos^4 x \, d \sin x = \int (1 - t^2)^2 \, dt = \\ &= \int t^4 - 2t^2 + 1 \, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \sin x + C. \end{aligned}$$

Следующий способ называется *интегрированием по частям*.

Теорема 1.4. Пусть $u(x), v(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$, $u'(x), v'(x)$ — непрерывные на $\overset{\circ}{A}$ функции. Тогда $\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \, dx$.

Доказательство. Используя правило нахождения производной от произведения функций, берем производную от правой части равенства

$$\begin{aligned} \left(u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \, dx \right)' &= \\ &= u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) - u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v'(x), \end{aligned}$$

что совпадает с подынтегральной функцией в левой части равенства. ■

Замечание. По определению дифференциала верно, что $dv(x) = v'(x) \, dx$ и $du(x) = u'(x) \, dx$, поэтому утверждение предыдущей теоремы можно переписать в виде $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$.

Пример 5. При вычислении следующего интеграла используем равенство $dx = 1 \cdot dx = (x)' \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int \ln x \cdot (x)' \, dx = x \cdot \ln x - \int x \, d \ln x = \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C. \end{aligned}$$



5.2. Суммы Дарбу и определенный интеграл

В этом параграфе будем рассматривать функцию $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, которая ограничена, т.е. $E(f) = \{f(x) : x \in A\}$ — ограниченное множество на $\mathbb{R}$. Напомним некоторые обозначения для произвольного подмножества $B \subseteq A$: $m(f, B) = \inf\{f(x) : x \in B\}$ и $M(f, B) = \sup\{f(x) : x \in B\}$.

Лемма 2.1. Для любой ограниченной функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и любого непустого подмножества $B \subseteq A$ выполняются неравенства:

$$m(f, A) \leq m(f, B) \leq M(f, B) \leq M(f, A).$$

Доказательство. Сразу заметим, что если функция $f(x)$ ограничена на множестве A , то она ограничена и на любом непустом подмножестве $B \subseteq A$. Также отметим, что число $m(f, A)$ (соответственно число $M(f, A)$) является некоторой нижней (верхней) границей множества $\{f(x) : x \in B\}$, поэтому из определения $\inf$ (и $\sup$) получим, что $m(f, A) \leq m(f, B)$ и $M(f, B) \leq M(f, A)$. Выполнение неравенства $m(f, B) \leq M(f, B)$ очевидно. ■

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Разбиением отрезка $[a; b]$ называется конечное числовое множество $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq [a; b]$, где $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$. Отрезок $[x_{i-1}; x_i]$ называется i -ым отрезком разбиения ($1 \leq i \leq n$), для него определены $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = m(f, [x_{i-1}; x_i]) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$ и $M_i = M(f, [x_{i-1}; x_i]) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$. Нижней (соответственно верхней) суммой Дарбу² функции $f(x)$ по разбиению T называется

$$s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta_i \quad \left(S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta_i \right).$$

До конца параграфа будем рассматривать произвольную ограниченную функцию $f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$) и ее суммы Дарбу по произвольному разбиению T отрезка $[a; b]$. Если $f(x)$ неотрицательна на $[a; b]$, то ее суммы Дарбу имеют ясный геометрический смысл. Площадь заштрихованной многоугольной фигуры на рис. 39 равна $s(T)$, а на рис. 40 — $S(T)$.

²Жан Гастон Дарбу (1842–1917) — французский математик, основные работы посвящены анализу, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и аналитической механике; развил теорию разрывных функций, построил (1879) бесконечный класс непрерывных функций, не имеющих производных ни в одной из точек; Непременный секретарь Парижской академии наук (с 1900), чл.-кор. Петербургской академии наук (с 1895).

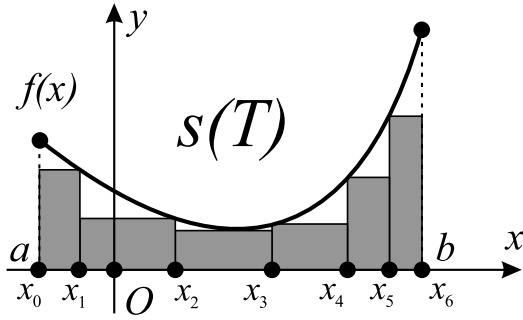


Рис. 39

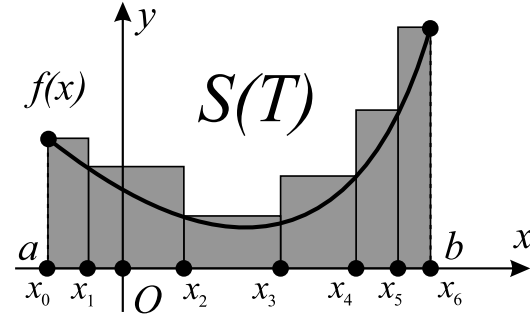


Рис. 40

Начнем с очень простого соотношения между суммами Дарбу.

Лемма 2.2. Для любого разбиения T выполняется $s(T) \leq S(T)$.

Доказательство. Рассмотрим $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Учитывая, что $M_i - m_i \geq 0$ и $\Delta_i \geq 0$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta_i \geq 0.$$

■

Определение. Если T, T^* — разбиения $[a; b]$ и $T \subseteq T^*$, то T^* называется измельчением разбиения T .

Лемма 2.3. При переходе к измельчению нижняя сумма Дарбу увеличивается, а верхняя — уменьшается (возможно, не строго), т.е. если T, T^* — разбиения $[a; b]$ и $T \subseteq T^*$, то $s(T) \leq s(T^*) \leq S(T^*) \leq S(T)$.

Доказательство. 1) неравенство $s(T) \leq s(T^*)$ доказывается индукцией по $k = |T^* \setminus T| \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (т.е. по количеству добавленных точек к разбиению).

Б.И. Случай $k = 0$ очевиден, рассмотрим $k = 1$. Тогда $T^* = T \cup \{x^*\}$ и найдется единственный такой номер $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $x_{i_0-1} < x^* < x_{i_0}$. Обозначим через

$$\overline{m}_{i_0} = m(f, [x_{i_0-1}; x^*]) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i_0-1}; x^*]\},$$

$$\overline{\overline{m}}_{i_0} = m(f, [x^*; x_{i_0}]) = \inf\{f(x) : x \in [x^*; x_{i_0}]\}.$$

По лемме 2.1 получим, что $m_{i_0} \leq \overline{m}_{i_0}$ и $m_{i_0} \leq \overline{\overline{m}}_{i_0}$. Если умножить, например, первое из этих неравенств на положительное число, мы получим $m_{i_0} \cdot (x^* - x_{i_0-1}) \leq \overline{m}_{i_0} \cdot (x^* - x_{i_0-1})$. Учитывая теперь, что все слагаемые



в $s(T^*)$ и $s(T)$, за исключением отрезка $[x_{i_0-1}; x_{i_0}]$, одинаковы, после их сокращений мы придем к

$$\begin{aligned} s(T^*) - s(T) &= \overline{m}_{i_0} \cdot (x^* - x_{i_0-1}) + \overline{\overline{m}}_{i_0} \cdot (x_{i_0} - x^*) - m_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \geq \\ &\geq m_{i_0} \cdot (x^* - x_{i_0-1}) + m_{i_0} \cdot (x_{i_0} - x^*) - m_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $s(T) \leq s(T^*)$.

Ш.И. Предположив, что для k утверждение верно, докажем его для $k+1$. В случае $k+1 = |T^* \setminus T|$ можно рассмотреть два последовательных измельчения $T \subseteq T_1 \subseteq T^*$, где $|T_1 \setminus T| = 1$ и $|T^* \setminus T_1| = k$. По базе индукции получим $s(T) \leq s(T_1)$, а предположение индукции дает $s(T_1) \leq s(T^*)$. Транзитивность порядка завершает проверку $s(T) \leq s(T^*)$.

2) неравенство $s(T^*) \leq S(T^*)$ было проверено в предыдущей лемме.

3) неравенство $S(T^*) \leq S(T)$ доказывается аналогично (1) с той лишь разницей, что по лемме 2.1 для точных верхних границ мы получим противоположные неравенства, т.е. $M_{i_0} \geq \overline{M}_{i_0}$ и $M_{i_0} \geq \overline{\overline{M}}_{i_0}$, где

$$\overline{M}_{i_0} = M(f, [x_{i_0-1}; x^*]) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i_0-1}; x^*]\},$$

$$\overline{\overline{M}}_{i_0} = M(f, [x^*; x_{i_0}]) = \sup\{f(x) : x \in [x^*; x_{i_0}]\}.$$

Откуда для случая $T^* = T \cup \{x^*\}$ получим $S(T) - S(T^*) \geq 0$, что дает $S(T^*) \leq s(T)$. Шаг индукции, так же как и в (1), сразу следует из базы индукции и индуктивного предположения. ■

Теорема 2.4. Для любых разбиений T_1 и T_2 отрезка $[a; b]$ следует, что $s(T_1) \leq S(T_2)$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $T = T_1 \cup T_2$, которое одновременно является измельчением и T_1 , и T_2 . Применяя две предыдущие леммы, получим $s(T_1) \leq s(T) \leq S(T) \leq S(T_2)$. ■

Определение. Пусть $a \leq b$. Для ограниченной функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ее нижним (соответственно верхним) интегралом Дарбу на отрезке $[a; b]$ называется число

$$\begin{aligned} I_* &= \sup\{s(T_1) : T_1 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\} \\ \left(I^* &= \inf\{S(T_2) : T_2 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\} \right). \end{aligned}$$



Следствие. Для любой ограниченной функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется неравенство $I_* \leq I^*$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что для любого разбиения T_2 отрезка $[a; b]$ число $S(T_2)$ будет некоторой верхней границей множества $\{s(T_1) : T_1 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\}$. Поэтому I_* , наименьшая из верхних границ этого множества, будет удовлетворять неравенству $I_* \leq S(T_2)$. Полученное неравенство означает, что I_* — это некоторая нижняя граница числового множества $\{S(T_2) : T_2 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\}$. По определению I^* является наибольшей из его нижних границ, поэтому с какой-то из нижних границ ее связывает неравенство $I^* \geq I_*$.

Определение. Если для ограниченной функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется равенство $I_* = I^*$, то $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$ (или интегрируемой по Риману³ на отрезке $[a; b]$), при этом ее определенным интегралом на этом отрезке называется число $\int_a^b f(x) dx = I_* = I^*$.

Пример 1. Пусть на отрезке $[a; b]$ выполняется $f(x) \equiv p$ для некоторого $p \in \mathbb{R}$ (т.е. $f(x) = p$ для любого $x \in [a; b]$). Тогда для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$ и каждого натурального $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется $m_i = M_i = p$, откуда

$$s(T) = \sum_{i=1}^n p \cdot \Delta_i = p \cdot \sum_{i=1}^n \Delta_i = p \cdot (b - a), \quad S(T) = \sum_{i=1}^n p \cdot \Delta_i = p \cdot (b - a).$$

Следовательно, $I_* = I^* = p(b - a)$ и $\int_a^b p dx = p(b - a)$.

Пример 2. Рассмотрим функцию Дирихле $\chi(x)$ на отрезке $[0; 1]$ (она принимает значение 1 в рациональных точках и 0 — в иррациональных точках этого отрезка). Будем считать, что для разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ выполняется $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ (в сумме Дарбу при $x_{i-1} = x_i$ выполняется $\Delta_i = 0$ и слагаемые $m_i \cdot \Delta_i$ и $M_i \cdot \Delta_i$ можно не учитывать). Тогда на каждом интервале $(x_{i-1}; x_i)$ найдутся рациональные и иррациональные

³Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866) — немецкий математик, уже в средней школе начал читать труды Эйлера и Лежандра, в 1846 году поступил в Геттингенский университет, где слушал лекции Гаусса; учителем и другом Римана стал Дирихле, оказавший влияние на его научное развитие; с 1857 года Риман — профессор Геттингенского университета; его работы относятся к математическому и комплексному анализу, геометрии, теории дифференциальных уравнений; является создателем геометрического направления теории аналитических функций; предложил рассматривать ζ -функцию как функцию комплексного переменного, высказав по этому поводу пять гипотез, причем пятая, о распределении нулей этой функции, не доказана до настоящего времени; создал риманову геометрию; работы Римана отличались насыщенностью новыми идеями.



числа, поэтому $m_i = 0$ и $M_i = 1$ для всех натуральных $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Отсюда

$$s(T) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta_i = 0, \quad S(T) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta_i = \sum_{i=1}^n \Delta_i = 1.$$

Следовательно, $I_* = 0$ и $I^* = 1$ и поэтому функция $\chi(x)$ не интегрируема на отрезке $[0; 1]$.

Следующее утверждение называется *критерием Римана* интегрируемости функции (по Риману) на отрезке $[a; b]$.

Теорема 2.5. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция и $a \leq b$. Тогда $f(x)$ интегрируема на этом отрезке тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a; b]$, для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $I = I_* = I^*$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ дважды воспользуемся свойствами супремума и инфимума числового множества (лемма 3.2 главы 2). Для $I_* = \sup\{s(T_1) : T_1 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\}$ найдем такое разбиение T_1 отрезка $[a; b]$, что выполняется $I_* - s(T_1) < \varepsilon/2$. Теперь для $I^* = \inf\{S(T_2) : T_2 \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\}$ найдем такое разбиение T_2 отрезка $[a; b]$, для которого $S(T_2) - I^* < \varepsilon/2$. Докажем, что разбиение $T = T_1 \cup T_2$ — искомое. Заметим, что T одновременно является измельчением и T_1 , и T_2 , поэтому по лемме 2.3 получим

$$s(T_1) \leq s(T) \leq I_* = \int_a^b f(x) dx = I^* \leq S(T) \leq S(T_2) \Rightarrow$$

$$S(T) - s(T) \leq S(T_2) - s(T_1) = (S(T_2) - I^*) + (I_* - s(T_1)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) по условию, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a; b]$, для которого $s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T)$ и $S(T) - s(T) < \varepsilon$, откуда $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$. Учитывая, что $I^* - I_*$ является числовой константой, неравенство $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ для произвольного положительного ε может выполняться только в случае $I^* - I_* = 0$, т.е. $I_* = I^*$, поэтому $f(x)$ — интегрируемая на $[a; b]$ функция. ■

У непрерывных функций на отрезке есть одно очень сильное свойство, которое доказывается в следующей теореме, она называется *теоремой Кантора о равномерной непрерывности*.



Теорема 2.6. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ и $a \leq b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ со свойством $(*)$: при любых $x_1, x_2 \in [a; b]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$, сразу следует, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Доказательство. При $a = b$ утверждение очевидно, поскольку $x_1 = x_2 = a$ и $|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon$. Далее считаем, что $a < b$.

Предположим противное, тогда для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ не найдется числа $\delta > 0$ со свойством $(*)$. Любой отрезок $[c; d] \subseteq [a; b]$, для которого при данном ε_0 нет числа $\delta > 0$ со свойством $(*)$ (при этом свойство $(*)$ ограничивается отрезком $[c; d]$, т.е. $x_1, x_2 \in [c; d]$), будем называть «плохим», остальные отрезки, содержащиеся в $[a; b]$, будем называть «хорошими». Построим стягивающуюся последовательность $\{[a_k; b_k]\}$, состоящую только из «плохих» отрезков.

Б.И. В качестве отрезка $[a_1; b_1]$ выберем $[a; b]$ и обозначим его середину через $c = (a+b)/2$. Хотя бы один из двух отрезков — $[a; c]$ или $[c; b]$ — будем «плохим». Если бы обе половины были «хорошими», мы нашли бы два числа $\delta_1 > 0$ (для левой половины) и $\delta_2 > 0$ (для правой), каждое из которых обладает свойством $(*)$. Воспользуемся непрерывностью $f(x)$ в точке c и найдем такое $\delta_3 > 0$, что при всех $x \in O_{\delta_3}(c) \cap [a; b]$ выполняется

$$f(c) - \frac{\varepsilon_0}{3} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Обозначим через $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ и докажем, что δ уже обладает свойством $(*)$! Выберем произвольные $x_1, x_2 \in [a; b]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$, и рассмотрим три случая. Если $x_1, x_2 \in [a; c]$, то из условия $\delta \leq \delta_1$ следует, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_0$. Аналогично рассматривается случай $x_1, x_2 \in [c; b]$. Пусть теперь $x_1 \leq c \leq x_2$, тогда из условия $|x_2 - x_1| < \delta \leq \delta_3$ следует, что $|x_1 - c|, |x_2 - c| < \delta_3$, т.е. $x_1, x_2 \in O_{\delta_3}(c)$, откуда

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(x_2) - f(c) + f(c) - f(x_1)| \leq \\ &\leq |f(x_2) - f(c)| + |f(c) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Итак, по крайней мере одна из этих половин является «плохим» отрезком, обозначим его через $[a_2; b_2]$ (договоримся, для определенности, если обе половины «плохие», выбирать всегда левый отрезок). Мы указали правило как выбирать следующий отрезок нашей последовательности.

Ш.И. Теперь предположим, что уже выбраны отрезки $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, ..., $[a_k; b_k]$ так, что каждый следующий является половиной предыдущего и все построенные отрезки являются «плохими». Применяя рассуждения



базы индукции к отрезку $[a_k; b_k]$, обозначим через $[a_{k+1}; b_{k+1}]$ ту из его половин, которая является «плохим» отрезком. Шаг построения выполнен и вложенность построенной последовательности $\{[a_k; b_k]\}$ очевидна. Стягиваемость этой последовательности следует из того, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(b - a)}{2^{k-1}} = 0.$$

По лемме Кантора (лемма 6.1 второй главы) последовательность $\{[a_k; b_k]\}$ даст нам точку $\{x_0\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i; b_i]$, причем x_0 будет одновременно пределом последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$. Вспомним, что в x_0 функция $f(x)$ непрерывна, поэтому для $\varepsilon_0/3$ можно найти такую окрестность $O_{\delta/2}(x_0)$, что для всех $x \in O_{\delta/2}(x_0) \cap [a; b]$ выполняется двойное неравенство:

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{3} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon_0}{3}. \quad (**)$$

Теперь для $O_{\delta/2}(x_0)$ из равенств $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$ найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, для которого при всех $k > N$ справедливо $a_k, b_k \in O_{\delta/2}(x_0)$. Чтобы получить противоречие подойдет любой номер $k_0 > N$. Действительно, из условия $a_{k_0}, b_{k_0} \in O_{\delta/2}(x_0)$ и выпуклости множества $O_{\delta/2}(x_0)$ следует, что $[a_{k_0}; b_{k_0}] \subseteq O_{\delta/2}(x_0)$. Выберем два произвольных $x_1, x_2 \in [a_{k_0}; b_{k_0}]$, тогда $x_1, x_2 \in O_{\delta/2}(x_0)$, поэтому $|x_2 - x_1| < \delta$ и из $(**)$ получим

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |f(x_2) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_1)| \leq \\ &\leq |f(x_2) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Таким образом, отрезок $[a_{k_0}; b_{k_0}]$ оказался «хорошим». $\nwarrow$

■

Вспомним, что функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной, если она непрерывна в каждой точке множества A . Для произвольного $\varepsilon > 0$ и точки $x_0 \in A$ по определению мы можем найти такое $\delta(x_0) > 0$, что при всех $x \in O_{\delta(x_0)}(x_0) \cap A$ выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Заметим, что переходя к другой точке $x^* \in A$, радиус $\delta(x^*) > 0$ новой найденной окрестности (с похожим свойством: для всех $x \in O_{\delta(x^*)}(x^*) \cap A$ выполнено $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$) часто оказывается отличным от $\delta(x_0)$. В случае же равномерно непрерывной функции такое $\delta > 0$ найдется одинаковое сразу для всех точек множества A . Этим объясняется выбор названия этого свойства, которое сильнее обычной непрерывности. Так, например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на



полуинтервале $(0; 1]$, но не равномерно непрерывна на нем. Иначе бы для $\varepsilon = 1$ нашлось бы δ из определения равномерно непрерывной функции и можно было бы разбить $(0; 1]$ на конечное число промежутков (отрезков, интервалов и полуинтервалов) длины не больше $\delta/3$, выбрать их центры — $x_1, x_2, \dots, x_n$, и определить в качестве $M = \max_{i=1}^n \{f(x_i)\} + 1$. Тогда из определения равномерной непрерывности следует, что $f(x) \leq M$ для всех $x \in (0; 1]$, что противоречит неограниченности сверху функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке. Такие же рассуждения приведут к более общему факту: если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она необходимо ограничена и сверху, и снизу. Теорему Кантора можно немного усилить: любая непрерывная функция на компакте K (т.е. замкнутом и ограниченном подмножестве в $\mathbb{R}$) является равномерно непрерывной на множестве K .

Чтобы получить несколько важных следствий теоремы Кантора, введем несколько терминов. Для ограниченной функции $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ и произвольного разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$ разность $\omega_i = M_i - m_i$ называется *колебанием* $f(x)$ на i -ом отрезке разбиения (для любого $i \leq n$), а число

$$W(T) = S(T) - s(s) = \sum_{i=1}^n \omega_i \cdot \Delta_i$$

называется *колебательной суммой* функции $f(x)$ по разбиению T . Кроме того, число $d(T) = \max_{i=1}^n \{\Delta_i\}$ называется *диаметром* разбиения T .

Следствие 1. Если $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b]$ ($a \leq b$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, что при всех натуральных $i \leq n$ верно $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon$.

Доказательство. При $a = b$ утверждение очевидно, так как разбиение только одно и для него $\omega_1 = 0 < \varepsilon$.

Пусть $a < b$ и для произвольного $\varepsilon/3 > 0$ по предыдущей теореме найдем такое $\delta > 0$, что при любых $x_1, x_2 \in [a; b]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$, следует, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/3$. Теперь выберем произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, диаметр которого не превосходит δ (например, положив $x_i = a + i \cdot \delta < b$, в качестве n выбрать первое натуральное число⁴, для которого уже будет $a + n \cdot \delta \geq b$ и определить $x_n = b$). Покажем, что T — искомое разбиение. Для любого натурального $i \leq n$ обозначим через t_i середину отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, тогда для каждого $x \in [x_{i-1}; x_i]$

⁴такое число существует благодаря свойству Архимеда.



следует, что $x \in O_\delta(t_i)$, поэтому из равномерной непрерывности получим неравенство $|f(x) - f(t_i)| < \varepsilon/3$ или

$$\begin{aligned} f(t_i) - \frac{\varepsilon}{3} < f(x) < f(t_i) + \frac{\varepsilon}{3} &\Rightarrow f(t_i) - \frac{\varepsilon}{3} \leq m_i \leq M_i \leq f(t_i) + \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega_i = M_i - m_i \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Следствие 2. Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a; b]$ ($a \leq b$), то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. При $a = b$ верно $I_* = I^* = 0$ и утверждение очевидно. Далее считаем, что $a < b$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользуемся предыдущим следствием и найдем такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, что при всех натуральных $i \leq n$ верно $\omega_i = M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

что по теореме 2.5 дает интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

■

Следствие 3. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ ($a \leq b$), $I = \int_a^b f(x) dx$, T — произвольное разбиение $[a; b]$, тогда

$$I = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} s(T).$$

Доказательство. При $a = b$ верно $I_* = I^* = I = s(T) = S(T)$ и утверждение очевидно. Далее считаем, что $a < b$.

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и для также положительного числа $\varepsilon/(b-a)$ применим определение равномерной непрерывности. Найдем такое $\delta > 0$, что при любых $x_1, x_2 \in [a; b]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$, следует, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Теперь выберем произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, диаметр которого меньше δ . Из доказательства первого следствия получим, что при всех натуральных $i \leq n$ выполняется $\omega_i = M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. Тогда из доказательства второго следствия получим оценку разности для сумм Дарбу: $S(T) - s(T) < \varepsilon$. Но нам известно, что $s(T) \leq I \leq S(T)$, поэтому неравенство $S(T) - s(T) < \varepsilon$ сразу



приводит к $|I - s(T)| < \varepsilon$ и $|S(T) - I| < \varepsilon$. Тем самым мы по определению проверили выполнение двух предельных равенств:

$$I = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} s(T).$$

■

Приведем еще один критерий интегрируемости функции на отрезке и укажем способ нахождения определенного интеграла. На следующее утверждение часто будем ссылаться так: $\diamond$.

Теорема 2.7. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, $a \leq b$.

1) $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ тогда и только тогда, когда найдется последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка $[a; b]$, для которой выполняется равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} (S(T_k) - s(T_k)) = 0$.

2) если последовательность $\{T_k\}$ удовлетворяет (1), то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T_k).$$

3) если последовательность $\{T_k\}$ удовлетворяет (1) и $T_k \subseteq T'_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то для последовательности $\{T'_k\}$ разбиений отрезка $[a; b]$ также справедливо

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T'_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T'_k).$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) пусть $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ тогда по критерию Римана (теорема 2.5) для любого $k \in \mathbb{N}$ и числа $\varepsilon_k = 1/k$ найдем такое разбиение T_k отрезка $[a; b]$, для которого $0 \leq S(T_k) - s(T_k) < \frac{1}{k}$. По П2П получим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (S(T_k) - s(T_k)) = 0$.

$\Leftarrow$) если последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка $[a; b]$ со свойством $\lim_{k \rightarrow \infty} (S(T_k) - s(T_k)) = 0$ найдется, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k > K$ справедливо $S(T_k) - s(T_k) < \varepsilon$. Мы проверили, что условие теоремы 2.5 выполняется даже для бесконечного числа разбиений, поэтому $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

2) пусть последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка $[a; b]$ удовлетворяет равенству $\lim_{k \rightarrow \infty} (S(T_k) - s(T_k)) = 0$. В предыдущем пункте было уже установлено, что $I_* = I^* = I = \int_a^b f(x) dx$. Кроме того, из определения нижнего



и верхнего интегралов Дарбу следует, что

$$s(T_k) \leq I_* = I = I^* \leq S(T_k) \Rightarrow$$

$$0 \leq I - s(T_k) \leq S(T_k) - s(T_k) \quad \text{и} \quad 0 \leq S(T_k) - I \leq S(T_k) - s(T_k).$$

Применяя П2П, получим $\lim_{k \rightarrow \infty} (I - s(T_k)) = 0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} (S(T_k) - I) = 0$, откуда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T_k).$$

3) уже установлено, что $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T_k)$. По лемме 2.3 получим для любого $k \in \mathbb{N}$ цепочку неравенств

$$s(T_k) \leq s(T'_k) \leq I \leq S(T'_k) \leq S(T_k).$$

Дважды применяя П2П, приходим к $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T'_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T'_k)$. ■

Легко устанавливается геометрический смысл определенного интеграла. Для этого нам понадобится понятие криволинейной трапеции.

Определение. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, $a \leq b$. Криволинейной трапецией для f называется фигура Φ_f на плоскости Oxy , которая ограничена графиком $\Gamma(f)$ и прямыми (Ox) , $x = a$ и $x = b$.

Немного похожей на трапецию фигуру Φ_f делает наличие у нее двух параллельных отрезков, лежащих на прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 41), но вид у Φ_f может быть очень необычным для трапеции (рис. 42 и 43).

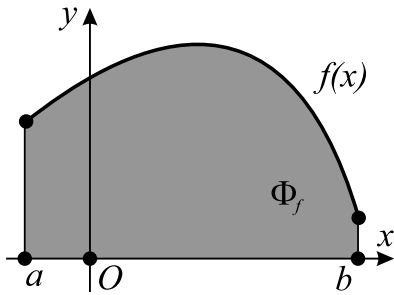


Рис. 41

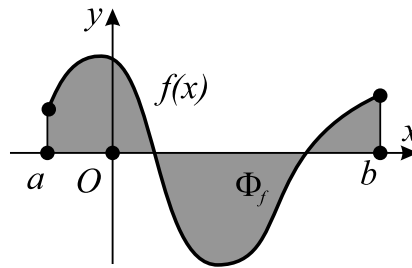


Рис. 42

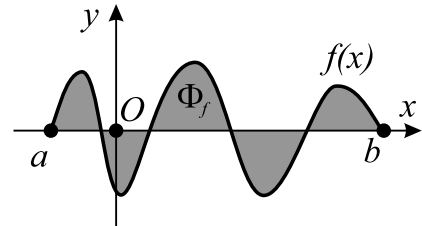


Рис. 43

Теорема 2.8. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, $a \leq b$ и $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для ее криволинейной трапеции Φ_f справедливо:



1) Φ_f является квадратуемой фигурой;

2) $s(\Phi_f) = I = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. Одновременно докажем оба утверждения. По $\diamond$ (т.е. по теореме 2.7) найдется последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка $[a; b]$, которая удовлетворяет равенствам $I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(T_k)$. Теперь по каждому разбиению T_k построим две многоугольные фигуры $\bar{P}_k$ и $\bar{\bar{P}}_k$ (рис. 44 и 45), которые удовлетворяют включению $\bar{P}_k \subseteq \Phi_f \subseteq \bar{\bar{P}}_k$. Сделаем это следующим образом. Пусть $T_k = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, и, как обычно, $m_i = m(f, [x_{i-1}, x_i])$, $M_i = M(f, [x_{i-1}, x_i])$, при всех натуральных $i \leq n$. По определению считаем, что

$$\bar{P}_k = \bigcup_{i=1}^n \left([x_{i-1}, x_i] \times [0; m_i] \right) \quad \text{и} \quad \bar{\bar{P}}_k = \bigcup_{i=1}^n \left([x_{i-1}, x_i] \times [0; M_i] \right).$$

Тогда при всех натуральных $i \leq n$ справедливо

$$[x_{i-1}, x_i] \times [0; m_i] \subseteq \Phi_f \cap \left([x_{i-1}, x_i] \times \mathbb{R} \right) \subseteq [x_{i-1}, x_i] \times [0; M_i],$$

поэтому $\bar{P}_k \subseteq \Phi_f \subseteq \bar{\bar{P}}_k$. Площади этих многоугольных фигур, составленных из прямоугольников, легко считаются:

$$\begin{aligned} s(\bar{P}_k) &= \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| \cdot m_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta_i = s(T_k) \quad \text{и} \\ s(\bar{\bar{P}}_k) &= S(T_k). \end{aligned}$$

По выбору последовательности $\{T_k\}$ имеем

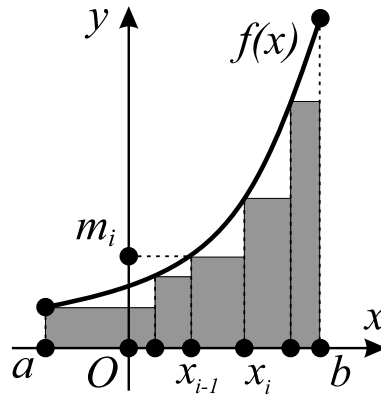


Рис. 44

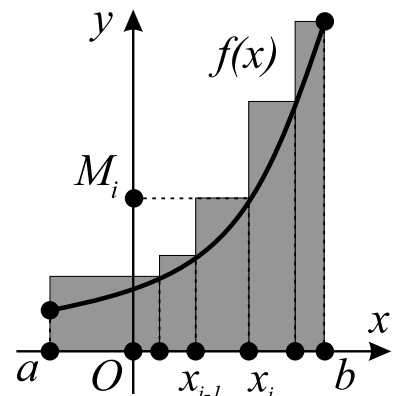


Рис. 45

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} s(\bar{P}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(\bar{\bar{P}}_k),$$

откуда следует квадратуемость фигуры Φ_f и $s(\Phi_f) = \int_a^b f(x) dx$.





5.3. Свойства определенного интеграла

Немного усилим утверждение леммы 3.2 второй главы.

Лемма 3.1. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ и A — ограниченное множество.

- 1) $m^* = \inf A \Leftrightarrow m^*$ одновременно удовлетворяет (a) и (b), где
 - a) m^* — нижняя граница множества A ;
 - b) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_0 \in A$, что $m^* \leq x_0 < m^* + \varepsilon$.
- 2) $M^* = \sup A \Leftrightarrow M^*$ одновременно удовлетворяет (a) и (b), где
 - a) M^* — верхняя граница множества A ;
 - b) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_0 \in A$, что $M^* - \varepsilon < x_0 \leq M^*$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) доказано в лемме 3.2 второй главы.

$\Leftarrow$) о/п, нашлось число $m_1 > m^*$ и m_1 также является нижней границей множества A . Обозначим через $\varepsilon_0 = m_1 - m^* > 0$, тогда для каждого $x \in A$ выполняется $m^* < m^* + \varepsilon_0 = m_1 \leq x$, откуда $[m^*; m^* + \varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ и для m^* не выполняется (b). $\nabla \times$.

2) доказывается аналогично (1). ■

Напомним, что для любого множества $A \subseteq \mathbb{R}$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ по определению множество $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot x : x \in A\}$. В следующем утверждении выясним, как изменяются супремум и инфимум числовых множеств при умножении этих множеств на константу.

Лемма 3.2. Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ и A — ограниченное множество.

- 1) если $\lambda \geq 0$, то $\inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \inf A$ и $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup A$.
- 2) если $\lambda < 0$, то $\inf(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \sup A$ и $\sup(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \inf A$.

Доказательство. Сразу обозначим через $m_A = \inf A$ и $M_A = \sup A$.

1) если $\lambda = 0$, то утверждение очевидно, поскольку множество $\lambda \cdot A$ равно синглетону $\{0\}$ и $\inf(\lambda \cdot A) = \sup(\lambda \cdot A) = 0$. Пусть теперь $\lambda > 0$. Докажем, что $\lambda m_A = \inf(\lambda \cdot A)$, проверив выполнение условий (a) и (b) предыдущей леммы.

a) для каждого $x \in A$ справедливо $m_A \leq x$, что при $\lambda > 0$ дает $\lambda m_A \leq \lambda x$.

b) для любого $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \varepsilon / \lambda > 0$. По предыдущей лемме для ε_1 найдется такое $x_0 \in A$, что $m_A \leq x_0 < m_A + \varepsilon_1$. Умножив это двойное неравенство на положительное λ , получим $\lambda m_A \leq \lambda x_0 < \lambda m_A + \varepsilon$. Осталось заметить, что $\lambda x_0 \in \lambda \cdot A$.



Из (a), (b) и предыдущей леммы следует, что $\lambda m_A = \inf(\lambda \cdot A)$. Аналогично доказывается, что $\lambda M_A = \sup(\lambda \cdot A)$.

2) пусть теперь $\lambda < 0$ и докажем, что $\lambda m_A = \sup(\lambda \cdot A)$, проверив выполнение условий (a) и (b) второго утверждения предыдущей леммы.

a) для каждого $x \in A$ справедливо $m_A \leq x$, что при $\lambda < 0$ дает $\lambda x \leq \lambda m_A$.

b) для любого $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = -\varepsilon/\lambda > 0$. По предыдущей лемме для ε_1 найдется такое $x_0 \in A$, что $m_A \leq x_0 < m_A + \varepsilon_1$. Умножив это двойное неравенство на отрицательное λ , получим $\lambda m_A - \varepsilon < \lambda x_0 \leq \lambda m_A$. Осталось заметить, что $\lambda x_0 \in \lambda \cdot A$.

Из (a), (b) и предыдущей леммы следует, что $\lambda m_A = \sup(\lambda \cdot A)$. Аналогично доказывается, что $\lambda M_A = \inf(\lambda \cdot A)$. ■

В следующей теореме докажем основные свойства определенного интеграла. Третье утверждение этой теоремы называется *аддитивностью по промежутку интегрирования*.

Теорема 3.3. Пусть $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ являются интегрируемыми функциями на отрезке $[a; b]$ ($a \leq b$). Тогда

- 1) для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $\lambda f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$;
- 2) для любого $c \in [a; b]$ функция $f(x)$ также интегрируема и на отрезке $[a; c]$, и на отрезке $[c; b]$;
- 3) для любого $c \in [a; b]$ верно $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$;
- 4) функция $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем выполняется равенство $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$;
- 5) функция $f(x) - g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем выполняется равенство $\int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$.

Доказательство. 1) для произвольного разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$ введем обозначения

$$m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}, \quad m_i(\lambda f) = \inf\{\lambda f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}.$$

Аналогично определяются числа $M_i(f)$ и $M_i(\lambda f)$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть также $s(f, T)$, $S(f, T)$, $s(\lambda f, T)$, $S(\lambda f, T)$ — суммы Дарбу для функций $f(x)$ и $\lambda f(x)$, построенных по разбиению T .

Теперь воспользуемся интегрируемостью $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и из критерия $\diamond$ (теорема 2.7) найдем последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка



$[a; b]$, для которой выполняется

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k). \quad (\heartsuit)$$

Из предыдущей леммы нам известно, что в зависимости от знака λ выполняется $m_i(\lambda f) = \lambda m_i(f)$ или $m_i(\lambda f) = \lambda M_i(f)$, откуда $s(\lambda f, T_k) = \lambda s(f, T_k)$ или $s(\lambda f, T_k) = \lambda S(f, T_k)$. В любом случае, условие $(\heartsuit)$ гарантирует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} s(\lambda f, T_k) = \lambda I$. Аналогично доказывается, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S(\lambda f, T_k) = \lambda I$. Еще раз применив $\diamond$, получим, что $\lambda f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$.

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ по теореме Римана (теорема 2.5) найдем такое разбиение T отрезка $[a; b]$, для которого $S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$. Добавив к T точку c , получим $T_1 = T \cup \{c\}$ — измельчение разбиения T . Известно (по лемме 2.3), что переход к измельчению дает

$$s(f, T) \leq s(f, T_1) \leq S(f, T_1) \leq S(f, T),$$

откуда $S(f, T_1) - s(f, T_1) \leq S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon$. Рассмотрим теперь $T_2 = T_1 \cap [a; c]$ — разбиение отрезка $[a, c]$, для него выполняется двойное неравенство $S(f, T_2) - s(f, T_2) \leq S(f, T_1) - s(f, T_1) < \varepsilon$ (действительно, в разность $S(f, T_2) - s(f, T_2)$ входит только часть неотрицательных слагаемых вида $(M_i - m_i)\Delta_i$ от разности $S(f, T_1) - s(f, T_1)$). Нам удалось найти разбиение T_2 отрезка $[a; c]$, для которого $S(f, T_2) - s(f, T_2) < \varepsilon$, что по теореме 2.5 дает интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a; c]$. Аналогично доказывается интегрируемость $f(x)$ и на отрезке $[c; b]$.

3) воспользуемся результатом (2) и последовательно применим критерий $\diamond$ для функции $f(x)$ и отрезков $[a; b]$, $[a; c]$ и $[c; b]$. Найдем три последовательности разбиений $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$, $\{Z_k\}$ соответственно отрезков $[a; b]$, $[a; c]$ и $[c; b]$, для которых справедливо:

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, X_k), \quad (*)$$

$$I_2 = \int_a^c f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, Y_k), \quad (**)$$

$$I_3 = \int_c^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, Z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, Z_k). \quad (***)$$

Обозначим через $T_k = X_k \cup Y_k \cup Z_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Учитывая, что T_k является измельчением разбиения X_k , по $\diamond$ последовательность $\{T_k\}$



также удовлетворяет свойству $(*)$ (с заменой X_k на T_k). Заметим, что $T_k \cap [a; c]$ — измельчение разбиения Y_k отрезка $[a; c]$, поэтому последовательность $\{T_k \cap [a; c]\}$ обладает свойством $(**)$. Аналогично, последовательность $\{T_k \cap [c; b]\}$ обладает свойством $(***)$. Сразу из определения нижней суммы Дарбу следует, что $s(f, T_k) = s(f, T_k \cap [a; c]) + s(f, T_k \cap [c; b])$, поэтому, применяя $(*)$, $(**)$ и $(***)$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(s(f, T_k \cap [a; c]) + s(f, T_k \cap [c; b]) \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k \cap [a; c]) + \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k \cap [c; b]) = I_2 + I_3. \end{aligned}$$

4) для произвольного разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$ аналогично обозначениям $m_i(f)$ и $M_i(f)$, определенным в (1), введем обозначения и для функции $g(x)$:

$$m_i(g) = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}, \quad M_i(g) = \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}.$$

Тогда для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $x \in [x_{i-1}; x_i]$ выполняются двойные неравенства

$$\begin{aligned} m_i(f) &\leq f(x) \leq M_i(f), \quad m_i(g) \leq g(x) \leq M_i(g) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_i(f) + m_i(g) \leq f(x) + g(x) \leq M_i(f) + M_i(g), \end{aligned}$$

откуда следует, что числа $m_i(f) + m_i(g)$ и $M_i(f) + M_i(g)$ являются (соответственно) одной из нижних и одной из верхних границ числового множества $\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$. Таким образом, для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ справедливы оценки

$$m_i(f) + m_i(g) \leq m_i(f + g) \leq M_i(f + g) \leq M_i(f) + M_i(g), \quad (\clubsuit_i)$$

где $m_i(f + g) = \inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$ и $M_i(f + g) = \sup\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\}$. Умножая неравенства $(\clubsuit_i)$ на $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \geq 0$ и суммируя при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим, что для любого разбиения T справедливы следующие неравенства для сумм Дарбу:

$$s(f, T) + s(g, T) \leq s(f + g, T) \leq S(f + g, T) \leq S(f, T) + S(g, T) \quad (\spadesuit).$$

Применив критерий интегрируемости $\diamond$ для f и g , найдем две последовательности разбиений $\{X_k\}$ и $\{Y_k\}$ отрезка $[a; b]$, для которых выполняется

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, X_k),$$



$$I_2 = \int_a^b g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(g, Y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(g, Y_k).$$

Разбиение $T_k = X_k \cup Y_k$ измельчает каждое из разбиений X_k и Y_k , поэтому $\diamond$ гарантирует, что

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k),$$

$$I_2 = \int_a^b g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(g, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(g, T_k).$$

Теперь для каждого T_k применим ($\spadesuit$)

$$s(f, T_k) + s(g, T_k) \leq s(f + g, T_k) \leq S(f + g, T_k) \leq S(f, T_k) + S(g, T_k)$$

и перейдем к пределу в этих неравенствах при $k \rightarrow \infty$. По П2П получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f + g, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f + g, T_k) = I_1 + I_2.$$

Из этого соотношения и $\diamond$ следует, что $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и выполняется равенство $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

5) из (1) следует, что функция $-g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и $\int_a^b (-g(x)) dx = -\int_a^b g(x) dx$. Осталось из (4) получить, что

$$\int_a^b f(x) + (-g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b (-g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

■

До сих пор мы считали, что пределы интегрирования связаны неравенством $a \leq b$. Научимся интегрировать в обратном направлении. Пусть теперь $b \leq a$ и функция $f : [b; a] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[b; a]$. Разбиением от a до b будем называть конечное множество $\tilde{T} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, где $a = x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n = b$. Обозначим через $\tilde{\Delta}_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\{f(x); x \in [x_i; x_{i-1}]\}$, $M_i = \sup\{f(x); x \in [x_i; x_{i-1}]\}$,

$$s(f, \tilde{T}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \tilde{\Delta}_i, \quad S(f, \tilde{T}) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \tilde{\Delta}_i.$$

Поскольку $-\tilde{\Delta}_i = x_{i-1} - x_i = \Delta_i \geq 0$, легко заметить, что после перестановки слагаемых, мы получим обычные суммы Дарбу, у каждого слагаемого которых знак поменялся на противоположный, т.е. $s(f, \tilde{T}) = -s(f, T)$ и



$S(f, \tilde{T}) = -S(f, T)$, где $T = \{x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0\}$. Интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[b; a]$ и критерий $\diamond$ дадут последовательность разбиений $\{T_k\}$ отрезка $[b; a]$, для которой

$$I = \int_b^a f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} S(f, T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k),$$

но тогда для последовательности разбиений $\{\tilde{T}_k\}$ от a до b мы получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(f, \tilde{T}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, \tilde{T}_k) = - \lim_{k \rightarrow \infty} s(f, T_k) = - \int_b^a f(x) dx.$$

Этим объясняется следующее определение.

Определение. Пусть функция $f : [b; a] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на отрезке $[b; a]$ и $b \leq a$, тогда она считается интегрируемой и на промежутке от a до b , причем $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Из этого определения сразу следует, что свойства (1), (2), (4) и (5) последней теоремы также выполняются, если мы изменим направление интегрирования. Проверим, что остается верным и свойство аддитивности по промежутку интегрирования. Пусть $a \geq c \geq b$, тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx = - \left(\int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx \right) = \\ &= \left(- \int_b^c f(x) dx \right) + \left(- \int_c^a f(x) dx \right) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Следующий результат называется *теоремой о среднем*.

Теорема 3.4. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой функцией на отрезке $[a; b]$ ($a \leq b$) и для всех $x \in [a; b]$ выполняется $m \leq f(x) \leq M$ для некоторых $m, M \in \mathbb{R}$ (т.е. $E(f) \subseteq [m; M]$). Тогда найдется число $c \in [m; M]$, для которого верно равенство $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$.

Доказательство. В случае $a = b$ подойдет любое число $c \in [m; M]$, поскольку $\int_a^b f(x) dx = 0 = c \cdot 0$. Поэтому далее считаем, что $a < b$.

Рассмотрим произвольное разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$, тогда, используя стандартные обозначения начала предыдущего параграфа, для каждого $x \in [x_{i-1}; x_i]$ и любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем цепочку неравенств:

$$m \leq m_i \leq f(x) \leq M_i \leq M. \quad (*_i)$$



Умножив $(*_i)$ на неотрицательное $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировав полученные неравенства, приходим к

$$m \cdot \sum_{i=1}^n \Delta_i \leq s(f, T) \leq \int_a^b f(x) dx \leq S(f, T) \leq M \cdot \sum_{i=1}^n \Delta_i \Rightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a),$$

откуда следует $m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M$ (поскольку $b-a > 0$). Осталось обозначить через $c = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$. Теперь утверждения $c \in [m; M]$ и $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$ очевидны. ■

Следствие. Если $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией на отрезке $[a; b]$, то найдется такой аргумент $x^* \in [a; b]$, для которого выполняется $\int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b-a)$.

Доказательство. Следствие из теоремы Кантора о равномерной непрерывности (теорема 2.6) гарантирует существование $\int_a^b f(x) dx$. Из следствия второй теоремы Вейерштрасса (теорема 7.2 третьей главы) мы получим, что $E(f) = [m^*; M^*]$ и применим теорему о среднем: найдется $c \in [m^*; M^*]$, для которого $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$. Учитывая, что $c \in E(f)$, существует такое число $x^* \in [a; b]$, для которого $f(x^*) = c$, что и завершает доказательство следствия. ■

Заметим, что и теорема о среднем, и следствие из нее останутся верными при изменении направления интегрирования. Пусть $f : [b; a] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой функцией на отрезке $[b; a]$ ($b \leq a$) и $\int_b^a f(x) dx = c(a-b)$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = - \left(\int_b^a f(x) dx \right) = -c(a-b) = c(b-a).$$

Если дополнительно потребовать непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[b; a]$, то найдется число $x^* \in [b; a]$, для которого $\int_b^a f(x) dx = f(x^*)(a-b)$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = - \left(\int_b^a f(x) dx \right) = -f(x^*)(a-b) = f(x^*)(b-a).$$



5.4. Формула Ньютона-Лейбница

Определенный и неопределенный интегралы связаны между собой не только похожими названиями и обозначениями. Но прежде, чем мы докажем центральный результат теории Ньютона и Лейбница, заметим, что определение разбиения отрезка $[a; b]$, на котором задана ограниченная функция f , ее сумм Дарбу по данному разбиению, нижнего и верхнего интегралов Дарбу, а также интеграла Римана этой функции не зависят от обозначения переменной аргумента этой функции. Другими словами, если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой на этом отрезке функцией, то верно

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Определение. Пусть $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой на этом отрезке функцией ($a \leq b$). Для каждого числа $x \in [a; b]$ обозначим через $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, тогда функцию $F(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ называют интегралом с переменным верхним пределом.

Второе свойство теоремы 3.3 гарантирует существование $F(x)$ для любого $x \in [a; b]$, а единственность супремума у ограниченного сверху числового множества (теорема 3.1 второй главы) дает однозначность $F(x)$ (поскольку $F(x)$ является супремумом множества, состоящего из нижних сумм Дарбу по разбиениям отрезка $[a; x]$). Кроме того, для неотрицательной $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ построенная по ней функция $F(x)$ имеет ясный геометрический смысл — площадь криволинейной трапеции, у которой меняется одно из оснований (рис. 46). Менее тривиальные свойства функции $F(x)$ установим в следующей теореме.

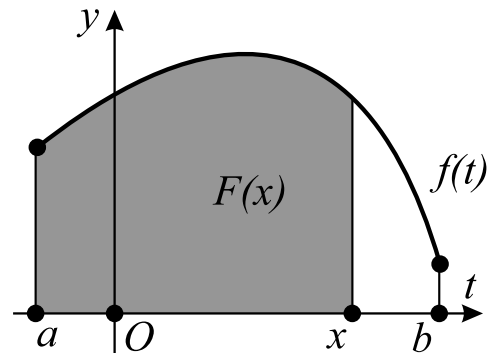


Рис. 46

Менее тривиальные свойства функции $F(x)$ установим в следующей теореме.

Теорема 4.1. Пусть $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой на этом отрезке функцией ($a \leq b$) и $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, тогда

- 1) $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$;
- 2) если $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a; b)$ выполняется $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. В случае $a = b$ утверждения (1) и (2) очевидны, поэтому далее считаем, что $a < b$.



1) интегрируемость $f(t)$ на отрезке $[a; b]$ дает ограниченность этой функции, поэтому найдется такое неотрицательное число $K \in \mathbb{R}$, что $|f(t)| \leq K$ для любого $t \in [a; b]$. Теперь докажем непрерывность $F(x)$ в любой точке $x_0 \in [a; b]$. Для этого применим свойство аддитивности интеграла по промежутку интегрирования, а также теорему о среднем на промежутке между x_0 и x (независимо от того, какое из этих чисел больше) и найдем такую константу $c \in [-K; K]$, для которой

$$\begin{aligned} 0 \leq |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = |c| \cdot |x - x_0| \leq K|x - x_0|. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow x_0} K|x - x_0| = 0$, поэтому можно применить П2П для функций (теорема 2.3 третьей главы) и получить, что $\lim_{x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, откуда и следует непрерывность $F(x)$ в точке x_0 .

2) выберем произвольную точку $x_0 \in (a; b)$ и ненулевое число Δx так, что $\bar{x} = x_0 + \Delta x \in [a; b]$. Между x_0 и $\bar{x}$ (независимо от их взаимного расположения) функция $f(t)$ непрерывна, поэтому из следствия теоремы о среднем найдем такое число x^* , лежащее в отрезке с концами x_0 и $\bar{x}$, что $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt = f(x^*) \cdot (\bar{x} - x_0) = f(x^*) \cdot \Delta x$. Тогда

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x^*) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x^*) = \lim_{x^* \rightarrow x_0} f(x^*) = f(x_0). \end{aligned}$$

В последних двух переходах мы использовали непрерывность $f(t)$ в точке x_0 и тот факт, что при $\Delta x \rightarrow 0$ точка x^* , которая лежит в отрезке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$, также стремится к x_0 . ■

Следствие. Пусть $f(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной на этом отрезке функцией ($a \leq b$), тогда $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для $f(t)$.



Доказательство. Сразу следует из определения первообразной и предыдущей теоремы. ■

Формула следующей теоремы называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Теорема 4.2. Пусть $F_1(x)$ является первообразной для непрерывной функции $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда $\int_a^b f(t) dt = F_1(b) - F_1(a)$.

Доказательство. Поскольку $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для $f(t)$, по первому утверждению этой главы найдется константа $C \in \mathbb{R}$, для которой $F(x) = F_1(x) + C$ для всех $x \in [a; b]$. В частности, при $x = a$, получим $F_1(a) + C = F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, откуда $C = -F_1(a)$. Тогда

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = F_1(b) + C = F_1(b) - F_1(a).$$

Разность $F_1(b) - F_1(a)$ часто обозначают $F(x)|_a^b$. Рассмотрим несколько примеров использования формулы Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Найдём площадь под одной из арок синусоиды. Пусть Φ — криволинейный треугольник, ограниченный осью абсцисс и синусоидой $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$ (рис. 47), тогда

$$s(\Phi) = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Пример 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Найдём площадь криволинейного треугольника Φ , ограниченного осью абсцисс, графиком степенной функции $f(x) = x^n$ на отрезке $[0; a]$, где $a > 0$ (рис. 48). Учитывая, что $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ — одна из первообразных $f(x)$, получим

$$s(\Phi) = \int_0^a x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^a = \frac{a^{n+1}}{n+1} - 0 = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(t) = 1/t$ на отрезке $[1; x]$ ($x \geq 1$) и вычислим площадь криволинейной трапеции Φ_x на рис. 49:

$$s(\Phi_x) = F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_1^x = \ln t \Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Кстати, некоторые считают равенство $\ln x = s(\Phi_x)$ удачным для определения натурального логарифма, из которого очевидно следуют некоторые свойства логарифма, например, его монотонность.

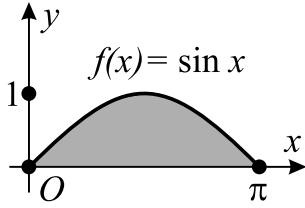


Рис. 47

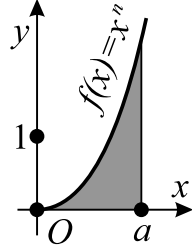


Рис. 48

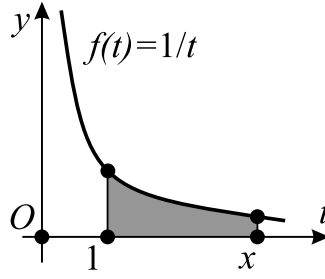


Рис. 49

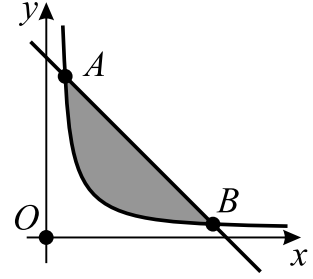


Рис. 50

Теорема 4.3. Пусть $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на $[a; b]$ и для каждого $x \in [a; b]$ выполняется $g(x) \leq f(x)$. Тогда площадь фигуры Φ , ограниченной графиками $\Gamma(g)$, $\Gamma(f)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, равна $s(\Phi) = \int_a^b f(x) - g(x) dx$.

Доказательство. 1-й случай: $g(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$ (рис. 51). Обозначим через Φ_1 и Φ_2 криволинейные трапеции для функций $g(x)$ и $f(x)$ соответственно. Тогда Φ_1 и Φ_2 квадратуемы (по теореме 2.8) и $s(\Phi_1) = \int_a^b g(x) dx$, $s(\Phi_2) = \int_a^b f(x) dx$. Кроме того, $\Phi_1 \cup \Phi = \Phi_2$, фигуры Φ_1 и Φ не имеют общих внутренних точек, откуда следует квадратуемость Φ и равенство $s(\Phi_2) = s(\Phi_1) + s(\Phi)$, т.е.

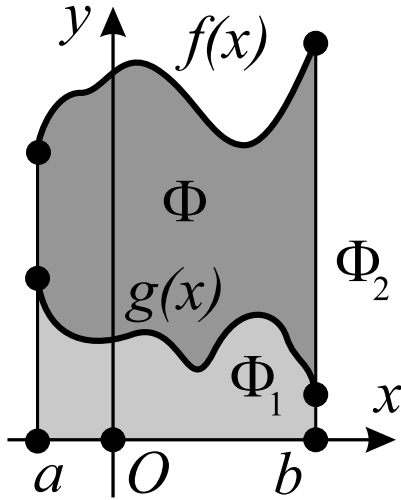


Рис. 51

$$\begin{aligned} s(\Phi) &= s(\Phi_2) - s(\Phi_1) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) - g(x) dx. \end{aligned}$$

2-й случай: функция $g(x)$ может быть отрицательна при некоторых $x \in [a; b]$. По первой теореме Вейерштрасса (теорема 3.7) найдем такое число m^* , что $g(x) \geq m^*$ при всех $x \in [a; b]$. Рассмотрим функции $g_1(x) = g(x) - m^*$ и $f_1(x) = f(x) - m^*$. Эти функции удовлетворяют условиям первого случая. Кроме того, фигура Φ получается из фигуры Φ^* , построенной для g_1 и f_1 , с помощью параллельного переноса на вектор $\vec{v} = (0, m^*)$ (напомним, что $m^* < 0$). Поэтому

$$s(\Phi) = s(\Phi^*) = \int_a^b (f(x) - m^*) - (g(x) - m^*) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$





Пример 4. Найдем площадь фигуры Φ , ограниченной графиками функций $g(x) = 5/x$ и $f(x) = 6 - x$ (рис 50). Сначала найдем координаты точек пересечения графиков этих функций (A и B). Уравнение $6 - x = 5/x$ преобразуем к равносильному $x^2 - 6x + 5 = 0$ с корнями $x_1 = 1$ и $x_2 = 5$, откуда $A(1, 5)$ и $B(5, 1)$. Ясно, что на отрезке $[1; 5]$ выполняется $f(x) \geq g(x)$, поэтому

$$s(\Phi) = \int_1^5 6 - x - \frac{5}{x} dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - 5 \ln x \right) \Big|_1^5 = 12 - 5 \ln 5.$$

5.5. Приложения определенного интеграла

Мы построили теорию интеграла Римана через суммы Дарбу, но классическим считается его определение через интегральные суммы. В начале этого параграфа убедимся, что оба подхода ведут к одной цели и позже выясним, как интегральные суммы помогают в нахождении длины кривой и объема пространственного тела.

Определение. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченная функция на $[a; b]$ ($a \leq b$) и $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — произвольное разбиение этого отрезка. Выбором точек по T называют такое множество $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, что при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется $p_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Интегральной суммой функции $f(x)$ по разбиению T и выбору точек P (по T) называется число

$$\sigma(f, T, P) = \sum_{i=1}^n f(p_i) \cdot \Delta_i.$$

Теорема 5.1. Пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ ($a \leq b$), $I = \int_a^b f(x) dx$, T — произвольное разбиение $[a; b]$, тогда для любого выбора P по T справедливо $I = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, P)$.

Доказательство. Рассмотрим $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ и $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ — выбор точек по T . Тогда для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ из определения инфимума и супремума следуют неравенства $m_i \leq f(p_i) \leq M_i$, откуда $m_i \Delta_i \leq f(p_i) \Delta_i \leq M_i \Delta_i$ (поскольку $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \geq 0$). Суммируя эти двойные неравенства при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим оценку для интегральных сумм $s(f, T) \leq \sigma(f, T, P) \leq S(f, T)$, которая справедлива для любого выбора точек P по разбиению T . Из третьего следствия теоремы о равномерной непрерывности (теорема 2.6) мы знаем, что



$I = \lim_{d(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} s(T)$. Применяя П2П для функций (теорема 2.3 третьей главы) получим существование $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, P)$ и $\lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(f, T, P) = I$. ■

В курсе геометрии было определено понятие кривой и рассматривалось множество спрямляемых кривых. Напомним, что *кривой* (точнее, плоской кривой) называется множество $k = f([a; b])$, где $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение. Если f — инъективное отображение, то $k = f([a; b])$ называется *дугой* или кривой без самопересечений. Разбиение $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$ вводится обычным образом: $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$. Диаметр разбиения T — это $d(T) = \max_{i=1}^n \{t_i - t_{i-1}\}$. При всех $i \in \{0, \dots, n\}$ точка $A_i = f(t_i)$ лежит на кривой k и ломаная $z(T) = \cup_{i=1}^n [A_{i-1}A_i]$ называется вписанной в кривую k по разбиению T . Кривая называется спрямляемой, если существует действительное число

$$l(k) = \sup \left\{ l(z(T)) : T \text{ — разбиение } [a; b] \right\},$$

где $l(z(T))$ — длина ломаной $z(T)$. При этом $l(k)$ называют длиной k и через $\mathcal{K}_0$ обозначают множество всех спрямляемых кривых. В курсе геометрии также было доказано, что при переходе к измельчению разбиения длина вписанной ломаной увеличивается (не строго), т.е. из $T \subseteq T_1$ следует $l(z(T)) \leq l(z(T_1))$ и что сумма двух (и конечного числа) спрямляемых кривых спрямляема и $l(k_1 + k_2) = l(k_1) + l(k_2)$. Сумма кривых $k_1 = f_1([a; b])$ и $k_2 = f_2([b; c])$ определена только в том случае, если $f_1(b) = f_2(b)$.

Отображение $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ часто задают по координатно (или *параметрически*) с помощью системы $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \in [a; b]$, где $x(t)$ и $y(t)$ — функции одной переменной. И наоборот, по отображению f эти две числовые функции легко восстанавливаются: $x(t) = \text{Пр}_{(Ox)}(f(t))$ и $y(t) = \text{Пр}_{(Oy)}(f(t))$. Также в курсе геометрии доказано, что непрерывность f равносильна непрерывности обеих функций: $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

При выводе формул нам поможет другой способ определения длины кривой, о нем пойдет речь в следующей теореме.

Теорема 5.2. Пусть $k = f([a; b]) \in \mathcal{K}_0$, тогда $l(k) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} l(z(T))$.

Доказательство. При $a = b$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем, что $a < b$.



Для произвольного $\varepsilon > 0$ сначала воспользуемся леммой 3.1 и найдем такое разбиение $T_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$, для которого верно двойное неравенство $l(k) - \frac{\varepsilon}{2} < l(z(T_0)) \leq l(k)$.

Функции $x(t), y(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, которые параметрически задают отображение f , непрерывны на отрезке $[a; b]$, поэтому равномерно непрерывны на нем (по теореме 2.6). Это свойство позволяет для положительного числа $\frac{\varepsilon}{8n}$ (напомним, что в разбиении T_0 не более $n + 1$ -й точки) найти такое общее для функций $x(t), y(t)$ число $\delta > 0$, что при любых $t', t'' \in [a; b]$ из условия $|t'' - t'| < \delta$ следует, что

$$|x(t'') - x(t')| < \frac{\varepsilon}{8n} \quad \text{и} \quad |y(t'') - y(t')| < \frac{\varepsilon}{8n}. \quad (*)$$

Теперь рассмотрим произвольное разбиение $T = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ отрезка $[a; b]$, удовлетворяющее условию $d(T) < \delta$. Разбиение $T_1 = T \cup T_0$ одновременно измельчает и T , и T_0 , поэтому оно обладает двумя важными свойствами.

Во-первых, условие $T_0 \subseteq T_1$ приводит к неравенствам

$$l(k) - \frac{\varepsilon}{2} < l(z(T_0)) \leq l(z(T_1)) \leq l(k). \quad (**)$$

Во-вторых, включение $T \subseteq T_1$ дает $d(T_1) \leq d(T) < \delta$ и $|T_1 \setminus T| \leq n - 1$. Теперь посмотрим, как будет меняться длина $l(z(T))$ при добавлении к T точек разбиения T_0 , т.е. мы хотим оценить $|l(z(T_1)) - l(z(T))|$. Для этого выберем сначала одну точку $t^* \in T_0 \setminus T$ и найдем отрезок $[p_{i-1}; p_i]$, для которого $t^* \in (p_{i-1}; p_i)$. Заметим, что $|p_i - p_{i-1}| < \delta$, $|p_i - t^*| < \delta$, $|t^* - p_{i-1}| < \delta$, поэтому при добавлении только точки t^* к разбиению T справедлива (на финише с использованием $(*)$) следующая оценка

$$\begin{aligned} |l(z(T \cup \{t^*\})) - l(z(T))| &= \sqrt{(x(t^*) - x(p_{i-1}))^2 + (y(t^*) - y(p_{i-1}))^2} + \\ &+ \sqrt{(x(p_i) - x(t^*))^2 + (y(p_i) - y(t^*))^2} - \sqrt{(x(p_i) - x(p_{i-1}))^2 + (y(p_i) - y(p_{i-1}))^2} \leq \\ &\leq \sqrt{(x(t^*) - x(p_{i-1}))^2 + (y(t^*) - y(p_{i-1}))^2} + \sqrt{(x(p_i) - x(t^*))^2 + (y(p_i) - y(t^*))^2} \leq \\ &\leq |x(t^*) - x(p_{i-1})| + |y(t^*) - y(p_{i-1})| + |x(p_i) - x(t^*)| + |y(p_i) - y(t^*)| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8n} = \frac{\varepsilon}{2n}. \end{aligned}$$

Применив не более n раз описанную выше процедуру добавления точек, получим, что $|l(z(T_1)) - l(z(T))| < \frac{\varepsilon}{2n} \cdot n = \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому неравенство $(**)$



теперь гарантирует, что $l(k) - \varepsilon < l(z(T)) \leq l(k)$. Мы проверили по определению, что $\lim_{d(T) \rightarrow 0} l(z(T)) = l(k)$.

■

Часто в качестве кривых рассматриваются участки графиков функций. Выясним как с помощью интеграла можно вычислить их длину. Будем считать по определению, что $g(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$, если $g(t)$ можно так доопределить на некоторый отрезок $[c; d]$ ($c < a \leq b < d$), что в каждой точке $t_0 \in [a; b]$ существует $g'(t_0)$ и функция $g'(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Теорема 5.3. Пусть $g(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$ и $k = \Gamma(g)$ — график этой функции. Тогда $k \in K_0$ и $l(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt$.

Доказательство. Рассмотрим любое разбиение $T_0 = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$ и для каждого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ обозначим через A_i точку $(t_i, g(t_i))$ на графике функции $g(t)$. Применяя ФЛКП (второе следствие из теоремы 4.5 четвертой главы) к функции $g(t)$ на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$ можно найти такую точку $p_i \in [t_{i-1}; t_i]$, для которой $g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(p_i) \cdot \Delta_i$, поэтому для ломаной $z(T) = \cup_{i=1}^n [A_{i-1}A_i]$ выполняется

$$\begin{aligned} l(z(T)) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta_i^2 + (g'(p_i))^2 \cdot \Delta_i^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (g'(p_i))^2} \cdot \Delta_i = \sigma(h, T, P), \end{aligned}$$

где $\sigma(h, T, P)$ — интегральная сумма для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $h(t) = \sqrt{1 + (g'(t))^2}$, которая построена по разбиению T и выбору точек $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Учитывая интегрируемость любой непрерывной функции на отрезке (второе и третье следствия теоремы 2.6) и результат предыдущей теоремы, получим, что

$$l(k) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} l(z(T)) = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sigma(h, T, P) = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt.$$

■



Пример 1. Обычную параболу $g(x) = x^2$ рассмотрим на отрезке $[0; b]$ ($0 < b$) и найдем длину кривой k — участка графика этой функции. Очевидно, что $g'(x) = 2x$ — непрерывная функция на отрезке $[0; b]$, поэтому $l(k) = \int_0^b \sqrt{1 + 4x^2} dx$. Сделаем замену⁵: $t = \sqrt{1 + 4x^2} + 2x$. Сначала пересчитаем пределы интегрирования: $t_1 = 1$ и $t_2 = \sqrt{1 + 4b^2} + 2b$. Из уравнения $t - 2x = \sqrt{1 + 4x^2}$ получим $t^2 - 4tx = 1$ или $x = \frac{t^2 - 1}{4t}$, откуда из определения дифференциала функции найдем $dx = \frac{8t^2 - 4t^2 + 4}{16t^2} dt = \frac{t^2 + 1}{4t^2} dt$. Кроме того, $\sqrt{1 + 4x^2} = t - 2x = t - \frac{t^2 - 1}{2t} = \frac{t^2 + 1}{2t}$, поэтому

$$\begin{aligned} l(k) &= \int_1^{t_2} \frac{(t^2 + 1)^2}{8t^3} dt = \int_1^{t_2} \left(\frac{t}{8} + \frac{1}{4t} + \frac{1}{8t^3} \right) dt = \\ &= \left(\frac{t^2}{16} + \frac{1}{4} \cdot \ln t - \frac{1}{16t^2} \right) \Big|_1^{t_2} = \frac{t_2^2}{16} + \frac{1}{4} \cdot \ln t_2 - \frac{1}{16t_2^2} - 0 = \\ &= \frac{1 + 8b^2 + 4b\sqrt{1 + 4b^2}}{16} + \frac{1}{4} \cdot \ln \left(\sqrt{1 + 4b^2} + 2b \right) - \frac{1}{16(1 + 8b^2 + 4b\sqrt{1 + 4b^2})}. \end{aligned}$$

Например, при $b = 1$ получим $l(k) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \cdot \ln(\sqrt{5} + 2)$.

Теперь перейдем к случаю параметрического задания кривой. Найдем достаточное условие спрямляемости и докажем формулу для вычисления длины кривой.

Теорема 5.4. Пусть отображение $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задается с помощью системы: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a; b]$ ($a \leq b$). Пусть также функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b]$ и $k = f([a; b])$, тогда

- 1) $k \in \mathcal{K}_0$;
- 2) пусть $k_t = f([a; t])$ — подкривая кривой k и $s(t) = l(k_t)$, тогда $s(t)$ — первообразная для функции $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ на $[a; b]$;
- 3) $l(k) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Доказательство. В случае $a = b$ все три утверждения очевидны, поэтому далее считаем, что $a < b$.

1) непрерывность функций $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[a; b]$ и вторая теорема Вейерштрасса (теорема 7.2 третьей главы) позволяют определить четыре числа $v = \min \{|x'(t)| : t \in [a; b]\}$, $V = \max \{|x'(t)| : t \in [a; b]\}$, $w = \min \{|y'(t)| : t \in [a; b]\}$ и, наконец, $W = \max \{|y'(t)| : t \in [a; b]\}$. Теперь рассмотрим произвольное разбиение $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$

⁵Это одна из остроумных подстановок, предложенных Л.Эйлером в 1768 году.



и оценим длину ломаной $l(z(T))$. В этом нам поможет ФЛКП (второе следствие из теоремы 4.5 четвертой главы), применение которой к функциям $x(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[t_{i-1}; t_i]$ даст точки $p_i, q_i \in [t_{i-1}; t_i]$, для которых $x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(p_i) \cdot \Delta_i$ и $y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(q_i) \cdot \Delta_i$, откуда

$$\begin{aligned} l(z(T)) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(p_i) \cdot \Delta_i)^2 + (y'(q_i) \cdot \Delta_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(p_i))^2 + (y'(q_i))^2} \cdot \Delta_i. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\sqrt{v^2 + w^2} \leq \sqrt{(x'(p_i))^2 + (y'(q_i))^2} \leq \sqrt{V^2 + W^2}$ для всех натуральных $i \leq n$, получим, что

$$\sqrt{v^2 + w^2} \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^n \sqrt{v^2 + w^2} \cdot \Delta_i \leq l(z(T)) \leq \sqrt{V^2 + W^2} \cdot (b - a),$$

откуда следует спрямляемость кривой k .

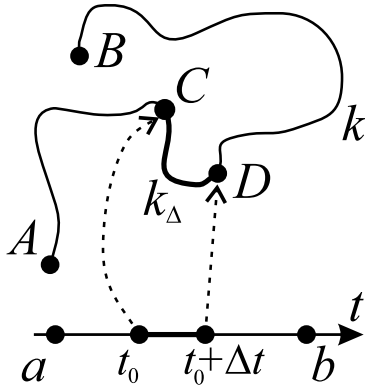


Рис. 52

2) из курса геометрии известно, что любая подкривая спрямляемой кривой также спрямляема, поэтому $k_t \in \mathcal{K}_0$ и $s(t)$ корректно определено. Аддитивность длины кривой и ее неотрицательность дают, что $s(t)$ — возрастающая функция (если $f(t)$ инъективно, то $s(t)$ строго возрастает). Выберем теперь произвольное $t_0 \in [a; b]$ и ненулевое Δt так, чтобы $t_0 + \Delta t \in [a; b]$. Рассмотрим два случая.

1 случай: $\Delta t > 0$. Введем некоторые обозначения: $k_\Delta = f([t_0; t_0 + \Delta t])$ (кривая между точками C и D на рис. 52), $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (длина

кривой k_Δ),

$$\begin{aligned} v_\Delta &= \min \{|x'(t)| : t \in [t_0; t_0 + \Delta t]\}, & V_\Delta &= \max \{|x'(t)| : t \in [t_0; t_0 + \Delta t]\}, \\ w_\Delta &= \min \{|y'(t)| : t \in [t_0; t_0 + \Delta t]\}, & W_\Delta &= \max \{|y'(t)| : t \in [t_0; t_0 + \Delta t]\}. \end{aligned}$$

Далее повторяем рассуждения (1), начиная с произвольного разбиения T отрезка $[t_0; t_0 + \Delta t]$, получим оценку с двух сторон для длины ломаной, вписанной в k_Δ , а значит, и для длины самой k_Δ :

$$\sqrt{v_\Delta^2 + w_\Delta^2} \cdot \Delta t \leq l(k_\Delta) = \Delta s \leq \sqrt{V_\Delta^2 + W_\Delta^2} \cdot \Delta t \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{v_{\Delta}^2 + w_{\Delta}^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sqrt{V_{\Delta}^2 + W_{\Delta}^2}. \quad (*)$$

Непрерывная дифференцируемость функций $x(t)$ и $y(t)$ нам дает, что при $\Delta t \rightarrow 0$ выполняется:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{v_{\Delta}^2 + w_{\Delta}^2} = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{V_{\Delta}^2 + W_{\Delta}^2}.$$

Поэтому, переходя в $(*)$ к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим по П2П для функций, что $s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$.

2 случай: $\Delta t < 0$. В обозначениях первого случая меняем отрезок на $[t_0 + \Delta t; t_0]$. Длина кривой k_{Δ} теперь будет равна $s(t_0) - s(t_0 + \Delta t) = -\Delta s$. Вынося из-под корня $|\Delta_i|$ раскрываем модули со знаком минус, сумма этих слагаемых даст $-\Delta t$. Поскольку $-\Delta t > 0$, смело делим на этот множитель, сохраняя знак неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{v_{\Delta}^2 + w_{\Delta}^2} \cdot (-\Delta t) &\leq l(k_{\Delta}) = -\Delta s \leq \sqrt{V_{\Delta}^2 + W_{\Delta}^2} \cdot (-\Delta t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{v_{\Delta}^2 + w_{\Delta}^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta t} \leq \sqrt{V_{\Delta}^2 + W_{\Delta}^2}. \end{aligned} \quad (**)$$

Отличия от первого случая закончились. Переходим в $(**)$ к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и получаем, что $s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$.

Мы знаем, что существование производной в точке t_0 влечет непрерывность $s(t)$ в этой точке. В точках a и b (считая соответственно $\Delta t > 0$ и $\Delta t < 0$) доказано существование только односторонних производных, но это также сильнее непрерывности. Делаем вывод, что $s(t)$ — одна из первообразных для непрерывной функции $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ на $[a; b]$.

3) из (2) и формулы Ньютона-Лейбница получим, что

$$l(k) = s(b) = s(b) - 0 = s(b) - s(a) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Равенство $s'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, полученное в предыдущей теореме, можно немного преобразовать: возвести в квадрат и умножить обе части на dt^2 (по определению $dt^2 = (dt)^2$). Получим

$$(s'(t)dt)^2 = (x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2 \Rightarrow ds^2 = dx^2 + dy^2,$$



т.е. связь между дифференциалом длины кривой с дифференциалами координатных функций, задающих эту кривую, похожа на теорему Пифагора!

Рассмотрим несколько примеров использования формулы из предыдущей теоремы по вычислению длин кривых, которые задаются параметрически.

Пример 2. Астроида. В геометрии обсуждались механическое и параметрическое задания астроида. Внутри окружности ω_1 , которая определена уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), расположена окружность ω_2 радиуса $a/4$, окружности касаются друг друга в точке $A(a, 0)$. Теперь заставим ω_2 катиться без проскальзывания по ω_1 . Траектория движения точки A , которую пройдет эта точка за четыре полных оборота окружности ω_2 , называется астроидой (рис. 53). Параметрическое задание астроида такое: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$. Обозначим эту кривую через k_a и заметим, что она состоит из четырех равных по длине подкривых (они получаются друг из друга поворотами вокруг начала координат), поэтому ограничимся только первой координатной четвертью: $t \in [0; \pi/2]$, $\sin t \geq 0$, $\cos t \geq 0$. Вычислим подынтегральную функцию из предыдущей теоремы:

$$\sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} = 3a \sin t \cos t.$$

Отсюда

$$l(k_a) = 4 \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cdot \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = -0 + 3a = 3a.$$

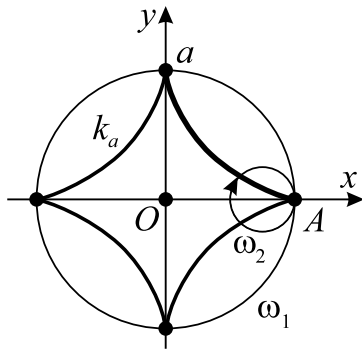


Рис. 53

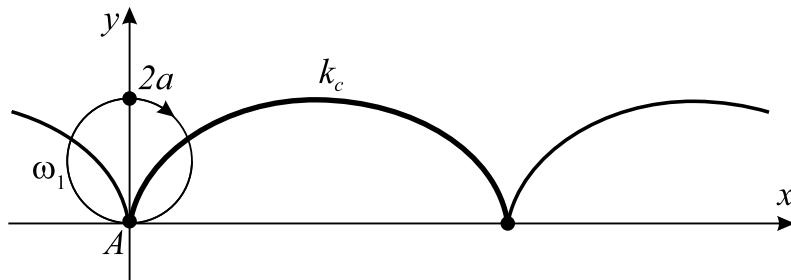


Рис. 54

Пример 3. Циклоида. В геометрии также обсуждались и механическое, и параметрическое задания циклоиды. Окружность ω_1 , которая определена уравнением $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$), в начальный момент времени касается оси (Ox) в точке $A(0, 0)$. Теперь заставим ω_1 катиться без проскальзывания вдоль (Ox) . Траектория движения точки A называется



циклоидой (рис. 54). Мы рассмотрим только одну из ее арок, т.е. траекторию движения A за один полный оборот ω_1 , эту кривую обозначим через k_c (участок выделен на рис. 54). Параметрическое задание k_c такое: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$. Вычислим подынтегральную функцию из предыдущей теоремы (при $t \in [0; 2\pi]$ верно $|\sin \frac{t}{2}| = \sin \frac{t}{2}$):

$$\sqrt{\left(a(1 - \cos t)\right)^2 + \left(a \sin t\right)^2} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = 2a\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Отсюда

$$l(k_c) = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

Нахождение площади с помощью определенного интеграла обсуждалось во втором параграфе этой главы, поэтому перейдем к вычислению объема пространственных тел. Напомним некоторые понятия и результаты геометрии. *Многогранным телом* (или *полиэдром*) называют объединение конечного числа тетраэдров и (возможно) конечного числа отрезков без общих внутренних точек, $\mathcal{P}$ — множество всех многогранных тел. На множестве $\mathcal{P}$ определяется функция объема $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ с четырьмя свойствами: неотрицательность, от равных фигур (т.е. полученных друг из друга движением) эта функция принимает равные значения, аддитивность (объем от объединения двух фигур без общих внутренних точек равен сумме объемов) и нормировка (объем единичного куба равен единице). Функция v была продолжена с сохранением свойств на множество кублируемых тел $\mathcal{Vol}$, при этом тело $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ называется кублируемым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие два полиэдра $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, что $P_1 \subseteq \Phi \subseteq P_2$ и $v(P_2) - v(P_1) < \varepsilon$. Среди установленных критериев кублируемости выделим ($\heartsuit$): Φ кублируемо тогда и только тогда, когда найдутся две такие последовательности полиэдров $\{P_n\}$, $\{K_n\}$, что $P_n \subseteq \Phi \subseteq K_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (v(K_n) - v(P_n)) = 0$. При этом эти две последовательности не только гарантируют кублируемость, но и позволяют вычислить объем: $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n)$. Критерий ($\heartsuit$) можно усилить до ($\heartsuit^+$), заменив последовательности $\{P_n\}$ и $\{K_n\}$ на последовательности, состоящие из кублируемых тел (например, каждое тело в которой является объединением конечного числа цилиндров). Точно также до этого, но уже на плоскости, были определены множество многоугольных фигур $\mathcal{M}$, функция площади $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, которая была продолжена на множество *квадрируемых* фигур $\mathcal{Sq}$ и был доказан критерий квадрируемости плоской



фигуры, аналогичный критерию ($\heartsuit$). Напомним, что $T_{\vec{u}}$ обозначает параллельный перенос пространства на вектор $\vec{u}$.

Определение. Пусть F — фигура в плоскости α , $(AB) \perp \alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обобщенным цилиндром с основанием F и высотой $[AB]$ будем называть тело $Cyl(F, [AB]) = \bigcup_{\lambda \in [0;1]} T_{\lambda \overrightarrow{AB}}(F)$. При $A = B$ будем считать $Cyl(F, [AA]) = F$.

Лемма 5.5. Если $F \in \mathcal{S}q$, то $\Phi = Cyl(F, [AB])$ — кубируемое тело и $v(\Phi) = s(F) \cdot |AB|$.

Доказательство. При $A = B$ утверждение очевидно, далее будем считать, что $A \neq B$.

Из $F \in \mathcal{S}q$ получим две последовательности многоугольных фигур $\{M_n\}$, $\{L_n\}$, для которых $M_n \subseteq F \subseteq L_n$ (при всех $n \in \mathbb{N}$) и выполняется $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(L_n) - s(M_n)) = 0$, при этом $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(L_n)$. Обозначим через $P_n = Cyl(M_n, [AB])$ и $K_n = Cyl(L_n, [AB])$ (при всех $n \in \mathbb{N}$), тогда $P_n, K_n \in \mathcal{P}$, $P_n \subseteq \Phi \subseteq K_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(M_n) \cdot |AB| = s(F) \cdot |AB|, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v(K_n) = s(F) \cdot |AB|,$$

откуда из ($\heartsuit$) получим, что $\Phi \in \mathcal{Vol}$ и $v(\Phi) = s(F) \cdot |AB|$. ■

Пусть в пространстве $\mathbb{P}_3$ введена декартова система координат. Обозначим для любого $x \in \mathbb{R}$ через α_x плоскость, перпендикулярную оси (Ox) и проходящую через точку $A(x, 0, 0)$. Для произвольного тела $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ множество $Dom(\Phi) = \{x \in \mathbb{R} : \Phi \cap \alpha_x \neq \emptyset\}$ будем называть носителем Φ , а через F_x обозначим $\Phi \cap \alpha_x$ для каждого $x \in Dom(\Phi)$. Напомним, что через $Pr_\alpha(F)$ мы обозначали образ фигуры F при ортогональной проекции на плоскость α .

Определение. Тело $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ называется правильно расположенным вдоль оси (Ox) , если для любых $x_1, x_2 \in Dom(\Phi)$ выполняется хотя бы одно из двух: $Pr_{\alpha_{x_1}}(F_{x_2}) \subseteq F_{x_1}$ или $Pr_{\alpha_{x_2}}(F_{x_1}) \subseteq F_{x_2}$ (рис. 55).

В следующей теореме также пойдет речь о телах вращения. Напомним, что через R_a^φ обозначают поворот пространства вокруг оси a на угол φ . Если фигура $F \subseteq \alpha$ и прямая $a \subseteq \alpha$, то тело Φ получено вращением F вокруг оси a , если $\Phi = \bigcup_{\varphi \in [0; 2\pi]} R_a^\varphi(F)$.



Теорема 5.6. 1) пусть тело $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ правильно расположено вдоль оси (Ox) , $\text{Dom} \Phi = [a; b]$ ($a \leq b$), для любого $x \in [a; b]$ плоская фигура F_x квадратуема и $s(x) = s(F_x)$. Если $s(x)$ — непрерывная функция на $[a; b]$, то тело Φ кубируемо и $v(\Phi) = \int_a^b s(x) dx$;

2) пусть $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ ($a \leq b$) и $f(x) \geq 0$ при всех $x \in [a; b]$. Если F — криволинейная трапеция для функции $f(x)$ (в плоскости Oxy) и тело Φ получено вращением F вокруг оси (Ox) (рис. 56), то Φ кубируемо и $v(\Phi) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$.

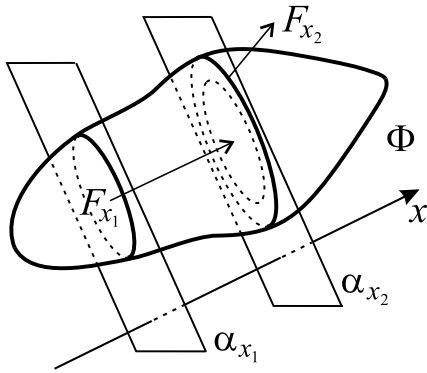


Рис. 55

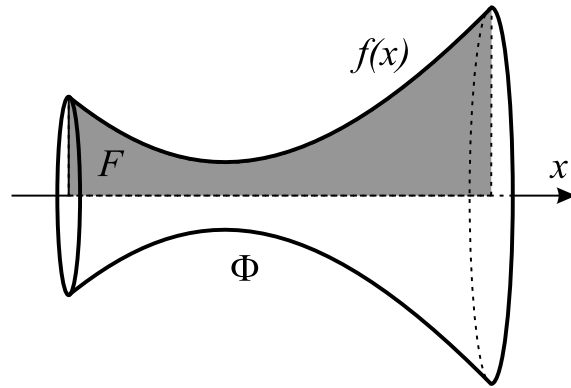


Рис. 56

Доказательство. 1) из непрерывности $s(x)$ следует интегрируемость этой функции на $[a; b]$ и по критерию $(\diamond)$ найдется последовательность разбиений $\{T_k\}$ этого отрезка, для которой выполняется $I = \int_a^b s(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} s(s(x), T_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(s(x), T_k)$.

Внимательно рассмотрим разбиение $T_k = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Снова воспользуемся непрерывностью $s(x)$ и (по второй теореме Вейерштрасса) на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ (для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$) найдем такие две точки p_i и q_i , для которых $s(p_i) = m_i = \min\{s(x); x \in [x_{i-1}; x_i]\} = s(F_{p_i})$ и $s(q_i) = M_i = \max\{s(x); x \in [x_{i-1}; x_i]\} = s(F_{q_i})$. Учитывая правильную расположенность Φ вдоль (Ox) и то, что фигура F_{p_i} имеет наименьшую площадь среди всех F_x при $x \in [x_{i-1}; x_i]$ мы получим, что ортогональная проекция F_{p_i} на плоскость α_x содержится в F_x при всех $x \in [x_{i-1}; x_i]$. Отсюда $V_i = \text{Cyl}(F_{p_i}, [x_{i-1}; x_i])$ содержится в той части тела Φ , которая лежит между плоскостями $\alpha_{x_{i-1}}$ и α_{x_i} . С другой стороны, фигура F_{q_i} имеет наибольшую площадь среди всех F_x при $x \in [x_{i-1}; x_i]$, поэтому правильная расположенность даст, что обобщенный цилиндр $W_i = \text{Cyl}(F_{q_i}, [x_{i-1}; x_i])$ уже сам содержит ту часть тела Φ , которая лежит между плоскостями $\alpha_{x_{i-1}}$



и α_{x_i} . По предыдущей лемме каждый из обобщенных цилиндров V_i и W_i кубируем, а их объемы равны соответственно $m_i \cdot \Delta_i$ и $M_i \cdot \Delta_i$ (для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Определим теперь в качестве $P_k = \cup_{i=1}^n V_i$ и $K_k = \cup_{i=1}^n W_i$ (для каждого $k \in \mathbb{N}$). Соседние обобщенные цилиндры V_i и V_{i+1} пересекаются только в плоскости α_{x_i} , поэтому общих внутренних точек в $\mathbb{P}_3$ у них нет, и из аддитивности функции объема получим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(P_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(V_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(s(x), T_k) = I = \int_a^b s(x) dx, \quad (*)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v(K_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(W_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(s(x), T_k) = I = \int_a^b s(x) dx. \quad (**)$$

Включения $P_n \subseteq \Phi \subseteq K_n$, равенства $(*)$, $(**)$ и критерий $(\heartsuit^+)$ дают, что тело Φ кубируемо и $v(\Phi) = \int_a^b s(x) dx$.

2) сначала заметим, что Φ удовлетворяет условиям утверждения (1). Действительно, для каждого $x \in [a; b]$ фигура F_x является кругом с центром на оси (Ox) , поэтому $\text{Пр}_{\alpha_{x_2}}(F_{x_1})$ и F_{x_2} — пара концентрических кругов, один из которых содержится в другом. Кроме того, из формулы площади круга следует, что $s(x) = s(F_x) = \pi \cdot (f(x))^2$ — непрерывная функция на $[a; b]$. Теперь, применяя (1), получим, что Φ кубируемо и

$$v(\Phi) = \int_a^b s(x) dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx.$$

■

Вычислим объемы у классических тел вращения.

Пример 4. Цилиндр. Расположим цилиндр Φ так, как это сделано на рис. 57. Тогда постоянная функция $f(x) = r$ рассматривается на отрезке $[0; h]$ и $v(\Phi) = \pi \cdot r^2 \cdot \int_0^h 1 dx = \pi r^2 \cdot x \Big|_0^h = \pi r^2 h$.

Пример 5. Конус. Удачно расположим конус Φ так, как это сделано на рис. 58. Линейная функция $f(x) = kx + b$ рассматривается на отрезке $[0; h]$ и проходит через точки (в плоскости Oxy) с координатами $(0, r)$ и $(h, 0)$, откуда $b = r$ и $k = -r/h$. Для $f(x) = -\frac{r}{h} \cdot (x - h)$ применяем (2) предыдущей теоремы:

$$v(\Phi) = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h (x - h)^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{(x - h)^3}{3} \Big|_0^h = 0 - \left(-\frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$



Пример 6. Усеченный конус. Снова максимально удобно выберем систему координат для усеченного конуса Φ (рис. 59) и будем считать, что $R > r$. Линейная функция $f(x) = kx + b$ рассматривается на отрезке $[0; h]$ и проходит через точки (в плоскости Oxy) с координатами $(0, R)$ и (h, r) , откуда $b = R$ и $k = -(R - r)/h$. Для $f(x) = -\frac{R-r}{h} \cdot (x - \frac{Rh}{R-r})$ применяем утверждение (2) предыдущей теоремы:

$$\begin{aligned} v(\Phi) &= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \int_0^h \left(x - \frac{Rh}{R-r}\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{\left(x - \frac{Rh}{R-r}\right)^3}{3} \Big|_0^h = \\ &= \frac{\pi(R-r)^2}{3h^2} \cdot \left(h^3 \cdot \frac{-r^3}{(R-r)^3} + \frac{R^3 h^3}{(R-r)^3}\right) = \frac{\pi h}{3} \cdot \left(\frac{R^3 - r^3}{R-r}\right) = \\ &= \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

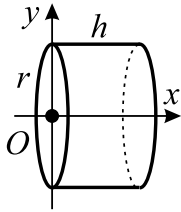


Рис. 57

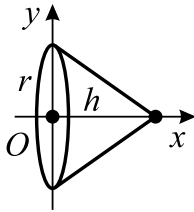


Рис. 58

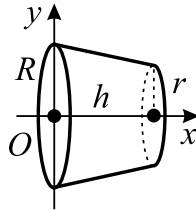


Рис. 59

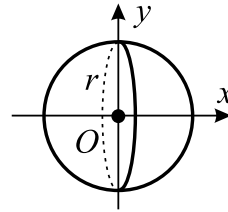


Рис. 60

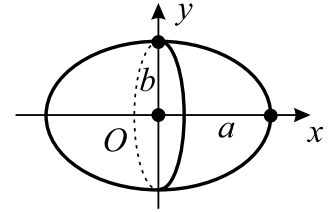


Рис. 61

Пример 7. Шар. Достаточно рассмотреть шар $\Phi = B(O, r)$ с центром в начале координат (рис. 60). Это тело получим вращением криволинейной трапеции для функции $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ при $x \in [-r; r]$ ($r > 0$). Применяем утверждение (2) предыдущей теоремы:

$$v(\Phi) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Пример 8. Эллипсоид. Вводя систему координат так, как это сделано на рис. 61, эллипсоид Φ получим из эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (где a — его большая полуось и b — малая полуось) вращением относительно оси (Ox) . Сразу выразим $y^2 = f^2(x) = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$ и рассмотрим эту функцию на отрезке $[-a; a]$. Применяем утверждение (2) предыдущей теоремы:

$$v(\Phi) = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} \right) \Big|_{-a}^a = \pi b^2 \left(a - \frac{a}{3} + a - \frac{a}{3} \right) = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

Кстати, при $a = b = r$ мы получим результат из предыдущего примера.



Пример 9. Параболоид вращения. *Параболоид вращения* — это поверхность, которая получена вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Договоримся в этом примере эту поверхность называть параболоидом.

Ясно, что параболоид является неограниченной фигурой, поэтому пересечем его плоскостью α , перпендикулярной оси параболоида, и рассмотрим ограниченное тело Φ , заключенное между плоскостью α и параболоидом. Конкретно, рассмотрим параболу $y = ax^2$ ($a > 0$), которую будем вращать относительно оси (Oy) , а в качестве α рассмотрим плоскость с координатным уравнением $y = b$ (рис. 62), считая, что $b > 0$. Поскольку вращение у нас происходит вокруг (Oy) , а не (Ox) , выразим из уравнения $x^2 = y/a$ неотрицательную ветку $x = \sqrt{y/a}$, которую будем рассматривать на отрезке $y \in [0; b]$.

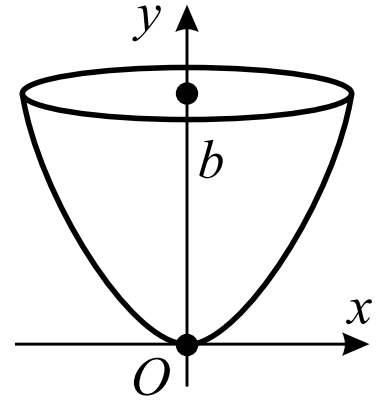


Рис. 62

При вращении криволинейной трапеции, построенной по функции $x = \sqrt{y/a}$, заданной на отрезке $y \in [0; b]$, мы получим из утверждения (2) предыдущей теоремы, что

$$v(\Phi) = \pi \int_0^b \frac{y}{a} dy = \frac{\pi}{a} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^b = \frac{\pi b^2}{2a}.$$

Так, при $a = b = 1$ окажется, что $v(\Phi) = \arcsin 1$!

Для заметок

Учебное издание

Сергей Александрович Ануфриенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 11

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Компьютерный набор и верстка С. А. Ануфриенко

Подписано в печать .12.2025. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Уч.-изд.л. . Бумага офсетная.

Тираж экз. Заказ № .

Издательство

Отпечатано

Тел.:

Факс:

E-mail:

http: