

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

С.А. Ануфриенко

ГЕОМЕТРИЯ 11

Учебное пособие



Екатеринбург
2025

УДК
ББК

Подготовлено на кафедре математики СУНЦ УрФУ

Рецензенты: *А. В. Осипов*, зав. сектором топологии Отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, д.ф.-м.н.,
С. Э. Нохрин, доцент кафедры математического анализа департамента математики, механики и компьютерных наук ИЕНиМ УрФУ, канд.ф.-м.н.

Геометрия 11: учеб. пособие / С. А. Ануфриенко.— : Изд-во , 2025. 258с.

В книгу включены разделы программы по геометрии, которые изучаются в одиннадцатых математических классах СУНЦ УрФУ: выпуклые множества и многогранные углы, группы движений и преобразований подобия пространства, связные множества, плоские кривые, функции длины, площади и объема.

Учебное пособие предназначено для учащихся СУНЦ УрФУ, старшеклас-ников и учителей математики.

ISBN

© С. А. Ануфриенко, 2025
© Макет С. А. Ануфриенко, 2025

Оглавление

Предисловие и система обозначений	5
1. Выпуклые множества	8
1.1. Выпуклые множества на прямой	8
1.2. Теорема Хелли	11
1.3. Выпуклые фигуры на плоскости	14
1.4. Теорема Минковского	28
1.5. Выпуклые многогранные углы	31
1.6. Трехгранные углы	35
2. Преобразования пространства	43
2.1. Группа преобразований и группа движений	43
2.2. Неподвижные точки движения. Теорема о представлении	52
2.3. Свойство подвижности. Теоремы о композициях	56
2.4. Группы симметрий пирамид и призм	66
2.5. Гомотетия. Группа подобий пространства	77
2.6. Композиция гомотетий	82
3. Связные множества	86
3.1. Связность отрезка. Линейная связность	87
3.2. Непрерывные отображения	94
3.3. Плоские кривые	98
3.4. Теорема об индексе для ломаных. Многоугольники	109
3.5. Теорема об индексе для поверхностей. Многогранники	125
4. Длина, площадь и объем	144
4.1. Функция длины на множестве отрезков	144
4.2. Спряжляемые кривые	151
4.3. Радианное измерение дуг и углов	158
4.4. Многоугольные фигуры и их площадь	165
4.5. Площадь на множестве quadriруемых фигур	181
4.6. Многогранные тела. Объем призмы	191
4.7. Объем пирамиды	196
4.8. Кубируемые тела. Цилиндр	200
4.9. Конус, его объем и площадь поверхности	208
4.10. Объем шара и его частей. Площадь поверхности сферы	224
4.11. Определение Минковского площади поверхности	231

4.12. Равносоставленность многоугольников	239
4.13. Третья проблема Гильберта. Теорема Дена	247



Предисловие и система обозначений

Более или менее точно можно сказать, когда появился современный ответ на вопрос: «Что такое геометрия?» В октябре 1872 года Феликс Клейн¹ написал «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» и 7 декабря в Эрлангенском университете сделал по этой работе доклад, который читался при вступлении нового профессора в должность. Юному профессору было тогда всего 23 года, а его доклад вошел в историю математики как «Эрлангенская программа Клейна». С тех пор считают, что геометрия плоскости α (или пространства \mathbb{P}_3) — это группа (G, \circ) преобразований плоскости α (соответственно \mathbb{P}_3). Относительно (G, \circ) свойство называется геометрическим, если оно сохраняется каждым $f \in G$. Во второй главе мы изучим «школьную» геометрию (D_3, \circ) , группу движений пространства, и с помощью теорем о композициях полностью опишем структуру (D_3, \circ) . В этой геометрии набор геометрических свойств огромен: «быть прямой», «иметь объем, равный 1», «пересекаться под прямым углом», «быть дельтоидом²», «быть парой параллельных плоскостей» и т.д. В этой же главе мы немного расширим горизонты до геометрии (Sim_3, \circ) , группы всех подобий пространства, и докажем с помощью неподвижных точек и алгебры векторов теорему о трех центрах гомотетий. Кстати, в (Sim_3, \circ) свойство фигуры «иметь объем, равный 1» геометрическим уже не будет, но «отношение объемов двух фигур равно π » по-прежнему будет сохраняться любым $f \in \text{Sim}_3$.

Первая глава посвящена выпуклости — важному геометрическому свойству. В этой главе мы докажем относительно «свежие» результаты — теорему Минковского и теорему Хелли (последняя, например, была доказана в начале двадцатого века). Также мы установим основные факты о выпуклых многогранных углах и докажем теоремы косинусов и синусов для трехгранных углов. Отметим, что выпуклость будет иметь несколько полезных приложений в курсе математического анализа (в исследовании непрерывных функций на отрезке, выпуклых функций на промежутке и поиске достаточных условий существования точек перегиба).

¹Феликс Клейн (1849–1925) — немецкий математик и педагог, ученик Ю. Плюккера; основные работы посвящены неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений, теории эллиптических функций; предложил (1871) модель, реализующую систему аксиом геометрии Лобачевского, тем самым доказав непротиворечивость этой теории; рассматривал группы симметрий многогранников и показал, что ими можно воспользоваться для алгебраического решения некоторых типов уравнений; в топологии построил пример односторонней поверхности без края — «бутылку Клейна».

²Дельтоидом называется четырехугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон.



В третьей главе исследуется связность, которая является настолько общим свойством, что сохраняется даже непрерывными отображениями и является объектом изучения топологии³. Связность присуща всем кривым и поможет нам в доказательстве теоремы Жордана для простой замкнутой ломаной.

В четвертой главе строится «школьная» теория меры — подробно изучаются функции длины, площади и объема, а также три важных множества: спрямляемых кривых, квадратуемых фигур и кубатуемых тел. Интересной частью является теория равносоставленных многоугольников с центральным результатом — теоремой Уоллеса-Бойяи-Гервина. Кроме того, в этой главе мы попробуем решить третью проблему Гильберта о равносоставленных многогранниках, доказав теорему Дена.

Несколько слов о структуре книги. Учебный материал разбит на несколько глав, каждая глава — на параграфы. Нумерация утверждений двойная: номер параграфа и номер утверждения в нем. В редких случаях возникают ссылки на утверждения других глав, в этом случае явно указывается еще и номер главы.

Договоримся о некоторых математических обозначениях и сокращениях, которые будут использоваться в тексте:

\forall — квантор всеобщности, читается «для всех» или «для любых», появился из английского выражения for All, выделенную букву в котором отразили относительно горизонтальной оси;

\exists — квантор существования, читается «существует», появился от английского слова Exist, выделенную букву в котором отразили относительно вертикальной оси;

$\exists!$ — частный случай квантора существования, читается «существует и единственный»;

\Rightarrow — следует;

\Leftrightarrow — тогда и только тогда;

$\&$ — знак конъюнкции, читается как «и»;

\vee — знак дизъюнкции, читается как «или»;

: или | — в записи утверждения является сокращением для «таких, что»;

■ — конец доказательства;

О/п или о/п — сокращение для «От противного» или «от противного», в зависимости от места в предложении;

\nleftrightarrow — противоречие;

³Топология — раздел математики, зародившийся в конце XIX века; в ее основу легли результаты Хаусдорфа, Пуанкаре, Александрова, Урысона, Брауэра и других математиков двадцатого века.



\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} — соответственно множества всех натуральных, целых, рациональных и вещественных (или действительных) чисел;

\in — знак принадлежности;

\subseteq — знак включения, ставят между множествами в случае, когда множество слева от знака содержится во множестве справа от него, допускаются цепочки включений, например $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;

$\{x : P(x)\}$ — множество всех таких элементов x , для которых выполняется свойство $P(x)$;

\cap — пересечение множеств;

\cup — объединение множеств;

\sum — сумма чисел;

\prod — произведение чисел или множеств.

В следующем примере использования кванторов внимательный читатель распознает аксиому Евклида: $\forall B \forall a \exists ! b : B \in b \ \& \ b \parallel a$.

Критические замечания и конструктивные предложения просьба отправлять по электронной почте math-lyceum-urfu@mail.ru.

Глава 1

Выпуклые множества

1.1. Выпуклые множества на прямой

Напомним, что *фигура* — это произвольное подмножество плоскости или пространства. Фигуры в пространстве также часто называют *телами*. Поэтому в \mathbb{P}_3 слова множество, фигура и тело являются математическими синонимами.

Определение. Множество Φ называется *выпуклым*, если для любых точек $A, B \in \Phi$ следует, что $[AB] \subseteq \Phi$.

Примерами выпуклых множеств являются \emptyset , синглетон $\{A\}$, отрезок $[CD]$, открытый луч $]CD)$, луч $[CD)$, открытая полуплоскость $\overset{\circ}{\alpha}(a, E)$, замкнутая полуплоскость $\alpha(a, E)$, всё пространство \mathbb{P}_3 . В геометрии десятого класса, в теореме об открытой полуплоскости (см. теорему 2.3 первой главы Геометрии 10) среди прочего была проверена выпуклость $\overset{\circ}{\alpha}(a, E)$. Действительно, для любой пары точек $A, B \in \overset{\circ}{\alpha}(a, E)$ следует $[AB] \cap a = \emptyset$, поэтому для любой $X \in [AB]$ также выполняется $[AX] \cap a = \emptyset$, что дает $X \in \overset{\circ}{\alpha}(a, E)$ и $[AB] \subseteq \overset{\circ}{\alpha}(a, E)$. Теперь для проверки выпуклости $\alpha(a, E)$ достаточно только рассмотреть случай $A \in a$ и $B \in \overset{\circ}{\alpha}(a, E)$. Для каждого $X \in]AB[$ следует, что $A \notin [XB]$, поэтому $[XB] \cap a = \emptyset$, $X \in \overset{\circ}{\alpha}(a, E)$, поэтому $[AB] \subseteq \alpha(a, E)$ и $\alpha(a, E)$ — выпуклое множество.

При $A \neq B$ дуплет $\{A, B\}$ выпуклым множеством не является, поэтому выпуклость не сохраняется даже конечными объединениями. Но пересечение выпуклых множеств (в любом количестве) бережно сохранит выпуклость.

Теорема 1.1. Пусть Φ_i — выпуклое множество для любого $i \in I$ и $\Phi = \bigcap_{i \in I} \Phi_i$. Тогда Φ — выпуклая фигура.



Доказательство. Выберем произвольные $A, B \in \Phi$, тогда $A, B \in \Phi_i$ при всех $i \in I$. Из выпуклости Φ_i получим $[AB] \subseteq \Phi_i$ для всех $i \in I$, откуда $[AB] \subseteq \Phi$ и Φ — выпуклая фигура. ■

Треугольник $\triangle ABC$ является частным случаем многоугольника, поэтому, кроме простой замкнутой ломаной $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$, в него входит его внутренняя область. Поскольку $\triangle ABC$ является пересечением трех полуплоскостей $\alpha((AB), C)$, $\alpha((BC), A)$ и $\alpha((CA), B)$, из предыдущей теоремы сразу следует, что $\triangle ABC$ — выпуклая фигура.

Напомним, что порядок \leq на прямой a можно легко задать с помощью \overrightarrow{AB} , где A и B — различные точки прямой a . По определению считают, что $C \leq D$, если $\overrightarrow{CD} \uparrow \overrightarrow{AB}$, при этом прямая a с введенным на ней порядком \leq называется *осью*. Вместо обозначения $C \leq D$ также можно использовать $D \geq C$.

Определение. Пусть \leq — порядок на прямой a , введенный с помощью \overrightarrow{AB} . Непустая фигура $\Phi \subseteq a$ называется *ограниченной сверху* (соответственно *снизу*), если найдется такая точка $M_1 \in a$ ($M_2 \in a$), что при всех $X \in \Phi$ выполнено $X \leq M_1$ ($M_2 \leq X$). При этом точка M_1 (соответственно M_2) называется *верхней* (*нижней*) *границей* Φ . Наименьшая из верхних (соответственно наибольшая из нижних) границ называется *супремумом* (*инфимумом*) фигуры Φ и обозначается $\sup \Phi$ ($\inf \Phi$). Фигура Φ называется *ограниченной*, если она одновременно ограничена и сверху, и снизу.

Теорема 1.2. Пусть \leq — порядок на прямой a , введенный с помощью \overrightarrow{AB} , $\Phi \subseteq a$ и $\Phi \neq \emptyset$. Если Φ ограничена сверху (соответственно снизу), то существует и единственна такая точка $M^* \in a$, что $M^* = \sup \Phi$ ($M^* = \inf \Phi$).

Доказательство. Проверка обоих утверждений одинакова, поэтому далее считаем (б.о.о.), что Φ — ограниченное сверху множество.

I. Существование. Обозначим множество всех верхних границ фигуры Φ через

$$F = \{M \in a : \text{для всех } X \in \Phi \Rightarrow X \leq M\}.$$

Тогда Φ и F — непустые, правильно расположенные¹ на прямой a множества. Воспользуемся аксиомой непрерывности (аксиома V.2 — см. четвертый параграф первой главы геометрии 10) и найдем разделяющую эти два мно-

¹Т.е. для любых $X \in \Phi$ и $M \in F$ выполняется $X \leq M$.



жества точку M^* , т.е. $X \leq M^* \leq M$ при всех $X \in \Phi$ и $M \in F$. Отсюда M^* — наименьшая из верхних границ фигуры Φ , т.е. $M^* = \sup \Phi$.

II. Единственность. О/п: предположим, что существует еще одна точка $N^* \neq M^*$ и $N^* = \sup \Phi$. Из линейности порядка \leq (поскольку верно или $\overrightarrow{M^*N^*} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{M^*N^*} \downarrow \downarrow \overrightarrow{AB}$) следует, что $N^* < M^*$ или $M^* < N^*$. В первом случае получим, что $M^* \neq \sup \Phi$, а во втором — $N^* \neq \sup \Phi$. $\nearrow \nwarrow$.

Определение. Для произвольных $C, D \in a$ промежутком на прямой a называют каждое из следующих множеств: отрезок $[CD]$, полуинтервалы $[CD[$ и $]CD]$, интервал $]CD[$, лучи $[CD)$ и $(CD]$, открытые лучи $]CD)$ и $(CD[$ и вся прямая $a = (CD)$.

Ясно, что при совпадении C и D выполняются равенства $[CD] = \{C\}$ и $]CD[=]CD] = [CD[= \emptyset$. Критерий выпуклости на прямой очень прост: выпуклыми будут только множества из предыдущего определения.

Теорема 1.3. Пусть $\Phi \subseteq a$. Фигура Φ выпукла тогда и только тогда, когда она является промежутком.

Доказательство. \Rightarrow) При $\Phi = \emptyset$ выполняется $\Phi =]CC[$, поэтому далее считаем, что $\Phi \neq \emptyset$. Введем на a порядок \leq с помощью базисного для этой прямой вектора \overrightarrow{AB} и для сокращения количества рассматриваемых случаев примем только на время доказательства этой теоремы следующие две договоренности. Если фигура Φ не ограничена сверху, то будем считать, что $\sup \Phi = \infty$ и $\infty \notin \Phi$. Если фигура Φ не ограничена снизу, то будем считать, что $\inf \Phi = -\infty$ и $-\infty \notin \Phi$. Теперь для любой непустой фигуры $\Phi \subseteq a$ определены $\sup \Phi$, $\inf \Phi$ и возможны следующие четыре случая:

- | | |
|--|--|
| | <ol style="list-style-type: none"> 1) $\inf \Phi \in \Phi$, $\sup \Phi \in \Phi$; 2) $\inf \Phi \in \Phi$, $\sup \Phi \notin \Phi$; 3) $\inf \Phi \notin \Phi$, $\sup \Phi \in \Phi$; 4) $\inf \Phi \notin \Phi$, $\sup \Phi \notin \Phi$. |
|--|--|

Рис. 1

Достаточно проверить, что будут выполняться (соответственно каждому случаю) равенства: $\Phi = [\inf \Phi; \sup \Phi]$, $\Phi =]\inf \Phi; \sup \Phi[$, $\Phi =]\inf \Phi; \sup \Phi]$ или $\Phi = [\inf \Phi; \sup \Phi[$. Б.о.о. рассмотрим только случай (3). Обозначим через $N^* = \inf \Phi$ (в том числе возможно, что $N^* = -\infty$), $V^* = \sup \Phi$ и докажем, что $\Phi =]N^*V^*]$, проверив включения множеств в обе стороны.

Для каждого $X \in \Phi$ следует, что $X \neq N^*$, поэтому $N^* < X \leq V^*$ и $\Phi \subseteq]N^*V^*]$.



Теперь рассмотрим произвольную точку $Y \in]N^*V^*]$ (рис. 1). Учитывая, что $N^* < Y$, точка Y не является нижней границей для Φ , поэтому найдется такая точка $C \in \Phi$, что $C < Y$. Зная, что $V^* \in \Phi$ и Φ — выпуклое множество, из неравенства $C < Y \leq V^*$ получим $Y \in [CV^*] \subseteq \Phi$. Таким образом, мы проверили включение $]N^*V^*] \subseteq \Phi$ и равенство $\Phi =]N^*V^*]$ доказано.

\Leftarrow) очевидно, что отрезки, интервалы, полуинтервалы и вся прямая являются выпуклыми множествами. Из теоремы об открытом луче (теорема 2.2 первой главы геометрии 10) следует, что открытые лучи и обычные лучи являются выпуклыми фигурами. Таким образом, любой промежуток на прямой a — выпуклое множество. ■

1.2. Теорема Хелли

Увеличиваем размерность и переходим к выпуклым множествам на плоскости. Начнем с очень простого результата.

Лемма 2.1. Пусть Φ — выпуклое множество. Если $A, B, C \in \Phi$ и $C \notin (AB)$, то $\Delta ABC \subseteq \Phi$.

Доказательство. Из выпуклости Φ сразу следует, что $[BC] \subseteq \Phi$. Рассмотрим произвольную точку $X \in [BC]$ (рис. 2). Уже доказано, что $X \in \Phi$, тогда, еще раз используя выпуклость Φ , получим, что $[AX] \subseteq \Phi$, отсюда

$$\Delta ABC = \bigcup_{X \in [BC]} [AX] \subseteq \Phi.$$

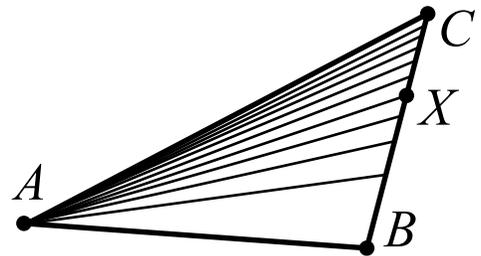


Рис. 2

Следующее утверждение, доказанное в 1913 году, называется *теоремой Хелли² для плоскости*. ■

²Эдуард Хелли (1884–1943) — австрийский математик, один из основоположников функционального анализа; после окончания Венского университета посещал семинары Клейна, Гильберта, Рунге и Минковского в Геттингенском университете; в начале Первой мировой войны был призван в армию и в 1915 году, получив тяжелое ранение, попал в русский плен и последние годы войны провел в Тобольске и Уссурийске, продолжая активно заниматься наукой; предвосхитил развитие функционального анализа, первым доказав теорему Хана-Банаха, теорему о продолжении линейного оператора; ввел понятия нормированного пространства и двойственности в линейном анализе.



Теорема 2.2. Пусть $\Phi_i \subseteq \alpha$, Φ_i — выпуклое множество для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Если для любых натуральных индексов $i, j, k \leq n$ выполняется $\Phi_i \cap \Phi_j \cap \Phi_k \neq \emptyset$, то и $\Phi = \bigcap_{i=1}^n \Phi_i \neq \emptyset$.

Доказательство. Будем проверять справедливость утверждения индукцией по числу множеств.

Б.И. Случай $n = 3$ очевиден, рассмотрим $n = 4$. По условию теоремы «потройные» пересечения выпуклых множеств $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ непусты, что позволяет нам выбрать $A_{123} \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3$, $A_{124} \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_4$, $A_{134} \in \Phi_1 \cap \Phi_3 \cap \Phi_4$ и $A_{234} \in \Phi_2 \cap \Phi_3 \cap \Phi_4$. Обозначим эти точки так, чтобы они были вершинами четырехугольника, т.е. $\{B, C, D, E\} = \{A_{123}, A_{124}, A_{134}, A_{234}\}$ и $BCDE$ — четырехугольник (при совпадении хотя бы двух точек, например $A_{123} = A_{134}$, мы сразу получим, что эта «двойная» точка лежит в Φ). Четырехугольник $BCDE$ может быть выпуклым или нет.

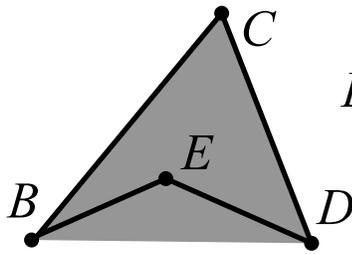


Рис. 3

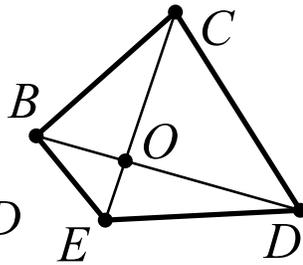


Рис. 4

1 случай: $BCDE$ — невыпуклый четырехугольник. Тогда одна из его вершин принадлежит треугольнику, образованному тремя оставшимися вершинами (рис. 3). Б.о.о. считаем, что $E \in \triangle BCD$ и $B = A_{134}$, $C = A_{234}$, $D = A_{123}$, $E = A_{124}$. Заметим, что индексы точек у B , C и D указывают на то, что все

они лежат в фигуре Φ_3 . Применяя предыдущую лемму к выпуклой фигуре Φ_3 , получим, что $E \in \triangle BCD \subseteq \Phi_3$. Но $E = A_{124}$ уже лежит в $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_4$, поэтому $E \in \Phi$ и $\Phi \neq \emptyset$.

2 случай: $BCDE$ — выпуклый четырехугольник. Пусть O — точка пересечения его диагоналей (рис. 4). Б.о.о. считаем, что $B = A_{234}$, $C = A_{123}$, $D = A_{134}$, $E = A_{124}$. Заметим, что индексы точек у B и D указывают на то, что обе они лежат в фигурах Φ_3 и Φ_4 , поэтому $B, D \in \Phi_3 \cap \Phi_4$ и $[BD] \subseteq \Phi_3 \cap \Phi_4$ (из теоремы 1.1 следует, что $\Phi_3 \cap \Phi_4$ — выпуклое множество). Отсюда $O \in \Phi_3 \cap \Phi_4$. Аналогично $O \in [CE] \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2$. Таким образом, $O \in \Phi$ и $\Phi \neq \emptyset$.

Ш.И. Предположим, что утверждение верно для n множеств и рассмотрим $n+1$ выпуклых множеств $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}$ с непустыми «потройными» пересечениями. Первые n множеств пересечем с последним множе-



ством и обозначим через $F_i = \Phi_i \cap \Phi_{n+1}$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Проверим, что набор множеств F_1, F_2, \dots, F_n удовлетворяет предположению индукции. Выпуклость F_i сразу следует из теоремы 1.1. Теперь рассмотрим произвольную тройку индексов $i, j, k \leq n$. База индукции, примененная к четверке выпуклых множеств Φ_i, Φ_j, Φ_k и Φ_{n+1} , дает нам

$$\emptyset \neq \Phi_i \cap \Phi_j \cap \Phi_k \cap \Phi_{n+1} = F_i \cap F_j \cap F_k.$$

Осталось воспользоваться предположением индукции и получить, что

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (\Phi_i \cap \Phi_{n+1}) = \bigcap_{j=1}^{n+1} \Phi_j.$$

■

Упражнения

1. Покажите, что в теореме Хелли для плоскости нельзя потройные непустые пересечения заменить требованием непустоты всех попарных пересечений.
2. Покажите, что в теореме Хелли для плоскости нельзя опустить условие выпуклости множеств.
3. Постройте пример счетного числа выпуклых множеств с пустым пересечением, но все конечные наборы этих множеств имеют непустое пересечение (т.е. в общем случае теорему Хелли не удастся обобщить на бесконечное число множеств).
4. Докажите теорему Хелли для прямой: пусть $\Phi_i \subseteq a$, Φ_i — выпуклое множество для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Если для любых натуральных индексов $i, j \leq n$ выполняется $\Phi_i \cap \Phi_j \neq \emptyset$, то и $\Phi = \bigcap_{i=1}^n \Phi_i \neq \emptyset$.
5. Прямоугольники $P_i \subseteq \alpha$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) расположены «просто», если найдется такая прямая $a \subseteq \alpha$, что в каждом из этих прямоугольников найдется сторона, параллельная прямой a . Докажите, что если «просто» расположенные прямоугольники P_1, P_2, \dots, P_n попарно пересекаются (т.е. $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ при всех $i, j \leq n$), то $\bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$.
Покажите также, что требование «простоты» нельзя опустить.
6. Докажите теорему Хелли для пространства: пусть $\Phi_i \subseteq \mathbb{P}_3$, Φ_i — выпуклое множество для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Если для любых натуральных индексов $i, j, k, l \leq n$ выполняется $\Phi_i \cap \Phi_j \cap \Phi_k \cap \Phi_l \neq \emptyset$, то и $\Phi = \bigcap_{i=1}^n \Phi_i \neq \emptyset$.
7. Задача о трансверсали. Будем считать, что отрезок $[AB]$ параллелен прямой a , если $A = B$ или $A \neq B$ и $(AB) \parallel a$. Конечное семейство отрезков называется *стаей*,



если найдется прямая, которой параллельны сразу все отрезки из этого семейства. Стая $\{[A_i B_i] : i \leq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) называется *удачной*, если для любой тройки индексов $i, j, k \leq n$ найдется прямая a_{ijk} , которая пересекает отрезки $[A_i B_i]$, $[A_j B_j]$ и $[A_k B_k]$. Докажите, что для любой удачной стаи $\{[A_i B_i] : i \leq n\}$ найдется такая прямая³ b^* , которая пересекает все отрезки этой стаи.

1.3. Выпуклые фигуры на плоскости

В этом параграфе точки и фигуры расположены в некоторой фиксированной плоскости α .

Определение. Пусть $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Для произвольной точки $A \in \alpha$ ее ε -окрестностью называется множество $O_\varepsilon(A) = \{X \in \alpha : |AX| < \varepsilon\}$.

Для произвольной фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ с помощью ε -окрестностей определим три различных типа точек.

Определение. Точка $A \in \Phi$ называется внутренней точкой фигуры Φ , если существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$. Множество всех внутренних точек фигуры Φ обозначается через $\text{Int } \Phi$ или $\overset{\circ}{\Phi}$.

Определение. Точка $A \in \alpha$ называется граничной точкой Φ , если для любого $\varepsilon > 0$ одновременно выполняются два условия: $O_\varepsilon(A) \cap \Phi \neq \emptyset$ и $O_\varepsilon(A) \cap (\alpha \setminus \Phi) \neq \emptyset$. Множество всех граничных точек фигуры Φ обозначается через $\text{Bnd } \Phi$.

Определение. Точка $A \in \alpha$ называется внешней точкой фигуры Φ , если существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется $O_\varepsilon(A) \cap \Phi = \emptyset$ (что равносильно $O_\varepsilon(A) \subseteq \alpha \setminus \Phi$ или $A \in \text{Int}(\alpha \setminus \Phi)$). Множество всех внешних точек фигуры Φ обозначается через $\text{Ext } \Phi$.

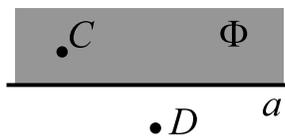


Рис. 5

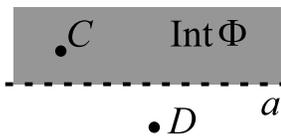


Рис. 6

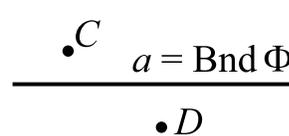


Рис. 7

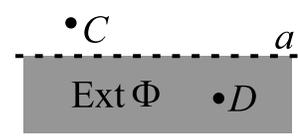


Рис. 8

Пример 1. Пусть $a \subseteq \alpha$ и точки $C, D \in \alpha$ лежат по разные стороны от прямой a . Рассмотрим полуплоскость $\Phi = \alpha(a, C)$ (рис. 5). Тогда $\text{Int } \Phi = \overset{\circ}{\alpha}(a, C)$ (рис. 6), $\text{Bnd } \Phi = a$ (рис. 7) и $\text{Ext } \Phi = \overset{\circ}{\alpha}(a, D)$ (рис. 8).

³Эта прямая называется трансверсалью.



Следствие. Для любой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ выполняется:

- 1) $\text{Int } \Phi \cup \text{Bnd } \Phi \cup \text{Ext } \Phi = \alpha$;
- 2) $\text{Int } \Phi \cap \text{Bnd } \Phi = \text{Int } \Phi \cap \text{Ext } \Phi = \text{Ext } \Phi \cap \text{Bnd } \Phi = \emptyset$.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) сразу следуют из трех предыдущих определений. ■

Среди всех подмножеств плоскости выделим несколько важных семейств. Начнем с открытых множеств.

Определение. Множество $V \subseteq \alpha$ называется открытым, если $V = \text{Int } V$, т.е. для каждой точки $A \in V$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $O_\varepsilon(A) \subseteq V$.

Примерами открытых множеств являются \emptyset , α , $\overset{\circ}{\alpha}(a, A)$ (поэтому неслучайно множество $\overset{\circ}{\alpha}(a, A)$ в десятом классе называлось открытой полуплоскостью). Другие примеры и некоторые важные свойства открытых множеств перечислим в следующей теореме.

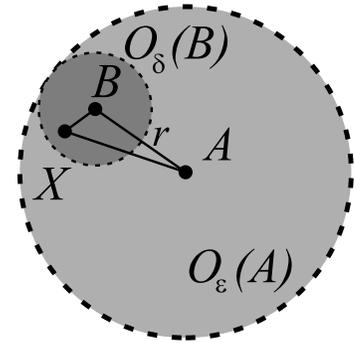


Рис. 9

Теорема 3.1. 1) для любой точки $A \in \alpha$ и $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(A)$ является открытым;

2) для любой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ множества $\text{Int } \Phi$ и $\text{Ext } \Phi$ открыты;

3) если для любого индекса $i \in I$ множество V_i открыто, то и $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ также открыто (т.е. быть открытым множеством сохраняется любыми объединениями);

4) если для любого натурального индекса $i \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) множество V_i открыто, то и $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$ также открыто (т.е. быть открытым множеством сохраняется конечными пересечениями).

Доказательство. 1) для произвольной точки $B \in O_\varepsilon(A)$ выполняется $|BA| = r < \varepsilon$, поэтому $\delta = \varepsilon - r > 0$. Докажем, что $O_\delta(B) \subseteq O_\varepsilon(A)$ (рис. 9). Для любой точки $X \in O_\delta(B)$ воспользуемся неравенством треугольника: $|XA| \leq |XB| + |BA| = |XB| + r < \delta + r = \varepsilon$. Поэтому $X \in O_\varepsilon(A)$, а также $O_\delta(B) \subseteq O_\varepsilon(A)$ и $B \in \text{Int } O_\varepsilon(A)$. Мы проверили, что $\text{Int } O_\varepsilon(A) = O_\varepsilon(A)$, т.е. $O_\varepsilon(A)$ — открытое множество.

2) выберем произвольную точку $A \in \text{Int } \Phi$ и по определению найдем такую окрестность $O_\varepsilon(A)$, для которой $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$. Докажем, что для этой же окрестности справедливо более сильное включение $O_\varepsilon(A) \subseteq \text{Int } \Phi$.



Мы уже знаем, что $O_\varepsilon(A)$ — открытое множество, поэтому для произвольной точки $B \in O_\varepsilon(A)$ найдется такая окрестность $O_\delta(B)$, для которой $O_\delta(B) \subseteq O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$, откуда $B \in \text{Int } \Phi$. Таким образом, $O_\varepsilon(A) \subseteq \text{Int } \Phi$ и $\text{Int } \Phi$ — открытое множество. Аналогично доказывается открытость множества $\text{Ext } \Phi$.

3) для каждой точки $A \in V$ найдется индекс $i \in I$, для которого $A \in V_i$. Используя открытость множества V_i , найдем такую $O_\varepsilon(A)$, для которой $O_\varepsilon(A) \subseteq V_i$. Тогда $O_\varepsilon(A) \subseteq V$ и V — открытое множество.

4) рассмотрим произвольную точку $A \in V = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Из определения пересечения множеств и открытости каждого из этих множеств получим, что для всех $i \leq n$ выполнено $A \in V_i$ и найдется такое число $\varepsilon_i > 0$, что $O_{\varepsilon_i}(A) \subseteq V_i$. Положим $\varepsilon = \min_{i=1}^n \varepsilon_i$. Для этого числа верны соотношения: $\varepsilon > 0$ и $O_\varepsilon(A) \subseteq V_i$ для всех натуральных $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Отсюда $O_\varepsilon(A) \subseteq V$ и V — открытое множество. ■

Пример 2. Покажем, что в последнем утверждении предыдущей теореме требование конечности множества индексов существенно. Для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ пусть $\varepsilon_n = 1/n > 0$ и рассмотрим $V_n = O_{\varepsilon_n}(A)$ для некоторой точки $A \in \alpha$. Тогда $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_{\varepsilon_n}(A) = \{A\}$ — синглетон, который открытым множеством не является. Таким образом, пересечение уже счетного числа открытых множеств может оказаться не открытым. Несложно проверить, что при $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(A)$ содержит бесконечное число точек и \emptyset — единственное конечное открытое множество на плоскости⁴.

Определение. Множество $F \subseteq \alpha$ называется замкнутым, если его дополнение $\alpha \setminus F$ является открытым множеством.

В следующем утверждении установим основные свойства замкнутых множеств.

Теорема 3.2. 1) множество $F \subseteq \alpha$ является замкнутым тогда и только тогда, когда $\text{Vnd } F \subseteq F$;

2) если для любого индекса $i \in I$ множество F_i замкнуто, то и $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ также замкнуто (т.е. быть замкнутым множеством сохраняется любыми пересечениями);

⁴В геометрии рассматривается стандартная функция расстояния (метрика) между точками, а о произвольных метриках можно прочитать в курсе математического анализа для 11-го класса.



3) если для любого натурального индекса $i \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) множество G_i замкнуто, то и $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ также замкнуто (т.е. быть замкнутым множеством сохраняется конечными объединениями).

Доказательство. 1) \Rightarrow) пусть F замкнуто. Выберем произвольную точку $A \in V = \alpha \setminus F$. Из определения замкнутого множества сразу следует, что V — открытое множество, поэтому найдется такая окрестность $O_\varepsilon(A)$, что $O_\varepsilon(A) \subseteq V = \alpha \setminus F$, т.е. $O_\varepsilon(A) \cap F = \emptyset$ и $A \notin \text{Bnd } F$. Таким образом, во множестве $\alpha \setminus F$ нет ни одной граничной точки F и $\text{Bnd } F \subseteq F$.

\Leftarrow) если $\text{Bnd } F \subseteq F$, то $F \cup \text{Bnd } F = F$. Очевидно также, что $\text{Int } F \subseteq F$ и $F \cap \text{Ext } F = \emptyset$, поэтому $\text{Int } F \cup \text{Bnd } F \subseteq F$ и отмеченное ранее равенство $\alpha = \text{Int } F \cup \text{Bnd } F \cup \text{Ext } F$ теперь можно переписать в виде $\text{Ext } F = \alpha \setminus F$. Из предыдущей теоремы следует, что $\text{Ext } F$ открыто, поэтому F — замкнутое множество.

2) и 3) в теории множеств (см. вторую главу Алгебры 10) были установлены законы де Моргана, по которым

$$\alpha \setminus F = \alpha \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (\alpha \setminus F_i) \quad \text{и} \quad \alpha \setminus G = \alpha \setminus \bigcup_{i=1}^n G_i = \bigcap_{i=1}^n (\alpha \setminus G_i).$$

Применяя пункты (3) и (4) предыдущей теоремы, мы получим, что множества $\alpha \setminus F$ и $\alpha \setminus G$ открыты, поэтому F и G — замкнутые множества. ■

Введем еще один тип подмножеств плоскости.

Определение. Фигура $\Phi \subseteq \alpha$ называется ограниченной, если существует точка $X_0 \in \alpha$ и существует хотя бы одна окрестность $O_\varepsilon(X_0)$ этой точки, для которой верно включение $\Phi \subseteq O_\varepsilon(X_0)$.

Пример 3. Любое конечное подмножество плоскости ограничено. Действительно, для $\Phi = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) можно взять в качестве $\varepsilon = \max_{i=2}^n |A_1 A_i| + 1$, тогда $\Phi \subseteq O_\varepsilon(A_1)$. Отрезок $[AB]$ также является ограниченным множеством, поскольку для $\varepsilon = |AB| + 1$ будет выполняться $[AB] \subseteq O_\varepsilon(A)$.

Свойства открытости, замкнутости и ограниченности на плоскости между собой никак не связаны. Для доказательства этого утверждения построим восемь примеров, объединив их в следующую таблицу. В этой таблице знак «+» (соответственно «−») указывает на выполнение (отсутствие) у фигуры



данного свойства. Напомним, что через $[AB[$ мы обозначаем полуинтервал, в который не входит конец B , а через $]AB)$ мы обозначали открытый луч, в который не входит вершина A .

Открытость	Замкнутость	Ограниченность	Пример фигуры
+	+	+	\emptyset
+	+	-	α
+	-	+	$O_\varepsilon(A)$
+	-	-	$\overset{\circ}{\alpha}(a, A)$
-	+	+	$\{A\}$
-	+	-	a
-	-	+	$[AB[$ при $A \neq B$
-	-	-	$]AB)$ при $A \neq B$

Лемма 3.3. Пусть Φ — замкнутое и выпуклое подмножество плоскости α . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $A, B \in \text{Int } \Phi$, то $[AB] \subseteq \text{Int } \Phi$;
- 2) если $A \in \text{Int } \Phi$ и $B \in \text{Bnd } \Phi$, то $[AB[\subseteq \text{Int } \Phi$;
- 3) если $A, B \in \text{Bnd } \Phi$, то $[AB] \subseteq \text{Bnd } \Phi$ или $]AB[\subseteq \text{Int } \Phi$.

Доказательство. 1) из условия $A, B \in \text{Int } \Phi$ следует существование $O_{\varepsilon_1}(A)$ и $O_{\varepsilon_2}(B)$, для которых верно включение $O_{\varepsilon_1}(A), O_{\varepsilon_2}(B) \subseteq \Phi$. Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, тогда также верно, что $O_\varepsilon(A), O_\varepsilon(B) \subseteq \Phi$. Теперь рассмотрим (выделенную цветом на рис. 10) фигуру

$$V = \bigcup \{ [XY] : X \in O_\varepsilon(A), Y \in O_\varepsilon(B) \}.$$

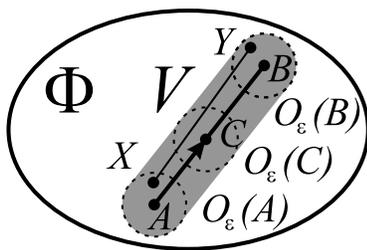


Рис. 10

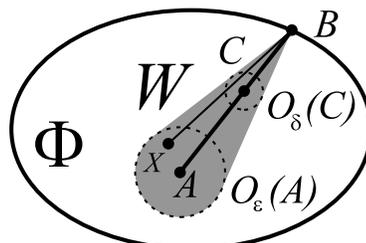


Рис. 11

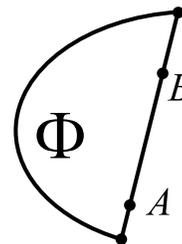


Рис. 12

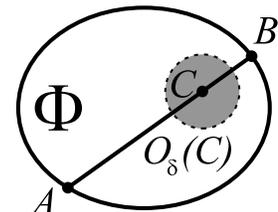


Рис. 13

Учитывая $X, Y \in \Phi$ и выпуклость фигуры Φ , приходим к включениям $[XY] \subseteq \Phi$ и $V \subseteq \Phi$. Выберем произвольную точку $C \in [AB]$ и заметим, что

$$O_\varepsilon(C) = T_{\vec{AB}}(O_\varepsilon(A)) \subseteq V \subseteq \Phi,$$



где $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$. Отсюда $C \in \text{Int } \Phi$ и $[AB] \subseteq \text{Int } \Phi$.

2) из условия $A \in \text{Int } \Phi$ следует существование $O_\varepsilon(A)$, для которой верно включение $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$. Рассмотрим фигуру (рис. 11)

$$W = \bigcup \{ [XB] : X \in O_\varepsilon(A) \}.$$

Учитывая $X, B \in \Phi$ (так как Φ замкнуто, то по первому утверждению предыдущей теоремы следует $B \in \Phi$) и выпуклость фигуры Φ , приходим к включениям $[XB] \subseteq \Phi$ и $W \subseteq \Phi$. Выберем произвольную точку $C \in [AB[$ и заметим, что

$$O_\delta(C) = H_B^k(O_\varepsilon(A)) \subseteq W \subseteq \Phi,$$

где H_B^k — гомотетия с центром в точке B и коэффициентом $k = |BC|/|BA|$. Отсюда $C \in \text{Int } \Phi$ и $[AB[\subseteq \text{Int } \Phi$.

3) из замкнутости и выпуклости фигуры Φ следует, что $A, B \in \Phi$ и $[AB] \subseteq \Phi$. Поэтому ни одна точка отрезка $[AB]$ не может быть внешней для фигуры Φ . Если все точки отрезка $[AB]$ являются граничными для Φ (рис. 12), то проверено включение $[AB] \subseteq \text{Bnd } \Phi$. Во всех остальных случаях на интервале $]AB[$ найдется хотя бы одна точка $C \in \text{Int } \Phi$ (рис. 13). Дважды применяя (2), мы получим, что $]AC[\subseteq \text{Int } \Phi$ и $]CB[\subseteq \text{Int } \Phi$. Объединяя эти два полуинтервала, заключаем, что $]AB[\subseteq \text{Int } \Phi$.

В следующем утверждении нет никаких ограничений на фигуру Φ . Формально утверждение остается верным даже в случае $\Phi = \emptyset$ или $\text{Ext } \Phi = \emptyset$.

Лемма 3.4. *Для любого множества $\Phi \subseteq \alpha$ и любых двух точек $A \in \Phi$ и $B \in \text{Ext } \Phi$ найдется хотя бы одна точка C , которая удовлетворяет условию $C \in [AB] \cap \text{Bnd } \Phi$.*

Доказательство. Очевидно, что $A \neq B$, поэтому на прямой $a = (AB)$ можно ввести порядок \leq с помощью вектора \overrightarrow{AB} . Рассмотрим фигуру $F = [AB] \cap \Phi$ — ограниченное (так как содержится в отрезке) непустое (поскольку содержит точку A) подмножество прямой a , поэтому по теореме 1.2 найдется точка $C = \sup F$ (рис. 14). Докажем, что C — искомая. Для

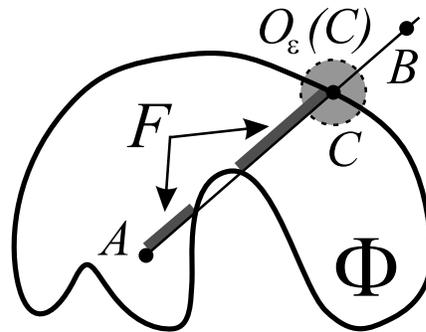


Рис. 14

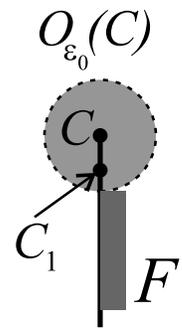


Рис. 15



произвольной окрестности $O_\varepsilon(C)$ сначала проверим, что $O_\varepsilon(C) \cap F \neq \emptyset$. О/п: нашлось такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $O_{\varepsilon_0}(C) \cap F = \emptyset$ (рис. 15). Выберем точку $C_1 \in O_{\varepsilon_0}(C) \cap [AC]$ так, чтобы $C_1 \neq C$. Но тогда $C_1 < C$, $C_1 \notin F$ и C_1 также является верхней границей для множества F , что противоречит условию $C = \sup F$. Поскольку $B \in \text{Ext } \Phi$, найдется такая окрестность $O_\delta(B)$, для которой $O_\delta(B) \cap \Phi = \emptyset$, поэтому $O_\delta(B) \cap F = \emptyset$. Как уже показано выше, для C такой окрестности не найдется, поэтому $B \neq C$. Из того, что C является верхней границей множества F также следует, что $]CB]$ не содержит ни одной точки фигуры Φ , поэтому целиком содержится в $\alpha \setminus \Phi$. Этот полуинтервал пересекает любая $O_\varepsilon(C)$, поэтому $O_\varepsilon(C) \cap (\alpha \setminus \Phi) \neq \emptyset$. Мы проверили, что любая окрестность точки C пересекает и фигуру Φ , и множество $\alpha \setminus \Phi$, поэтому $C \in \text{Vnd } \Phi$. ■

Следующее утверждение будем называть *первым критерием выпуклости на плоскости* в классе замкнутых ограниченных множеств с непустой внутренностью.

Теорема 3.5. Пусть Φ — замкнутое, ограниченное подмножество плоскости α и $\text{Int } \Phi \neq \emptyset$. Тогда Φ — выпуклая фигура тогда и только тогда, когда для любой точки $A \in \text{Int } \Phi$ и любого луча $[AB)$ ($A \neq B$) луч $[AB)$ пересекает границу фигуры Φ ровно в одной точке.

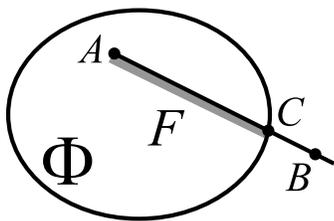


Рис. 16

Доказательство. \Rightarrow) пусть Φ — выпуклое множество, тогда обозначим через $F = \Phi \cap [AB)$ (рис. 16). Из теорем 1.1 и 3.2 следует, что F — выпуклое замкнутое подмножество плоскости α (нетрудно заметить, что луч $[AB)$ является выпуклой и замкнутой фигурой в α). Из $F \subseteq \Phi$ следует ограниченность фигуры F . Таким образом, F — выпуклое ограниченное подмножество прямой $a = (AB)$. По теореме 1.3 получим, что F может быть отрезком, интервалом или полуинтервалом. Но два последних множества не замкнуты в α (то, что $F \neq \emptyset$ сразу следует из $A \in F$), поэтому F — отрезок и его можно обозначить через $[AC]$. Осталось проверить, что $\{C\} = [AB) \cap \text{Vnd } \Phi$. Поскольку $C \in F \subseteq \Phi$, получим $C \in O_\varepsilon(C) \cap \Phi$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому $O_\varepsilon(C) \cap \Phi \neq \emptyset$. Б.о.о. можно считать, что C лежит между A и B (иначе по аксиоме П.2 можно найти такую точку $B_1 \in a$, что C лежит между A и B_1 и далее вместо B использовать B_1). Тогда $]CB] \cap \Phi = \emptyset$, т.е. $]CB] \subseteq (\alpha \setminus \Phi)$. Очевидно, что для любой

лучим, что F может быть отрезком, интервалом или полуинтервалом. Но два последних множества не замкнуты в α (то, что $F \neq \emptyset$ сразу следует из $A \in F$), поэтому F — отрезок и его можно обозначить через $[AC]$. Осталось проверить, что $\{C\} = [AB) \cap \text{Vnd } \Phi$. Поскольку $C \in F \subseteq \Phi$, получим $C \in O_\varepsilon(C) \cap \Phi$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому $O_\varepsilon(C) \cap \Phi \neq \emptyset$. Б.о.о. можно считать, что C лежит между A и B (иначе по аксиоме П.2 можно найти такую точку $B_1 \in a$, что C лежит между A и B_1 и далее вместо B использовать B_1). Тогда $]CB] \cap \Phi = \emptyset$, т.е. $]CB] \subseteq (\alpha \setminus \Phi)$. Очевидно, что для любой



$O_\varepsilon(C)$ справедливо $O_\varepsilon(C) \cap]CB] \neq \emptyset$, поэтому $O_\varepsilon(C) \cap (\alpha \setminus \Phi) \neq \emptyset$. Итак, любая окрестность точки C пересекает и фигуру Φ , и множество $\alpha \setminus \Phi$, откуда $C \in \text{Bnd } \Phi$. Докажем, что других точек в пересечении $[AB) \cap \text{Bnd } \Phi$ нет. О/п: нашлась еще одна точка $C_1 \in [AB) \cap \text{Bnd } \Phi$. Пусть \leq — порядок на прямой a , порожденный \overrightarrow{AB} и б.о.о. считаем, что $C < C_1$. Условия $A \in \text{Int } \Phi$, $C_1 \in \text{Bnd } \Phi$ и второе утверждение леммы 3.3 дают $C \in \text{Int } \Phi$, что противоречит условию $C \in \text{Bnd } \Phi$.

\Leftarrow) о/п: Φ не является выпуклым множеством, поэтому найдутся две точки $A, B \in \Phi$, для которых не выполняется условие $[AB] \subseteq \Phi$. Другими словами, найдется точка $C \in [AB) \cap (\alpha \setminus \Phi)$. Из замкнутости Φ сразу следует, что $\text{Bnd } \Phi \subseteq \Phi$, поэтому $C \in \text{Ext } \Phi$ и существует $O_\varepsilon(C)$, для которой $O_\varepsilon(C) \cap \Phi = \emptyset$. Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: хотя бы одна из двух точек — A или B — является внутренней для фигуры Φ . Б.о.о. $A \in \text{Int } \Phi$ (рис. 17). Применяя лемму 3.4, найдем две точки $D \in \text{Bnd } \Phi \cap [AC[$ и $E \in \text{Bnd } \Phi \cap]CB]$. Учитывая, что полуинтервалы $[AC[$ и $]CB]$ не пересекаются, получим, что $D \neq E$ и $\{D, E\} \subseteq \text{Bnd } \Phi \cap [AB)$. Это противоречит условию односточечности пересечения $\text{Bnd } \Phi \cap [AB)$.

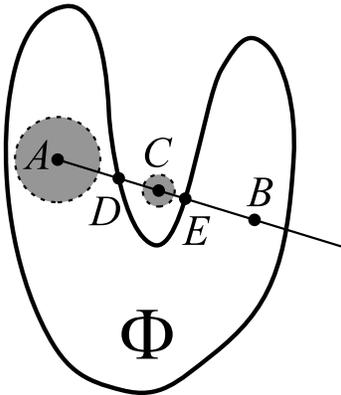


Рис. 17

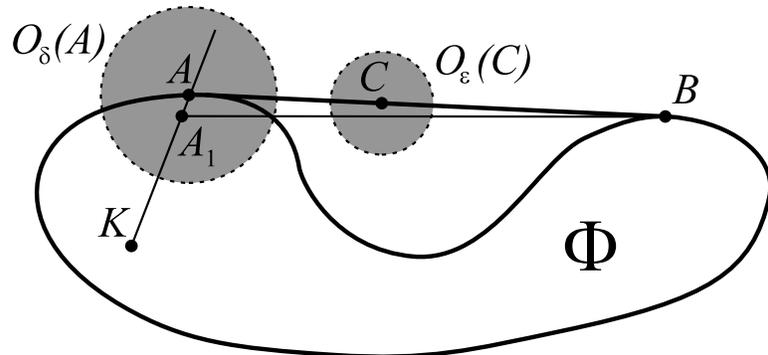


Рис. 18

2-й случай: $A, B \in \text{Bnd } \Phi$. С помощью гомотетии H_B^k переведем $O_\varepsilon(C)$ в окрестность $O_\delta(A)$ точки A (рис. 18). Для этого положим $k = |AB|/|BC|$ и $\delta = \varepsilon \cdot k$. Вспомним, что $\text{Int } \Phi \neq \emptyset$, поэтому найдется точка $K \in \text{Int } \Phi$. Рассмотрим луч $[KA)$. По условию этот луч пересекает $\text{Bnd } \Phi$ только в точке A , поэтому на интервале $]KA[$ других граничных точек у фигуры Φ нет. Докажем, что на нем нет и внешних точек фигуры Φ . О/п: существует точка $L \in \text{Ext } \Phi \cap]KA[$. Применив лемму 3.4 к точкам K и L , получим,



что на интервале $]KL[$ существует еще одна граничная точка фигуры Φ , отличная от точки A , и пересечение $[KA) \cap \text{Vnd } \Phi$ содержит по крайней мере две различные точки. Это противоречит данному нам условию. Итак, на полуинтервале $[KA[$ нет других граничных точек Φ и внешних точек этой фигуры, поэтому он целиком состоит только из внутренних точек фигуры Φ . Очевидно, что $O_\delta(A) \cap [KA[\neq \emptyset$, поэтому найдется $A_1 \in O_\delta(A) \cap [KA[$. Мы уже знаем, что $A_1 \in \text{Int } \Phi$ и гомотетия гарантирует существование точки из $[A_1B] \cap O_\varepsilon(C)$. Напомним, что $O_\varepsilon(C) \subseteq (\alpha \setminus \Phi)$, поэтому $[A_1B]$ не может целиком содержаться в Φ . Осталось применить первый случай к точкам A_1 , B и получить противоречие. ■

Следствие. Пусть Φ — замкнутое, ограниченное подмножество плоскости α и $\text{Int } \Phi \neq \emptyset$. Тогда Φ — выпуклая фигура тогда и только тогда, когда для любой точки $A \in \text{Int } \Phi$ и любой прямой a , проходящей через точку A , следует, что $a \cap \text{Vnd } \Phi$ содержит ровно две точки.

Доказательство. \Rightarrow) точка A разбивает прямую a на два открытых луча, каждый из которых по предыдущей теореме пересекает границу ровно в одной точке. Очевидно, что полученные точки различны и не совпадают с точкой A , поэтому $|\text{Vnd } \Phi \cap a| = 2$.

\Leftarrow) пусть $A \in \text{Int } \Phi$, рассмотрим произвольный луч $[AB)$. Обозначим через $a = (AB)$, тогда по условию $a \cap \text{Vnd } \Phi = \{C, D\}$ и $C \neq D$. Осталось лишь проверить, что точки C и D расположены на прямой a по разные стороны от точки A (поэтому ровно одна из них попадет на луч $[AB)$). Предположим противное, $A \notin [CD]$. Сначала будем считать, что $C, D \in [AB)$. Обозначим через $[AK)$ луч, противоположный лучу $[AB)$, тогда $[AK) \cap \text{Vnd } \Phi = \emptyset$ и на этом луче, по лемме 3.4 не может быть ни одной внешней точки L для фигуры Φ (иначе на интервале $]AL[$ нашлась бы еще одна граничная для Φ точка). Таким образом, $[AK) \subseteq \Phi$ и фигура Φ не может быть ограниченным множеством. $\nearrow \nwarrow$. Точно так же, в случае $C, D \in [AK)$ мы получим $[AB) \subseteq \Phi$, что противоречит ограниченности Φ . ■

Определение. Пусть $A \in \alpha$, $\Phi \subseteq \alpha$, $\Phi \neq \emptyset$ и $\Phi \neq \{A\}$. Освещением фигуры Φ из точки A называется множество

$$L(A, \Phi) = \bigcup \{ [AX) : X \in \Phi \setminus \{A\} \}.$$



Следствие. Если $\Phi_1 \subseteq \Phi$, $\Phi_1 \neq \emptyset$ и $\Phi_1 \neq \{A\}$, то справедливо включение $L(A, \Phi_1) \subseteq L(A, \Phi)$.

Доказательство. Сразу следует из определения освещения. ■

Понятие освещения можно легко обобщить на случай пространства и использовать при изучении многогранных углов, а мы пока начнем с простых примеров.

Пример 4. Если освещать окружность $\omega = \omega(O, r)$ ($r > 0$) из точки O , то получится вся плоскость: $L(O, \omega) = \alpha$.

Пример 5. При $A \in \text{Int } \Phi$ выполняется, что $L(A, \Phi) = \alpha$. Действительно, если верно включение $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$, то $\omega = \omega(A, \varepsilon/2) \subseteq \Phi$ и $\alpha = L(A, \omega) \subseteq L(A, \Phi) \subseteq \alpha$.

Пример 6. Если освещать окружность $\omega = \omega(O, r)$ ($r > 0$) из точки A , для которой $|OA| = 2r$, то $L(A, \omega)$ является углом величины 60° с вершиной в точке A . Стороны этого угла являются частью касательных из точки A к окружности ω , а луч $[AO)$ — биссектриса этого угла.

Пример 7. При изучении ориентации плоскости (вторая глава Геометрии 10) мы доказали простое свойство обычного угла ABC : если выбрать произвольно точки $A_1 \in]BA)$ и $C_1 \in]BC)$, то $[A_1C_1] \subseteq \angle ABC$ и любой луч $[BX)$, который содержится в $\angle ABC$, пересечет отрезок $[A_1C_1]$. Отсюда следует, что для обычного угла справедливо равенство $\angle ABC = L(B, [A_1C_1])$.

В следующем утверждении изучим основные свойства освещений выпуклых фигур.

Теорема 3.6. Пусть $A \in \alpha$, $\Phi \neq \emptyset$, $\Phi \neq \{A\}$ и Φ — выпуклое подмножество плоскости α . Тогда

- 1) $L(A, \Phi)$ — выпуклое множество;
- 2) если $X_1, Y_1 \in L(A, \Phi) \setminus \{A\}$ и $\widehat{X_1AY_1} < 180^\circ$, то $\angle X_1AY_1 \subseteq L(A, \Phi)$;
- 3) для любой точки $A \in \alpha$ справедливо одно из следующих утверждений:
 - а) найдется такой угол $\angle BAC$, что $\widehat{BAC} \leq 180^\circ$ и $L(A, \Phi) \subseteq \angle BAC$;
 - б) $L(A, \Phi) = \alpha$.

Доказательство. 1) выберем произвольные $X_1, Y_1 \in L(A, \Phi)$ и найдем такие точки $X, Y \in \Phi \setminus \{A\}$, что $X_1 \in [AX)$ и $Y_1 \in [AY)$.

1-й случай: при $Y \in (AX)$ доказательство очевидно, поскольку, освещая из точки A двоеточие $\{X, Y\}$, мы получим либо прямую (AX) (если X и Y лежат по разные стороны от точки A), либо луч $[AX)$. Оба множества выпуклые, поэтому вместе с точками X_1, Y_1 содержат и $[X_1Y_1]$.



2-й случай: $Y \notin (AX)$. Обозначим через $\angle YAX$ обычный угол для одномерного угла $[AX) \cup [AY)$. Из выпуклости фигуры Φ следует, что $[XY] \subseteq \Phi$, поэтому, используя пример 7, получим

$$[X_1Y_1] \subseteq \angle X_1AY_1 = \angle XAY = L(A, [XY]) \subseteq L(A, \Phi).$$

2) следует из только что рассмотренного второго случая утверждения (1).

3) если $L(A, \Phi) = \alpha$, то доказывать нечего, поэтому считаем, что найдется такой луч $[AX)$, что $]AX) \cap \Phi = \emptyset$ (рис. 19). Пусть точка $P_0 \in [AX)$, $|AP_0| = 1$, $\omega_1 = \omega(A, |AP_0|)$ — единичная окружность. Пересечем освещение с этой окружностью и получим $F = \{Y \in \omega_1 : [AY) \cap \Phi \neq \emptyset\}$. Заметим, что фигура F обладает свойством (*): если $C, D \in F$ и $\overset{\frown}{CD} < 180^\circ$, то $\overset{\frown}{CD} \subseteq F$ (под $\overset{\frown}{CD}$ мы понимаем наименьшую из двух дуг окружности ω_1 , на которые ее разбивают точки C и D). Действительно, так как точки $C, D \in L(A, \Phi)$ и $\overset{\frown}{CAD} < 180^\circ$, то по свойству (2) получим включение $\angle CAD \subseteq L(A, \Phi)$, поэтому $\overset{\frown}{CD} = \angle CAD \cap \omega_1 \subseteq F$.

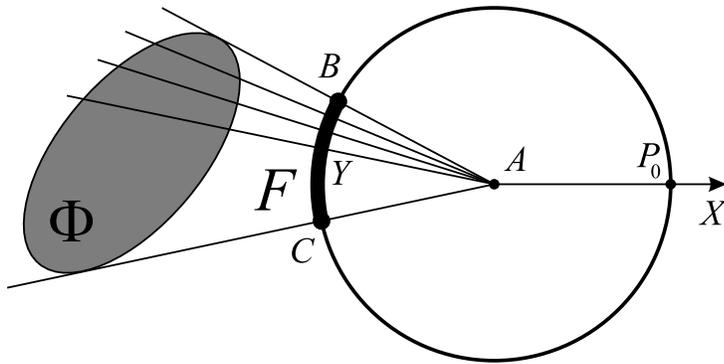


Рис. 19

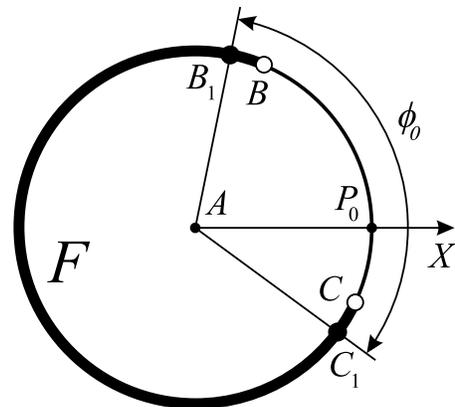


Рис. 20

Введем на ω_1 порядок с помощью положительной ориентации плоскости (см. вторую главу Геометрии 10). Минимальной точкой будет P_0 , а максимальную точку, которая будет концом полной дуги, обозначим через P_0^* . Двойное обозначение одной точки окружности мы выбрали для того, чтобы различить две дуги: $\overset{\frown}{P_0P_0} = \{P_0\}$ — вырожденная дуга, а $\overset{\frown}{P_0P_0^*}$ — полная окружность. В четвертой главе этой книги мы докажем, что между дугами единичной окружности с концом в точке P_0 , отложенными в положительном направлении, и числовым отрезком $[0; 2\pi]$ можно построить сохраняющую порядок биекцию. Кроме того, в третьем параграфе второй главы Анализа 11



доказано, что у любого непустого ограниченного подмножества $G \subseteq \mathbb{R}$ единственным образом определяются $\sup G$ и $\inf G$. Эти два факта позволяют для нашего множества F найти две точки: $B = \inf F$ и $C = \sup F$. Теперь рассмотрим два случая.

1-й случай: дуга \widehat{BC} , которая содержит F , имеет величину не больше 180° (рис. 19). Пусть $\angle BAC$ — центральный угол окружности ω_1 , который опирается на дугу \widehat{BC} , тогда он искомым, поскольку $\widehat{BAC} = \widehat{BC}^\circ \leq 180^\circ$ и $L(A, \Phi) = L(A, F) \subseteq L(A, \widehat{BC}) = \angle BAC$.

2-й случай: дуга \widehat{BC} , которая содержит F , имеет величину строго больше 180° (рис. 20). Пусть $\varepsilon = \widehat{BC}^\circ - 180^\circ > 0$, тогда по свойству супремума и инфимума найдутся такие две точки $B_1, C_1 \in F$, что $\widehat{BC}^\circ - \widehat{B_1C_1}^\circ < \varepsilon/2$, откуда $\widehat{B_1C_1}^\circ > 180^\circ$. Обозначим через φ_0 меньшую из двух дуг, на которые разбивают окружность ω_1 точки B_1 и C_1 (рис. 20). Учитывая, что $B_1, C_1 \in F$ и величина дуги φ_0 меньше 180° , по (*) получим, что $\varphi_0 \subseteq F$ и $P_0 \in L(A, \Phi)$. Откуда $[AX) \cap \Phi \neq \emptyset$, что противоречит выбору этого луча.



Определение. Пусть $a \subseteq \alpha$, $C, D \in \alpha$ и точки C и D лежат по разные стороны от прямой a . Прямая a называется опорной для фигуры Φ , если
 1) $a \cap \Phi \neq \emptyset$;
 2) фигура Φ целиком содержится в $\alpha(a, C)$ или в $\alpha(a, D)$.

Пример 8. Если $\Phi = \triangle ABC$, то через вершины этого треугольника можно провести бесконечно много опорных для Φ прямых. На рис. 21 прямые a_1 и a_2 являются опорными. Через внутреннюю точку стороны треугольника можно провести только одну опорную прямую, она будет содержать сторону этого треугольника (прямая a_3 на рис. 21).

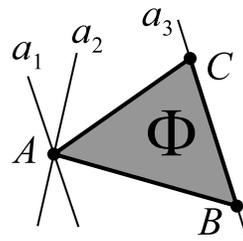


Рис. 21

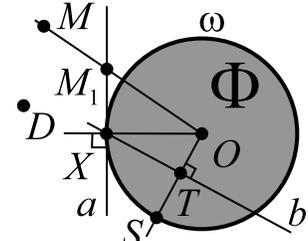


Рис. 22

Пример 9. Пусть $\Phi = K(O, r)$ — круг с центром в точке O радиуса $r > 0$ и $\omega = \omega(O, r)$ является его границей (т.е. $\omega = \text{Bnd } \Phi$). Тогда через каждую точку $X \in \omega$ можно провести единственную опорную для Φ прямую. Пусть a — перпендикуляр к (OX) , проходящий через точку X (рис. 22). Обозначим через D любую точку, лежащую с O по разные сторо-



ны от прямой a . Выберем произвольную точку $M \in \overset{\circ}{\alpha}(a, D)$. Тогда найдется M_1 , внутренняя точка отрезка $[OM]$, для которой $\{M_1\} = a \cap [OM]$. Мы уже знаем, что X — единственная точка на прямой a , на которой достигается расстояние $d(O, a)$, поэтому $|OM| = |OM_1| + |M_1M| \geq r + |M_1M| > r$ (из $M \neq M_1$ следует, что $|M_1M| > 0$). Таким образом, $\Phi \cap \overset{\circ}{\alpha}(a, D) = \emptyset$, откуда $\Phi \subseteq \alpha(a, O)$ и a — опорная к Φ прямая. Для любой другой прямой $b \subseteq \alpha$, проходящей через точку X , следует, что b не перпендикулярна (OX) , поэтому для точки $T = \text{Пр}_b(O)$ выполняется $|OT| < r$ и точки O и S лежат по разные стороны от прямой b , где $\{S\} = [OT] \cap \omega$. В результате, b не может быть опорной прямой для Φ .

Следующее утверждение будем называть *вторым критерием выпуклости* замкнутых ограниченных подмножеств плоскости α , у которых есть внутренние точки. В отличие от первого критерия выпуклости, здесь главными героями будут граничные точки рассматриваемой фигуры.

Теорема 3.7. Пусть Φ — замкнутое, ограниченное подмножество плоскости α и $\text{Int } \Phi \neq \emptyset$. Тогда Φ — выпуклая фигура тогда и только тогда, когда для любой точки $A \in \text{Vnd } \Phi$ через A можно провести прямую, опорную для Φ .

Доказательство. \Rightarrow) для произвольной точки $A \in \text{Vnd } \Phi$ рассмотрим освещение $L(A, \Phi)$. По предыдущей теореме для выпуклой фигуры Φ возможен один из двух случаев.

1-й случай: освещение $L(A, \Phi)$ содержится в некотором угле $\angle BAC$, причем $\widehat{BAC} \leq 180^\circ$ (рис. 23). Тогда прямая $a = (AB)$ будет опорной, поскольку $\Phi \subseteq L(A, \Phi) \subseteq \angle BAC$, а $\angle BAC$, в свою очередь, содержится в одной из полуплоскостей с границей a .

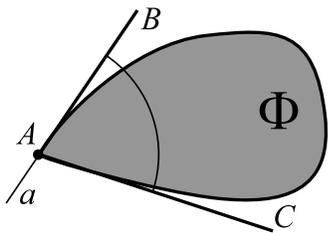


Рис. 23

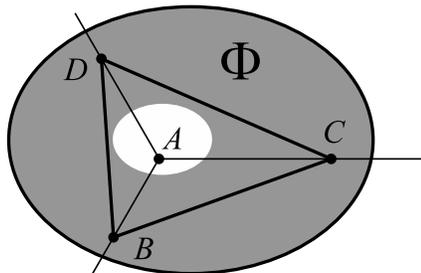


Рис. 24

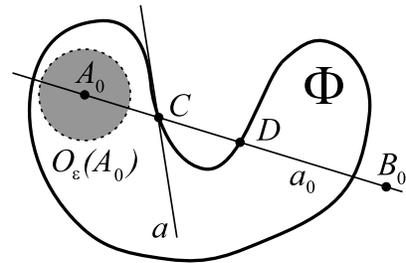


Рис. 25

2-й случай: $L(A, \Phi) = \alpha$. Поскольку каждый луч, выходящий из точки A , пересекает фигуру Φ , мы можем выбрать три луча $[AB)$, $[AC)$ и $[AD)$, образующие друг с другом попарные углы в 120° так, что $B, C, D \in \Phi$



(рис. 24). Из выпуклости Φ следует (по лемме 2.1), что $\triangle BCD \subseteq \Phi$. Выбор лучей гарантирует, что точка A является внутренней точкой треугольника $\triangle BCD$, поэтому $A \in \text{Int } \triangle BCD \subseteq \text{Int } \Phi$, т.е. A — внутренняя точка фигуры Φ , что противоречит условию $A \in \text{Vnd } \Phi$.

\Leftarrow) предположим противное: Φ не является выпуклой фигурой. По первому критерию выпуклости найдем такую точку $A_0 \in \text{Int } \Phi$ и такой луч $[A_0B_0)$, который границу пересекает более чем в одной точке (из-за ограниченности фигуры Φ на любом луче из точки A_0 будут внешние точки для фигуры Φ , стало быть и граничные тоже — по лемме 3.4). Пусть $D \neq C$ и $C, D \in \text{Vnd } \Phi \cap [A_0B_0)$. Считаем б.о.о., что точка C лежит между точками A_0, D (рис. 25). Докажем, что через точку C нельзя провести опорную прямую. Опорной прямой не может быть $a_0 = (A_0D)$, поскольку некоторая $O_\varepsilon(A_0)$ содержится в фигуре Φ , но эта окрестность целиком не попадает ни в одну из полуплоскостей с границей a_0 . Для любой прямой $a \neq a_0$, которая проходит через точку C , точки A_0 и D расположены по разные стороны от a , что противоречит быть опорной прямой для Φ . Итак, через точку $C \in \text{Vnd } \Phi$ невозможно провести ни одной опорной для Φ прямой, что противоречит данному нам условию. ■

Упражнения

1. Для любой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ ее замыканием называется множество $[\Phi] = \Phi \cup \text{Vnd } \Phi$. Верно ли, что замыкание любой фигуры является замкнутым множеством?
2. Верно ли, что для любой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ выполняется, что $[\Phi] = \text{Int } \Phi \cup \text{Vnd } \Phi$?
3. Отображение, которое любой фигуре Φ ставит в соответствие ее замыкание, называется *оператором замыкания Куратовского*⁵. Верно ли, что оператор замыкания удовлетворяет следующим свойствам:
 - а) $\Phi \subseteq [\Phi]$;
 - б) $[\Phi_1 \cup \Phi_2] = [\Phi_1] \cup [\Phi_2]$ для любых $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \alpha$;
 - в) $[\Phi_1 \cap \Phi_2] = [\Phi_1] \cap [\Phi_2]$ для любых $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \alpha$;
 - г) $[[\Phi]] = [\Phi]$?
4. Пусть Φ — выпуклая фигура на плоскости. Верно ли, что $[\Phi]$ также выпукло?
5. Пусть $[\Phi]$ — выпуклая фигура на плоскости. Верно ли, что Φ также выпукло?
6. Пусть Φ — выпуклая фигура на плоскости. Верно ли, что $\text{Int } \Phi$ также выпукло?

⁵Казимеж Куратовский (1896–1980) — польский математик, один из главных представителей польской топологической школы; основные работы относятся к общей топологии, теории графов, теории множеств и теории функций действительного переменного; президент Польского математического общества (1946–1953).



7. Пусть $\text{Int } \Phi$ — выпуклая фигура на плоскости. Верно ли, что Φ также выпукло?
8. Можно ли в первом критерии выпуклости опустить условие $\text{Int } \Phi \neq \emptyset$?
9. Попробуйте обобщить первый критерий выпуклости на неограниченные подмножества плоскости.
10. Постарайтесь сформулировать и доказать критерий выпуклости замкнутых ограниченных подмножеств плоскости с непустой внутренностью с точки зрения внешних точек рассматриваемого множества.

1.4. Теорема Минковского

Введем на плоскости α декартову систему координат с помощью репера O, \vec{i}, \vec{j} . Напомним, что пара \vec{i}, \vec{j} образует ортонормированный базис, т.е. $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ и $\vec{i} \perp \vec{j}$. Каждой точке $M \in \alpha$ приписывают ее координаты $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, которые являются коэффициентами разложения радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Откладывая \vec{i} от точки O , получим направленный отрезок \overrightarrow{OX} и ось абсцисс — прямую (OX) , на которой порядок введен с помощью вектора \vec{i} . Аналогично определяется и ось ординат. *Целочисленной решеткой* на α называется множество всех точек этой плоскости, у которых обе координаты являются целыми числами. Другими словами, точка $M(x, y)$ принадлежит целочисленной решетке (или является ее *узлом*) тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. В геометрии есть несколько нетривиальных результатов, связанных с целочисленной решеткой. В последней главе мы докажем формулу Пика, а здесь обсудим результат, который называется *теоремой Минковского*⁶. Общий результат для n -мерного евклидова пространства был получен Минковским в 1896 году.

Теорема 4.1. Пусть Φ — выпуклое множество на плоскости α , которое симметрично относительно начала координат, для площади которого справедливо неравенство $s(\Phi) > 4$. Тогда Φ , кроме начала координат, содержит по крайней мере еще один узел целочисленной решетки.

Доказательство. Фигура Φ имеет площадь, поэтому (см. определение квадратуемой фигуры в четвертой главе) содержится в некоторой многоугольной фигуре и является ограниченным множеством. Можно найти такую

⁶Герман Минковский (1864–1909) — немецкий математик и физик, основные работы посвящены теории чисел, геометрии, гидродинамике и математической физике; разработал геометрическую теорию чисел, получил ряд результатов в теории многогранников; ввел гиперболическое мероопределение, что сблизило теорию относительности с геометрией Лобачевского; в 1896 году доказал неравенство для n -мерного пространства, которое называют *неравенством Минковского*.



окрестность начала координат $O_r(O)$, которая целиком содержит Φ (действительно, если $\Phi \subseteq O_\varepsilon(A)$ для некоторой точки $A \in \alpha$, то $\Phi \subseteq O_r(O)$ для $r = \lceil |OA| + \varepsilon \rceil$, где $[x]$ — целая часть числа $x \in \mathbb{R}$). Причем можно считать, что $r \in \mathbb{N}$. Напомним, что $\mathbb{Z}(2) = \{k \in \mathbb{Z} : k \equiv_2 0\}$ — множество всех четных целых чисел. Рассмотрим множество $V(2) = \{\vec{v} = (k, l) : k, l \in \mathbb{Z}(2)\}$ всех векторов плоскости α , у которых четны обе координаты и всевозможные образы $\Phi_{\vec{v}} = T_{\vec{v}}(\Phi)$ при $\vec{v} \in V(2)$. Получим $\mathcal{F} = \{\Phi_{\vec{v}} : \vec{v} \in V(2)\}$ — счетное семейство подмножеств плоскости α .

Докажем, что какие-либо два множества из \mathcal{F} пересекаются друг с другом. О/п: \mathcal{F} является *дизъюнктым* семейством, т.е. состоит из попарно непересекающихся множеств. Тогда можно для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ рассмотреть все фигуры $\Phi_{\vec{v}} \in \mathcal{F}$, обе координаты центров которых содержатся в отрезке $[0; 2n]$ (рис. 26). Количество этих фигур равно $(n+1)^2$, все они содержатся в квадрате со сторонами $2n+2r$, поэтому из дизъюнктности следует, что их суммарная площадь удовлетворяет неравенству $(n+1)^2 \cdot S \leq 4(n+r)^2$. Таким образом, дизъюнктность \mathcal{F} приводит нас к неравенству (*): $\frac{n+r}{n+1} \geq \sqrt{S/4}$, которое должно выполняться для любого $n \in \mathbb{N}$. Из результатов второй главы Анализа 11 очевидно следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+r}{n+1} = 1$, поскольку r является константой. Учтя, что $\sqrt{S/4} > 1$, можно найти такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{n_0+r}{n_0+1} < \sqrt{S/4}$, что противоречит неравенству (*).

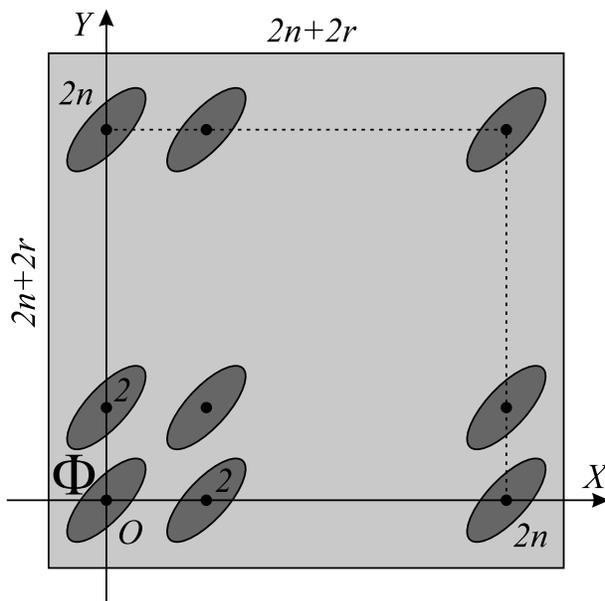


Рис. 26

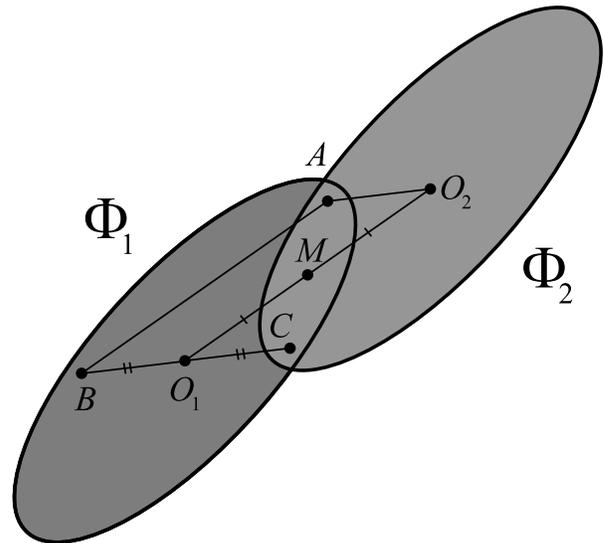


Рис. 27

Обозначим через Φ_1 и Φ_2 такие две фигуры из \mathcal{F} , которые пересекаются



между собой и $A \in \Phi_1 \cap \Phi_2$ (рис. 27). Пусть O_1 и O_2 — центры Φ_1 и Φ_2 (соответственно), M — середина отрезка $[O_1O_2]$ и $\vec{v} = \overrightarrow{O_1O_2}$. Поскольку $\Phi_2 = T_{\vec{v}}(\Phi_1)$ и $A \in \Phi_2$, точка $B = T_{-\vec{v}}(A)$ лежит в фигуре Φ_1 . Вспомним, что Φ_1 симметрична относительно O_1 , поэтому точка $C = Z_{O_1}(B)$ также лежит в Φ_1 .

1-й случай: $A \notin (O_1O_2)$. Учитывая, что четырехугольник ABO_1O_2 является параллелограммом, мы получим равенство трех отрезков $[AO_2] = [BO_1] = [O_1C]$ и равенство накрест лежащих углов $\angle AO_2M = \angle CO_1M$. Отсюда по 1КРТ получим равенство треугольников $\triangle AO_2M = \triangle CO_1M$ и M — середина отрезка $[AC]$. Из $A, C \in \Phi_1$ и выпуклости Φ_2 следует, что $M \in [AC] \subseteq \Phi_1$. Все координаты точек O_1 и O_2 четны, поэтому точка M , середина $[O_1O_2]$, имеет целочисленные координаты, т.е. является узлом решетки. Отсюда $T_{\vec{O_1O_2}}(M) = M^*$ также является узлом решетки, отличным от начала координат и лежащим в Φ .

2-й случай: $A \in (O_1O_2)$. Если $O_2 \in [O_1A]$, то из выпуклости Φ_1 следует $O_2 \in \Phi_1$ и O_2 — узел решетки, отличный от O_1 , который лежит в Φ_1 . Аналогично рассматривается случай $O_1 \in [AO_2]$. Если же $A \in [O_1O_2]$, то $M \in [O_1A] \subseteq \Phi_1$ или $M \in [AO_2] \subseteq \Phi_2$, поэтому M — узел решетки, отличный от O_1 и O_2 , лежащий в одной из рассматриваемых фигур. ■

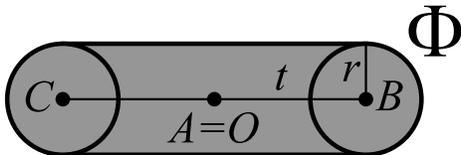


Рис. 28

Следующее утверждение называется *теоремой об охотнике и зайце*. Любой может представить вместо точек A и B — охотника и зайца, круги соответствуют деревьям в темном лесу. Теорема дает надежду на спасение для зайца, описывая достаточное условие того, что у охотника не будет возможности увидеть

зайца за деревьями.

Теорема 4.2. Пусть A — один из узлов целочисленной решетки. С центрами во всех остальных узлах этой решетки проведены круги радиуса $r > 0$. Если B — произвольная точка на плоскости, находящаяся от A на расстоянии больше чем $1/r$, то отрезок $[AB]$ пересечет по крайней мере один из выбранных кругов.

Доказательство. Можно считать, что точка A совпадает с точкой O — началом координат, иначе целочисленную решетку можно сдвинуть на вектор \overrightarrow{AO} . Пусть $|AB| = t > 1/r$, $C = Z_O(B)$ — симметричный образ точки B



относительно начала координат (рис. 28). Рассмотрим выпуклую фигуру Φ , состоящую из всех точек X , удовлетворяющих условию $d(X, [BC]) \leq r$. Эта фигура является объединением прямоугольника с длинами сторон $2r$, $2t$ и двух полукругов радиуса r , поэтому $s(\Phi) = 4rt + \pi r^2 > 4rt > 4$. По теореме Минковского фигура Φ содержит еще один, кроме точки O , узел целочисленной решетки. Этот узел, точка Q , является центром круга радиуса r , который пересечет отрезок $[AB]$ или $[AC]$. Если $[AB]$ пересекается с этим кругом, то теорема доказана, иначе можно перейти к точке $Q^* = Z_O(Q)$, которая также является узлом целочисленной решетки и принадлежит фигуре Φ (поскольку Φ симметрична относительно начала координат) и рассмотреть круг с центром в точке Q^* . ■

Упражнения

1. Найдется ли равносторонний треугольник, все вершины которого находятся в узлах целочисленной решетки?
2. Найдется ли прямоугольный треугольник, все вершины которого находятся в узлах целочисленной решетки, а ни одна из его сторон не параллельна координатным осям?
3. Существует ли замкнутая ломаная с нечетным числом звеньев равной длины, все вершины которой лежат в узлах целочисленной решетки?
4. Докажите, что для любого натурального n существует окружность, внутри которой лежит ровно n узлов целочисленной решетки.
5. Докажите, что для любого натурального n существует окружность, на которой лежит ровно n узлов целочисленной решетки.

1.5. Выпуклые многогранные углы

Перейдем в пространство \mathbb{P}_3 и будем рассматривать освещения многоугольников.

Определение. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ — многоугольник, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, плоскость $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$ и $S \notin \alpha$. Многогранным углом называется множество

$$L(S, A_1A_2 \dots A_n) = \bigcup \{ [SX) : X \in A_1A_2 \dots A_n \}.$$

Элементы многогранного угла $\Phi = L(S, A_1A_2 \dots A_n)$. Точка S называется *вершиной* Φ (рис. 29). Каждый из лучей $[SA_i)$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ называется *ребром* Φ . Угол $\angle A_iSA_{i+1} = L(S, [A_iA_{i+1}])$ при $i \in \{1, 2, \dots, n\}$



(если $i = n$, то точка A_{n+1} по определению замкнутой ломаной совпадает с A_1) называется *плоским углом* многогранного угла Φ , причем *величиной плоского угла* называется число $\varphi_i = \widehat{A_i S A_{i+1}}$.

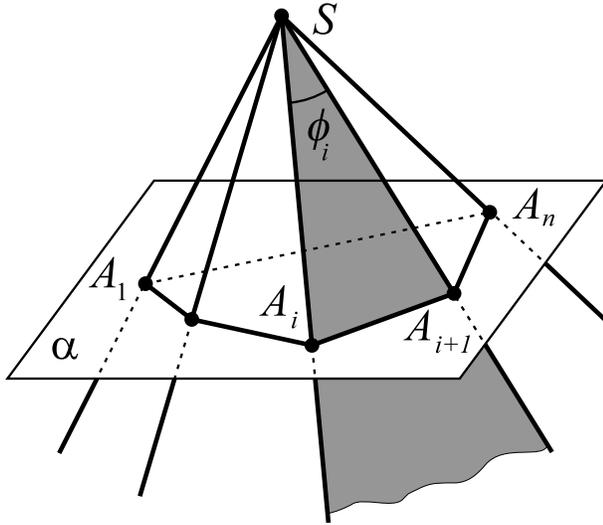


Рис. 29

Начнем с очень простого критерия.

Теорема 5.1. Рассмотрим фигуру $\Phi = L(S, A_1 A_2 \dots A_n)$ — многогранный угол с вершиной в точке S . Тогда Φ — выпуклое множество тогда и только тогда, когда многоугольник $M = A_1 A_2 \dots A_n$ является выпуклым подмножеством плоскости $\alpha = (A_1 A_2 \dots A_n)$.

Доказательство. \Rightarrow) если фигура Φ является выпуклым подмножеством в пространстве \mathbb{P}_3 , то многоугольник $M = \Phi \cap \alpha$ также является

выпуклой фигурой как пересечение двух выпуклых множеств.

\Leftarrow) точно так же, как и в теореме 3.6, доказываем, что в пространстве \mathbb{P}_3 освещение выпуклой фигуры является выпуклым множеством, поэтому Φ — выпуклая фигура. ■

Напомним несколько фактов из Геометрии 10.

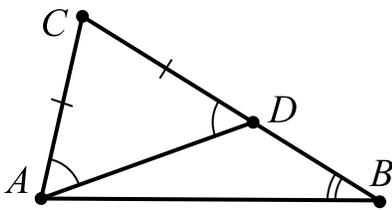


Рис. 30

Лемма 5.2. 1) для любого треугольника ABC неравенство $[BC] > [AC]$ выполняется тогда и только тогда, когда $\angle BAC > \angle ABC$.

2) пусть в треугольниках $\triangle ABC$ и $\triangle A_1 B_1 C_1$ выполняется: $[AB] = [A_1 B_1]$, $[AC] = [A_1 C_1]$. Неравенство $[BC] > [B_1 C_1]$ выполняется тогда и только тогда, когда $\angle BAC > \angle B_1 A_1 C_1$.

Доказательство. \Rightarrow) из определения $[BC] > [AC]$ следует, что на стороне $[BC]$ найдется внутренняя точка D , для которой $[CD] = [AC]$ (рис. 30), откуда $\angle CAD = \angle CDA$. По свойству внешнего угла треугольника получаем, что $\angle CDA > \angle B$, откуда $\angle A > \angle CAD = \angle CDA > \angle B$.

\Leftarrow) о/п: $[BC] \leq [AC]$. Случай $[BC] = [AC]$ приводит к $\angle A = \angle B$, что противоречит $\angle A > \angle B$. Если же $[BC] < [AC]$, то, по уже доказанному утверждению, получим $\angle A < \angle B$. ∇



2) по свойствам функции длины можно перейти к равносильному неравенству $|BC| > |B_1C_1|$ или $|BC|^2 > |B_1C_1|^2$. Расписывая квадраты сторон по теореме косинусов, сокращая на одинаковые слагаемые и на одинаковые множители, приходим к

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos \angle A &> A_1C_1^2 + A_1B_1^2 - 2A_1C_1 \cdot A_1B_1 \cos \angle A_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\cos \angle A &> -\cos \angle A_1 \Leftrightarrow \cos \angle A < \cos \angle A_1 \Leftrightarrow \angle A > \angle A_1. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали строгое убывание косинуса на промежутке $[0^\circ; 180^\circ]$. ■

Следующее утверждение будем называть *первой теоремой о плоских углах* выпуклого многогранного угла.

Теорема 5.3. Пусть $\Phi = L(S, A_1A_2 \dots A_n)$ — выпуклый многогранный угол, $\varphi_i = \widehat{A_iSA_{i+1}}$ — величина его i -го плоского угла ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Тогда величина любого из его плоских углов меньше суммы величин оставшихся его плоских углов.

Доказательство. Индукцией по числу сторон многоугольника достаточно доказать, что $\varphi_1 < \sum_{i=2}^n \varphi_i$ (иначе можно перенумеровать вершины многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$).

Б.И. Для $n = 3$ проверим, что верно $\varphi_1 < \varphi_2 + \varphi_3$. При $\varphi_1 \leq \varphi_2$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем, что $\varphi_1 > \varphi_2$ (рис. 31).

Выберем произвольно точки $A \in]SA_1)$, $B \in]SA_2)$ и на интервале $]AB[$ найдем такую точку C , что $\widehat{BSC} = \varphi_2$ (мы воспользовались неравенством $\varphi_1 > \varphi_2$). Теперь отложим на луче $[SA_3)$ отрезок $[SC]$ и найдем такую точку D , что $[SD] = [SC]$. По 1КПТ выполняется $\triangle BSC = \triangle BSD$, откуда $[BC] = [BD]$, треугольник BCD — равнобедренный и угол $\angle BCD$ — острый. Поэтому $\angle ACD$ является тупым и первое утверждение предыдущей леммы, примененное к $\triangle ACD$ дает, что $|AD| > |AC|$. Теперь к треугольникам ASC и ASD применим второе утвер-

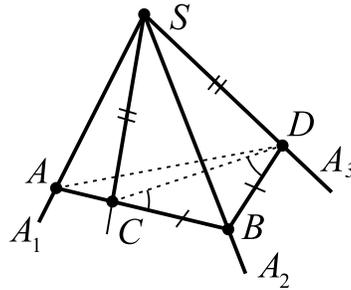


Рис. 31

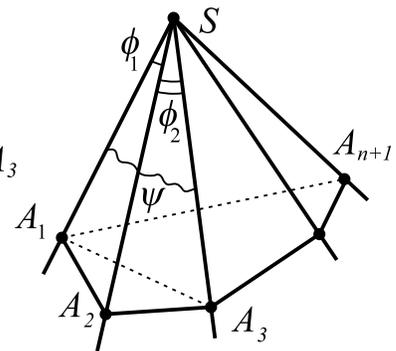


Рис. 32



ждение леммы и получим, что $\angle ASC < \angle ASD = \varphi_3$, откуда

$$\varphi_1 = \widehat{ASC} + \widehat{CSB} = \widehat{ASC} + \varphi_2 < \varphi_3 + \varphi_2$$

и база индукции доказана.

Ш.И. Предположим, что утверждение верно для всех выпуклых n -гранных углов и рассмотрим $\Phi^* = L(S, A_1 \dots A_n A_{n+1})$ — выпуклый $n + 1$ -гранный угол. Проведем диагональ $[A_1 A_3]$ в выпуклом $n + 1$ -угольнике (рис. 32) и обозначим через $\psi = \widehat{A_1 S A_3}$ величину первого плоского угла для фигуры $\Phi = L(S, A_1 A_3 \dots A_{n+1})$ — выпуклого (по первой теореме) n -гранного угла. По предположению индукции сразу получим, что $\psi < \sum_{i=3}^{n+1} \varphi_i$. Теперь, применяя базу индукции к трехгранному углу $L(S, \triangle A_1 A_2 A_3)$, получим

$$\varphi_1 < \varphi_2 + \psi < \varphi_2 + \sum_{i=3}^{n+1} \varphi_i = \sum_{i=2}^{n+1} \varphi_i.$$

■

Лемма 5.4. Пусть $M = A_1 A_2 \dots A_n$ — выпуклый n -угольник, в котором $\widehat{A_i} = \widehat{A_{i-1} A_i A_{i+1}}$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (считаем по определению, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$). Тогда $\sum_{i=1}^n \widehat{A_i} = 180^\circ \cdot (n - 2)$.

Доказательство. Пусть O — произвольная внутренняя точка M . Соединим ее с каждой вершиной многоугольника M и получим n треугольников, объединение которых дает M (что очевидно следует из выпуклости M). Обозначим через $\psi_i = \widehat{A_i O A_{i+1}}$. Суммируя величины всех углов треугольников $O A_i A_{i+1}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), получим

$$180^\circ \cdot n = \sum_{i=1}^n \widehat{A_i} + \sum_{i=1}^n \psi_i = \sum_{i=1}^n \widehat{A_i} + 360^\circ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \widehat{A_i} = 180^\circ \cdot (n - 2).$$

■

Следующее утверждение будем называть *второй теоремой о плоских углах* выпуклого многогранного угла.

Теорема 5.5. Пусть $\Phi = L(S, A_1 A_2 \dots A_n)$ — выпуклый многогранный угол, $\varphi_i = \widehat{A_i S A_{i+1}}$ — величина его i -го плоского угла ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Тогда $\sum_{i=1}^n \varphi_i < 360^\circ$.



Доказательство. Как обычно, считая, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ введем обозначения: $\psi_i = \widehat{SA_iA_{i+1}}$, $\chi_i = \widehat{SA_{i+1}A_i}$ и $\delta_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ (рис. 33).

В следующих переходах, кроме очевидных равенств $\varphi_i + \psi_i + \chi_i = 180^\circ$ и $\sum_{i=1}^n \delta_i = 180^\circ(n-2)$, будем использовать неравенство $\delta_i < \psi_i + \chi_{i-1}$, которое получено применением предыдущей теоремы для трехгранного угла $L(A_i, \triangle SA_{i-1}A_{i+1})$. Еще мы изменили порядок суммирования углов χ_i (что можно сделать благодаря коммутативности), по определению считая, что $\chi_0 = \chi_n$. Справедлива следующая оценка для суммы плоских углов Φ :

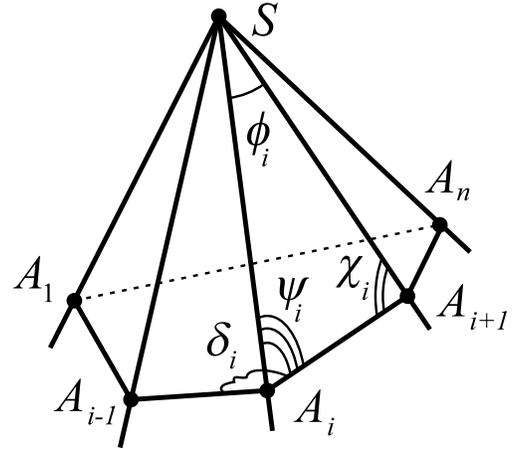


Рис. 33

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \psi_i - \chi_i) = n \cdot 180^\circ - \sum_{i=1}^n (\psi_i + \chi_i) = \\ &= n \cdot 180^\circ - \sum_{i=1}^n (\psi_i + \chi_{i-1}) < n \cdot 180^\circ - \sum_{i=1}^n \delta_i = n \cdot 180^\circ - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ. \end{aligned}$$

■

Упражнения

1. Попробуйте усилить теорему 5.3, обобщив ее на любые многогранные углы, не обязательно выпуклые.
2. Откажитесь от выпуклости многоугольника в лемме 5.4 и докажите справедливость формулы этой леммы для любого многоугольника.
3. Покажите, что теорему 5.5 нельзя обобщить на произвольный многогранный угол.
4. Можно ли построить четырехгранный угол, для которого теорема 5.5 не верна?

1.6. Трехгранные углы

У любого многогранного угла $\Phi = L(S, A_1A_2 \dots A_n)$, кроме плоских углов, есть еще двугранные углы при каждом из его ребер. Точнее, для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ рассмотрим тот двугранный угол с ребром (SA_i) , чьи



грани находятся в плоскостях (SA_iA_{i-1}) и (SA_iA_{i+1}) , который содержит внутренний угол $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$. Он называется двугранным углом Φ при ребре (SA_i) и его величина обозначается через $\widehat{A_i}$. Напомним, что для нахождения $\widehat{A_i}$ строят линейный угол двугранного угла, проводя, например, из точки A_i перпендикуляры к ребру (SA_i) в гранях этого двугранного угла. Более простым способом нахождения линейного угла является построение плоскости β перпендикулярно прямой (SA_i) , тогда пересечение β с двугранным углом даст его линейный угол (подробнее об этом — в седьмом параграфе пятой главы Геометрии 10). Ясно, что величина двугранного угла $\widehat{A_i}$ почти никогда не совпадает с величиной угла $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, поскольку прямые $(A_{i-1}A_i)$ и (A_iA_{i+1}) не обязаны быть перпендикулярными ребру (SA_i) двугранного угла.

В случае, если Φ — невыпуклый многогранный угол, некоторые из его двугранных углов также невыпуклы и имеют величину больше 180° . Ситуация упрощается для трехгранного угла $\Phi = L(S, \triangle ABC)$. Поскольку $\triangle ABC$ — выпуклое множество, Φ также является выпуклой фигурой и все его двугранные углы по величине меньше 180° . Заметим, что при $n \geq 4$ многогранный угол $\Phi = L(S, A_1A_2 \dots A_n)$ является «подвижной» конструкцией, т.е. появляется возможность непрерывно менять величины его двугранных углов при сохранении величин всех его плоских углов. Поэтому формул, выражающих величины его плоских углов через двугранные, или наоборот, не существует. Трехгранный угол $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ является «жесткой» конструкцией, т.е. его плоские углы должны однозначно определить двугранные.

Этот параграф посвящен связям между плоскими углами трехгранного угла $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ и его двугранными углами. Сначала договоримся в этом параграфе придерживаться традиционных в теории трехгранных углов обозначений (хотя они немного противоречат принятым в остальном тексте обозначениям). Величины плоских углов Φ обозначают через $\alpha = \widehat{BSC}$, $\beta = \widehat{ASC}$ и $\gamma = \widehat{ASB}$. Величины двугранных углов Φ обозначают \widehat{A} , \widehat{B} и \widehat{C} при ребрах (SA) , (SB) и (SC) соответственно.

Следующее утверждение и следствие из него называют *первой теоремой косинусов* для трехгранных углов.

Теорема 6.1. Пусть $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ — трехгранный угол, тогда выполняется равенство

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \widehat{C}.$$



Доказательство. Вдоль ребер Φ отложим единичные векторы следующим образом: $E_1 \in [SA)$, $E_2 \in [SB)$, $E_3 \in [SC)$, $\vec{e}_i = \overrightarrow{SE}_i$, $|\vec{e}_i| = 1$ при $i \in \{1, 2, 3\}$ (рис. 34). Найдем ортогональные проекции двух точек: $C_1 = \text{Пр}_{(SC)}(E_1)$ и $C_2 = \text{Пр}_{(SC)}(E_2)$. Заметим, что C_1 лежит на луче $[SC)$ тогда и только тогда, когда $\beta \leq 90^\circ$. Во всех остальных случаях точка C_1 попадет на противоположный луч к $[SC)$. Точно так же расположение точки C_2 на прямой (SC) связано с величиной угла α . Теперь векторы $\overrightarrow{SC_1}$ и $\vec{e}_3 \cos \beta$ равны по длине (так как $|SC_1| = |SE_1| \cdot |\cos \beta| = |\cos \beta| = |\vec{e}_3| \cdot |\cos \beta|$) и по направлению (так как $\cos \beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \in [0; 90^\circ]$), откуда $\overrightarrow{SC_1} = \vec{e}_3 \cos \beta$. Аналогично $\overrightarrow{SC_2} = \vec{e}_3 \cos \alpha$.

Осталось заметить, что лучи $[C_1E_1)$ и $[C_2E_2)$ перпендикулярны ребру (SC) двугранного угла при ребре (SC) , лежат в гранях этого угла, поэтому величина угла между этими лучами равна \widehat{C} и совпадает с величиной угла между векторами $\overrightarrow{C_1E_1}$ и $\overrightarrow{C_2E_2}$ (в силу выпуклости Φ , величина его двугранного угла при ребре (SC) меньше 180° и равна $\widehat{C_1E_1}, \widehat{C_2E_2}$). Складывая векторы по правилу треугольника, получим

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_3 \cos \beta + \overrightarrow{C_1E_1} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cos \alpha + \overrightarrow{C_2E_2},$$

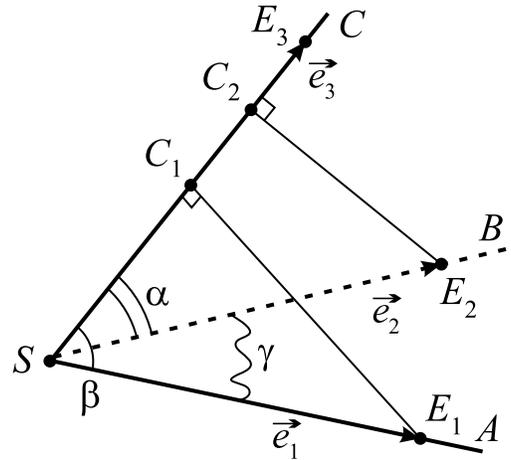


Рис. 34

откуда из сделанного выше замечания о величине угла между векторами $\overrightarrow{C_1E_1}$ и $\overrightarrow{C_2E_2}$, определения скалярного произведения, его дистрибутивности, а также из $\overrightarrow{C_1E_1} \perp \vec{e}_3$ и $\overrightarrow{C_2E_2} \perp \vec{e}_3$ получим, что

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_3|^2 \cos \alpha \cos \beta + 0 + 0 + \overrightarrow{C_1E_1} \cdot \overrightarrow{C_2E_2} = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + (|\vec{e}_1| \sin \beta) \cdot (|\vec{e}_2| \sin \alpha) \cdot \cos \widehat{C} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \widehat{C}. \end{aligned}$$

Следствие. В условиях предыдущей теоремы справедлива формула

$$\cos \widehat{C} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Доказательство. Сразу следует из предыдущего результата с учетом того, что в любом трехгранном угле верны неравенства $\sin \alpha \neq 0$ и $\sin \beta \neq 0$.



Пример 1. Рассмотрим правильный тетраэдр $\mathcal{T} = SABC$ и найдем угол между его гранями. В силу правильности \mathcal{T} , можно рассмотреть любую из его вершин в качестве вершины трехгранного угла. Так, для плоских углов при вершине S справедливы равенства $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, откуда по первой теореме косинусов получим $\cos \widehat{C} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) / \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, двугранный угол при ребре (SC) равен $\widehat{C} = \arccos \frac{1}{3}$.

Следующая удачная конструкция приведет к формуле, по которой плоский угол $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ можно найти через двугранные углы Φ .

Определение. Пусть $S' \in \text{Int } \Phi$ (где $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ — произвольный трехгранный угол) выбрана так, что ее проекции на грани Φ являются внутренними точками этих граней, т.е. для $A' = \text{Pr}_{(SBC)}(S')$, $B' = \text{Pr}_{(SAC)}(S')$ и $C' = \text{Pr}_{(SAB)}(S')$ выполняется: $A' \in \text{Int } \angle BSC$, $B' \in \text{Int } \angle ASC$ и $C' \in \text{Int } \angle ASB$. Тогда трехгранный угол $\Phi' = L(S', \triangle A'B'C')$ называется двойственным к углу Φ .

Обсудим, почему существует хотя бы один двойственный угол к Φ . Для этого рассмотрим произвольный выпуклый двугранный угол \mathcal{D} величины меньше 180° с ребром a и гранями $\alpha(a)$ и $\beta(a)$. Полуплоскость $\gamma(a)$ (с прямой a в качестве границы), которая содержится в \mathcal{D} и делит его на два равных по величине двугранных угла \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , называется его *биссекторной полуплоскостью*. Покажем, почему биссекторная полуплоскость существует. Выберем произвольную точку $A \in a$ и проведем через нее плоскость $\delta \perp a$ (существование и единственность такой плоскости доказаны в третьем параграфе пятой главы Геометрии 10), тогда $\angle BAC = \delta \cap \mathcal{D}$ является линейным углом \mathcal{D} . Построим биссектрису $[AK)$ этого угла, тогда прямая a и луч $[AK)$ определяют биссекторную полуплоскость $\gamma(a)$ (действительно, два равных угла $\angle BAK$ и $\angle CAK$ будут линейными углами двух получившихся двугранных углов \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2). Из теоремы о трех перпендикулярах легко выводится важное свойство биссекторной полуплоскости: точка, лежащая внутри \mathcal{D} , равноудалена от его граней тогда и только тогда, когда она принадлежит биссекторной полуплоскости двугранного угла \mathcal{D} . В качестве следствия получаем, что сфера $Sph(O, r)$ касается двух граней \mathcal{D} тогда и только тогда, когда $O \in \overset{\circ}{\gamma}(a)$ (мы исключили границу биссекторной полуплоскости, чтобы не рассматривать сферы нулевого радиуса). Ясно, что условие $\widehat{\mathcal{D}} < 180^\circ$ дает, что точки касания такой сферы $Sph(O, r)$ с гранями \mathcal{D} расположены внутри этих граней (т.е. не могут находиться на прямой a — ребре двугранного угла). Теперь для трехгранного



угла $\Phi = L(S, \Delta ABC)$ выберем два его двугранных угла, например при ребрах (SA) и (SB) , и проведем их биссекторные полуплоскости. Луч, по которому они пересекаются, обозначим через $[SD)$. Из-за того, что точки луча $[SD)$ равноудалены от всех трех граней Φ получим, что $[SD)$ лежит и в третьей биссекторной плоскости. Для нас важнее будет такое следствие: выбрав в качестве S' внутреннюю точку луча $[SD)$, мы можем рассмотреть сферу $Sph(S', r)$, которая касается граней $\angle BSC$, $\angle ASC$ и $\angle ASB$ в их внутренних точках A' , B' и C' соответственно. Тем самым мы построили двойственный трехгранный угол к углу Φ с дополнительным свойством: $|S'A'| = |S'B'| = |S'C'| = r$.

Второе утверждение следующей теоремы и следствие из него называется *второй теоремой косинусов* для трехгранных углов.

Теорема 6.2. 1) пусть $\Phi' = L(S', \Delta A'B'C')$ — двойственный к трехгранному углу $\Phi = L(S, \Delta ABC)$, тогда

$$а) \alpha' = 180^\circ - \widehat{A}, \beta' = 180^\circ - \widehat{B}, \gamma' = 180^\circ - \widehat{C};$$

$$б) \widehat{A}' = 180^\circ - \alpha, \widehat{B}' = 180^\circ - \beta, \widehat{C}' = 180^\circ - \gamma.$$

2) для трехгранного угла $\Phi = L(S, \Delta ABC)$ выполняется формула

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos \gamma.$$

Доказательство. 1) по определению $(S'B') \perp (SAC)$, поэтому $(S'B') \perp (SA)$. Аналогично, $(S'C') \perp (SA)$. По критерию перпендикулярности прямой и плоскости получим $(SA) \perp (S'B'C')$. Обозначим через $\{K\} = (SA) \cap (S'B'C')$ (рис. 35), тогда $\angle B'KC'$ является линейным углом двугранного угла при ребре (SA) и $\widehat{B'KC'} = \widehat{A}$. Из условия перпендикулярности $(S'B') \perp (SAC)$ также следует, что в четырехугольнике $S'B'KC'$ выполняется $\widehat{S'B'K} = 90^\circ$. Точно так же доказывается, что $\angle S'C'K$ — прямой. Отсюда на сумму оставшихся углов в $S'B'KC'$ приходится $180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B'S'C'}$, т.е. $\widehat{A} + \alpha' = 180^\circ$ или $\alpha' = 180^\circ - \widehat{A}$. Аналогично доказываются два оставшихся равенства в утверждении (а).

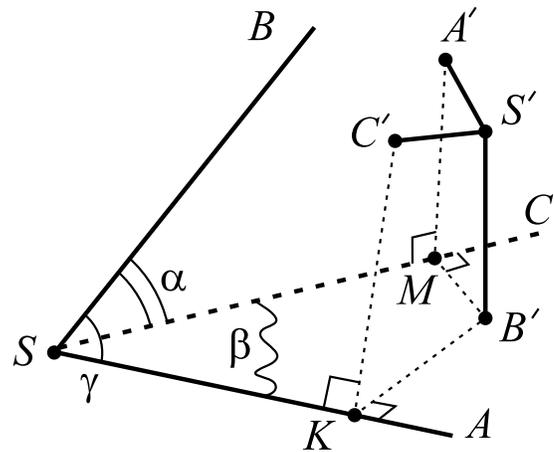


Рис. 35

Плоскость $A'S'B'$ содержит две прямые, которые перпендикулярны прямой (SC) , поэтому $(A'S'B') \perp (SC)$ и для точки M , которая является



пересечением плоскости $(A'S'B')$ с прямой (CS) , справедливо равенство $\widehat{SMB'} = 90^\circ$. Аналогично доказывается, что $\widehat{SKB'} = 90^\circ$. Вспомним, что $(S'B') \perp (SAC)$, поэтому пересечение плоскости (SAC) с двугранным углом при ребре $(S'B')$ (этот двугранный угол рассматривается у трехгранного угла $\Phi' = L(S', \Delta A'B'C')$) дает линейный угол величины $\widehat{B'}$. В четырехугольнике $SKB'M$ из равенства $\widehat{K} + \widehat{M} = 180^\circ$ получим $\widehat{MSK} + \widehat{B'} = 180^\circ$ или $\widehat{B'} = 180^\circ - \beta$. Аналогично проверяются два оставшихся равенства в утверждении (б).

2) применяем первую теорему косинусов для двойственного трехгранного угла, т.е. для $\Phi' = L(S', \Delta A'B'C')$, и приходим к равенству

$$\cos \gamma' = \cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta' \cos \widehat{C'}.$$

Подставляя соотношения из (1) и применяя формулы приведения, получим

$$\begin{aligned} -\cos \widehat{C} &= \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos \gamma \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos \widehat{C} &= -\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{A} \sin \widehat{B} \cos \gamma. \end{aligned}$$

■

Следствие. В условиях предыдущей теоремы справедлива формула

$$\cos \gamma = \frac{\cos \widehat{C} + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B}}{\sin \widehat{A} \sin \widehat{B}}.$$

Доказательство. Сразу следует из пункта (2) предыдущей теоремы с учетом того, что в любом трехгранном угле верны неравенства $\sin \widehat{A} \neq 0$ и $\sin \widehat{B} \neq 0$.

■

Пример 2. Рассмотрим трехгранный угол $\Phi = L(S, \Delta ABC)$, в котором величины двугранных углов равны $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$ и $\widehat{C} = 90^\circ$. Найдём плоские углы Φ . Трижды применяя вторую теорему косинусов, получим

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \gamma = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos \alpha &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$



$$\cos \beta = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ.$$

Следующий результат называется *теоремой синусов* для трехгранных углов.

Теорема 6.3. Пусть $\Phi = L(S, \triangle ABC)$ — трехгранный угол, тогда выполняется равенство

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \hat{A}} = \frac{\sin \beta}{\sin \hat{B}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \hat{C}}.$$

Доказательство. Выберем произвольную точку $M \in]SA)$ и спроектируем ее на плоскость BCS , получим $M' = \text{Пр}_{(BCS)}(M)$. Также найдем проекции этой точки на прямые (SB) и (SC) : $P = \text{Пр}_{(SB)}(M)$ и $K = \text{Пр}_{(SC)}(M)$.

1-й случай: точки S, K, P и M' попарно различны (рис. 36). Учитывая, что $(MK) \perp (SC)$ и $(M'K) = \text{Пр}_{(BCS)}((MK))$, по теореме о трех перпендикулярах получим $(M'K) \perp (SC)$. Таким образом, величина угла MKM' равна либо \hat{C} , либо $180^\circ - \hat{C}$ (в зависимости от того, попадает ли точка M' во внутреннюю область $\angle BSC$ или нет). Формулы приведения дадут нам соотношение $\sin \hat{C} = \sin \widehat{MKM'} = |MM'|/|MK|$. Аналогично получим, что $\sin \hat{B} = |MM'|/|MP|$. Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник MSK . Если $K \in [SC)$ (как на рис. 36), то $\widehat{MSK} = \beta$, иначе точка K попадет на продолжение луча $[SC)$ и $\widehat{MSK} = 180^\circ - \beta$. В каждом из этих случаев формулы приведения дадут $\sin \beta = \sin \widehat{MSK} = |MK|/|MS|$. Аналогично получим, что $\sin \gamma = |MP|/|MS|$, откуда

$$\frac{\sin \beta}{\sin \hat{B}} = \frac{|MK|}{|MS|} : \frac{|MM'|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|MS|} : \frac{|MM'|}{|MK|} = \frac{\sin \gamma}{\sin \hat{C}}.$$

2-й случай: $M' = K$ и точки K, P и S различны. Тогда $\hat{C} = 90^\circ$ и $\sin \hat{C} = 1 = |MM'|/|MK|$ и в остальном доказательство не отличается от предыдущего случая.

Точно так же разбирается вариант совпадения точек P и M' при дополнительном условии, что точки K, P и S различны.

3-й случай: если $S = M'$, то $(MS) \perp (BCS)$ и $K = P = S$, откуда сразу получим, что $\sin \beta / \sin \hat{B} = 1 : 1 = \sin \gamma / \sin \hat{C}$.

Соотношение $\sin \alpha / \sin \hat{A} = \sin \beta / \sin \hat{B}$ доказывается аналогично, только выбрать точку M надо будет на открытом луче $]SC)$.





Следующий результат называется *теоремой о трех синусах*.

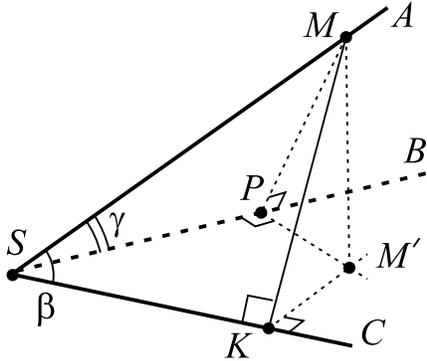


Рис. 36

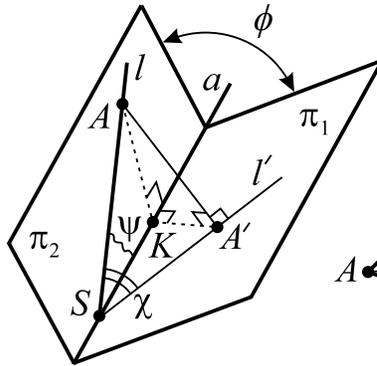


Рис. 37

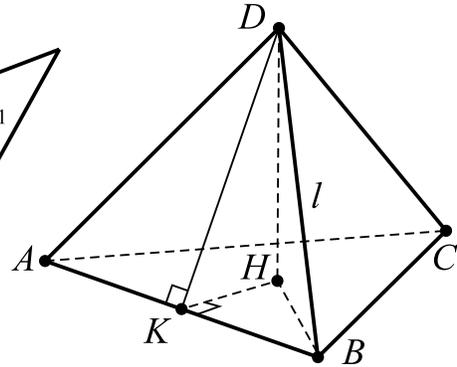


Рис. 38

Теорема 6.4. Пусть плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой a и $\widehat{\pi_1, \pi_2} = \varphi$. В плоскости π_2 расположена прямая l (рис. 37), она составляет с прямой a угол величины ψ . Если χ — величина угла между прямой l и плоскостью π_1 , то справедлива формула $\sin \chi = \sin \varphi \cdot \sin \psi$ (*).

Доказательство. Если $l \parallel a$, то $l \parallel \pi_1$, поэтому $\psi = \chi = 0^\circ$ и (*) превращается в верное равенство $0 = 0$. Пусть теперь $\{S\} = l \cap a$, тогда выберем точку $A \in l \setminus \{S\}$ и найдем ее проекцию $A' = \text{Пр}_{\pi_1}(A)$. При $A' = S$ получим $l \perp \pi_1$, что влечет $\varphi = \psi = \chi = 90^\circ$ и формула (*) верна, поскольку $1 = 1$.

Далее считаем, что $A' \neq S$, откуда $l' = (SA') = \text{Пр}_{\pi_1}(l)$ и по определению $\chi = \widehat{l, \pi_1} = \widehat{ASA'}$ в прямоугольном треугольнике ASA' . Обозначим через $K = \text{Пр}_a(A)$ и рассмотрим трехгранный угол $\Phi = L(S, \triangle AK A')$. Учитывая $(AA') \perp \pi_1$, получаем, что величина двугранного угла в Φ при ребре $[SA']$ равна 90° . Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $(KA') \perp a$, откуда следует $\widehat{AK A'} = \varphi$ или $\widehat{AK A'} = 180^\circ - \varphi$, поэтому $\sin \widehat{AK A'} = \sin \varphi$. Осталось применить теорему синусов к трехгранному углу Φ и получить, что $\sin \chi / \sin \varphi = \sin \psi / \sin 90^\circ$ или $\sin \chi = \sin \varphi \cdot \sin \psi$. ■

Пример 3. В правильном тетраэдре $ABCD$ определим угол между боковым ребром и плоскостью основания (рис. 38). Пусть $a = (AB)$ — прямая пересечения плоскостей $\pi_2 = (ABD)$ и $\pi_1 = (ABC)$, тогда $\varphi = \widehat{\pi_1, \pi_2} = \arccos(1/3)$ (из первого примера), $l = (BD)$, $\psi = \widehat{ABD} = 60^\circ$. Применяя предыдущую теорему, получим, что $\sin \chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (если $\cos \varphi = 1/3$ и $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, то $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = 2\sqrt{2}/3$). Искомый угол равен $\arcsin(\sqrt{6}/3)$.

Глава 2

Преобразования пространства

2.1. Группа преобразований и группа движений

Вспомним некоторые понятия и простые факты из теории множеств. *Декартовым произведением* (или просто произведением) множеств X и Y называется $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, при этом (x, y) — упорядоченная пара, в которой x — ее первый элемент, а y — второй. *Соответствием* между X и Y называют произвольное множество $\varphi \subseteq X \times Y$, т.е. элементами φ являются упорядоченные пары. *Областью определения* φ называется множество $D(\varphi) = \{x \in X : \exists(x, y) \in \varphi\}$, а *множеством значений* φ — $E(\varphi) = \{y \in Y : \exists(x, y) \in \varphi\}$. Соответствие φ называется *всюду определенным* (*сюръективным*), если $D(\varphi) = X$ (соответственно $E(\varphi) = Y$). Сюръективные соответствия также называются соответствиями «на». Соответствие φ называется *однозначным*, если из условий $(x, y), (x, y_1) \in \varphi$ следует, что $y = y_1$, т.е. каждому $x \in D(\varphi)$ соответствует при φ единственный элемент из $E(\varphi)$; в этом случае вместо $(x, y) \in \varphi$ можно писать $y = \varphi(x)$ и элемент y называется *образом* элемента x при φ . Соответствие φ называется *инъективным*, если из условий $(x, y), (x_1, y) \in \varphi$ следует, что $x = x_1$, т.е. различным элементам из $D(\varphi)$ соответствуют при φ различные элементы из $E(\varphi)$. Всюду определенные и однозначные соответствия называются *отображениями* и обозначаются f, g, h . Для отображения f с областью определения, равной множеству X , и множеством значений, лежащей во множестве Y (не обязательно совпадающей с множеством Y), используют два обозначения: $X \xrightarrow{f} Y$ или $f : X \rightarrow Y$. Равенство двух отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ определяется как совпадение множеств упорядоченных пар, или с помощью равносильного условия: для всех $x \in X$ следует, что $f(x) = g(x)$. Для равных отображений используем привычное обозначение



$f = g$. *Биекциями* между X и Y называются такие соответствия между этими множествами, которые одновременно всюду определены, сюръективны, однозначны и инъективны. Часто соответствия $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаются формулами. Например, $f(x) = x^2$ задает отображение, которое не сюръективно (так как $-1 \notin E(f)$) и не инъективно (так как $f(-1) = f(1) = 1$). В то же время формулы $g(x) = x^3$ или $h(x) = 2023x + 2025$ задают биекции между \mathbb{R} и \mathbb{R} . Для отображения $f : X \rightarrow Y$ и произвольного подмножества $X_1 \subseteq X$ *образом* X_1 при f называется множество $f(X_1) = \{f(x) : x \in X_1\}$; *прообразом* $Y_1 \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : f(x) \in Y_1\}$. Сразу из определения следует, что при $X_1 \subseteq X_2$ (или $Y_1 \subseteq Y_2$) выполняется $f(X_1) \subseteq f(X_2)$ (соответственно $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$).

Для соответствия $\varphi \subseteq X \times Y$ можно определить обратное соответствие $\varphi^{-1} \subseteq Y \times X$ следующим образом: $\varphi^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \varphi\}$. Нетрудно заметить, что при переходе к обратному соответствию всюду определенность и сюръективность, а также однозначность и инъективность меняются местами (т.е. если φ однозначно, то φ^{-1} инъективно), поэтому **соответствие, обратное к биекции, само является биекцией**.

Для двух соответствий $\varphi \subseteq X \times Y$ и $\psi \subseteq Y \times Z$ можно определить их композицию $\psi \circ \varphi \subseteq X \times Z$ следующим образом:

$$\psi \circ \varphi = \{(x, z) : \exists y \in Y, \text{ для которого } (x, y) \in \varphi \text{ и } (y, z) \in \psi\}.$$

Для двух отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ вместо $(x, z) \in g \circ f$ можно записывать $z = g(f(x))$. Так, для двух конкретных отображений, которые были определены выше, можно рассмотреть две их различные композиции: $(h \circ g)(x) = 2023x^3 + 2025$ и $(g \circ h)(x) = (2023x + 2025)^3$. Если для $\varphi \subseteq X \times Y$ и $\psi \subseteq Y \times Z$ выполнено $D(\varphi) = X$ и $D(\psi) = Y$, то $D(\psi \circ \varphi) = X$, т.е. композиция всюду определенных соответствий всюду определена. Аналогично проверяется сохранение оставшихся трех свойств (сюръективности, однозначности и инъективности) при переходе к композиции. Поэтому **композиция биекций $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ является биекцией между X и Z** .

Обсудим еще несколько алгебраических понятий. *Операцией* (или бинарной операцией) на множестве G называется отображение $* : G \times G \rightarrow G$ (т.е. операция любой упорядоченной паре элементов G ставит в соответствие элемент этого же множества). Так, сложение и умножение являются операциями на \mathbb{N} , а разность и деление — нет. Множество G с операцией $*$ на нем обозначается через $(G, *)$.



Определение. $(G, *)$ называется группой, если выполняются следующие три свойства:

- 1) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);
- 2) существует такой элемент $e \in G$, что для любого $a \in G$ выполняется $e * a = a * e = a$ (e — нейтральный элемент);
- 3) для любого $a \in G$ найдется такой элемент $b \in G$, что $a * b = b * a = e$ (элемент b называется обратным к a).

Если кроме этих свойств выполняется (4) $\forall a, b \in G \Rightarrow a * b = b * a$ (коммутативность), то группа называется *коммутативной* или *абелевой*¹. Так, $(\mathbb{Z}, -)$ группой не является (не выполняется ассоциативность), а $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ — абелевы группы.

Определение. Биекция $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ называется преобразованием пространства \mathbb{P}_3 . Через Tr_3 обозначают² множество всех преобразований пространства \mathbb{P}_3 .

Определение. Биекция $f \in Tr_3$ называется движением пространства, если для любых точек $A, B \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow |f(A)f(B)| = |AB|$. Множество всех движений пространства обозначается через D_3 .

Из этих определений сразу следует, что $D_3 \subseteq Tr_3$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Тожественное преобразование $\varepsilon : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ определяется так: $\forall A \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow \varepsilon(A) = A$. Все свойства биекции очевидно выполняются. Также ясно, что $\varepsilon \in D_3$.

Пример 2. Центральная симметрия относительно точки O обозначается Z_O и определяется следующим образом: $\forall A \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow Z_O(A) = A'$, причем O является серединой отрезка AA' . Для Z_O легко проверяются все свойства биекции и то, что $Z_O \in D_3$.

Пример 3. Параллельный перенос на вектор \overrightarrow{AB} обозначается $T_{\overrightarrow{AB}}$ и определяется следующим образом: $\forall X \in \mathbb{P}_3 \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(X) = Y$, причем выполняется равенство $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Для $T_{\overrightarrow{AB}}$ также легко проверяются все свойства биекции и включение $T_{\overrightarrow{AB}} \in D_3$.

¹Нильс Абель (1802–1829) — норвежский математик, доказал неразрешимость в радикалах уравнения пятой степени; продвинул теорию сходимости степенных рядов и полностью исследовал проблему сходимости степенного ряда; заложил основы теории Галуа и теории функций комплексного переменного.

²Transformation (англ.) — преобразование.



Пример 4. Для двух различных точек $A, B \in \mathbb{P}_3$ определим f следующим образом: $f(A) = B$, $f(B) = A$ и $f(X) = X$ для любой точки $X \in \mathbb{P}_3 \setminus \{A, B\}$. Очевидно, что для f все свойства биекции выполняются, поэтому $f \in Tr_3$. Покажем, что $f \notin D_3$. Пусть $|AB| = 3p > 0$ и выберем такую точку $C \in [AB]$, что $|AC| = p$. Из $|f(A)f(C)| = |BC| = 2p \neq p = |AC|$ следует, что преобразование f движением не является.

Теорема 1.1. (Tr_3, \circ) является группой.

Доказательство. 0) если $f, g \in Tr_3$, то $g \circ f$ также является биекцией, поэтому $g \circ f \in Tr_3$ и композиция является операцией на Tr_3 (мы проверили корректность использования обозначения (Tr_3, \circ)).

1) для любых $f, g, h \in Tr_3$ и произвольной точки $A \in \mathbb{P}_3$ выполняется

$$\left(h \circ (g \circ f) \right) (A) = h \left((g \circ f)(A) \right) = h \left(g \left(f(A) \right) \right),$$

$$\left((h \circ g) \circ f \right) (A) = (h \circ g) \left(f(A) \right) = h \left(g \left(f(A) \right) \right),$$

откуда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ и ассоциативность доказана.

2) докажем, что ε — нейтральный элемент в (Tr_3, \circ) . Действительно, для каждого $f \in Tr_3$ и любой точки $A \in \mathbb{P}_3$ верно

$$(\varepsilon \circ f)(A) = \varepsilon(f(A)) = f(A) \quad \text{и} \quad (f \circ \varepsilon)(A) = f(\varepsilon(A)) = f(A),$$

откуда $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$ и ε — нейтральный элемент.

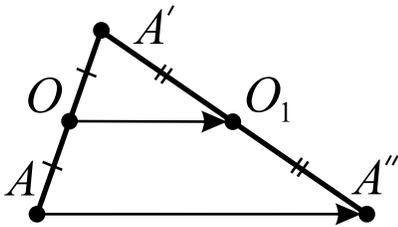


Рис. 39

3) для каждого $f \in Tr_3$ соответствие f^{-1} также является биекцией, т.е. $f^{-1} \in Tr_3$. Кроме того, для каждой точки $A \in \mathbb{P}_3$ из $(A, A') \in f$ следует, что $(A', A) \in f^{-1}$, поэтому $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1} \circ f = \varepsilon$. Аналогично доказывается, что $f \circ f^{-1} = \varepsilon$. Поэтому f^{-1} — обратный элемент к f .

Абелевость (Tr_3, \circ) не получится установить. Достаточно привести пример двух преобразований, на которых коммутативность нарушается. Пусть $f = Z_O$, $g = Z_{O_1}$, $O \neq O_1$ и точка $A \notin (OO_1)$ (рис. 39). Обозначим через $A' = f(A)$ и $A'' = g(A')$. Используя свойства средней линии в $\triangle AA'A''$, получим $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO_1}$, т.е. $g \circ f(A) = T_{2\overrightarrow{OO_1}}(A)$. Аналогично доказывается, ■



что $f \circ g(A) = T_{2\overrightarrow{O_1O}}(A)$. При $O \neq O_1$ выполняется $\overrightarrow{OO_1} \neq \overrightarrow{O_1O}$, поэтому $g \circ f \neq f \circ g$.

Теорема 1.2. Для каждого $f \in Tr_3$ и любых двух фигур $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \mathbb{P}_3$ выполняется $f(\Phi_1 \cap \Phi_2) = f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$.

Доказательство. Равенство двух множеств $X = Y$ обычно проверяется с помощью двух включений: $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пусть $C \in f(\Phi_1 \cap \Phi_2)$, тогда найдется такая точка $A \in \Phi_1 \cap \Phi_2$, что $C = f(A)$. Поскольку $A \in \Phi_1$, верно $C \in f(\Phi_1)$; а раз $A \in \Phi_2$, верно $C \in f(\Phi_2)$. Таким образом, $C \in f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$.

Пусть теперь $C \in f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$, тогда найдутся такие точки $A \in \Phi_1$ и $B \in \Phi_2$, что $f(A) = C = f(B)$. В силу инъективности f , выполняется $A = B \in \Phi_1 \cap \Phi_2$, откуда $C \in f(\Phi_1 \cap \Phi_2)$. ■

Теорема 1.3. (D_3, \circ) — группа.

Доказательство. 0) если $f, g \in D_3$ и $A, B \in \mathbb{P}_3$, обозначим $A' = f(A)$, $A'' = g(A')$, $B' = f(B)$, $B'' = g(B')$, тогда $(g \circ f)(A) = A''$ и $(g \circ f)(B) = B''$. Так как $f, g \in D_3$, то $|A'B'| = |AB|$ и $|A''B''| = |A'B'|$, откуда $|A''B''| = |AB|$ и $g \circ f$ также является движением, поэтому $g \circ f \in D_3$ и композиция является операцией на D_3 (мы проверили корректность использования обозначения (D_3, \circ)).

1) поскольку $D_3 \subseteq Tr_3$, ассоциативность на множестве D_3 также выполняется.

2) поскольку ε — нейтральный элемент в (Tr_3, \circ) , $D_3 \subseteq Tr_3$, $\varepsilon \in D_3$, этот элемент будет нейтральным и в (D_3, \circ) .

3) для каждого $f \in D_3$ соответствие f^{-1} также является преобразованием, осталось показать, что f^{-1} сохраняет расстояние. Выберем произвольные $A', B' \in \mathbb{P}_3$, тогда, в силу сюръективности f , найдутся такие точки $A, B \in \mathbb{P}_3$, что $f(A) = A'$ и $f(B) = B'$. Из условия $f \in D_3$ следует, что $|A'B'| = |AB|$, а из определения обратного соответствия получим $f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1}(B') = B$. Переписывая равенство $|A'B'| = |AB|$ в виде $|A'B'| = |f^{-1}(A')f^{-1}(B')|$, приходим к $f^{-1} \in D_3$. ■

Для невырожденного отрезка введем одно понятие и обсудим простое геометрическое место точек в пространстве.

Определение. Пусть $A \neq B$. Экваториальной плоскостью отрезка $[AB]$



будем называть плоскость α , проходящую через его середину и перпендикулярную прямой (AB) (обозначение: $\alpha = \text{ЭП}[AB]$).

Лемма 1.4. 1) при $A \neq B$ для отрезка $[AB]$ существует и только одна плоскость $\alpha = \text{ЭП}[AB]$.

2) пусть $A \neq B$ и $\alpha = \text{ЭП}[AB]$. Тогда для произвольной точки $X \in \mathbb{P}_3$ условие $X \in \alpha$ равносильно равенству $|XA| = |XB|$.

Доказательство. 1) середина отрезка $[AB]$, точка O , определяется однозначно (теорема 5.5, первая глава Геометрии 10). Точка O и ненулевой вектор \overrightarrow{AB} единственным образом (теорема 3.4, пятая глава Геометрии 10) определяют плоскость α , для которой $O \in \alpha$ и $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. Эта плоскость удовлетворяет последнему определению.

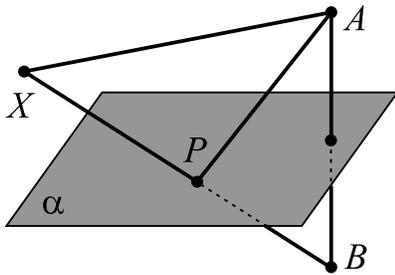


Рис. 40

2) \Rightarrow) обозначим через O середину отрезка $[AB]$, тогда из $X \in \alpha \setminus \{O\}$ следует равенство прямоугольных треугольников XOA и XOB по двум катетам, поэтому $|XA| = |XB|$. При $X = O$ последнее равенство очевидно.

\Leftarrow) пусть $|XA| = |XB|$, но предположим, что $X \notin \alpha$. Б.о.о. предположим, что точка X попала в полупространство $\mathbb{P}_3(\alpha, A)$, тогда найдется такая точка P , что $\{P\} =]XB[\cap \alpha$ (рис. 40). Мы

уже знаем, что $|PB| = |PA|$, поэтому

$$|XA| = |XB| = |XP| + |PB| = |XP| + |PA|,$$

что противоречит неравенству треугольника для $\triangle XPA$. Если же $\triangle XPA$ вырождается и $P \in [XA]$, получим, что $X \notin \mathbb{P}_3(\alpha, A)$. \nearrow

■

Из предыдущей леммы следует, что точки пространства, равноудаленные от концов отрезка, составляют его экваториальную плоскость, это множество точек будем называть *первым геометрическим местом точек пространства* (ГМТП1). Рассмотрим еще несколько примеров движений пространства.

Пример 5. *Зеркальная симметрия* относительно плоскости α обозначается S_α и определяется следующим образом: $\forall A \in \mathbb{P}_3 \setminus \alpha \Rightarrow S_\alpha(A) = A'$, причем α является экваториальной плоскостью отрезка AA' , если же точка $A \in \alpha$, то $S_\alpha(A) = A$. Пусть $B' = S_\alpha(B)$ и покажем, что $|A'B'| = |AB|$. При $(AB) \parallel \alpha$ или $(AB) \perp \alpha$ проверка очевидна. Пусть $\{C\} = (AB) \cap \alpha$. Первый случай: $C \in [AB]$ (рис. 41). Дважды воспользуемся ГМТП1 и получим $|CA| = |CA'|$ и $|CB| = |CB'|$. Из аддитивности длины следует, что



выполняется равенство $|A'B'| = |A'C| + |CB'| = |AC| + |CB| = |AB|$. Второй случай: $C \notin [AB]$. Б.о.о. $A \in [CB]$ (рис. 42). Снова дважды воспользуемся ГМТП1 и получим $|CA| = |CA'|$ и $|CB| = |CB'|$. Из аддитивности длины следует, что верно $|CB'| = |CA'| + |A'B'| = |CA| + |AB| = |CB|$, откуда $|A'B'| = |AB|$.

Пример 6. Скользящая симметрия является композицией двух движений — $T_{\vec{AB}} \circ S_\alpha$ — при условии, что $\vec{AB} \parallel \alpha$. Из предыдущей теоремы и двух примеров следует, что скользящая симметрия является движением. Нетрудно понять, что условие $\vec{AB} \parallel \alpha$ позволяет поменять местами эти два движения, т.е. $T_{\vec{AB}} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ T_{\vec{AB}}$. Зеркальная симметрия становится при $\vec{AB} = \vec{0}$ частным случаем скользящей симметрии.

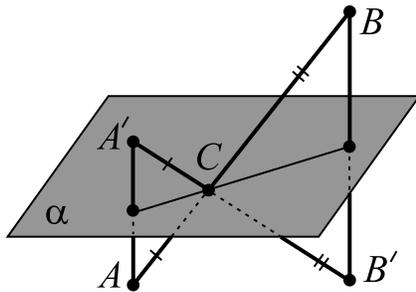


Рис. 41

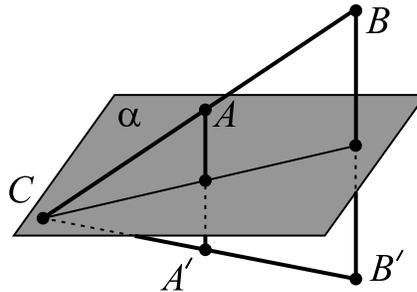


Рис. 42

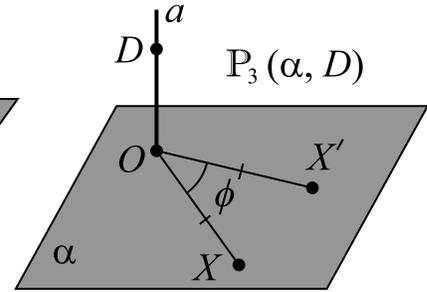


Рис. 43

Пример 7. Напомним, что осью называется прямая a с введенным на ней порядком \leq , который обычно порождается с помощью какого-нибудь базисного вектора \vec{v} этой прямой (т.е. $\vec{v} \parallel a$ и $\vec{v} \neq \vec{0}$). При этом для любых $A, B \in a$ считаем $A \leq B$, если $\vec{AB} \uparrow \vec{v}$. Поворот вокруг оси a на угол величины φ обозначается через R_a^φ и определяется следующим образом. Рассмотрим произвольную точку $X \in \mathbb{P}_3$ и проведем плоскость α так, что $X \in \alpha$ и $\alpha \perp a$, точку пересечения α с прямой a обозначим через O (рис. 43). Затем на оси a выберем точку D так, чтобы $O < D$ (достаточно от точки O отложить вектор \vec{v} и его конец обозначить через D), эта точка задаст полупространство $\mathbb{P}_3(\alpha, D)$. Будем смотреть на плоскость α из полупространства $\mathbb{P}_3(\alpha, D)$ и поворачивать точку X в плоскости α вокруг центра O на угол величины φ в положительном направлении при $\varphi \geq 0^\circ$, и в отрицательном направлении на угол $|\varphi|$, если $\varphi < 0^\circ$ (положительная и отрицательная ориентация плоскости введена в пятом параграфе второй главы Геометрии 10). Полученный образ обозначим через X' , тогда по определению считаем, что $R_a^\varphi(X) = X'$. Чуть позже мы докажем, что R_a^φ является композицией двух зеркальных симметрий, поэтому из предыдущего



примера и теоремы 1.3 следует, что $R_a^\varphi \in D_3$. Ясно, что $R_a^\varphi = R_a^{(\varphi-360^\circ)}$ и $R_a^{0^\circ} = R_a^{360^\circ} = \varepsilon$, поэтому тождественное преобразование является частным случаем поворота. Теперь изменим порядок на прямой a на противоположный, введя его, например, с помощью вектора $\vec{v}_1 = -\vec{v}$, и обозначим новую ось через a_1 , тогда $R_a^\varphi = R_{a_1}^{-\varphi}$. Действительно, сначала мы выберем ту же плоскость α и точку O , но затем перейдем в противоположное полупространство и тот же образ X' получим из точки X вращением вокруг O на угол $-\varphi$.

Пример 8. *Винтовой поворот* является композицией двух движений — $T_{\vec{AB}} \circ R_a^\varphi$ — при условии, что $\vec{AB} \parallel a$. Из предыдущей теоремы и примеров следует, что винтовой поворот является движением. Нетрудно понять, что условие $\vec{AB} \parallel a$ позволяет поменять местами два движения в определении винтового поворота, т.е. $T_{\vec{AB}} \circ R_a^\varphi = R_a^\varphi \circ T_{\vec{AB}}$. Параллельный перенос (при $\varphi = 0^\circ$) и поворот вокруг оси (при $\vec{AB} = \vec{0}$) являются частными случаями винтового поворота.

Пример 9. *Зеркальный поворот* является композицией двух движений — $R_a^\varphi \circ S_\alpha$ — при условии, что $\alpha \perp a$. Ясно, что зеркальный поворот также является движением пространства и частным случаем зеркального поворота (при $\varphi = 0^\circ$) будет зеркальная симметрия. Центральная симметрия Z_O также является частным случаем зеркального поворота, поскольку $Z_O = R_a^{180^\circ} \circ S_\alpha$, где $\{O\} = a \cap \alpha$.

Теорема 1.5. Пусть f — произвольное движение пространства, $A, B, C \in \mathbb{P}_3$ и $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $C \in [AB] \Leftrightarrow C' \in [A'B']$;
- 2) образом прямой является прямая;
- 3) образом луча является луч;
- 4) если $C \notin (AB)$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$;
- 5) образом плоскости является плоскость;
- 6) образом открытой полуплоскости является открытая полуплоскость;
- 7) образом угла является равный ему угол;
- 8) пусть $\Phi = Sph(O, r)$ — сфера с центром в O радиуса r , тогда $f(\Phi) = \Phi'$, причем $\Phi' = Sph(O', r)$, где $O' = f(O)$;
- 9) если $a \parallel b$, то $f(a) \parallel f(b)$,
- 10) если $\alpha \parallel \beta$, то $f(\alpha) \parallel f(\beta)$.

Доказательство. 1) из неравенства треугольника (см. восьмой параграф



первой главы Геометрии 10) следует, что

$$C \in [AB] \Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB| \Leftrightarrow |A'B'| = |A'C'| + |C'B'| \Leftrightarrow C' \in [A'B'].$$

2) предположим, что $a = (AB)$ и покажем, что $f(a) = (A'B') = a'$, проверив включение этих множеств друг в друга.

⊆) для любой точки $C \in (AB)$ одна из точек $\{A, B, C\}$ лежит между двумя другими. Если, б.о.о., $A \in [BC]$, то по (1) получим $A' \in [B'C']$, т.е. $C' \in (A'B')$. Значит, $f(a) \subseteq a'$.

⊇) рассмотрим f^{-1} — обратное движение к данному. Для него выполняется $f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1}(B') = B$. По уже доказанной части получим $f^{-1}(a') \subseteq a$. Можно применить к левой и правой части этого включения движение f , тогда $f(f^{-1}(a')) \subseteq f(a)$, или $a' \subseteq f(a)$. Тем самым мы проверили обратное включение.

3) из (1) следует, что при движении сохраняется отношение лежать между, а из (2) — прямые отображаются на прямые. Луч определялся с помощью этих понятий, поэтому луч переходит в луч.

4) равенство $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ выполняется по ЗКРТ.

5) пусть $\alpha = (ABC)$ и $\alpha' = (A'B'C')$ (из условия $C \notin (AB)$ по (1) получим, что $C' \notin (A'B')$ и α' определена корректно). Обозначим через $F = f(\alpha)$ и проверим, что $\alpha' = F$. Для любых различных точек $X', Y' \in F$ найдутся такие $X, Y \in \alpha$, что $f(X) = X'$ и $f(Y) = Y'$. Мы уже знаем, что $f((XY)) = (X'Y')$ и из включения $(XY) \subseteq \alpha$ следует включение $(X'Y') \subseteq F$. Тем самым мы проверили линейность множества F (определение и классификация линейных множеств даны в шестом параграфе четвертой главы Геометрии 10). Учитывая, что $(A'B')$ и $(A'C')$ содержатся в F , это множество может быть либо плоскостью α' , или всем пространством \mathbb{P}_3 . Если $F = \mathbb{P}_3$, то $f^{-1}(\mathbb{P}_3) = \alpha$, что противоречит условию $f^{-1} \in Tr_3$.

6) следует из (1), (2) и (5). Действительно, открытая полуплоскость определялась с помощью отношения лежать по одну сторону от прямой a , которая содержится в плоскости α . образом прямой a при движении является прямая $a' = f(a)$, образом плоскости α — плоскость $\alpha' = f(\alpha)$, а образом отрезка — отрезок. Причем, если $A, B \in \alpha$ и $[AB] \cap a = \emptyset$, то по второй теореме получим $[A'B'] \cap a' = \emptyset$, откуда точки A' и B' лежат по одну сторону от a' . Поэтому образом открытой полуплоскости (или полуплоскости) с границей a будет открытая полуплоскость (соответственно полуплоскость) с границей a' .



7) угол определялся с помощью лучей и открытых полуплоскостей, поэтому образом угла будет угол. Сохранение величины угла следует из (4).

8) достаточно проверить равенство множеств $f(\Phi) = \Phi'$, доказав включения в обе стороны.

\subseteq) для любой точки $A \in \Phi$ выполняется $|OA| = r$, откуда по определению движения $|A'O'| = |AO| = r$, что дает $A' \in \Phi'$ и $f(\Phi) \subseteq \Phi'$.

\supseteq) рассмотрим f^{-1} — обратное движение к данному. Для него справедливо $f^{-1}(O') = O$. По уже доказанной части получим $f^{-1}(\Phi') \subseteq \Phi$. Можно применить к левой и правой части этого включения движение f , тогда $f(f^{-1}(\Phi')) \subseteq f(\Phi)$, или $\varepsilon(\Phi') \subseteq f(\Phi)$, что дает $\Phi' \subseteq f(\Phi)$. Тем самым мы проверили обратное включение.

9) уже доказано, что $f(a)$ и $f(b)$ — прямые. Если $a = b$, то $f(a) = f(b)$ и $f(a) \parallel f(b)$. Пусть теперь $a \cap b = \emptyset$ и $a, b \subseteq \alpha$, тогда по второй теореме получим $f(a) \cap f(b) = \emptyset$. Из предыдущих пунктов следует, что $f(\alpha) = \alpha'$ — плоскость и $f(a), f(b) \subseteq \alpha'$. Мы проверили, что $f(a) \parallel f(b)$.

10) из (5) следует, что для любых двух плоскостей α и β их образы $\alpha' = f(\alpha)$ и $\beta' = f(\beta)$ также являются плоскостями. При $\alpha = \beta$ получим $\alpha' = \beta'$, откуда $f(\alpha) \parallel f(\beta)$. Если $\alpha \cap \beta = \emptyset$, то из второй теоремы получим $\alpha' \cap \beta' = \emptyset$, т.е. $f(\alpha) \parallel f(\beta)$.

■

2.2. Неподвижные точки движения. Теорема о представлении

Определение. Точка A называется неподвижной точкой (н.т.) движения f , если $f(A) = A$. Если $f(B) = B' \neq B$, то B называется подвижной точкой f .

Любая точка пространства является неподвижной для ε . Все точки плоскости α и только они являются неподвижными точками S_α , а центральная симметрия Z_O имеет единственную неподвижную точку. Параллельный перенос $T_{\overrightarrow{AB}}$, скользящая симметрия $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha$ ($\overrightarrow{AB} \parallel \alpha$) и винтовой поворот $T_{\overrightarrow{AB}} \circ R_a^\varphi$ ($\overrightarrow{AB} \parallel \alpha$) при $A \neq B$ неподвижных точек не имеют.

Лемма 2.1. Пусть $f \in D_3$, A — н.т. движения f , а B — его подвижная точка, причем $f(B) = B'$. Тогда точка A лежит в экваториальной плоскости отрезка $[BB']$.



Доказательство. По определению движения $|AB| = |f(A)f(B)| = |AB'|$, что по ГМТП1 (лемма 1.4) влечет требуемое. ■

В следующем утверждении описываются все движения, которые имеют по крайней мере три различные неподвижные точки, не лежащими на одной прямой³. Не лишним будет напомнить, что преобразования $f, g \in Tr_3$ равны друг другу (пишут $f = g$), если **для любой точки** $A \in \mathbb{P}_3$ следует, что $f(A) = g(A)$. Если же найдется хотя бы одна точка $A_0 \in \mathbb{P}_3$, для которой $f(A_0) \neq g(A_0)$, то $f \neq g$.

Теорема 2.2. Пусть $C \notin (AB)$ и A, B и C — н.т. движения f и $\alpha = (ABC)$. Тогда $f = S_\alpha$ или $f = \varepsilon$.

Доказательство. I. Сразу заметим, что каждая точка $D \in \alpha$ является неподвижной для f . Предположим противное: для некоторой точки $D \in \alpha$ случилось $f(D) = D' \neq D$. Применяя лемму, получим, что A, B и C лежат в экваториальной плоскости $[DD']$, т.е. (ABC) — это и есть экваториальная плоскость для $[DD']$. Отсюда $D \notin \alpha = (ABC)$. ✕

Пусть теперь $D \notin \alpha$. Для $f(D)$ есть две возможности: $f(D) = D$ или $D' = f(D) \neq D$.

1-й случай: $f(D) = D$. Тогда $f(D) = \varepsilon(D)$.

2-й случай: $f(D) = D' \neq D$. По лемме, $\alpha = (ABC)$ является экваториальной плоскостью для $[DD']$, поэтому $f(D) = D' = S_\alpha(D)$.

Итак, для каждой точки $D \in \mathbb{P}_3$ выполняется по крайней мере одно из равенств: $f(D) = \varepsilon(D)$ или $f(D) = S_\alpha(D)$. Но это еще не дает нужного результата (см. абзац перед теоремой) — пока не исключена возможность для f непустое множество точек пространства вне плоскости (ABC) оставлять неподвижными, а другие точки (тоже непустое множество вне плоскости α) симметрично отображать относительно этой плоскости.

II. Докажем, что $f = S_\alpha$ или $f = \varepsilon$. О/п: нашлись такие две точки $D, E \notin \alpha$, для которых $f(D) = D$ и $f(E) = E' \neq E$. Применяя лемму для точек A, B, C, D и отрезка $[EE']$, получим, что $\alpha = (ABC)$ — экваториальная плоскость для $[EE']$ и $D \in \alpha$. ✕

Следствие 1. Если A, B, C, D — н.т. движения f и $D \notin (ABC)$, то $f = \varepsilon$.

³Если $C \notin (AB)$, то точки A, B и C называются неколлинеарными.



Доказательство. По предыдущей теореме выполняется одно из двух: $f = S_{(ABC)}$ или $f = \varepsilon$. Но $S_{(ABC)}(D) = D' \neq D$ (так как D не лежит в плоскости (ABC)), поэтому $f \neq S_{(ABC)}$ и остается лишь $f = \varepsilon$. ■

Неужели при $f, g \in D_3$ для проверки равенства $f = g$ необходимо подставлять каждую точку пространства? Следующее утверждение позволяет выиграть время.

Следствие 2. Пусть $f, g \in D_3$ и найдутся такие четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежащие в одной плоскости⁴, для которых $f(A_i) = g(A_i)$ при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда $f = g$.

Доказательство. Рассмотрим $h = g^{-1} \circ f$. По теореме 1.3 заключаем, что h — движение. Из равенства $f(A_i) = g(A_i)$ получим, что для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$h(A_i) = g^{-1}(f(A_i)) = g^{-1}(g(A_i)) = A_i.$$

Таким образом, A_1, A_2, A_3, A_4 — н.т. h и $A_4 \notin (A_1A_2A_3)$. Применяя предыдущее следствие, получим $h = \varepsilon$ или $g^{-1} \circ f = \varepsilon$. Раз эти два движения равны, то при композиции их с любым движением в результате получатся также два равных движения. Берем композицию⁵ этих движений с движением g , т.е. $g \circ (g^{-1} \circ f) = g \circ \varepsilon$, откуда (используя ассоциативность операции композиции и нейтральность элемента ε) $(g \circ g^{-1}) \circ f = g$ или $f = g$. ■

Из курса арифметики известно, что любое составное натуральное число можно представить в виде произведения простых. Зеркальные симметрии в группе (D_3, \circ) играют роль простых чисел в \mathbb{N} . Об этом следующий результат, который называется *теоремой о представлении*.

Теорема 2.3. Любое движение пространства можно представить в виде композиции не более четырех зеркальных симметрий.

Доказательство. Пусть $f \in D_3$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от количества неподвижных точек у f .

1-й случай: найдутся три неколлинеарные точки A, B и C , для которых $f(A) = A, f(B) = B$ и $f(C) = C$. По предыдущей теореме $f = S_\alpha$ (где плоскость α проходит через A, B и C) или $f = \varepsilon = S_\alpha \circ S_\alpha$. Нам удалось f представить в виде композиции не более двух зеркальных симметрий.

⁴Если $A_4 \notin (A_1A_2A_3)$, то точки A_1, A_2, A_3 и A_4 называются *некомпланарными*.

⁵В математическом фольклоре этот прием называется «домножение слева на g »



2-й случай: нашлись две различные неподвижные точки A и B движения f . Пусть $C \notin (AB)$, $f(C) = C' \neq C$, тогда обозначим через β экваториальную плоскость отрезка $[CC']$. Рассмотрим вспомогательное движение $g = S_\beta \circ f$. По лемме следует, что $A, B \in \beta$, поэтому $g(A) = A$ и $g(B) = B$. Кроме того, $g(C) = S_\beta(f(C)) = S_\beta(C') = C$. Таким образом, A, B и C — н.т. движения g и $C \notin (AB)$. Применяя первый случай к g , получим $g = \varepsilon$ или $g = S_\alpha$, откуда $S_\beta \circ f = \varepsilon$ или $S_\beta \circ f = S_\alpha$. Домножая слева последние два равенства на S_β , приходим к

$$(S_\beta \circ S_\beta) \circ f = S_\beta \circ \varepsilon \quad \text{или} \quad (S_\beta \circ S_\beta) \circ f = S_\beta \circ S_\alpha,$$

что дает $f = S_\beta$ или $f = S_\beta \circ S_\alpha$. Снова f удалось представить в виде композиции не более двух зеркальных симметрий.

3-й случай: нашлась только одна точка A , для которой $f(A) = A$. Пусть $f(B) = B' \neq B$, на этот раз обозначим через γ экваториальную плоскость отрезка $[BB']$ и рассмотрим движение $h = S_\gamma \circ f$. По лемме следует, что $A \in \gamma$, поэтому $h(A) = A$. Еще $h(B) = S_\gamma(f(B)) = S_\gamma(B') = B$. Таким образом, A, B — н.т. движения h . Применяя второй случай к h , получим $h = S_\beta$ или $h = S_\beta \circ S_\alpha$, откуда $S_\gamma \circ f = S_\beta$ или $S_\gamma \circ f = S_\beta \circ S_\alpha$. Домножая слева последние два равенства на S_γ , приходим к

$$(S_\gamma \circ S_\gamma) \circ f = S_\gamma \circ S_\beta \quad \text{или} \quad (S_\gamma \circ S_\gamma) \circ f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha,$$

что дает $f = S_\gamma \circ S_\beta$ или $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$. Теперь движение f удалось представить в виде композиции не более трех зеркальных симметрий.

4-й случай: f не имеет неподвижных точек. Пусть $f(A) = A' \neq A$ и δ — экваториальная плоскость отрезка $[AA']$. Рассмотрим вспомогательное движение $t = S_\delta \circ f$. Для него $t(A) = S_\delta(f(A)) = S_\delta(A') = A$, т.е. A — н.т. для t . По предыдущему случаю $t = S_\gamma \circ S_\beta$ или $t = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$, откуда $f = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta$ или $f = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$. Таким образом, f можно представить в виде композиции не более четырех зеркальных симметрий. ■

Заметим, что предыдущая теорема не запрещает представлять движение в виде композиции бóльшего числа зеркальных симметрий. Так, тождественное преобразование можно легко представить, например, в виде композиции 10^{2024} зеркальных симметрий.



2.3. Свойство подвижности. Теоремы о композициях

Напомним, что равенство $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по определению задает соответствие между элементами этих двух треугольников: $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$, $[BC] = [B_1C_1]$ и т.д. Следующее утверждение называется *свойством подвижности* в \mathbb{P}_3 .

Теорема 3.1. Пусть $C \neq (AB)$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, тогда существует в точности два движения f_1 и f_2 , для которых $f_i(A) = A_1$, $f_i(B) = B_1$ и $f_i(C) = C_1$, при $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство. I. Существование. Обозначим через $B' = T_{AA_1}^{\rightarrow}(B)$, $C' = T_{AA_1}^{\rightarrow}(C)$ и рассмотрим два случая.

1-й случай: $B' = B_1$. Тогда определим движение $g = T_{AA_1}^{\rightarrow}$ и для него уже справедливы соотношения $g(A) = A_1$ и $g(B) = B_1$.

2-й случай: $B' \neq B_1$ (рис. 44). Обозначим через β экваториальную плоскость отрезка $[B'B_1]$ и рассмотрим вспомогательное движение $g = S_{\beta} \circ T_{AA_1}^{\rightarrow}$. Тогда $g(A) = A_1$ (поскольку $[A_1B'] = [AB] = [A_1B_1]$, по ГМТП1 точка A_1 попадет в плоскость β) и $g(B) = S_{\beta} \circ T_{AA_1}^{\rightarrow}(B) = S_{\beta}(B') = B_1$. Поэтому g на первые две точки треугольника ABC действует так: $g(A) = A_1$ и $g(B) = B_1$.

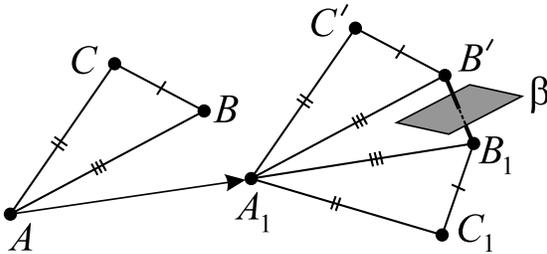


Рис. 44

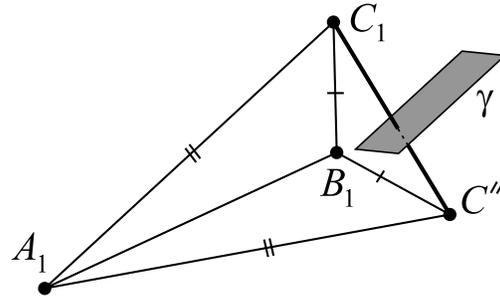


Рис. 45

Обозначим через $C'' = g(C)$. Если $C'' = C_1$, то определим f_1 очень просто: $f_1 = g$. Очевидно, что f_1 переводит вершины треугольника ABC нужным образом. В случае $C'' \neq C_1$ (рис. 45) построим экваториальную плоскость γ отрезка $[C''C_1]$ и определим $f_1 = S_{\gamma} \circ g$. Равенства $[A_1C_1] = [AC] = [A_1C'']$, $[B_1C_1] = [BC] = [B_1C'']$ и ГМТП1 дают $A_1, B_1 \in \gamma$, откуда $f_1(A) = A_1$, $f_1(B) = B_1$ и $f_1(C) = S_{\gamma}(g(C)) = S_{\gamma}(C'') = C_1$. Таким образом, движение f_1 удовлетворяет условиям теоремы.

Движение f_2 определим так: $f_2 = S_{(A_1B_1C_1)} \circ f_1$. Поскольку A_1, B_1 и C_1 — н.т. относительно $S_{(A_1B_1C_1)}$, по-прежнему будут выполняться равен-



ства $f_2(A) = A_1$, $f_2(B) = B_1$ и $f_2(C) = C_1$. Покажем, что $f_2 \neq f_1$. Для этого выберем точку $D' \notin (A_1B_1C_1)$. Движение f_1 сюръективно, поэтому найдется такая точка D , что $f_1(D) = D'$. Заметим теперь, что

$$f_2(D) = S_{(A_1B_1C_1)} \circ f_1(D) = S_{(A_1B_1C_1)}(D') = D'' \neq D' = f_1(D),$$

поскольку D' и D'' лежат по разные стороны от плоскости $(A_1B_1C_1)$. Поэтому $f_1(D) \neq f_2(D)$, что дает $f_1 \neq f_2$.

II. Не более двух. Пусть $f \in D_3$ и $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. Рассмотрим вспомогательное движение $h = f \circ f_1^{-1}$, тогда

$$h(A_1) = f \circ f_1^{-1}(A_1) = f(A) = A_1, \quad h(B_1) = B_1 \quad \text{и} \quad h(C_1) = C_1.$$

Таким образом, h — движение с тремя неколлинеарными неподвижными точками и по теореме 2.2 получим, что $h = \varepsilon$ или $h = S_{(A_1B_1C_1)}$. Отсюда $f \circ f_1^{-1} = \varepsilon$ или $f \circ f_1^{-1} = S_{(A_1B_1C_1)}$. Домножая оба эти равенства справа на f_1 , приходим к $f = f_1$ или $f = S_{(A_1B_1C_1)} \circ f_1 = f_2$. ■

Определение. Число $n \in \mathbb{N}$ называется порядком движения f , если найдутся такие плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, что $f = S_{\alpha_n} \circ \dots \circ S_{\alpha_2} \circ S_{\alpha_1}$. Порядок движения обозначается через $\text{Ord}(f)$.

Заметим, что $\text{Ord}(f)$ определен не однозначно. Например, $\text{Ord}(\varepsilon)$ равен любому четному натуральному числу. Кроме того, из теоремы о представлении сразу следует, что для любого движения f найдется такое число $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, что $\text{Ord}(f) = n$. Последнее замечание дает нам возможность для классификации всех движений пространства — достаточно описать все движения первого, второго, третьего и четвертого порядков. Начнем с самых простых случаев.

Теорема 3.2. Пусть $f \in D_3$.

- 1) $\text{Ord}(f) = 1 \Leftrightarrow f = S_\alpha$.
- 2) $\text{Ord}(f) = 2 \Leftrightarrow f = \varepsilon$, или $f = T_{\overrightarrow{AB}}$, или $f = R_a^\varphi$.

Доказательство. 1) сразу следует из определения порядка движения.

2) условие $\text{Ord}(f) = 2$ равносильно представлению $f = S_\beta \circ S_\alpha$ для некоторых плоскостей α и β . Существует только три возможных варианта расположения в пространстве плоскостей α и β .

1-й случай: $\alpha = \beta$. Тогда $f = S_\alpha \circ S_\alpha = \varepsilon$.

2-й случай: $\alpha \parallel \beta$ и $\alpha \neq \beta$ (рис. 46). Произвольно выберем $C \in \alpha$ и найдем $D = \text{Пр}_\beta(C)$ и пусть $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. Докажем, что $f = T_{\overrightarrow{AB}}$. Для



любой тройки неколлинеарных точек $A_1, A_2, A_3 \in \alpha$ справедливо

$$f(A_i) = S_\beta(S_\alpha(A_i)) = S_\beta(A_i) = T_{\overrightarrow{AB}}(A_i).$$

Выберем теперь точку E , середину отрезка CD , и пусть $A_4 = S_\alpha(E)$, $F = S_\beta(E)$. Тогда $f = S_\beta \circ S_\alpha(A_4) = F$. Из условий $(A_4E) \perp \alpha$, $(EF) \perp \beta$ и $\alpha \parallel \beta$ следует $(A_4E) = (EF)$. Определение зеркальной симметрии позволяет вычислить $|A_4F| = |A_4E| + |EF| = 2|CD|$, что вместе с очевидным соотношением $\overrightarrow{A_4E} \uparrow \overrightarrow{CD}$ (так как $[CD] \subseteq [A_4F]$) дает $\overrightarrow{A_4F} = 2\overrightarrow{CD}$. Последнее равенство приводит к $f(A_4) = F = T_{\overrightarrow{AB}}(A_4)$. В результате равенства $f(A_i) = T_{\overrightarrow{AB}}(A_i)$ при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и условии $A_4 \notin \alpha = (A_1A_2A_3)$ позволяют применить второе следствие из теоремы 2.2 и получить $f = T_{\overrightarrow{AB}}$.

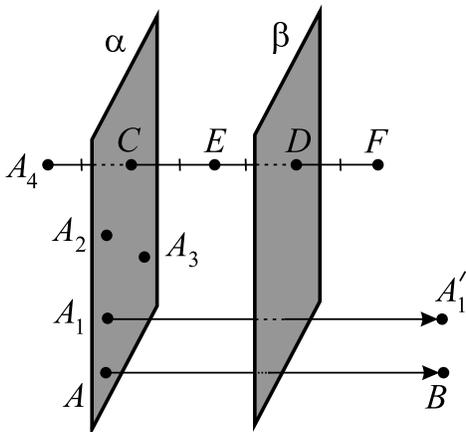


Рис. 46

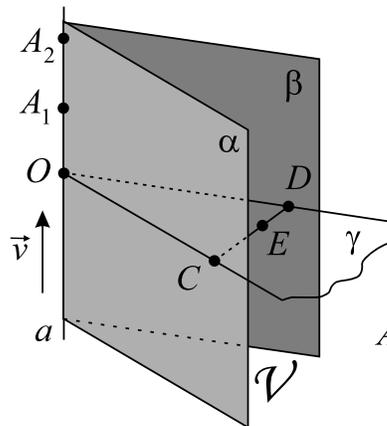


Рис. 47

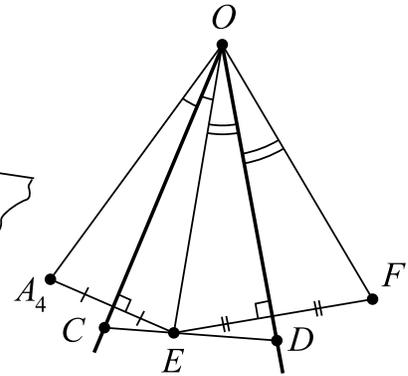


Рис. 48

3-й случай: $\alpha \cap \beta = a$ (рис. 47). Пусть $\widehat{\alpha, \beta} = \varphi/2$, \mathcal{V} — наименьший из двугранных углов, образованных плоскостями α и β , $\gamma \perp a$, $\angle COD = \gamma \cap \mathcal{V}$ ($C \in \alpha$, $D \in \beta$), тогда $\angle COD$ — линейный угол двугранного угла \mathcal{V} и $\widehat{COD} = \varphi/2$. Выберем базисный вектор \vec{v} для прямой a так, чтобы $[OD] = R_a^{\varphi/2}([OC])$. Осталось доказать, что $f = R_a^\varphi$. Первые две точки — A_1 и A_2 — произвольно выберем на оси a , они являются неподвижными для этих двух движений. В качестве A_3 выберем точку C , для нее

$$f(C) = S_\beta(S_\alpha(C)) = S_\beta(C) = R_a^\varphi(C).$$

Пусть E — произвольная внутренняя точка отрезка CD и по определению будем считать, что $A_4 = S_\alpha(E)$ и $F = S_\beta(E)$. Учитывая, что $\gamma \perp a$ (что сразу дает $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$ — см. седьмой параграф пятой главы



Геометрии 10), получим включения (EA_4) , $(EF) \subseteq \gamma$, что позволяет рассмотреть рис. 48. Равенства $\angle A_4OC = \angle COE$ и $\angle EOD = \angle DOF$ дают $\widehat{A_4OF} = 2\widehat{COD} = \varphi$ и $f(A_4) = F = R_a^\varphi(A_4)$. В результате равенства $f(A_i) = R_a^\varphi(A_i)$ при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ и условие $A_4 \notin \alpha = (A_1A_2A_3)$ позволяют применить второе следствие из теоремы 2.2 и получить $f = R_a^\varphi$. ■

Следствие. Пусть $\alpha \cap \beta = a$ и α_1 — произвольная плоскость, проходящая через прямую a . Тогда найдутся такие две плоскости γ и δ , что $S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ S_{\alpha_1} = S_{\alpha_1} \circ S_\delta$.

Доказательство. Пусть $\varphi/2 = \widehat{\alpha, \beta}$. Из третьего случая предыдущей теоремы следует, что на прямой a можно определить порядок таким образом, чтобы $S_\beta \circ S_\alpha = R_a^\varphi$. Выберем в качестве $\gamma = R_a^{\varphi/2}(\alpha_1)$, $\delta = R_a^{-\varphi/2}(\alpha_1)$ и снова применим третий случай предыдущей теоремы:

$$S_\gamma \circ S_{\alpha_1} = S_{\alpha_1} \circ S_\delta = R_a^\varphi = S_\beta \circ S_\alpha.$$

Лемма 3.3. Пусть плоскости α , β перпендикулярны плоскости γ и $a = \alpha \cap \beta$. Тогда $a \perp \gamma$.

Доказательство. Выберем произвольно точку $O \in a$ и проведем через нее прямую l , которая перпендикулярна плоскости γ (существование и единственность такой прямой гарантируется теоремой 3.2 третьей главы Геометрии 10). Теперь условия $l \perp \gamma$ и $\alpha \perp \gamma$ влекут (по лемме 7.2 пятой главы Геометрии 10) параллельность прямой l и плоскости α . Учитывая, что $O \in \alpha \cap l$, получим $l \subseteq \alpha$. Аналогично доказывается включение $l \subseteq \beta$, откуда $l = \alpha \cap \beta = a$ и $a \perp \gamma$. ■

Лемма 3.4. 1) если $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$, то $f_1 = T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha = S_{\alpha_1}$ и $f_2 = S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{AB}} = S_{\alpha_2}$, причем плоскости α_1 и α_2 параллельны плоскости α .

2) для любой плоскости α и вектора \overrightarrow{AB} движения $g_1 = T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha$ и $g_2 = S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ являются скользящими симметриями.

Доказательство. 1) определим $\alpha_1 = T_{\overrightarrow{AB}/2}(\alpha)$ (рис. 49), тогда верно, что $\alpha \parallel \alpha_1$. Воспользуемся условием $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$ и вторым случаем доказательства утверждения (2) предыдущей теоремы для представления $T_{\overrightarrow{AB}} = S_{\alpha_1} \circ S_\alpha$, откуда

$$f_1 = T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha = (S_{\alpha_1} \circ S_\alpha) \circ S_\alpha = S_{\alpha_1} \circ (S_\alpha \circ S_\alpha) = S_{\alpha_1}.$$



Аналогично, выбрав в качестве $\alpha_2 = T_{-\vec{AB}/2}(\alpha)$ (рис. 50), получим справедливость $T_{\vec{AB}} = S_\alpha \circ S_{\alpha_2}$, $\alpha_2 \parallel \alpha$ и

$$f_2 = S_\alpha \circ T_{\vec{AB}} = S_\alpha \circ S_\alpha \circ S_{\alpha_2} = S_{\alpha_2}.$$

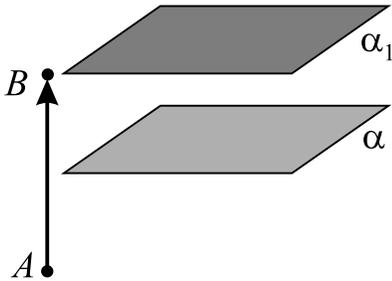


Рис. 49

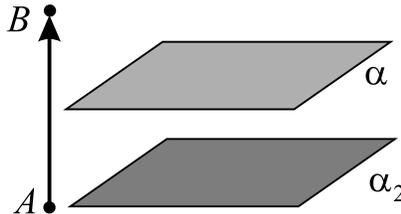


Рис. 50

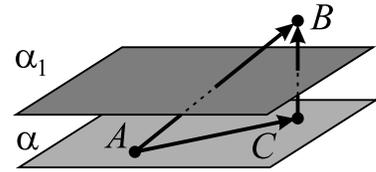


Рис. 51

2) при $\vec{AB} \parallel \alpha$ утверждение сразу следует из определения скользящей симметрии. Если же $\vec{AB} \perp \alpha$, то из (1) получим $g_1 = S_{\alpha_1}$ и $g_2 = S_{\alpha_2}$ — скользящие симметрии с нулевым вектором переноса. Осталось рассмотреть случай, когда \vec{AB} не перпендикулярен и не параллелен плоскости α (рис. 51). Можно считать, что $A \in \alpha$ (иначе этот вектор можно отложить от некоторой точки плоскости α). Обозначим через $C = \text{Pr}_\alpha(B)$, тогда $\vec{AC} \parallel \alpha$, $\vec{CB} \perp \alpha$ и

$$g_1 = T_{\vec{AB}} \circ S_\alpha = T_{\vec{AC}} \circ (T_{\vec{CB}} \circ S_\alpha) = T_{\vec{AC}} \circ S_{\alpha_1},$$

причем из (1) следует, что $\alpha_1 \parallel \alpha \parallel \vec{AC}$ (так как $\alpha_1 = T_{\vec{CB}/2}(\alpha)$). Поэтому движение g_1 является скользящей симметрией относительно плоскости α_1 и вектора \vec{AC} . Аналогично доказывается, что g_2 — скользящая симметрия относительно плоскости $\alpha_2 = T_{-\vec{CB}/2}(\alpha)$ и вектора \vec{AC} . ■

Теорема 3.5. Пусть $f \in D_3$. Тогда $\text{Ord}(f) = 3 \Leftrightarrow f$ — скользящая симметрия или f — зеркальный поворот.

Доказательство. \Leftarrow) из предыдущей теоремы следует, что параллельный перенос и поворот вокруг оси имеют второй порядок, поэтому скользящая симметрия $T_{\vec{AB}} \circ S_\alpha$ и зеркальный поворот $R_\alpha^\varphi \circ S_\alpha$ имеют третий порядок.

\Rightarrow) пусть $\text{Ord}(f) = 3$, т.е. $f = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ и рассмотрим несколько случаев расположения плоскостей α , β и γ .

1-й случай: $\alpha \parallel \beta$. Тогда по второй теореме получим, что $S_\beta \circ S_\alpha = T_{\vec{AB}}$ и движение $f = S_\gamma \circ T_{\vec{AB}}$ по второму утверждению предыдущей леммы является скользящей симметрией.



2-й случай: $\alpha \cap \beta = a$ и $a \parallel \gamma$ (рис. 52). Проведем через прямую a плоскость β_1 так, чтобы $\beta_1 \parallel \gamma$. Для этого сначала из условия $a \parallel \gamma$ найдем такую прямую $a_1 \subseteq \gamma$, чтобы $a_1 \parallel a$. Затем, выбрав произвольно $A_1 \in a_1$ и $B_1 \in (\gamma \setminus a_1)$ проведем $b_1 = (A_1 B_1)$ (рис. 53). Используя аксиому Евклида, через точку $A \in a$ построим прямую b так, чтобы $b \parallel b_1$, тогда плоскость $\beta_1 = (a, b)$ будет искомой. Следствие из предыдущей теоремы гарантирует существование такой плоскости α_1 , что $a \subseteq \alpha_1$ и $S_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1}$, откуда

$$f = S_\gamma \circ (S_\beta \circ S_\alpha) = S_\gamma \circ (S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1}) = (S_\gamma \circ S_{\beta_1}) \circ S_{\alpha_1} = T_{\overrightarrow{CB}} \circ S_{\alpha_1}$$

и f является скользящей симметрией по второму утверждению предыдущей леммы.

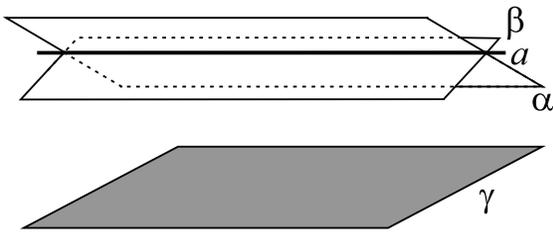


Рис. 52

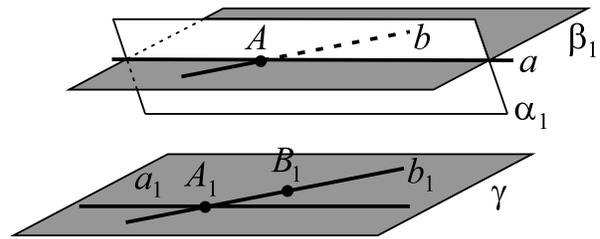


Рис. 53

3-й случай: $\alpha \cap \beta = a$ и $a \perp \gamma$. По предыдущей теореме получим, что $S_\beta \circ S_\alpha = R_a^c$, поэтому условие $a \perp \gamma$ сразу дает, что движение $f = S_\gamma \circ R_a^c$ является зеркальным поворотом.

4-й случай: $\alpha \cap \beta = a$ и a — наклонная к плоскости γ (рис. 54). Обозначим через O точку пересечения $a \cap \gamma$ и проведем через нее прямую b так, чтобы $b \perp \gamma$. Определим $\beta_1 = (a, b)$ и по предыдущему следствию найдем такую плоскость α_1 , что $a \subseteq \alpha_1$ и $S_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1}$ (рис. 55). Условия $b \perp \gamma$ и $b \subseteq \beta_1$ дают $\beta_1 \perp \gamma$. Через точку O теперь проведем прямую d так, чтобы $d \perp \alpha_1$ и определим через $\gamma_1 = (d, c)$, где $c = \gamma \cap \beta_1$ (на рис. 55 может показаться, что $d \subseteq \beta_1$, но это не так). Пусть $\beta_2 \perp \gamma_1$ и $c \subseteq \beta_2$, тогда $S_{\gamma_1} \circ S_{\beta_2} = S_\gamma \circ S_{\beta_1}$ (поскольку $c = \gamma \cap \beta_1 = \gamma_1 \cap \beta_2$, $\gamma \perp \beta_1$ и $\gamma_1 \perp \beta_2$).

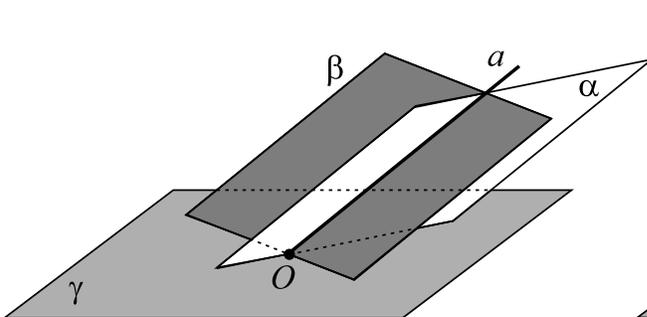


Рис. 54

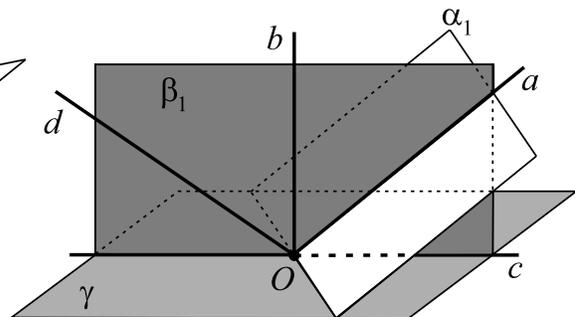


Рис. 55



Заметим, что условия $d \perp \alpha_1$ и $d \subseteq \gamma_1$ гарантируют $\gamma_1 \perp \alpha_1$. Выбор плоскости β_2 также дает $\gamma_1 \perp \beta_2$. Очевидно, что $O \in \alpha_1 \cap \beta_2$, поэтому существует $a^* = \alpha_1 \cap \beta_2$. Теперь можно применить лемму 3.3 и получить $a^* \perp \gamma_1$. В результате

$$\begin{aligned} f &= S_\gamma \circ (S_\beta \circ S_\alpha) = S_\gamma \circ (S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1}) = (S_\gamma \circ S_{\beta_1}) \circ S_{\alpha_1} = \\ &= (S_{\gamma_1} \circ S_{\beta_2}) \circ S_{\alpha_1} = S_{\gamma_1} \circ (S_{\beta_2} \circ S_{\alpha_1}) = S_{\gamma_1} \circ R_{a^*}^\varphi, \end{aligned}$$

причем $a^* \perp \gamma_1$. Отсюда следует, что f — зеркальный поворот. ■

Напомним, что в определении винтового поворота $R_a^\varphi \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ должно выполняться условие $\overrightarrow{AB} \parallel a$. Докажем, что при других расположениях вектора переноса и оси поворота всё равно получится винтовой поворот, но с другой осью и другим вектором переноса.

Лемма 3.6. 1) для любого вектора \overrightarrow{AB} и поворота R_a^φ композиция $f_1 = R_a^\varphi \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ является винтовым поворотом $R_b^\varphi \circ T_{\overrightarrow{CD}}$, причем оси a и b параллельны.

2) для любого вектора \overrightarrow{AB} и поворота R_a^φ композиция $f_2 = T_{\overrightarrow{AB}} \circ R_a^\varphi$ является винтовым поворотом $T_{\overrightarrow{EF}} \circ R_c^\varphi$, причем оси a и c параллельны.

Доказательство. 1) при $\overrightarrow{AB} \parallel a$ доказательство очевидно следует из определения винтового поворота: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ и $b = a \parallel a$. Во всех остальных случаях представим $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}$, где $\overrightarrow{AK} \parallel a$ и $\overrightarrow{KB} \perp a$ (можно считать, что $A \in a$, тогда в качестве K выберем $\text{Пр}_a(B)$). Точка $A \in a$ и ненулевой вектор \overrightarrow{KB} однозначно определяют такую плоскость α , для которой $A \in \alpha$ и $\overrightarrow{KB} \perp \alpha$ (теорема 3.4 пятой главы Геометрии 10). Условия $\overrightarrow{KB} \perp a$, $\overrightarrow{KB} \perp \alpha$ и $A \in a \cap \alpha$ дают $a \subseteq \alpha$ (следует из леммы 4.1 пятой главы Геометрии 10). В очередной раз применив следствие из теоремы 3.2, найдем такую плоскость β , что $R_a^\varphi = S_\beta \circ S_\alpha$ (при этом $\widehat{\alpha, \beta} = \varphi/2$). По (1) леммы 3.4 композицию $S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{KB}}$ можно заменить на симметрию S_{α^*} , где $\alpha^* \parallel \alpha$. Последнее условие сразу дает, что прямые $a = \alpha \cap \beta$ и $b = \alpha^* \cap \beta$ параллельны между собой и $\varphi/2 = \widehat{\alpha, \beta} = \widehat{\alpha^*, \beta}$. В результате

$$f_1 = (S_\beta \circ S_\alpha) \circ (T_{\overrightarrow{KB}} \circ T_{\overrightarrow{AK}}) = S_\beta \circ (S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{KB}}) \circ T_{\overrightarrow{AK}} = (S_\beta \circ S_{\alpha^*}) \circ T_{\overrightarrow{AK}} = R_b^\varphi \circ T_{\overrightarrow{AK}}.$$

Осталось определить $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AK}$ и заметить, что из $\overrightarrow{AK} \parallel a$ и $a \parallel b$ следует, что $\overrightarrow{CD} \parallel b$ и композиция $R_b^\varphi \circ T_{\overrightarrow{CD}}$ является винтовым поворотом.

Утверждение (2) леммы доказывается аналогично (1). ■



Теорема 3.7. Пусть $f \in D_3$. Тогда $\text{Ord}(f) = 4 \Leftrightarrow f$ — винтовой поворот.

Доказательство. \Leftarrow) из теоремы 3.2 следует, что параллельный перенос и поворот вокруг оси имеют второй порядок, поэтому четвертый порядок имеет винтовой поворот $R_a^\varphi \circ T_{\overrightarrow{AB}}$.

\Rightarrow) пусть $\text{Ord}(f) = 4$, т.е. $f = S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ и рассмотрим несколько случаев расположения плоскостей α, β, γ и δ .

1-й случай: $\alpha \parallel \beta$ или $\gamma \parallel \delta$. Б.о.о. считаем, что $\alpha \parallel \beta$, тогда выполняется $S_\beta \circ S_\alpha = T_{\overrightarrow{AB}}$. К композиции $S_\delta \circ S_\gamma$ также можно применить теорему 3.2 и получить $S_\delta \circ S_\gamma = R_a^\varphi$ (если $\gamma \cap \delta = a$ и $\varphi/2 = \widehat{\gamma, \delta}$) или $S_\delta \circ S_\gamma = T_{\overrightarrow{CD}}$ (если $\gamma \parallel \delta$). В результате $f = T_{\overrightarrow{CD}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ (напомним, что параллельный перенос является частным случаем винтового поворота) или $f = R_a^\varphi \circ T_{\overrightarrow{AB}}$. Применяя предыдущую лемму, заключаем, что f — винтовой поворот.

2-й случай: $\alpha \cap \beta = a, \gamma \cap \delta = b$ и найдется такая плоскость λ , для которой $a, b \subseteq \lambda$. Этот случай реализуется при $a \parallel b$ или $a \cap b \neq \emptyset$. Б.о.о. считаем, что $a \cap b \neq \emptyset$ (рис. 56). Дважды воспользуемся следствием теоремы 3.2 и найдем такие две плоскости α_1 и δ_1 , что $a \subseteq \alpha_1, b \subseteq \delta_1, S_\beta \circ S_\alpha = S_\lambda \circ S_{\alpha_1}$ и $S_\delta \circ S_\gamma = S_{\delta_1} \circ S_\lambda$. Отсюда

$$f = (S_\delta \circ S_\gamma) \circ (S_\beta \circ S_\alpha) = (S_{\delta_1} \circ S_\lambda) \circ (S_\lambda \circ S_{\alpha_1}) = S_{\delta_1} \circ S_{\alpha_1}$$

является движением второго порядка или (по теореме 3.2) частным случаем винтового поворота.

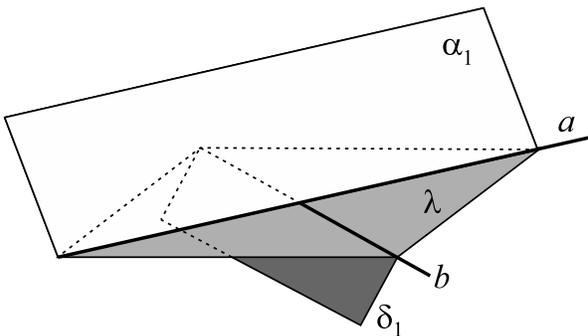


Рис. 56

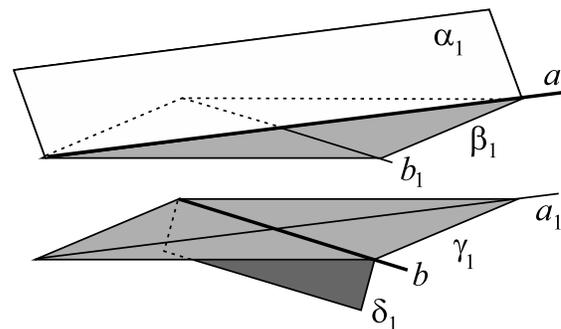


Рис. 57

3-й случай: $\alpha \cap \beta = a, \gamma \cap \delta = b$ и прямые a и b — скрещивающиеся. Проведем прямые a_1 и b_1 так, чтобы $a_1 \parallel a, a_1 \cap b \neq \emptyset$ и $b_1 \parallel b, b_1 \cap a \neq \emptyset$ (рис. 57). Из критерия параллельности двух плоскостей сразу получим, что плоскости $\beta_1 = (a, b_1)$ и $\gamma_1 = (b, a_1)$ параллельны. Снова дважды воспользуемся следствием теоремы 3.2 и найдем такие плоскости α_1 и δ_1 , что $a \subseteq \alpha_1,$



$b \subseteq \delta_1$, $S_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1}$ и $S_\delta \circ S_\gamma = S_{\delta_1} \circ S_{\gamma_1}$. Отсюда

$$f = (S_\delta \circ S_\gamma) \circ (S_\beta \circ S_\alpha) = S_{\delta_1} \circ (S_{\gamma_1} \circ S_{\beta_1}) \circ S_{\alpha_1} = S_{\delta_1} \circ T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_{\alpha_1}.$$

Лемма 3.4 позволяет переписать композицию $T_{\overrightarrow{XY}} \circ S_{\alpha_1}$ в виде $T_{\overrightarrow{CD}} \circ S_{\alpha_2}$, причем $\overrightarrow{CD} \parallel \alpha_2$. В скользящей симметрии можно переставить местами зеркальную симметрию и параллельный перенос, поэтому исходное движение мы свели к $f = S_{\delta_1} \circ S_{\alpha_2} \circ T_{\overrightarrow{CD}}$. В первом случае было доказано, что такая композиция является винтовым поворотом. ■

Итогом наших исследований является следующее утверждение, которое было бы логично назвать *теоремой Шалля⁶-Д'Аламбера⁷* для пространства.

Теорема 3.8. $f \in D_3 \Leftrightarrow f$ является винтовым поворотом, или зеркальным поворотом, или скользящей симметрией.

Доказательство. \Leftarrow) очевидно, поскольку композиция движений является движением.

\Rightarrow) из теоремы о представлении (теорема 2.3) для $f \in D_3$ найдется такое число $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, что $\text{Ord}(f) = n$. Рассмотрим четыре простых случая.

1-й случай: $\text{Ord}(f) = 1$. Сразу получаем, что $f = S_\alpha$ — скользящая симметрия (с нулевым вектором переноса).

2-й случай: $\text{Ord}(f) = 2$. По теореме 3.2 получим, что f — параллельный перенос или поворот вокруг оси, что является частным случаем винтового поворота.

3-й случай: $\text{Ord}(f) = 3$. По теореме 3.5 получим, что f — зеркальный поворот или скользящая симметрия.

4-й случай: $\text{Ord}(f) = 4$. По теореме 3.7 получим, что f является винтовым поворотом. ■

⁶Мишель Шаль (1793–1880) — французский математик, профессор (1841) Политехнической школы в Париже, с 1846 становится первым геометром Франции; создал новое научное направление — вычислительную геометрию; в рядах Национальной гвардии дважды защищал Париж (1814, 1870).

⁷Жан Д'Аламбер (1717–1783) — французский математик, механик, философ; незаконный сын маркизы де Тансен, воспитывался в семье стекольщика; основные математические исследования относятся к теории дифференциальных уравнений, заложил основы математической физики, первым при решении дифференциальных уравнений стал применять теорию функций комплексного переменного; некоторые его работы посвящены теории рядов и алгебре; дал первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы алгебры, во Франции она называется теоремой Д'Аламбера–Гаусса.



Упражнения

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 являются (соответственно) серединами ребер $[SA]$, $[SB]$, $[SC]$ и $[SD]$. Докажите, что прямые (AC_1) , (BD_1) , (CA_1) и (DB_1) пересекаются в одной точке.
2. Две различные сферы имеют общую окружность. Докажите, что линия центров этих сфер перпендикулярна плоскости этой окружности.
3. Постройте оси симметрии двух данных скрещивающихся прямых.
4. Найдите какой-либо поворот, отличный от осевой симметрии, который отображает одну из двух данных скрещивающихся прямых на другую.
5. Даны две скрещивающиеся прямые a , b и точки $A \in a$, $B \in b$. Найдите такой поворот R_c^φ , что $R_c^\varphi(a) = b$ и $R_c^\varphi(A) = B$.
6. Даны два равных отрезка, не лежащие в одной плоскости. Найдите все движения пространства, которые отображают один из данных отрезков на другой.
7. Даны два равных треугольника с общей вершиной, но не лежащих в одной плоскости. Докажите, что один из них можно отобразить на другой некоторым поворотом около оси.
8. Точки A и B лежат в одном полупространстве относительно плоскости α . Найдите такую точку $M \in \alpha$, для которой сумма $|AM| + |MB|$ минимальна.
9. Точка M лежит внутри меньшего из двугранных углов, образованных плоскостями α и β . Найдите такие точки $A \in \alpha$ и $B \in \beta$, чтобы периметр треугольника MAV был минимальным.
10. Чему равна композиция зеркальной и центральной симметрий, если плоскость первой не содержит центр второй симметрии.
11. Чему равна композиция симметрий относительно прямых, содержащих стороны некоторого треугольника.
12. Каким движением является композиция трех осевых симметрий, чьи оси перпендикулярны и проходят через одну точку?
13. Докажите, что композиция вращений вокруг двух прямых, проходящих через точку O , является вращением вокруг третьей прямой, также проходящей через точку O (теорема Л. Эйлера⁸, доказанная им в 1776 году).
14. Пусть $f \in D_3$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 4$ и $\text{Ord}(f) = n$. Докажите, что $\text{Ord}(f) = n - 2$.
15. Докажите, что $\text{Ord}(\varepsilon)$ не может быть равен нечетному натуральному числу.

⁸Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский, немецкий и русский математик, считается одним из величайших математиков в истории, автор более 850 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, оптике, баллистике, теории музыки; родоначальник теории графов; почти полжизни провел в России, хорошо знал русский язык и часть учебников публиковал на русском; первые русские академики-математики были учениками Эйлера.



16. Движение f называется *движением первого рода* (или сохраняющим ориентацию), если $\text{Ord}(f)$ — четное число. Движение f называется *движением второго рода* (или меняющим ориентацию), если $\text{Ord}(f)$ — нечетное число. Докажите, что род движения определен корректно. Попробуйте усилить результат Шаля-Д'Аламбера, используя движения первого рода и движения второго рода.

17. Через середину каждого ребра тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположному ребру. Докажите, что шесть полученных плоскостей имеют общую точку (она называется *точкой Монжа*⁹ этого тетраэдра).

2.4. Группы симметрий пирамид и призм

Определение. Фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ инвариантна относительно $f \in D_3$, если $f(\Phi) = \Phi$. Множество всех движений, относительно которых Φ инвариантна, обозначается через $D_3(\Phi)$ (т.е. $D_3(\Phi) = \{f \in D_3 : f(\Phi) = \Phi\}$).

Очевидно, что $D_3(\mathbb{P}_3) = D_3 = D_3(\emptyset)$ и $\varepsilon \in D_3(\Phi)$ для любой фигуры Φ . Нетрудно заметить, что для плоскости α и ненулевого вектора $\overrightarrow{AB} \parallel \alpha$ справедливо $T_{\overrightarrow{AB}} \in D_3(\alpha)$, хотя на этой плоскости нет ни одной неподвижной точки движения $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Теорема 4.1. $(D_3(\Phi), \circ)$ — группа.

Доказательство. 0) для любых $f, g \in D_3(\Phi)$ выполняется равенство $g \circ f(\Phi) = g(\Phi) = \Phi$, поэтому $g \circ f \in D_3(\Phi)$, т.е. композиция является операцией на множестве $D_3(\Phi)$ и мы проверили корректность использования обозначения $(D_3(\Phi), \circ)$.

1) ассоциативность выполняется, поскольку $D_3(\Phi) \subseteq Tr_3$.

2) выше мы уже заметили, что $\varepsilon \in D_3(\Phi)$. Будучи нейтральным элементом в Tr_3 , тождественное преобразование будет нейтральным и в любом подмножестве Tr_3 .

3) для любого $f \in D_3(\Phi)$ выполняется $f(\Phi) = \Phi$. Подействуем на левую и правую часть этого равенства движением f^{-1} и получим соотношение $f^{-1}(f(\Phi)) = f^{-1}(\Phi)$, откуда $\Phi = f^{-1}(\Phi)$. Мы проверили, что $f^{-1} \in D_3(\Phi)$. ■

⁹Гаспар Монж (1746–1818) — французский математик и механик, политический деятель, морской министр (1793), основатель и профессор Политехнической школы (Париж), организатор французской военной промышленности в годы Великой французской революции, в период Реставрации был изгнан из Национального института и Политехнической школы; ему принадлежат основополагающие результаты аналитической, проективной и дифференциальной геометрий, математическому анализу; один из создателей науки о машинах; в 1802 году издал первый курс аналитической геометрии.



Алгоритм нахождения $D_3(\Phi)$. Теорема Шаля-Д'Аламбера перечисляет все типы движений плоскости, поэтому для определения $D(\Phi)$ достаточно:

- 1) найти все винтовые повороты, для которых $R_a^\varphi \circ T_{\vec{AB}}(\Phi) = \Phi$;
- 2) найти все зеркальные повороты, для которых $R_a^\varphi \circ S_\alpha(\Phi) = \Phi$;
- 3) найти все скользящие симметрии, для которых $T_{\vec{AB}} \circ S_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Напомним, что фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ называется ограниченной, если найдется точка $A \in \mathbb{P}_3$ и такая ее окрестность $O_\varepsilon(A)$, что $\Phi \subseteq O_\varepsilon(A)$. В частности, $O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{P}_3 : |XA| < \varepsilon\}$ — ограниченное множество, поскольку $O_\varepsilon(A) \subseteq O_{2\varepsilon}(A)$ (радиус окрестности положителен по определению). Для ограниченных фигур поиск $D(\Phi)$ сильно упрощается, об этом пойдет речь в следующей теореме, но сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4.2. *Фигура Φ является ограниченной тогда и только тогда, когда для любой точки $B \in \mathbb{P}_3$ найдется такая ее окрестность $O_\delta(B)$, что $\Phi \subseteq O_\delta(B)$.*

Доказательство. \Rightarrow) из ограниченности Φ найдем точку $A \in \mathbb{P}_3$ и такую ее окрестность $O_\varepsilon(A)$, для которой $\Phi \subseteq O_\varepsilon(A)$. Теперь для произвольной точки $B \in \mathbb{P}_3$ обозначим через $r = |AB|$ и $\delta = r + \varepsilon$ (рис. 58). Тогда для любой точки $X \in O_\varepsilon(A)$ по неравенству треугольника получим

$$|XB| \leq |XA| + |AB| < \varepsilon + r = \delta,$$

откуда следует включение $\Phi \subseteq O_\delta(B)$.

\Leftarrow) очевидно, поскольку существование хотя бы одной точки B с таким свойством дает ограниченность фигуры Φ .

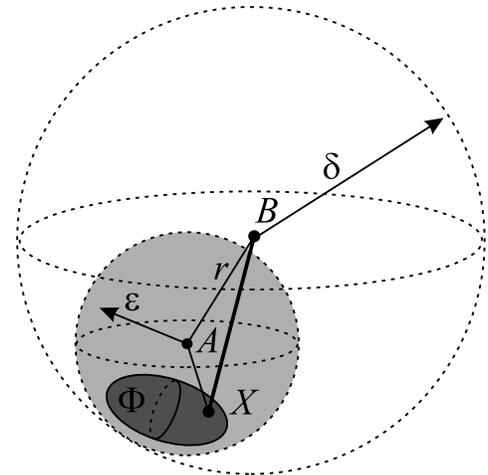


Рис. 58

Теорема 4.3. *Пусть Φ — непустое ограниченное множество. Тогда в $D_3(\Phi)$ нет параллельных переносов, скользящих симметрий и винтовых поворотов с нетривиальным (т.е. ненулевым) вектором переноса.*

Доказательство. I. Докажем, что в $D_3(\Phi)$ нет нетривиальных параллельных переносов. О/п: нашелся $T_{\vec{LM}} \in D_3(\Phi)$ и $L \neq M$. По предыдущей лемме найдется такая окрестность $O_\delta(L)$, для которой $\Phi \subseteq O_\delta(L)$. Воспользуемся аксиомой Архимеда (аксиома V.1) и свойством функции длины



(утверждение (3) теоремы 6.1, Геометрия 10), найдем такое натуральное число n , для которого выполняется $n \cdot |LM| > 2\delta$. Обозначим через f композицию n параллельных переносов $T_{\overrightarrow{LM}}$, т.е. $f = (T_{\overrightarrow{LM}})^n = T_{n \cdot \overrightarrow{LM}}$. Пусть для краткости $F = O_\delta(L)$, $F' = f(F)$ и $L' = f(L)$ — центр F' (рис. 59). Тогда $|LL'| = n|LM| > 2\delta$, поэтому $F \cap F' = \emptyset$. Из $T_{\overrightarrow{LM}} \in D_3(\Phi)$ и первой теоремы этого параграфа следует, что $f \in D_3(\Phi)$, поэтому $\Phi = f(\Phi) \subseteq F'$. Откуда $\Phi \subseteq F \cap F' = \emptyset$, что противоречит непустоте фигуры Φ .

II. Докажем, что в $D_3(\Phi)$ нет скользящих симметрий с нетривиальным вектором переноса. О/п: нашлось движение $f = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_\alpha \in D_3(\Phi)$, $\overrightarrow{LM} \parallel \alpha$ и $L \neq M$. Б.о.о. можно считать, что $L \in \alpha$. Нетрудно проверить, что из $\overrightarrow{LM} \parallel \alpha$ следует, что $T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{LM}}$. По первой теореме этого параграфа из $f, f \in D_3(\Phi)$ следует, что $f \circ f \in D_3(\Phi)$, но

$$f^2 = f \circ f = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_\alpha \circ S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{LM}} = T_{\overrightarrow{LM}} \circ T_{\overrightarrow{LM}} = T_{2 \cdot \overrightarrow{LM}}.$$

Отсюда $T_{2 \cdot \overrightarrow{LM}} \in D_3(\Phi)$, а это противоречит ранее доказанному утверждению о нетривиальных параллельных переносах.

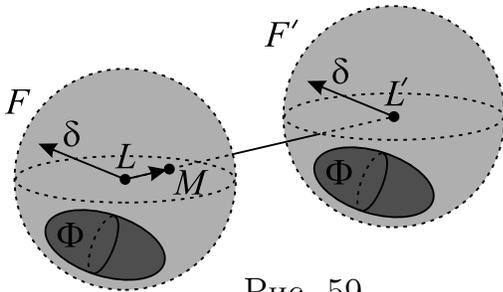


Рис. 59

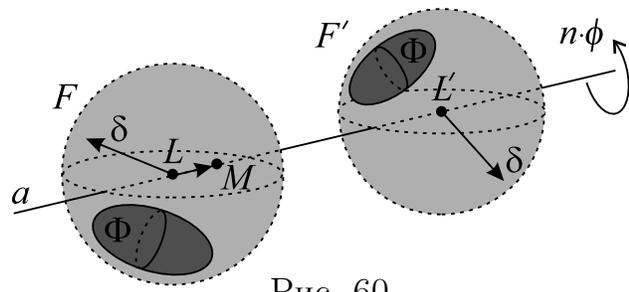


Рис. 60

III. Докажем, что в $D_3(\Phi)$ нет винтовых поворотов с нетривиальным вектором переноса. О/п: нашлось движение $f = T_{\overrightarrow{LM}} \circ R_a^\varphi \in D_3(\Phi)$, $\overrightarrow{LM} \parallel a$ и $L \neq M$. Б.о.о. можно считать, что $L \in a$. По предыдущей лемме найдется такая окрестность $O_\delta(L)$, для которой $\Phi \subseteq O_\delta(L)$. Снова воспользуемся аксиомой Архимеда и найдем такое натуральное число n , для которого выполняется $n \cdot |LM| > 2\delta$. Обозначим через g композицию n штук винтовых поворотов f . Учтывая, что при $\overrightarrow{LM} \parallel a$ параллельный перенос и поворот вокруг оси a можно поменять местами, движение g можно переписать в виде $g = T_{n \cdot \overrightarrow{LM}} \circ R_a^{n \cdot \varphi}$. Обозначим для краткости через $F = O_\delta(L)$, $F' = g(F)$ и $L' = g(L)$ — центр F' (рис. 60). Ясно, что фигура F инвариантна относительно поворота $R_a^{n \cdot \varphi}$, поэтому $g(F) = T_{n \cdot \overrightarrow{LM}}(F)$ и $L' = T_{n \cdot \overrightarrow{LM}}(L)$. Тогда $|LL'| = n|LM| > 2\delta$, что дает $F \cap F' = \emptyset$. Из $f \in D_3(\Phi)$ и первой теоремы



этого параграфа следует, что $g \in D_3(\Phi)$, поэтому $\Phi = g(\Phi) \subseteq F'$. Откуда $\Phi \subseteq F \cap F' = \emptyset$, что противоречит непустоте фигуры Φ . ■

Предыдущая теорема позволяет при нахождении группы симметрий ограниченной и непустой фигуры Φ рассматривать только повороты вокруг оси, зеркальные повороты и зеркальные симметрии (последние можно считать частными случаями зеркальных поворотов).

Пример 1. Пусть $\Phi = \{O\}$. Если R_a^φ — нетривиальный поворот (т.е. не являющийся тождественным преобразованием), то $R_a^\varphi \in D_3(\Phi) \Leftrightarrow O \in a$. Также легко проверяется, что $S_\alpha \in D_3(\Phi) \Leftrightarrow O \in \alpha$. Наконец, для зеркального поворота, не являющегося зеркальной симметрией, справедливо: $f = R_a^\varphi \circ S_\alpha \in D_3(\Phi) \Leftrightarrow \{O\} = a \cap \alpha$. Действительно, такой зеркальный поворот имеет только одну неподвижную точку — точку пересечения оси поворота и плоскости симметрии.

Пример 2. Пусть $\Phi = Sph(O, r)$ — сфера. Тогда $f \in D_3(\Phi) \Leftrightarrow f(Sph(O, r)) = Sph(O, r) \Leftrightarrow f(O) = O$ (мы воспользовались свойством 8 теоремы 1.5). Таким образом, $D_3(Sph(O, r)) = D_3(\{O\})$.

Напомним, что многогранником называется объединение многогранной поверхности и ее внутренней области (см. последний параграф третьей главы Геометрии 10), причем внутренняя область у многогранной поверхности определяется однозначно. Поэтому для определения многогранника достаточно описать его многогранную поверхность. *Пирамидой* (точнее, n -угольной пирамидой) $SA_1A_2 \dots A_n$ называется многогранник P (рис. 61), чья многогранная поверхность состоит из n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и n треугольников SA_iA_{i+1} , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (по старой договоренности мы считаем, что $A_{n+1} = A_1$). Точка S называется *вершиной* пирамиды P , n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ — ее *основанием*, плоскость $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$ — *плоскостью основания*. Отрезки $[SA_i]$ называются *боковыми ребрами* P , а треугольники SA_iA_{i+1} — *боковыми гранями* ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Пусть $H = \text{Пр}_\alpha(S)$ и $H_i = \text{Пр}_{(A_iA_{i+1})}(S)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), тогда отрезок $[SH]$ называется *высотой* P , а высоты $[SH_i]$ в боковых гранях называются *апофемами* пирамиды P . Вспоминая об освещении фигур (стр. 22), можно заметить, что пирамида является частью освещения $L(S, A_1A_2 \dots A_n)$, точнее $P = L(S, A_1A_2 \dots A_n) \cap \mathbb{P}_3(\alpha, S)$, где $\mathbb{P}_3(\alpha, S)$ — полупространство с границей α , которое содержит точку S . Учитывая, что $\mathbb{P}_3(\alpha, S)$ — выпуклое множество, из теоремы 5.1 первой главы следует, что пирамида P является



выпуклым множеством тогда и только тогда, когда $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый n -угольник. *Тетраэдром*¹⁰ называют любую треугольную пирамиду.

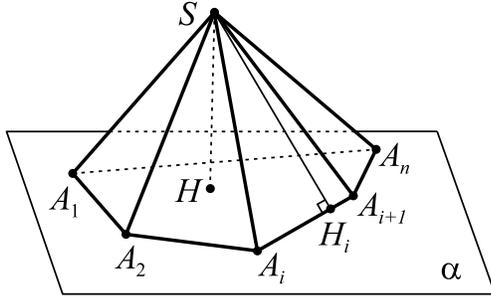


Рис. 61

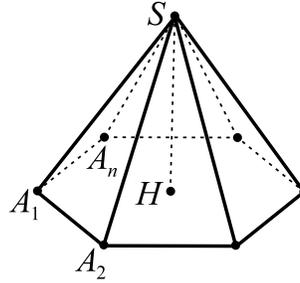


Рис. 62

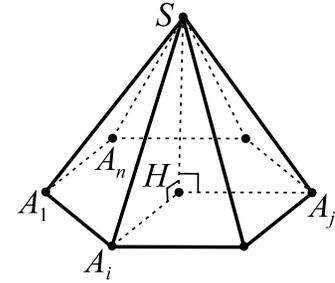


Рис. 63

Пирамида $SA_1A_2 \dots A_n$ называется *правильной*, если одновременно выполняются два условия: (а) $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник; (б) H — центр $A_1A_2 \dots A_n$ (рис. 62). Условие (б) можно заменить равносильным условием (б₁) — все боковые ребра между собой равны. Действительно, из (б) следует, что H является центром описанной окружности вокруг $SA_1A_2 \dots A_n$, поэтому $\triangle SHA_i = \triangle SHA_j$ по двум катетам, откуда $[SA_i] = [SA_j]$ (рис. 63). Обратно, предполагая (б₁), получим равенство прямоугольных треугольников SHA_i и SHA_j по общему катету и гипотенузе, откуда $|HA_i| = |HA_j|$ (при всех $i, j \leq n$), откуда H — центр описанной окружности около основания $A_1A_2 \dots A_n$. *Правильным тетраэдром* называется треугольная пирамида, у которой все четыре грани являются равносторонними треугольниками (очевидно равными между собой). Будьте осторожны в терминологии: правильный тетраэдр является правильной треугольной пирамидой, но обратное утверждение не выполняется. В качестве контрпримера можно взять правильную треугольную пирамиду, у которой длина бокового ребра в два раза больше длины ребра в основании. Для описания групп симметрий правильных пирамид нам понадобится следующий планиметрический результат.

Теорема 4.4. Пусть $M = A_1A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник, H — его центр, $\varphi_0 = 360^\circ/n$, $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$, $D_2 = D_2(\alpha)$ — множество всех движений плоскости α . Пусть также при четных n прямые a_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) проходят через противоположные вершины этого многоугольника или середины его противоположных сторон; при нечетных n прямые $a_i = (A_iH)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Тогда $D_2(M) = \{h \in D_2 : h(M) = M\}$ совпадает со следующим множеством

$$\mathcal{X} = \{R_H^{\varphi_0(i-1)} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{S_{a_i} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\}.$$

¹⁰ Тетраэдро (греч) — четырехгранник.



Доказательство. См. теорему 4.5 второй главы Геометрии 10. ■

Теорема 4.5. Пусть $P = SA_1A_2 \dots A_n$ — правильная n -угольная пирамида, не являющаяся правильным тетраэдром, H — центр основания $M = A_1A_2 \dots A_n$, $a = (SH)$, $\varphi_0 = 360^\circ/n$, $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$. Пусть также при четных n прямые a_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) проходят через противоположные вершины многоугольника M или середины его противоположных сторон; при нечетных n прямые $a_i = (A_iH)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), через α_i обозначим плоскость (a_i, S) ($i \in \{1, \dots, n\}$). Тогда группой симметрий пирамиды P является множество

$$\mathcal{Y} = \{R_a^{\varphi_0(i-1)} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{S_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\}.$$

Доказательство. Из условий $a = (SH) \perp \alpha$ и $a \subseteq \alpha_i$ следует, что $\alpha_i \perp \alpha$, поэтому $R_a^{\varphi_0(i-1)}(\alpha) = \alpha$ и $S_{\alpha_i}(\alpha) = \alpha$. Более того, в плоскости α движения $R_a^{\varphi_0(i-1)}$ и S_{α_i} действуют (соответственно) так же, как и плоские движения $R_H^{\varphi_0(i-1)}$ и S_{a_i} . Тогда из предыдущей теоремы следует, что $R_a^{\varphi_0(i-1)}(M) = M$ и $S_{\alpha_i}(M) = M$, кроме того, очевидно, что S является неподвижной точкой всех движений из \mathcal{Y} . Поэтому для любого $f \in \mathcal{Y}$ поверхность пирамиды P переходит сама в себя, что дает $f(P) = P$. Осталось показать, что $D_3(P) \subseteq \mathcal{Y}$.

Рассмотрим произвольное движение $f \in D_3(P)$. Из условия $f(P) = P$ следует, что граничные точки P при движении f переходят в граничные точки P , поэтому многоугольник $f(M)$ также должен быть гранью пирамиды P . Поскольку P не является правильным тетраэдром, ни одна из боковых граней P не равна основанию M . Таким образом, $f(M) = M$ и $f(\alpha) = \alpha$, поскольку легко находятся три неколлинеарные вершины M , переходящие в три неколлинеарные вершины M (мы использовали аксиому I.5, гарантирующую совпадение плоскостей α и $f(\alpha)$, поскольку они содержат три неколлинеарные точки $f(A_1)$, $f(A_2)$ и $f(A_3)$). Движение f по определению сохраняет расстояние между точками плоскости α , поэтому равенство $f(\alpha) = \alpha$ позволяет рассмотреть $h = f|_\alpha$ — ограничение пространственного движения f на плоскость α , и заключить, что $h \in D_2(\alpha)$. Учитывая, что $h(M) = f(M) = M$, получим, что $h \in D_2(M)$ и по предыдущей теореме $h = R_H^{\varphi_0(i-1)}$ или $h = S_{a_i}$. Рассмотрим два случая.



1-й случай: $f|_{\alpha} = h = R_H^{\varphi_0(i-1)}$. Рассмотрим два пространственных движения $g_1 = R_a^{\varphi_0(i-1)}$ (рис. 64) и $g_2 = S_{\alpha} \circ R_a^{\varphi_0(i-1)}$. Очевидно, что $g_1 \neq g_2$, поскольку $g_1(S) = S \in \mathbb{P}_3(\alpha, S)$ и $g_2(S) = S_{\alpha}(S) \notin \mathbb{P}_3(\alpha, S)$. Заметим, что $f|_{\alpha} = g_1|_{\alpha} = g_2|_{\alpha} = R_H^{\varphi_0(i-1)}$, поэтому эти три движения пространства действуют одинаково по крайней мере на три неколлинеарные точки A_1 , A_2 и A_3 . Применяя свойство подвижности (теорема 3.1), получим $f = g_1$ или $f = g_2$. Но $g_2(S) = S_{\alpha}(S) \notin \mathbb{P}_3(\alpha, S)$, поэтому $g_2(S) \notin P$ и $g_2(P) \neq P$. Следовательно $g_2 \notin D_3(P)$ и $f \neq g_2$. Остается только подходящий нам вариант $f = g_1 = R_a^{\varphi_0(i-1)}$ и $f \in \mathcal{Y}$.

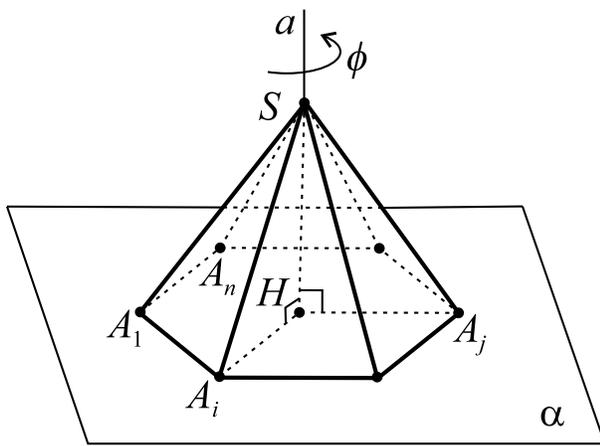


Рис. 64

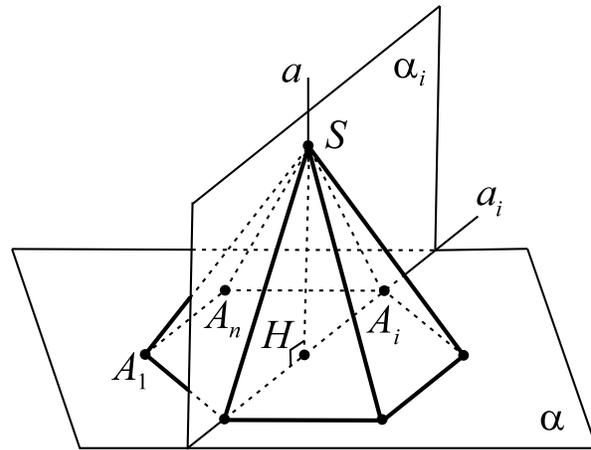


Рис. 65

2-й случай: $f|_{\alpha} = h = S_{a_i}$. Рассмотрим два пространственных движения $g_1 = S_{\alpha_i}$ (рис. 65) и $g_2 = S_{\alpha} \circ S_{\alpha_i}$. Очевидно, что $g_1 \neq g_2$, поскольку $g_1(S) = S \in \mathbb{P}_3(\alpha, S)$ и $g_2(S) = S_{\alpha}(S) \notin \mathbb{P}_3(\alpha, S)$. Заметим, что $f|_{\alpha} = g_1|_{\alpha} = g_2|_{\alpha} = S_{a_i}$, поэтому эти три движения пространства действуют одинаково на три неколлинеарные точки A_1 , A_2 и A_3 . Снова применим свойство подвижности (теорема 3.1) и получим $f = g_1$ или $f = g_2$. Но $g_2(S) = S_{\alpha}(S) \notin \mathbb{P}_3(\alpha, S)$, поэтому $g_2(S) \notin P$ и $g_2(P) \neq P$. Следовательно $g_2 \notin D_3(P)$ и $f \neq g_2$. Отсюда $f = g_1 = S_{\alpha_i}$ и $f \in \mathcal{Y}$. ■

Перейдем к изучению групп симметрий правильных призм. *Призмой* (точнее, n -угольной призмой) $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ называется многогранник Φ (рис. 66), чья многогранная поверхность состоит из двух равных n -угольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, лежащих в различных параллельных плоскостях и n параллелограммов $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$, где $i \leq n$ (мы считаем, что $A_{n+1} = A_1$ и $B_{n+1} = B_1$). Два n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ называются *основаниями* Φ , плоскости $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$ и



$\beta = (B_1B_2 \dots B_n)$ — плоскостями оснований. Отрезки $[A_iB_i]$ называются боковыми ребрами Φ , а параллелограммы $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$ — боковыми гранями ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Пусть $H_1 \in \alpha$ и $H_2 = \text{Пр}_\beta(H_1)$, тогда отрезок $[H_1H_2]$ называется высотой призмы.

Для исследования выпуклости призмы Φ введем понятие квазипризмы, близкое по смыслу к понятию освещения. Пусть $F \subseteq \alpha$ — произвольное непустое множество и прямая a не параллельна плоскости α (рис. 67), тогда квазипризмой с основанием F и образующей a называется множество

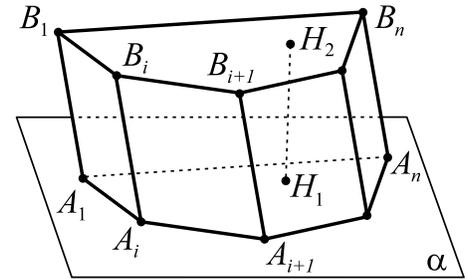


Рис. 66

$$KP(F, a) = \bigcup \{b : b \parallel a \ \& \ b \cap F \neq \emptyset\}.$$

Докажем, что выпуклость квазипризмы $KP(F, a)$ равносильна выпуклости ее основания F . В одну сторону совсем просто: из выпуклости $KP(F, a)$ следует выпуклость пересечения $F = KP(F, a) \cap \alpha$. Пусть теперь F — выпуклое множество. Для произвольных точек A и $B \in KP(F, a)$ по определению найдем такие прямые $a_1, a_2 \parallel a$, $A \in a_1$, $B \in a_2$ и точки $A_1, B_1 \in F$, для которых $\{A_1\} = a_1 \cap F$ и $\{B_1\} = a_2 \cap F$ (рис. 68). Обозначим через $B^* = T_{AA_1}^{\rightarrow}(B)$. Ясно, что из $a_1 \parallel a \parallel a_2$ следует, что точки A, B, A_1, B_1, B^* расположены в некоторой плоскости β . Заметим, что выполняется утверждение (*): прямая b , которая параллельна прямой a , пересекает отрезок $[A_1B_1]$ тогда и только тогда, когда она пересекает отрезок $[A_1B^*]$. При $B^* = B_1$ утверждение (*) очевидно, а при $B^* \neq B_1$ к треугольнику $A_1B_1B^*$ и к прямой b достаточно применить аксиому Паша (аксиома II.4). Учитывая, что $[A_1B^*] = T_{AA_1}^{\rightarrow}([AB])$ и $\overrightarrow{AA_1} \parallel a$, получим, что любая прямая b , которая параллельна прямой a , пересекает отрезок $[A_1B^*]$ тогда и только тогда, когда она пересекает отрезок $[AB]$. В результате получим утверждение (**): любая прямая b , которая параллельна прямой a , пересекает отрезок $[A_1B_1]$ тогда и только тогда, когда она пересекает отрезок $[AB]$. Из выпуклости F следует включение $[A_1B_1] \subseteq F$. Теперь через произвольную точку $Y \in [AB]$ проведем прямую b параллельно прямой a и по (**) найдем точку $X \in [A_1B_1]$, для которой $b \cap [A_1B_1] = \{X\}$. Отсюда $Y \in KP(F, a)$ и $KP(F, a)$ — выпуклое множество.

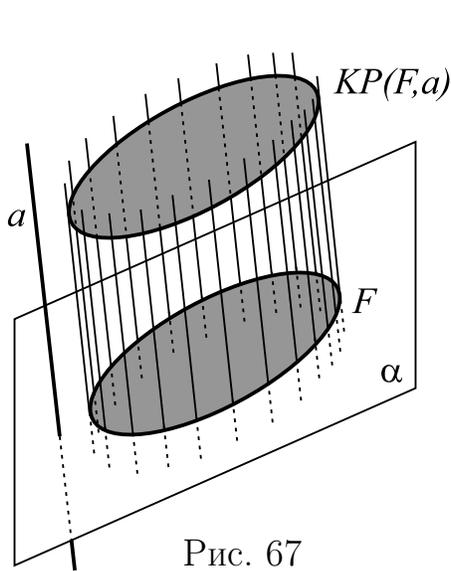


Рис. 67

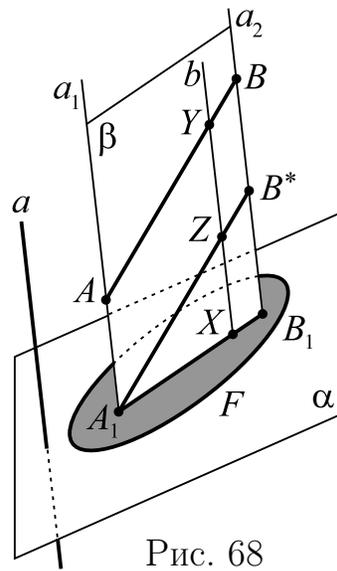


Рис. 68

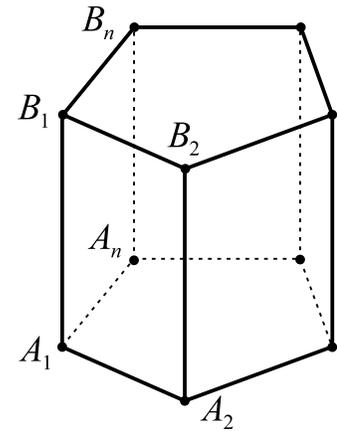


Рис. 69

Очевидно, что из выпуклости призмы $\Phi = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ следует выпуклость ее основания $M_1 = A_1A_2 \dots A_n$. Обратно, если основание $M_1 = A_1A_2 \dots A_n$ выпукло, то выпукла квазипризма $KP(M_1, (A_1B_1))$, а значит, выпукла и сама призма Φ , как пересечение трех выпуклых множеств $KP(M_1, (A_1B_1)) \cap \mathbb{P}_3(\alpha, B_1) \cap \mathbb{P}_3(\beta, A_1)$.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой является параллелограмм. Все шесть граней такой призмы — параллелограммы. Призма $A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ называется *прямой*, если $(A_1B_1) \perp \alpha$ (где α — плоскость основания). *Прямоугольным параллелепипедом* называется прямая призма, основанием которой является прямоугольник. Ясно, что каждая грань прямоугольного параллелепипеда является прямоугольником. Призма $\Phi = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ называется *правильной*, если одновременно выполняются два условия: (а) $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник; (б) Φ — прямая призма (рис. 69).

Теорема 4.6. Пусть $\Phi = A_1A_2 \dots A_nB_1B_2 \dots B_n$ — правильная n -угольная призма, не являющаяся кубом, точка H_1 — центр основания $M_1 = A_1A_2 \dots A_n$, H_2 — центр основания $M_2 = B_1B_2 \dots B_n$, $a = (H_1H_2)$, $\varphi_0 = 360^\circ/n$, $\alpha = (A_1A_2 \dots A_n)$, $\beta = (B_1B_2 \dots B_n)$, γ — экваториальная плоскость отрезка $[A_1B_1]$ (т.е. γ проходит через середины всех боковых ребер Φ). Пусть также при четных n прямые a_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) проходят через противоположные вершины многоугольника M_1 или середины его противоположных сторон; при нечетных n прямые $a_i = (A_iH_1)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), через α_i обозначим плоскость (a_i, H_2) ($i \in \{1, \dots, n\}$).



Тогда группой симметрий призмы Φ является множество $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$, где

$$\mathcal{Y} = \{R_a^{\varphi_0(i-1)} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{S_{\alpha_i} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Y}' = \{S_\gamma \circ f : f \in \mathcal{Y}\}.$$

Доказательство. Из условий $a = (H_1H_2) \perp \alpha$ и $a \subseteq \alpha_i$ следует, что $\alpha_i \perp \alpha$, поэтому $R_a^{\varphi_0(i-1)}(\alpha) = \alpha$ и $S_{\alpha_i}(\alpha) = \alpha$. Более того, в плоскости α движения $R_a^{\varphi_0(i-1)}$ и S_{α_i} действуют (соответственно) так же, как и плоские движения $R_{H_1}^{\varphi_0(i-1)}$ и S_{a_i} . Рассуждая аналогично, получим, что ограничениями этих движений на плоскость β будут повороты $R_{H_2}^{\varphi_0(i-1)}$ и осевые симметрии S_{b_i} , где $b_i = \alpha_i \cap \beta$. Тогда из теоремы 4.4 следует, что $R_a^{\varphi_0(i-1)}(M_i) = M_i$ и $S_{\alpha_i}(M_i) = M_i$ ($i \in \{1, 2\}$), поэтому для любого $f \in \mathcal{Y}$ поверхность Φ переходит сама в себя, что дает $f(\Phi) = \Phi$. Очевидно, что $S_\gamma(\Phi) = \Phi$, поэтому $g = S_\gamma \circ f \in D_3(\Phi)$ для всех $f \in \mathcal{Y}$. Поскольку для любых $g \in \mathcal{Y}'$ и $f \in \mathcal{Y}$ следует, что $g(M_1) = M_2$ и $f(M_1) = M_1$, справедливо $f \neq g$ и $\mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}' = \emptyset$. Мы показали, что два непересекающихся множества \mathcal{Y} и \mathcal{Y}' содержатся в $D_3(\Phi)$, осталось проверить обратное включение.

Рассмотрим произвольное движение $h \in D_3(\Phi)$. Из условия $h(\Phi) = \Phi$ следует, что граничные точки Φ при движении h переходят в граничные точки Φ , поэтому многоугольник $h(M_1)$ также должен быть гранью призмы Φ . Поскольку Φ не является кубом, ни одна из боковых граней Φ не равна основанию M_1 . Таким образом, $h(M_1) = M_1$ или $h(M_1) = M_2$. Рассмотрим два случая.

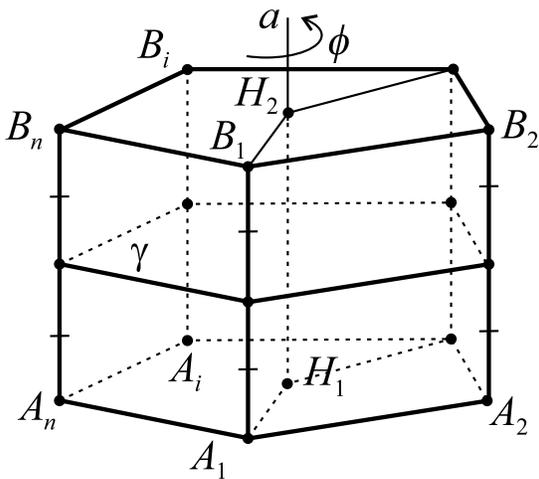


Рис. 70

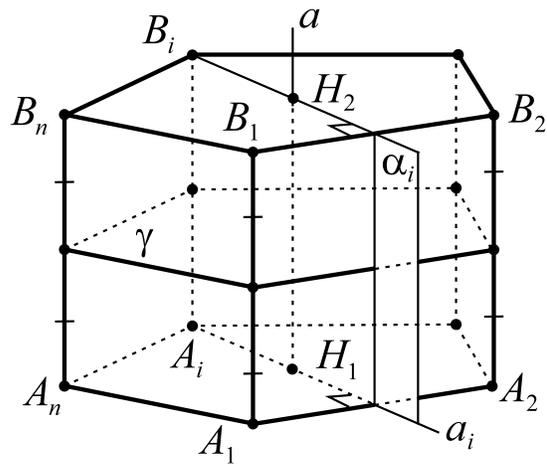


Рис. 71

1-й случай: $h(M_1) = M_1$. Тогда $h(\alpha) = \alpha$ и можно рассмотреть плоское движение $h|_\alpha$. Это движение принадлежит $D_2(M_1)$, поэтому по теореме 4.4



получим $h|_{\alpha} = R_{H_1}^{\varphi_0(i-1)}$ или $h|_{\alpha} = S_{a_i}$. Так же как и в теореме 4.5 из свойства подвижности (теорема 3.1) заключаем, что $h = R_a^{\varphi_0(i-1)}$ (рис. 70) или $h = S_{\alpha_i}$ (рис. 71), т.е. $h \in \mathcal{Y}$.

2-й случай: $h(M_1) = M_2$. Тогда рассмотрим вспомогательное движение $f = S_{\gamma} \circ h$. Из $h \in D_3(\Phi)$ и $S_{\gamma} \in D_3(\Phi)$ следует, что $f \in D_3(\Phi)$. Кроме того,

$$f(M_1) = S_{\gamma}(h(M_1)) = S_{\gamma}(M_2) = M_1.$$

Применяя к движению f первый случай, получим $f = R_a^{\varphi_0(i-1)}$ или $f = S_{\alpha_i}$, откуда $h = S_{\gamma} \circ f \in \mathcal{Y}'$. ■

Упражнения

1. Фигура Φ имеет две оси a и b симметрии (напомним, что осевая симметрия S_a является частным случаем поворота вокруг оси, поскольку $S_a = R_a^{180^\circ}$). Докажите, что прямая $c = S_b(a)$ также является осью симметрии фигуры Φ .
2. Докажите, что в группу симметрий непустой ограниченной фигуры не могут входить две различные центральные симметрии.
3. Докажите, что если в группу симметрий фигуры Φ входят две различные центральные симметрии, то $D_3(\Phi)$ содержит бесконечно много центральных симметрий.
4. Пусть $\Phi = a \cup b \cup c$, где a , b и c — три попарно перпендикулярные прямые, имеющие общую точку. Найдите $D_3(\Phi)$.
5. Пусть K — квадрат. Найдите $D_3(K)$.
6. Найдите $D_3(T)$, где $T = ABCD$ — правильный тетраэдр. Сколько элементов в $D_3(T)$?
7. Найдите $D_3(K)$, где $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Сколько элементов в $D_3(K)$?
8. Найдите минимальную (по количеству элементов) некоммутативную группу.
9. Найдите группу симметрий октаэдра. Напомним, что *октаэдр* — правильный многогранник характеристики $(3, 4)$, поверхность которого состоит из восьми равносторонних треугольников.



2.5. Гомотетия. Группа подобий пространства

Определение. Пусть $O \in \mathbb{P}_3$, $k \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется соответствие $H_O^k : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$, при котором для любой точки $A \in \mathbb{P}_3$ ее образ $A' = H_O^k(A)$ определяется из равенства $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

На рис. 72 построен образ точки A при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k = -1/2$. Из результатов четвертой главы Геометрии 10 следует, что умножение вектора на число определяется однозначно и направленный отрезок $\overrightarrow{OA'}$ можно отложить от точки O единственным образом, поэтому соответствие H_O^k всюду определено и однозначно. Поскольку $k \neq 0$ произвольная точка A сама будет образом точки B , для которой $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OA}$, откуда следует сюръективность H_O^k . Для проверки инъективности выберем две различные точки $A, B \in \mathbb{P}_3$. Если $|OA| \neq |OB|$, то $k|OA| \neq k|OB|$ (снова используем неравенство $k \neq 0$), откуда $\overrightarrow{OA'} \neq \overrightarrow{OB'}$ и $A' \neq B'$. При $|OA| = |OB|$ направления у векторов, которые задаются с помощью \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} , различны, поэтому различны направления и у $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OB'}$ (в очередной раз воспользовались неравенством $k \neq 0$), откуда $A' \neq B'$. Мы проверили, что соответствие H_O^k является преобразованием, т.е. $H_O^k \in Tr_3$. Теперь докажем основные свойства гомотетии.

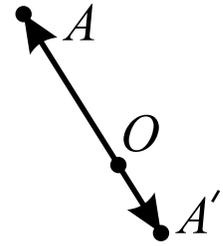


Рис. 72

Теорема 5.1. Пусть $H_O^k(A) = A'$, $H_O^k(B) = B'$ и $H_O^k(C) = C'$. Тогда

- 1) $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$;
- 2) $C \in [AB] \Leftrightarrow C' \in [A'B']$;
- 3) если $C \notin (AB)$, то $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ и $|k|$ — коэффициент подобия этих треугольников;
- 4) $H_O^{k_1} \circ H_O^k = H_O^{k \cdot k_1}$;
- 5) $(H_O^k)^{-1} = H_O^{1/k}$;
- 6) при гомотетии образом любой прямой a является прямая $a' = H_O^k(a)$, причем $a' \parallel a$;
- 7) при гомотетии образом произвольной плоскости α является плоскость $\alpha' = H_O^k(\alpha)$, причем $\alpha' \parallel \alpha$;
- 8) при гомотетии образом луча является луч, открытой полуплоскости — открытая полуплоскость, угла — равный ему угол, открытого полупространства — открытое полупространство, двугранного угла — равный



ему двугранный угол;

9) если $O'_1 = H_O^k(O_1)$, то образом сферы $\Phi = Sph(O_1, r)$ при гомотетии H_O^k является сфера $\Phi' = Sph(O'_1, |k| \cdot r)$.

Доказательство. 1) из равенств $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ получим

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB},$$

откуда $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

2) воспользуемся неравенством треугольника (см. восьмой параграф первой главы Геометрии 10) и уже доказанным пунктом (1):

$$\begin{aligned} C \in [AB] &\Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB| \Leftrightarrow |k| \cdot |AB| = |k| \cdot |AC| + |k| \cdot |CB| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |A'B'| = |A'C'| + |C'B'| \Leftrightarrow C' \in [A'B']. \end{aligned}$$

3) следует из (1) и ЗКПТ.

4) пусть $A'' = H_O^{k_1}(A')$. Тогда из $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA''} = k_1 \cdot \overrightarrow{OA'}$ получим $\overrightarrow{OA''} = (k \cdot k_1) \cdot \overrightarrow{OA}$, что дает $H_O^{k \cdot k_1}(A) = A'' = (H_O^{k_1} \circ H_O^k)(A)$.

5) из (4) получим $H_O^{1/k} \circ H_O^k = H_O^1 = \varepsilon$, что и надо было проверить.

6) предположим, что $A \neq B$, $a = (AB)$ и покажем, что выполняется $H_O^k(a) = (A'B') = a'$ (рис 73). Возьмем \overrightarrow{AB} в качестве направляющего вектора прямой a и запишем векторное уравнение прямой a (см. шестой параграф четвертой главы Геометрии 10): $C \in a \Leftrightarrow$ найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$ найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $k \cdot \overrightarrow{OC} = k \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot (k \cdot \overrightarrow{AB})$ (в этом переходе мы использовали условие $k \neq 0$)

\Leftrightarrow найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'}$. Мы получили, что точка C' удовлетворяет векторному уравнению прямой, проходящей через точку A' , причем $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AB}$ является одним из направляющих векторов этой прямой, откуда $H_O^k(a) = (A'B') = a'$ и $a' \parallel a$.

7) предположим, что $C \notin (AB)$, $\alpha = (ABC)$ и покажем, что выполняется $H_O^k(\alpha) = (A'B'C') = \alpha'$ (рис 74). В качестве базиса плоскости α возьмем \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и запишем векторное уравнение плоскости α (см. шестой параграф четвертой главы Геометрии 10): точка $X \in \alpha \Leftrightarrow$ найдется такая пара чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ найдется пара чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что выполняется $k \cdot \overrightarrow{OX} = k \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot (k \cdot \overrightarrow{AB}) + \mu \cdot (k \cdot \overrightarrow{AC})$ (в этом переходе мы использовали условие $k \neq 0$) \Leftrightarrow найдется пара чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что верно векторное равенство $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OA'} + \lambda \cdot \overrightarrow{A'B'} + \mu \cdot \overrightarrow{A'C'}$ (здесь $H_O^k(X) = X'$). Мы



получили, что точка X' удовлетворяет векторному уравнению плоскости, проходящей через точку A' , причем пара векторов $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$ является базисом этой плоскости (ведь из свойства (6) следует, что $C' \notin (A'B')$). Учитывая, что $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AC}$, окончательно получаем, что $H_O^k(\alpha) = (A'B'C') = \alpha'$ и $\alpha' \parallel \alpha$.

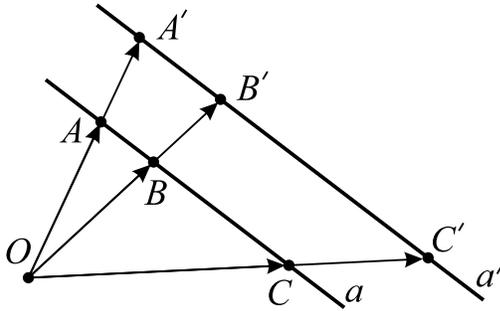


Рис. 73

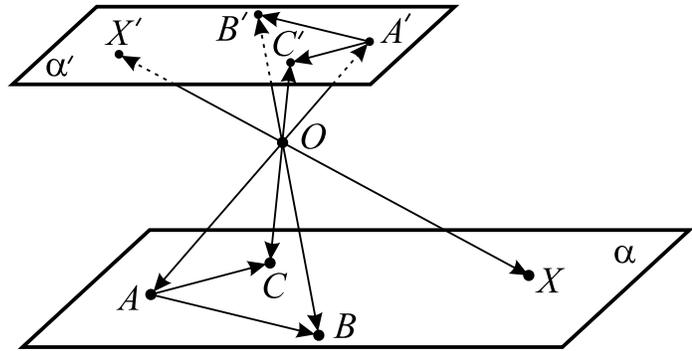


Рис. 74

8) из (2) следует, что при гомотетии сохраняется отношение лежать между, а из (6) — прямые отображаются на прямые. Луч определялся с помощью этих понятий, поэтому луч переходит в луч.

Открытая полуплоскость определялась с помощью отношения лежать по одну сторону от прямой. Образом прямой при гомотетии является прямая, образом отрезка — отрезок, образом плоскости — плоскость. Причем, если $A, B \in \alpha$, $a \subseteq \alpha$ и $[AB] \cap a = \emptyset$, то справедливо $A', B' \in \alpha'$, $a' \subseteq \alpha'$ и $[A'B'] \cap a' = \emptyset$, откуда точки A' и B' лежат по одну сторону от a' в плоскости α' . Поэтому образом открытой полуплоскости (или полуплоскости) с границей a будет открытая полуплоскость (соответственно полуплоскость) с границей a' .

Угол определялся с помощью одномерного угла и открытых полуплоскостей, поэтому образом угла будет угол. То, что величина угла сохраняется, следует из (3).

Аналогично доказывается, что открытое полупространство, полупространство и двугранный угол при гомотетии соответственно переходят в открытое полупространство, полупространство и двугранный угол. Величина двугранного угла определялась через его линейный угол и, поскольку величина угла и перпендикулярность прямых сохраняется при гомотетии, двугранный угол \mathcal{D} перейдет при гомотетии в двугранный угол \mathcal{D}' той же величины.

9) достаточно проверить равенство множеств $H_O^k(\Phi) = \Phi'$, доказав включение в обе стороны.



⊆) для любой точки $A \in \Phi$ выполняется $|O_1A| = r$, откуда по (1) получим $|A'O'_1| = |k| \cdot |AO_1| = |k| \cdot r$, что дает $A' \in \Phi'$ и $H_O^k(\Phi) \subseteq \Phi'$.

⊇) рассмотрим $H_O^{1/k}$ — обратное преобразование к H_O^k . Для него справедливо $H_O^{1/k}(O'_1) = O_1$. По уже доказанной части получим $H_O^{1/k}(\Phi') \subseteq \Phi$. Можно применить к левой и правой частям этого включения гомотетию H_O^k , тогда $H_O^k\left(H_O^{1/k}(\Phi')\right) \subseteq H_O^k(\Phi)$, или $\varepsilon(\Phi') \subseteq H_O^k(\Phi)$, что дает $\Phi' \subseteq H_O^k(\Phi)$. Тем самым мы проверили обратное включение. ■

Определение. Пусть $k \in \mathbb{R}$ и $k > 0$. Подобием с коэффициентом k пространства \mathbb{P}_3 называется такая биекция $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$, что для любой пары точек $A, B \in \mathbb{P}_3$ выполняется $|f(A)f(B)| = k|AB|$. Множество всех подобий пространства \mathbb{P}_3 обозначается через Sim_3 .

Любое движение является подобием с коэффициентом 1. Из (1) предыдущей теоремы следует, что гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$. Следующее утверждение, которое называется *теоремой о представлении подобия*, показывает насколько близко подобие связано с движением и гомотетией.

Теорема 5.2. Пусть $f \in \text{Sim}_3$, k — коэффициент f и O — произвольная точка пространства \mathbb{P}_3 . Тогда найдутся такие два движения g_1 и g_2 , что $f = H_O^k \circ g_1 = g_2 \circ H_O^k$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $g_1 = H_O^{1/k} \circ f$. Для любой пары точек $A, B \in \mathbb{P}_3$ выполняется

$$|g_1(A)g_1(B)| = \left| H_O^{1/k}\left(f(A)\right)H_O^{1/k}\left(f(B)\right) \right| = \frac{1}{k} \cdot |f(A)f(B)| = \frac{1}{k} \cdot k \cdot |AB| = |AB|.$$

Отсюда $g_1 \in D_3$ и, домножая слева равенство $g_1 = H_O^{1/k} \circ f$ на H_O^k , получим $f = H_O^k \circ g_1$.

Аналогично, рассматривая преобразование $g_2 = f \circ H_O^{1/k}$, устанавливаем, что $g_2 \in D_3$ и $f = g_2 \circ H_O^k$. ■

Теорема 5.3. (Sim_3, \circ) — группа.

Доказательство. 0) пусть $f_1, f_2 \in \text{Sim}_3$ и k_1, k_2 — коэффициенты f_1 и f_2 соответственно. Выберем произвольную пару точек $A, B \in \mathbb{P}_3$ и положим $A' = f_1(A)$, $A'' = f_2(A')$, $B' = f_1(B)$, $B'' = f_2(B')$. Тогда

$$|A''B''| = k_2 \cdot |A'B'| = k_2 \cdot k_1 \cdot |AB| = (k_2 \cdot k_1)|AB|.$$



Отсюда $f_2 \circ f_1 \in \text{Sim}_3$ и $k_2 \cdot k_1$ — коэффициент $f_2 \circ f_1$. Мы доказали, что \circ является операцией на Sim_3 и корректно использовать обозначение (Sim_3, \circ) .

1) ассоциативность следует из включения $\text{Sim}_3 \subseteq \text{Tr}_3$ и того факта, что (Tr_3, \circ) является группой.

2) поскольку $\varepsilon \in D_3 \subseteq \text{Sim}_3$ и ε — нейтральный элемент в (Tr_3, \circ) , получим, что ε — нейтральный элемент в (Sim_3, \circ) .

3) рассмотрим произвольное $f \in \text{Sim}_3$. Пусть k — коэффициент f и O — произвольная точка пространства, тогда по предыдущей теореме найдется движение $g_1 \in D_3$, для которого $f = H_O^k \circ g_1$. Рассмотрим вспомогательное преобразование $h = g_1^{-1} \circ H_O^{1/k}$, тогда по (0) получим, что $h \in \text{Sim}_3$. Теперь посчитаем композиции $h \circ f$ и $f \circ h$:

$$h \circ f = \left(g_1^{-1} \circ H_O^{1/k} \right) \circ \left(H_O^k \circ g_1 \right) = g_1^{-1} \circ \left(H_O^{1/k} \circ H_O^k \right) \circ g_1 = g_1^{-1} \circ g_1 = \varepsilon,$$

$$f \circ h = \left(H_O^k \circ g_1 \right) \circ \left(g_1^{-1} \circ H_O^{1/k} \right) = H_O^k \circ \left(g_1 \circ g_1^{-1} \right) \circ H_O^{1/k} = H_O^k \circ H_O^{1/k} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы установили, что $h = f^{-1}$ и $h \in \text{Sim}_3$. ■

Упражнения

1. Докажите, что если $f \in \text{Sim}_3$, k — коэффициент f , причем $k \neq 1$, то существует и единственна такая точка $A \in \mathbb{P}_3$, что $f(A) = A$.
2. Верно ли, что если два подобия совпадают на четырех некопланарных точках, то они равны?
3. Доказать, что любые две сферы разных радиусов гомотетичны. Сколько существует гомотетий, переводящих одну сферу в другую? Как определить центры этих гомотетий?
4. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Постройте сечение этого тетраэдра, которое является ромбом.
5. Пусть M — центр масс тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, M_i — центр масс грани этого тетраэдра, противоположной вершине A_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Выберем произвольную точку $P \in \mathbb{P}_3$, отличную от точки M . Проведем через каждую вершину A_i прямую l_i параллельно прямой (PM_i) ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Докажите, что эти четыре прямые пересекаются в некоторой точке Q и найдите отношение $|PQ| : |PM|$.
6. Даны сфера $\Phi = \text{Sph}(O, r)$, плоскость α и точка $A \in \alpha$. Постройте сферу $\text{Sph}(O^*, r^*)$ так, чтобы она касалась сферы Φ , а также плоскости α в точке A .



7. Постройте сферу, проходящую через данную точку и касающуюся трех данных пересекающихся плоскостей.
8. Постройте сферу, проходящую через две данные точки и касающуюся двух данных плоскостей.
9. Постройте сферу, касающуюся трех данных пересекающихся плоскостей и данной сферы.
10. Докажите, что если $f \in \text{Sim}_3$, k — коэффициент f , причем $k \neq 1$, то f является поворотной гомотетией (т.е. $f = H_O^k \circ R_a^\varphi$, причем $O \in a$) или зеркальной гомотетией (т.е. $f = H_O^k \circ S_\alpha$, причем $O \in \alpha$) или, наконец, зеркально-поворотной гомотетией (т.е. $f = H_O^k \circ R_a^\varphi \circ S_\alpha$, причем $a \perp \alpha$ и $\{O\} = a \cap \alpha$).
11. Верно ли, что любое подобие пространства, отличное от движения, является поворотной гомотетией?

2.6. Композиция гомотетий

Начнем с одной характеристики параллельного переноса.

Лемма 6.1. Пусть $f \in D_3$ не имеет неподвижных точек. Тогда f является нетривиальным параллельным переносом в том и только в том случае, когда для любой прямой $a \subseteq \mathbb{P}_3$ выполняется $f(a) \parallel a$.

Доказательство. \Rightarrow) пусть $a = (AB)$ и $f = T_{\vec{v}}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Обозначим через $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ и рассмотрим два случая. При $\vec{v} \parallel a$ выполняется $A', B' \in a$, откуда $f(a) = a$, поэтому $f(a) \parallel a$. Если же $\vec{v} \nparallel a$, четырехугольник $AA'B'B$ является параллелограммом из-за равенств $\overrightarrow{AA'} = \vec{v} = \overrightarrow{BB'}$, откуда также следует, что $f(a) \parallel a$.

\Leftarrow) возьмем произвольную точку $A \in \mathbb{P}_3$, тогда $f(A) = B$ и $B \neq A$. Обозначим через $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ и проверим, что $f = T_{\vec{v}}$. Сначала заметим, что для прямой $a = (AB)$ должно выполняться условие $a' = (A'B') = f(a) \parallel a$, но $A' = B \in a \cap a'$, поэтому $a = a'$. Тогда для любой точки $X \notin a$ будет выполняться условие $X' = f(X) \notin a$. Действительно, предположив, что $X' \in a = a'$, мы получим $X = f^{-1}(X') \in f^{-1}(a') = a$, что противоречит выбору точки X . Теперь обозначим через $\alpha = (a, X)$, тогда из условия $(BX') = f((AX)) \parallel (AX)$ следует, что $(BX') \subseteq \alpha$ и $X' \in \alpha$. Возможны два случая расположения точек X и X' по отношению к прямой a .

1-й случай: точки X и X' лежат по одну сторону от $a = (AB)$ (рис. 75). Тогда $AXX'BA$ является простой замкнутой ломаной, поэтому можно рас-



смотреть четырехугольник $F = AX'X'B$. В этом четырехугольнике выполняются условия $|AX| = |f(A)f(X)| = |BX'|$ и $(BX') = f((AX)) \parallel (AX)$, откуда F — параллелограмм, что дает $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$ и $f(X) = T_{\overrightarrow{AB}}(X)$.

2-й случай: точки X и X' лежат по разные стороны от $a = (AB)$ (рис. 76). Тогда найдется такая точка O , что $\{O\} = a \cap [XX']$. Обозначим через $b = (XX')$, тогда $X' \in b \cap f(b)$, поэтому условие $f(b) \parallel b$ дает $b = f(b)$. Применив теорему 1.2, получим $f(O) \in f(a \cap b) = f(a) \cap f(b) = a \cap b = \{O\}$, откуда $O = f(O)$ и движение f имеет неподвижную точку. \bowtie .

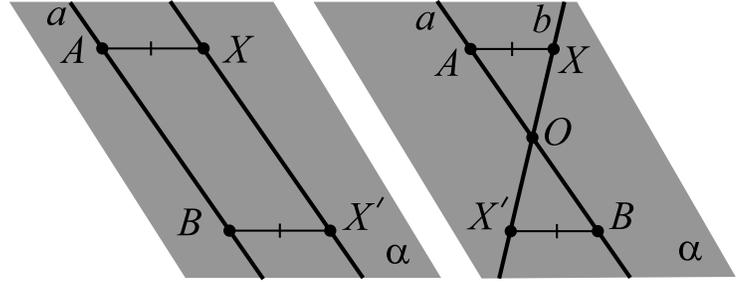


Рис. 75

Рис. 76

Таким образом, для произвольной точки $X \notin a$ нам удалось доказать, что $f(X) = T_{\overrightarrow{AB}}(X)$. Осталось выбрать $X_i \notin a$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) так, чтобы $X_4 \notin (X_1X_2X_3)$ и из равенств $f(X_i) = T_{\overrightarrow{AB}}(X_i)$ ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) и второго следствия теоремы 2.2 получить $f = T_{\overrightarrow{AB}}$.

Выясним каким преобразованием является композиция двух гомотетий H_O^k и $H_{O_1}^{k_1}$. Если центры этих гомотетий совпадают, то очевидный ответ был получен в предыдущем параграфе: $H_O^{k_1} \circ H_O^k = H_O^{k \cdot k_1}$. Ситуация заметно усложняется при $O \neq O_1$, причем результат будет сильно зависеть от того, равно единице произведение $k \cdot k_1$ или нет.

Теорема 6.2. Пусть $k, k_1 \in \mathbb{R}$ и $k \cdot k_1 = 1$, тогда композиция двух гомотетий $H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$ является параллельным переносом $T_{\overrightarrow{AB}}$, причем справедливо равенство $(*) : \overrightarrow{AB} = \frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1}$.

Доказательство. Обозначим через $f = H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$. Из нулевого пункта доказательства теоремы 5.3 следует, что f является подобием с коэффициентом $|k| \cdot |k_1| = |k \cdot k_1| = 1$, т.е. справедлив более сильный результат: f является движением пространства. Дважды применив шестое свойство теоремы 5.1, получим, что для любой прямой $a \subseteq \mathbb{P}_3$ следует, что $f(a) \parallel a$. Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: $O = O_1$ или $k = 1$. Тогда $f = H_O^1 = \varepsilon = T_{\overrightarrow{0}}$. Равенство $(*)$ также дает $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.



2-й случай: $O \neq O_1$ и $k \neq 1$. Докажем, что в этом случае движение f не имеет неподвижных точек. О/п: нашлась такая точка X , что $f(X) = X$ или $H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k(X) = X$. Учитывая, что $\frac{1}{k_1} = k$, из последнего равенства получим

$$H_{O_1}^{1/k_1} \circ H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k(X) = H_{O_1}^{1/k_1}(X) \Leftrightarrow H_O^k(X) = H_{O_1}^{1/k_1}(X) \Leftrightarrow H_O^k(X) = H_{O_1}^k(X).$$

Обозначим через $Y = H_O^k(X) = H_{O_1}^k(X)$ и дважды воспользуемся определением гомотетии:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OY} = k \cdot \overrightarrow{OX}, \\ \overrightarrow{O_1Y} = k \cdot \overrightarrow{O_1X} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{O_1Y} = k(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{O_1X}) \Rightarrow \overrightarrow{OO_1} = k \cdot \overrightarrow{OO_1},$$

откуда $(k-1)\overrightarrow{OO_1} = \vec{0}$, что дает $k = 1$ или $O = O_1$. ✗. Итак, движение f без неподвижных точек и переводит любую прямую a в параллельную ей прямую $f(a)$, поэтому из предыдущей леммы следует, что $f = T_{\overrightarrow{AB}}$. Теперь вектор \overrightarrow{AB} можно определить, действуя движением f на любую точку пространства, например, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OO^*}$, где $O^* = f(O)$. Из равенства $O^* = H_{O_1}^{k_1}(H_O^k(O))$ получим $O^* = H_{O_1}^{1/k}(O)$, что по определению гомотетии дает векторное равенство $\overrightarrow{O_1O^*} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{O_1O}$, откуда $\overrightarrow{OO^*} - \overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1}$ или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OO^*} = \frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1}$. ■

Заметим, что для преобразований $f, g, h \in Tr_3$ равносильны равенства $f = g$ и $h \circ f = h \circ g$. Действительно, если для любой точки $A \in \mathbb{P}_3$ выполняется $f(A) = g(A)$, то и $h(f(A)) = h(g(A))$ (в силу однозначности h), откуда $h \circ f = h \circ g$. Обратно, если для всех точек $A \in \mathbb{P}_3$ верно $h(f(A)) = h(g(A))$, то из-за инъективности h получим $f(A) = g(A)$, откуда и следует равенство $f = g$.

Следствие. Пусть $k \neq 1$. Равенство $H_O^k \circ T_{\overrightarrow{AB}} = H_{O_1}^k$ выполняется тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OO_1} = \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Доказательство. В следующей цепочке равенств воспользуемся только что сделанным замечанием:

$$H_O^k \circ T_{\overrightarrow{AB}} = H_{O_1}^k \Leftrightarrow H_O^{1/k} \circ H_O^k \circ T_{\overrightarrow{AB}} = H_O^{1/k} \circ H_{O_1}^k \Leftrightarrow T_{\overrightarrow{AB}} = H_O^{1/k} \circ H_{O_1}^k.$$

Предыдущая теорема позволяет заменить $H_O^{1/k} \circ H_{O_1}^k$ на параллельный перенос на вектор $\frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{O_1O}$ (будьте осторожны, здесь первой действует гомотетия



$H_{O_1}^k$). Приравнивая векторы переносов, из $\overrightarrow{AB} = \frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{O_1O}$ получаем при $k \neq 1$ равносильное равенство $\overrightarrow{OO_1} = \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{AB}$. ■

Следующий результат часто называют *теоремой о трех центрах гомотетий*.

Теорема 6.3. Пусть $k, k_1 \in \mathbb{R}$ и $k \cdot k_1 \neq 1$, тогда композиция двух гомотетий $H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$ является гомотетией $H_{O_2}^{k \cdot k_1}$, причем центр этой гомотетии можно найти из соотношения (**): $\overrightarrow{OO_2} = \frac{1-k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \overrightarrow{OO_1}$.

Доказательство. По традиции обозначим через $f = H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$. Если $O = O_1$ или $k = 1$ утверждение теоремы, включая соотношение (**), очевидно выполняется. Далее считаем, что одновременно $O \neq O_1$ и $k \neq 1$. Из предыдущего следствия подберем вектор \overrightarrow{AB} так, чтобы $H_O^k \circ T_{\overrightarrow{AB}} = H_{O_1}^k$, т.е. $\overrightarrow{AB} = \frac{1-k}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{BA} = \frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1}$, тогда

$$\begin{aligned} f &= H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k = H_{O_1}^{k_1} \circ \left(H_O^k \circ T_{\overrightarrow{AB}} \right) \circ T_{\overrightarrow{BA}} = H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_1}^k \circ T_{\overrightarrow{BA}} = \\ &= \left(H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_1}^k \right) \circ T_{\overrightarrow{BA}} = H_{O_1}^{k \cdot k_1} \circ T_{\overrightarrow{BA}} = H_{O_2}^{k \cdot k_1}. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы также использовали предыдущее следствие (его можно применить, поскольку $k \cdot k_1 \neq 1$), которое нам к тому же дает равенство

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1O_2} &= \frac{k \cdot k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{k \cdot k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \overrightarrow{OO_1} = \frac{k \cdot k_1 - k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \overrightarrow{OO_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO_2} - \overrightarrow{OO_1} = \frac{k \cdot k_1 - k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \overrightarrow{OO_1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO_2} = \left(1 + \frac{k \cdot k_1 - k_1}{1-k \cdot k_1} \right) \cdot \overrightarrow{OO_1} = \frac{1-k_1}{1-k \cdot k_1} \cdot \overrightarrow{OO_1}. \end{aligned}$$

■

Глава 3

СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА

Среди плоских фигур и пространственных тел многоугольники и многогранники занимают важное место. На первый взгляд определение этих геометрических объектов не требует большого числа вспомогательных понятий и утверждений. Так, например, часто отождествляют многоугольник с простой замкнутой ломаной, а многогранник — с многогранной поверхностью. Многоугольник, определенный таким образом, всегда будет иметь нулевую площадь. Чтобы избежать такого странного результата, можно рассматривать в качестве многоугольников ограниченные множества, полученные в результате пересечения конечного числа полуплоскостей. Все такие многоугольники будут выпуклыми, в то время как трудно отрицать существование невыпуклых четырехугольников. С точки зрения теории площади многоугольник удобно представлять в виде объединения конечного числа треугольников. Однако далеко не каждое объединение треугольников (например, двух непересекающихся) соответствует тому, что мы обычно понимаем под многоугольником.

Все эти трудности могут быть преодолены с помощью теоремы Жордана: простая замкнутая кривая разбивает плоскость на две области, одна из которых будет ограниченной (простой замкнутой кривой называют образ отрезка $[0; 1]$ при непрерывном отображении f этого отрезка в плоскость, причем $f(0) = f(1)$, а на полуинтервале $[0; 1)$ отображение f инъективно). Теорема Жордана является одним из наиболее красивых и сложных результатов комплексного анализа, поэтому об элементарном доказательстве этой теоремы не может идти речи. Вместо этого мы заменим в формулировке теоремы кривую на ломаную и установим справедливость этого утверждения с помощью несложного математического аппарата. Центральное место здесь будет принадлежать понятию связности множеств, которое является одним из важ-



ных топологических свойств. Далее докажем аналогичный результат о разбиении пространства многогранной поверхностью. Хотя при его доказательстве используются новые математические идеи, он также назван теоремой Жордана.

3.1. Связность отрезка. Линейная связность

Начнем с изучения связных множеств на плоскости, а в конце параграфа обсудим что нужно изменить в теории при выходе в открытое пространство. Договоримся рассматривать точки и подмножества некоторой фиксированной плоскости α . Напомним, что для любой точки $A \in \alpha$ и числа $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(A) = \{X \in \alpha : |AX| < \varepsilon\}$ называется ε -окрестностью точки A . Точка A называется *внутренней* точкой фигуры F , если существует $O_\varepsilon(A)$, для которой $O_\varepsilon(A) \subseteq F$. Через $\text{Int } F$ обозначают множество всех внутренних точек этой фигуры. Например, для любой прямой a верно $\text{Int } a = \emptyset$, а для всей плоскости α выполняется $\text{Int } \alpha = \alpha$. Множество $U \subseteq \alpha$ называется *открытым*, если для каждой точки $A \in U$ существует $O_\varepsilon(A)$, для которой $O_\varepsilon(A) \subseteq U$. Ясно, что множество U открыто тогда и только тогда, когда $U = \text{Int } U$. Если $A \in U$ и U — открытое множество, то $O_\varepsilon(A)$ называется окрестностью точки A и обозначается $O(A)$. В теореме 3.1 первой главы было доказано, что $O_\varepsilon(A)$ является открытым множеством, поэтому $O_\varepsilon(A)$ — частный случай окрестности точки A .

Определение. Фигуру Φ будем называть *несвязным* множеством, если найдутся два открытых множества U и V со следующими свойствами:

- 1) $\Phi \subseteq U \cup V$;
- 2) $U \cap V = \emptyset$;
- 3) $U \cap \Phi \neq \emptyset$ и $V \cap \Phi \neq \emptyset$.

Пример 1. Если A и B — две различные точки плоскости, то фигура $\Phi = \{A, B\}$ является несвязной. Обозначим через $r = |AB| > 0$, положим $\varepsilon = r/3$ и в качестве U и V выберем $O_\varepsilon(A)$ и $O_\varepsilon(B)$ (рис. 77). Первое и последнее свойство предыдущего определения очевидно выполняются, а для проверки второго свойства предположим противное. Если бы существовала точка $X \in U \cap V$, то из неравенства треугольника мы бы получили, что $r = |AB| \leq |AX| + |XB| < \varepsilon + \varepsilon = 2r/3$, а

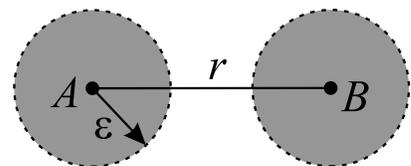


Рис. 77



это противоречит условию $r > 0$.

Определение. Фигуру Φ будем называть связным множеством, если она не является несвязной.

Пример 2. Фигура, состоящая из одной точки, связна. Действительно, из свойств (2) и (3) определения следует, что любое несвязное множество содержит по крайней мере две точки, поэтому все одноточечные множества (т.е. *синглтоны*) и пустое множество являются связными.

Из рассмотренных примеров следует, что конечное множество $F \subseteq \alpha$ является связным тогда и только тогда, когда $|F| \leq 1$. Сложнее проверить, что любое счетное подмножество плоскости несвязно (см. упражнения к этому параграфу). Отрезок является нетривиальным примером бесконечного связного множества.

Теорема 1.1. Отрезок $[AB]$ является связным множеством.

Доказательство. Если $A = B$, то утверждение очевидно, поэтому далее считаем отрезок невырожденным.

Предположим противное: $[AB]$ является несвязным множеством и для него можно найти два открытых множества U и V со свойствами 1–3. Поскольку $[AB] \subseteq U \cup V$, выполняется $A \in U$ или $A \in V$. Б.о.о. будем считать, что $A \in U$ (рис. 78), тогда обозначим через

$$F = \{X \in [AB] : [AX] \subseteq U\}.$$

Введем порядок \leq на прямой $a = (AB)$, порожденный вектором \overrightarrow{AB} . Заметим, что $A \in F$. Кроме того, $F \subseteq [AB]$, поэтому F — непустое и ограниченное множество на прямой a . Воспользуемся теоремой 1.2 из первой главы и найдем точку $C^* = \sup F$. Из того, что B является некоторой верхней границей для множества F и точка $A \in F$ следует, что $A \leq C^* \leq B$, т.е. $C^* \in [AB]$. Установим, что точка C^* обладает следующими свойствами.

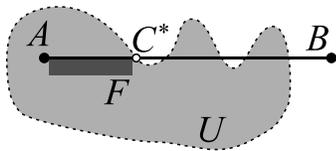


Рис. 78

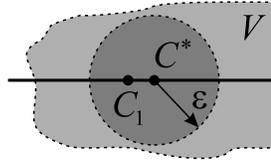


Рис. 79

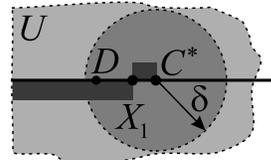


Рис. 80

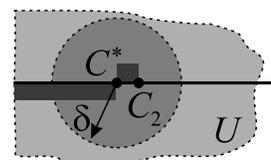


Рис. 81

I. Докажем, что $C^* \in U$. Мы уже знаем, что $C^* \in [AB] \subseteq U \cup V$. Предположив противное, что $C^* \notin U$, мы получим $C^* \in V$. Воспользуемся открытостью множества V и найдем такую окрестность $O_\varepsilon(C^*)$, для которой



справедливо включение $O_\varepsilon(C^*) \subseteq V$ (рис. 79). Выберем точку $C_1 < C^*$ так, чтобы $C_1 \in O_\varepsilon(C^*)$. Учитывая, что $F \subseteq U$, $U \cap V = \emptyset$ и $O_\varepsilon(C^*) \subseteq V$, мы получим, что на отрезке $[C_1C^*]$ нет ни одной точки из F . Поэтому неравенство $X \leq C^*$, которое выполняется для всех $X \in F$, дает $X \leq C_1$. Таким образом, точка C_1 также является верхней границей для множества F , причем $C_1 < C^*$. Это противоречит условию $C^* = \sup F$ и мы доказали, что $C^* \in U$.

II. Докажем, что $C^* \in F$. Уже установлено, что $C^* \in U$. Воспользуемся открытостью множества U и найдем такую окрестность $O_\delta(C^*)$, для которой справедливо включение $O_\delta(C^*) \subseteq U$ (рис. 80). Из $C^* = \sup F$ следует, что ни одна точка $D < C$, $D \in O_\delta(C^*)$ не может быть верхней границей множества F , поэтому найдется точка $X_1 \in F$, для которой $D < X_1 \leq C^*$. Поскольку $X_1 \in F$, получим $[AX_1] \subseteq U$. Кроме того, $[X_1C^*] \subseteq O_\delta(C^*) \subseteq U$, откуда $[AC^*] = [AX_1] \cup [X_1C^*] \subseteq U$ и мы проверили, что $C^* \in F$.

III. Докажем, что $C^* = B$. О/п: $C^* < B$. Воспользуемся только что найденной $O_\delta(C^*)$, для нее выполнено включение $O_\delta(C^*) \subseteq U$. Выберем точку C_2 (рис. 81) из этой окрестности так, чтобы $C^* < C_2 \leq B$ (если вдруг точка B попадет в эту окрестность, то в качестве точки C_2 можно выбрать саму точку B). В предыдущем пункте уже было доказано, что $[AC^*] \subseteq U$. Кроме того, верно $[C^*C_2] \subseteq O_\delta(C^*) \subseteq U$, откуда $[AC_2] = [AC^*] \cup [C^*C_2] \subseteq U$ и мы проверили, что $C_2 \in F$. Но $C_2 > C^*$, что противоречит равенству $C^* = \sup F$. В результате установлено, что $C^* = B$.

Из последних двух свойств точки C^* мы получим, что $B = C^* \in F$, т.е. $[AB] \subseteq U$ и поэтому $[AB] \cap V = \emptyset$, что противоречит выбору открытого множества V . Таким образом, наше предположение о несвязности $[AB]$ ошибочно, поэтому с радостью заключаем, что любой отрезок связан. ■

Следующие два утверждения позволяют из отрезков конструировать другие связанные множества.

Лемма 1.2. *Если Φ — связанное множество и существуют открытые множества U и V такие, что $\Phi \subseteq U \cup V$ и $U \cap V = \emptyset$, то $\Phi \subseteq U$ или $\Phi \subseteq V$.*

Доказательство. О/п: предположим, что Φ целиком не содержится ни в одном из этих множеств.

Поскольку $\Phi \subseteq U \cup V$ и Φ целиком не содержится в U , выполняется свойство (*): $\Phi \cap V \neq \emptyset$.



Аналогично, включение $\Phi \subseteq U \cup V$ и то, что Φ целиком не содержится в V , гарантируют выполнение условия (**): $\Phi \cap U \neq \emptyset$.

Из (*) и (**) следует, что выполняется свойство (3) определения несвязного множества и мы получили противоречие со связностью фигуры Φ . ■

Теорема 1.3. Пусть для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ фигура Φ_i является связным множеством и при всех $i \leq n - 1$ справедливо $\Phi_i \cap \Phi_{i+1} \neq \emptyset$, тогда $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ также связно.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по n . Б.И. При $n = 1$ утверждение очевидно, пусть $n = 2$. Предположив противное, найдем для фигуры $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ два открытых множества U и V со свойствами 1–3. По предыдущей лемме из связности Φ_1 следует, что $\Phi_1 \subseteq U$ или $\Phi_1 \subseteq V$. Аналогично $\Phi_2 \subseteq U$ или $\Phi_2 \subseteq V$. Так как $\Phi_1 \cap \Phi_2 \neq \emptyset$, то Φ_1 и Φ_2 содержатся в одном и том же открытом множестве. Б.о.о. будем считать, что Φ_1 и Φ_2 содержатся в U , тогда $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \subseteq U$ и $\Phi \cap V = \emptyset$, поэтому открытое множество V не удовлетворяет свойству (3). ✕

Ш.И. Предположим, что для $k \in \mathbb{N}$ утверждение выполняется и докажем его для $n = k + 1$. Представим фигуру Φ в виде $\Phi = \Phi^* \cup \Phi_{k+1}$, причем фигура $\Phi^* = \bigcup_{i=1}^k \Phi_i$ связна по предположению индукции. Поскольку справедливо включение $\Phi_k \subseteq \Phi^*$, выполнено условие $\Phi^* \cap \Phi_{k+1} \neq \emptyset$. Применив к множествам Φ^* и Φ_{k+1} базу индукции, получим, что Φ связно. ■

Напомним, что *ломаной* z называется конечное объединение отрезков $\bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$. Из определения ломаной сразу следует, что пересечение двух ее смежных звеньев $[A_i A_{i+1}]$ и $[A_{i+1} A_{i+2}]$ непусто, поскольку содержит по крайней мере общую вершину A_{i+1} . Будем также говорить, что ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ соединяет между собой точки A_1 и A_{n+1} .

Следствие. Любая ломаная является связным множеством.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы и связности любого отрезка. ■



Ломанные позволяют ввести простой и более сильный вариант связности.

Определение. Фигура Φ называется линейно связным множеством, если для любых точек $A, B \in \Phi$ найдется такая ломаная $z \subseteq \Phi$, которая соединяет между собой точки A и B .

На рис. 82 изображено нескучное линейно связное множество Φ . Ломаную z , соединяющую точки A и B можно было выбрать много проще, но важно, чтобы выполнялось условие из определения — z целиком должна содержаться в фигуре Φ . Чуть позже в этой главе будет установлено, что график любой непрерывной функции, заданной на промежутке, является связным множеством. Например, любая парабола связна, но она не содержит в себе ни одного нетривиального отрезка, поэтому две ее различные точки невозможно соединить ломаной, целиком содержащейся в параболе. Это означает, что примеры связных, но не линейно связных множеств строятся легко. Далее обсудим простые свойства линейно связных множеств.

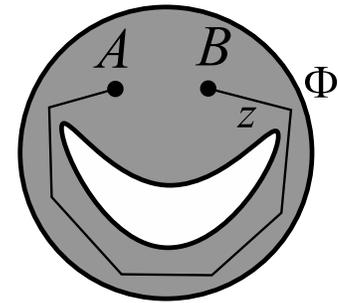


Рис. 82

Теорема 1.4. Если Φ — линейно связное множество, то Φ связно.

Доказательство. Предположив противное, для фигуры Φ найдем пару открытых множеств U и V со свойствами 1–3. Выберем точки $A \in \Phi \cap U$ и $B \in \Phi \cap V$. С помощью линейной связности найдем ломаную $z \subseteq \Phi$, которая соединяет между собой точки A и B . Мы уже знаем, что z является связным множеством, поэтому из $z \subseteq \Phi \subseteq U \cup V$ и леммы 1.2 следует, что ломаная z содержится только в одном из этих открытых множеств. Но мы знаем, что $A \in z \cap U$ и $B \in z \cap V$. ∇ .

Следствие. Любое выпуклое множество связно.

Доказательство. Из выпуклости сразу следует линейная связность. Остается применить предыдущую теорему.

Оказывается, что открытые множества обладают интересной особенностью: для этих множеств оба вида связности равносильны.

Теорема 1.5. Пусть W — открытое множество. Тогда W линейно связно тогда и только тогда, когда W — связное множество.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы нам достаточно доказать только обратное утверждение.



Пусть W — открытое связное множество. О/п: W не линейно связно. Тогда найдем пару точек $A, B \in W$, которые нельзя соединить между собой ломаной, целиком содержащейся в W . Определим следующим образом два множества:

$$U = \{C \in W : \text{существует ломаная } z \subseteq W, \text{ которая соединяет } C \text{ и } A\}$$

и $V = W \setminus U$. Заметим, что $W \subseteq U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $A \in U \cap W$ и $B \in V \cap W$. Осталось проверить открытость множеств U и V .

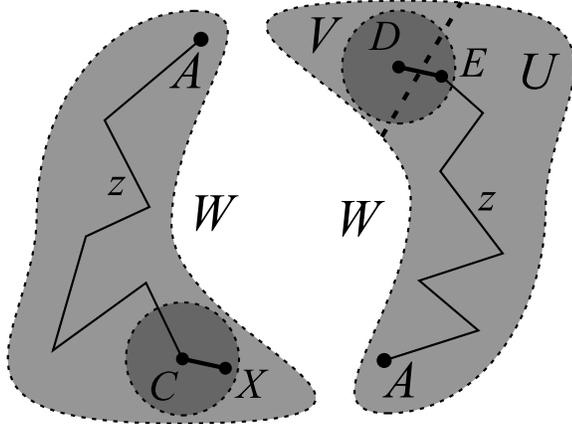


Рис. 83

Рис. 84

I. Докажем, что U — открытое множество. Выберем любую точку $C \in U$. Учитывая, что $C \in W$ и W — открытое множество, найдем окрестность $O_\varepsilon(C)$, для которой $O_\varepsilon(C) \subseteq W$. Вспомним, что $C \in U$, поэтому найдется такая ломаная $z \subseteq W$, которая соединяет точку A с точкой C (рис. 83). Теперь для любой точки $X \in O_\varepsilon(C)$ добавим к z звено $[CX]$ и получим ломаную $z_1 = z \cup [CX] \subseteq W$, которая соединяет точку A уже с точкой X . Мы провери-

ли, что $X \in U$, откуда $O_\varepsilon(C) \subseteq U$ и U — открытое множество.

II. Докажем, что V — открытое множество. Выберем произвольную точку $D \in V$. Снова воспользуемся включением $D \in W$ и тем, что W — открытое множество. Найдем окрестность $O_\delta(D)$, для которой $O_\delta(D) \subseteq W$. Осталось показать, что $O_\delta(D) \cap U = \emptyset$. О/п: нашлась точка $E \in O_\delta(D) \cap U$. Поскольку $E \in U$, существует ломаная $z \subseteq W$, которая соединяет точку A с точкой E (рис. 84). Добавим к z звено $[ED]$ и получим ломаную $z_1 = z \cup [ED] \subseteq W$, которая соединяет точку A уже с точкой D . Мы неожиданно получили, что $D \in U$, что противоречит выбору этой точки. Теперь из условий $O_\delta(D) \subseteq W$ и $O_\delta(D) \cap U = \emptyset$ следует, что $O_\delta(D) \subseteq V$. Мы доказали, что V — открытое множество.

В результате для множеств U и V мы проверили выполнение условий (1)–(3), что противоречит связности множества W . ■

Семейство \mathcal{T}_2 всех открытых множеств плоскости α отличается от \mathcal{T}_3 — семейства всех открытых множеств пространства¹. Отличие настолько силь-

¹Семейства \mathcal{T}_2 и \mathcal{T}_3 называются соответственно топологией плоскости и топологией пространства.



ное, что \emptyset — единственный их общий элемент. Происходит это из-за изменения ε -окрестностей точек. В пространстве для любой точки A и числа $\varepsilon > 0$ ее ε -окрестностью называется множество $O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{P}_3 : |AX| < \varepsilon\}$. Ясно, что в пространстве $O_\varepsilon(A)$ — это шар радиуса ε с центром в точке A , из которого выбросили ограничивающую сферу $Sph(A, \varepsilon)$. Поэтому в пространстве никакая точка $A \in \alpha$ внутренней точкой плоскости α не будет (так как значительная часть $O_\varepsilon(A)$ не содержится в α) и $\alpha \in \mathcal{T}_2 \setminus \mathcal{T}_3$. Открытое в \mathbb{P}_3 множество U определяется с помощью равенства $U = \text{Int } U$. Нетрудно проверить, что для любого открытого в \mathbb{P}_3 множества U пересечение $U \cap \alpha$ открыто в α (поскольку пересечение $O_\varepsilon(A) \cap \alpha$ при $A \in \alpha$ является ε -окрестностью точки A в плоскости α). Несвязное множество в \mathbb{P}_3 определяется с помощью открытых в пространстве множеств, в остальной теории связных множеств в пространстве развивается схожим образом и все утверждения этого параграфа допускают пространственную переформулировку и доказываются в \mathbb{P}_3 простой заменой элементов \mathcal{T}_2 на элементы \mathcal{T}_3 . В заключение отметим, что любое связное в α множество также связно в \mathbb{P}_3 , но обратное неверно — например, двузвенную ломаную $[AC] \cup [CB]$ можно расположить в пространстве так, чтобы ее пересечением с α был дуэлет $\{A, B\}$, который несвязен в плоскости α .

Упражнения

1. Приведите пример двух связных множеств, пересечение которых несвязно.
2. Приведите пример двух связных множеств, объединение которых несвязно.
3. Пусть Φ_i — связное множество при всех $i \in I$ (I — индексное множество, которое может содержать любое число элементов), причем существует такая точка A^* , что $A^* \in \bigcap_{i \in I} \Phi_i$. Докажите, что $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ также является связным множеством.
4. Докажите, что любое счетное подмножество плоскости (или пространства) является несвязным множеством. *Указание:* покажите сначала, что проекция этого множества хотя бы на одну координатную ось содержит более одной точки.
5. Опишите все связные подмножества прямой.
6. Докажите, что пустое множество связно.
7. Проверьте, что связность инвариантна относительно любого подобия.
8. Постройте такую биекцию $f : \alpha \rightarrow \alpha$ и связное множество $\Phi \subseteq \alpha$, что $f(\Phi)$ связным множеством не является.



3.2. Непрерывные отображения

Определение несвязного множества использует только понятие открытого множества, поэтому это определение описывает не только несвязные подмножества прямой, плоскости или трехмерного пространства, но и любого множества, на котором задано семейство открытых множеств (т.е. введена топология). В частности, это определение описывает несвязные подмножества любого метрического пространства, где открытыми множествами являются те и только те множества, которые каждую свою точку содержат с некоторой ε -окрестностью. Напомним, что *метрикой* (или *функцией расстояния*) на некотором множестве X называют функцию $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (договоримся вместо $d((x, y))$ записывать $d(x, y)$), удовлетворяющую трем свойствам²: 1) $d(x, y) \geq 0$ при всех $x, y \in X$, причем $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 2) $d(x, y) = d(y, x)$ при всех $x, y \in X$; 3) при всех $x, y, z \in X \Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

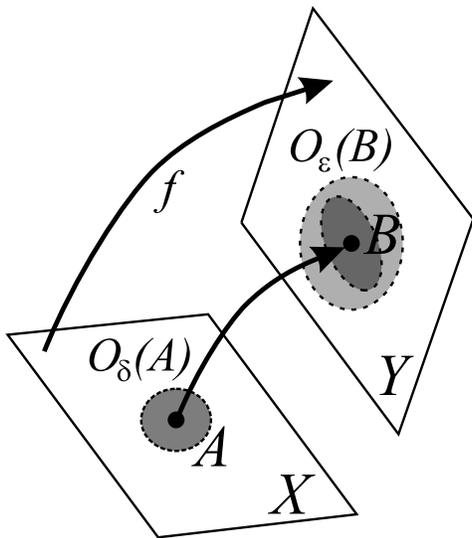


Рис. 85

Пару (X, d) называют метрическим пространством (сокращенно — МП). Для любого метрического пространства (X, d) , произвольной точки $x \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ множество $O_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ называется ε -окрестностью точки x . В курсе математического анализа (вторая глава книги Матан 11) было доказано, что в декартовой системе координат на прямой $(A(x_1), B(x_2))$, плоскости $(A(x_1, y_1), B(x_2, y_2))$ или в пространстве $(A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2))$ соответственно функции $d(A, B) = |x_2 - x_1|$,
 $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
 $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
являются метриками. Геометрический смысл

$d(A, B)$ в этих метриках³ — длина отрезка, соединяющего точки A и B .

Дадим определение непрерывного отображения между метрическими пространствами (X, d) и (Y, d_1) (множества и метрики на них могут быть разными, например, мы часто будем рассматривать $X = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}^2$ с евклидовыми метриками).

²Второе свойство называется *симметричностью* $d(x, y)$, а третье — *неравенством треугольника*.

³Они называются *евклидовыми* метриками и рассматриваются по умолчанию на \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .



Определение. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $A \in X$, если для любой $O_\varepsilon(B)$ (где $B = f(A)$) существует такая окрестность $O_\delta(A)$, что $f(O_\delta(A)) \subseteq O_\varepsilon(B)$ (рис. 85). Отображение f непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке $A \in X$.

Теорема 2.1. Для отображения $f : X \rightarrow Y$ следующие условия равносильны:

- 1) f непрерывно;
- 2) для любого открытого в Y множества V следует, что $f^{-1}(V)$ открыто в X ;
- 3) для любой точки $y \in Y$ и любой ее окрестности $O_\varepsilon(y)$ следует, что $f^{-1}(O_\varepsilon(y))$ открыто в X .

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) пусть f непрерывно, рассмотрим произвольное открытое в Y множество V и его прообраз $U = f^{-1}(V)$. Выберем произвольную точку $x \in U$, тогда $y = f(x) \in V$. Поскольку V — открытое в Y множество, найдется такая окрестность $O_\varepsilon(y)$, что $O_\varepsilon(y) \subseteq V$. По условию отображение f непрерывно в точке x , поэтому найдется такая окрестность $O_\delta(x)$, что $f(O_\delta(x)) \subseteq O_\varepsilon(y) \subseteq V$, откуда $O_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V) = U$ и множество U открыто.

2) \Rightarrow 3) очевидно, поскольку $O_\varepsilon(y)$ — открытое множество, из (2) сразу следует, что $f^{-1}(O_\varepsilon(y))$ открыто в X .

3) \Rightarrow 1) докажем, что отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в произвольной точке $x \in X$. Из всюду определенности и однозначности f найдется единственная точка $y \in Y$, для которой $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную ε -окрестность точки y . Из (3) получим, что множество $U = f^{-1}(O_\varepsilon(y))$ открыто в X . Поскольку $x \in U$ и U открыто, найдется такая $O_\delta(x)$, что $O_\delta(x) \subseteq U = f^{-1}(O_\varepsilon(y))$, откуда $f(O_\delta(x)) \subseteq O_\varepsilon(y)$ и непрерывность f в точке x доказана. ■

Рассмотрим несколько примеров непрерывных отображений.

Пример 1. Пусть $f \in D_3$, тогда отображение $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ непрерывно. Действительно, для любой точки $A \in \mathbb{P}_3$, ее образа $B = f(A)$ и произвольной $O_\varepsilon(B)$ справедливо $f^{-1}(O_\varepsilon(B)) = O_\varepsilon(A)$, поэтому $\delta = \varepsilon$ удовлетворяет условию (3) предыдущей теоремы.



Пример 2. Пусть $f \in \text{Sim}_3$ и k — коэффициент f , тогда отображение $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ непрерывно. Действительно, для любой точки $A \in \mathbb{P}_3$, ее образа $B = f(A)$ и произвольной $O_\varepsilon(B)$ справедливо $f^{-1}(O_\varepsilon(B)) = O_{\varepsilon/k}(A)$, поэтому $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ удовлетворяет условию (3) предыдущей теоремы.

Пример 3. Пусть отображение $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ является константным отображением, т.е. найдется такая точка X^* , что для всех $A \in \mathbb{P}_3$ верно $f(A) = X^*$. Докажем, что f — непрерывное отображение. Рассмотрим произвольную точку $Y \in \mathbb{P}_3$ и ее окрестность $O_\varepsilon(Y)$. Если $X^* \notin O_\varepsilon(Y)$, то $f^{-1}(O_\varepsilon(Y)) = \emptyset$ — открытое в \mathbb{P}_3 множество. Если же $X^* \in O_\varepsilon(Y)$, то множество $f^{-1}(O_\varepsilon(Y)) = \mathbb{P}_3$ также открыто в \mathbb{P}_3 . Мы проверили выполнение условия (3) предыдущей теоремы.

Пример 4. Пусть на плоскости α введена декартова система координат и (Ox) , (Oy) — ее координатные оси, тогда проекции $f : \alpha \rightarrow (Ox)$ и $g : \alpha \rightarrow (Oy)$ непрерывны. Для любой точки $A(x_0, y_0)$ рассмотрим ее образ $B = f(A)$ и произвольную $O_\varepsilon(B)$. Из определения $\text{Пр}_{(Ox)}$ мы получим, что $(x_0, 0)$ — координаты точки B и $U = f^{-1}(O_\varepsilon(B)) =]CD[\times (Oy)$ (рис. 86), где C и D имеют координаты $(x_0 - \varepsilon, 0)$ и $(x_0 + \varepsilon, 0)$ соответственно. Положим $\delta = \varepsilon$, тогда $O_\delta(A) \subseteq U$, откуда $f(O_\delta(A)) \subseteq O_\varepsilon(B)$ и мы по определению проверили непрерывность f в точке A . Точно также доказывается непрерывность второй проекции. Аналогично, если рассмотреть декартову систему координат в пространстве с координатными осями (Ox) , (Oy) и (Oz) , то отображения $f = \text{Пр}_{(Ox)} : \mathbb{P}_3 \rightarrow (Ox)$ и $g = \text{Пр}_{(Oy)} : \mathbb{P}_3 \rightarrow (Oy)$ и $h = \text{Пр}_{(Oz)} : \mathbb{P}_3 \rightarrow (Oz)$ будут непрерывны.

Пример 5. Пусть $\mathbb{P}_3(\alpha, A)$ — полупространство с границей α и определяющей точкой A ($A \notin \alpha$, $\text{Int } \mathbb{P}_3(\alpha, A)$ — все точки пространства, которые с A лежат по одну сторону от α и $\mathbb{P}_3(\alpha, A) = \text{Int } \mathbb{P}_3(\alpha, A) \cup \alpha$). Выберем две различные точки $B, C \in \mathbb{P}_3$ и определим отображение $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ следующим образом. Если $X \in \mathbb{P}_3(\alpha, A)$, то $f(X) = B$. Во всех остальных случаях положим $f(X) = C$. Пусть $|BC| = \varepsilon$, тогда $C \notin O_\varepsilon(B)$ и $f^{-1}(O_\varepsilon(B)) = \mathbb{P}_3(\alpha, A)$ — полупространство, которое открытым множеством в \mathbb{P}_3 не является. Таким образом, свойство (3) предыдущей теоремы не выполняется и $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ непрерывным отображением не является.

Теорема 2.2. *Образ любого связного множества $\Phi \subseteq X$ при непрерывном отображении $f : X \rightarrow Y$ связан в Y .*



Доказательство. О/п: $\Phi_1 = f(\Phi)$ несвязно в Y . По определению несвязного множества, для Φ_1 найдется пара непересекающихся открытых множеств U_1 и V_1 со свойствами 1–3 (рис. 87). Предыдущая теорема дает открытость множеств $U = f^{-1}(U_1)$ и $V = f^{-1}(V_1)$ в X . Из определения прообраза для произвольного отображения $f : X \rightarrow Y$ и любых множеств $F, G \subseteq Y$ выполняется равенство $f^{-1}(F \cup G) = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(G)$, поэтому из включения $\Phi_1 \subseteq U_1 \cup V_1$ следует, что

$$\Phi \subseteq f^{-1}(\Phi_1) \subseteq f^{-1}(U_1 \cup V_1) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1) = U \cup V.$$

Кроме того, условие $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ дает $U \cap V = \emptyset$ (иначе общий элемент $x \in U \cap V$ отобразился бы в $f(x) \in U_1 \cap V_1$). Наконец, условие $U_1 \cap \Phi_1 \neq \emptyset$ гарантирует $U \cap \Phi \neq \emptyset$. Аналогично доказывается, что $V \cap \Phi \neq \emptyset$. Мы проверили, что открытые множества U и V удовлетворяют свойствам 1–3 и множество Φ несвязно. ∇ .

Эта теорема сразу дает разрывность отображения f из примера 5. Действительно, \mathbb{P}_3 — связное множество (так как выпукло), а $f(\mathbb{P}_3) = \{B, C\}$ — несвязный дуэлет.

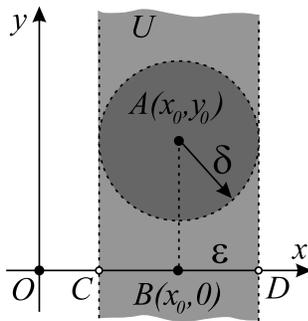


Рис. 86

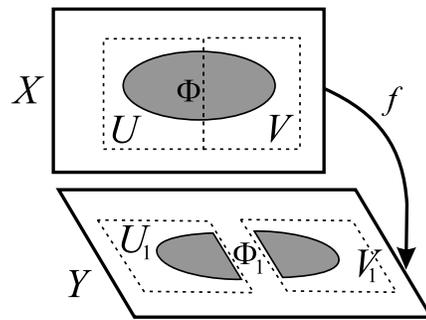


Рис. 87

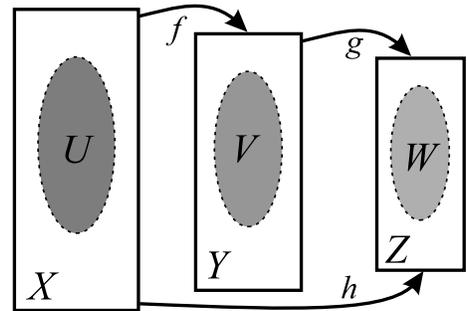


Рис. 88

Теорема 2.3. Пусть (X, d) , (Y, d_1) и (Z, d_2) — метрические пространства. Если отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ непрерывны, то их композиция $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ является непрерывным отображением.

Доказательство. Рассмотрим W — произвольное открытое множество в Z (рис. 88), тогда по теореме 2.1 мы получим, что $V = g^{-1}(W)$ — открытое множество в Y . Еще раз применив теорему 2.1, мы получим, что множество $U = f^{-1}(V)$ открыто в X . Таким образом, $U = h^{-1}(W)$ открыто, и мы проверили для отображения $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ выполнение условия (2) теоремы 2.1.



Упражнения

1. Найдите все точки разрыва отображения $f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ из примера 5.
2. Сохраняется ли линейная связность непрерывными отображениями плоскости в плоскость?
3. Сохраняется ли выпуклость непрерывными отображениями плоскости в плоскость?
4. Используя связность, докажите теорему Коши о нуле: если непрерывная функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на этом отрезке есть число x_0 , для которого $f(x_0) = 0$.
5. Обобщите теорему Коши о нуле на случай метрического пространства. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $F \subseteq X$ и F — связное множество. Если $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция, принимающая на множестве F значения разных знаков, то найдется такая точка $x_0 \in F$, для которой $f(x_0) = 0$.
6. Докажите теорему о промежуточном значении: непрерывная функция $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[a; b]$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$ (т.е. для любого числа y_0 , лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, найдется такое число $x_0 \in [a; b]$, для которого $f(x_0) = y_0$).
7. Докажите теорему Брауэра⁴ о неподвижной точке: для любой непрерывной функции $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ найдется число $x^* \in [a; b]$, для которого $f(x^*) = x^*$.
8. Приведите пример непрерывной функции $f : (0; 1) \rightarrow (0; 1)$ без неподвижных точек.
9. Докажите теорему Брауэра для квадрата: для любого непрерывного отображения $f : K \rightarrow K$ квадрата $K = [a; b] \times [a; b]$ найдется точка $A \in K$, для которой $f(A) = A$.
10. Пусть $\omega = \omega(O, r)$ — окружность в плоскости α , расстояние между точками которой определяется так же, как и в плоскости α . Если $A \in \omega$ и $A^* = Z_O(A)$, то точки A и A^* называются *антиподами* в ω . Пусть $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что есть два таких антипода A и A^* , для которых $f(A) = f(A^*)$.

3.3. Плоские кривые

Определение. Пусть P — некоторый промежуток⁵ на \mathbb{R} , тогда для любого непрерывного отображения $f : P \rightarrow \alpha$ множество $f(P)$ называется *линией* (или *плоской линией*). Обозначим через \mathcal{L} множество всех линий.

⁴Лейтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966) — голландский математик, профессор (1912–1951) Амстердамского университета; работы относятся к конструктивной логике, основаниям математики, топологии; оказал существенное влияние на развитие топологии в 20–30 годы; дал строгое топологическое определение размерности, доказал теорему Жордана для случая n -мерного сферического пространства, лежащего в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве; доказал теорему о неподвижной точке; член Лондонского королевского общества с 1948 года.

⁵Т.е. выпуклое множество, подробнее об этом — в первом параграфе первой главы.



Определение. Если $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывное отображение числового отрезка $[a; b]$ (т.е. $[a; b] \subseteq \mathbb{R}$ и $a \leq b$) в плоскость α , то множество $k = f([a; b])$ называется кривой (или плоской кривой). \mathcal{K} — множество всех кривых. Если $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывная биекция, то $k = f([a; b])$ называется дугой.

Следствие 1. Любая линия является связным множеством.

Доказательство. Промежуток является выпуклым множеством (теорема 1.3 первой главы), а любое выпуклое множество связно (следствие из теоремы 1.4). Остается применить теорему 2.2. ■

Следствие 2. Любая кривая является связным множеством.

Доказательство. Очевидно, поскольку каждая кривая является линией, т.е. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. ■

Можно рассматривать линии и кривые в пространстве, предыдущие следствия также будут выполняться. Более того, следующие утверждения легко переносятся на случай \mathbb{P}_3 . Но мы в этом параграфе будем исследовать только линии и кривые в некоторой фиксированной плоскости α . Отдельно рассматривать непрерывные образы промежутков в некоторую прямую нет смысла (кстати, почему?). Самым популярным способом задания линий является координатное задание, которое также называют параметрическим способом.

Определение. Пусть $f : A \rightarrow \alpha$ является отображением промежутка $A \subseteq \mathbb{R}$ в плоскость α , на которой введена декартова система координат (Oxy) . Для любого $t \in A$ обозначим через $C(x(t), y(t)) = f(t)$, тогда система⁶ $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, каждое уравнение которой задает числовую функцию $x(t), y(t) : A \rightarrow \mathbb{R}$, называется координатным способом задания отображения f .

Пример 1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ где $t \in [0; 3\pi/2]$. Эта система является координатным заданием отображения $f : [0; 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, причем $k = f([0; 3\pi/2])$ является дугой, изображенной на рис. 89. В следующей теореме будет доказана непрерывность отображения f , поскольку обе

⁶В пятой главе Алгебры 10 было введено строчное обозначение для системы: $x = x(t) \& y = y(t)$.



координаты $x(t) = \cos t$ и $y(t) = \sin t$ являются непрерывными функциями.

По координатному способу задания f легко понять: непрерывно отображение f , или нет.

Теорема 3.1. Пусть в плоскости α введена декартова система координат (Oxy) . На промежутке $P \subseteq \mathbb{R}$ отображение $f : P \rightarrow \alpha$ задается следующим координатным способом: $x = x(t) \& y = y(t)$, где $t \in P$. Тогда f является непрерывным отображением тогда и только тогда, когда обе функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны.

Доказательство. \Rightarrow) для любого $t \in P$ обозначим через $C_t = f(t)$, тогда координаты точки C_t равны $(x(t), y(t))$. После введения декартовой системы координат расстояние между точками на оси (Ox) и в плоскости α считается так же, как на \mathbb{R} и \mathbb{R}^2 соответственно. Поэтому можно считать, что $x(t) = \text{Пр}_{(Ox)} \circ f$ — композиция двух непрерывных отображений (в четвертом примере предыдущего параграфа было доказано, что $\text{Пр}_{(Ox)}$ и $\text{Пр}_{(Oy)}$ непрерывны). Из теоремы 2.3 получим, что $x(t)$ — непрерывное отображение. Аналогично доказывается, что и $y(t)$ непрерывно.

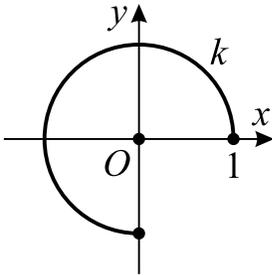


Рис. 89

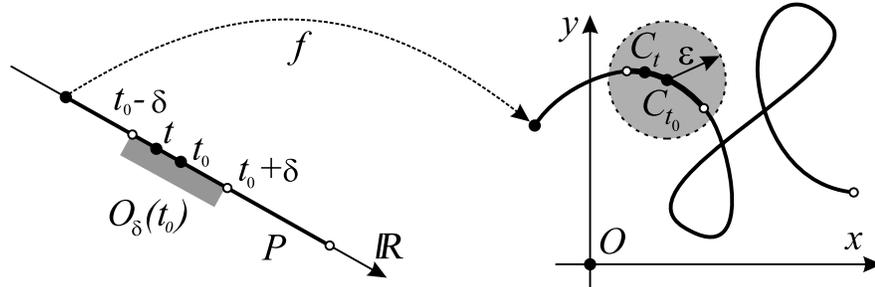


Рис. 90

\Leftarrow) пусть теперь функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны. Проверим непрерывность отображения $f : P \rightarrow \alpha$ в произвольной точке $t_0 \in P$. Обозначим через $C_{t_0} = f(t_0)$, ее координаты — через $(x(t_0), y(t_0))$, а также для любого $t \in P$ пусть точка $C_t = f(t)$ имеет координаты $(x(t), y(t))$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $O_\varepsilon(C_{t_0})$ (рис. 90). Воспользуемся непрерывностью функций $x(t)$, $y(t)$ в точке t_0 и для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ найдем такие δ_1 и δ_2 , что

$$\text{если } t \in P \text{ и } |t - t_0| < \delta_1 \Rightarrow |x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad (*)$$

$$\text{если } t \in P \text{ и } |t - t_0| < \delta_2 \Rightarrow |y(t) - y(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \quad (**)$$



Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то для δ одновременно будут выполняться (*) и (**). Тогда для любого $t \in P$, удовлетворяющего неравенству $|t - t_0| < \delta$, можно оценить расстояние между точками C_t и C_{t_0} следующим образом:

$$|C_t C_{t_0}| = \sqrt{\left(x(t) - x(t_0)\right)^2 + \left(y(t) - y(t_0)\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

В результате $C_t \in O_\varepsilon(C_{t_0})$ и f непрерывно в любой точке $t_0 \in P$. ■

Следствие 1. Пусть функция $g : P \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке P , тогда ее график является линией.

Доказательство. Графиком функции $g(t)$, где $t \in P$, является множество $\Gamma(g) = \left\{ (t, g(t)) : t \in P \right\}$. Рассмотрим отображение $f : P \rightarrow \mathbb{R}^2$, координатным заданием которого будет $x(t) = t$ & $y(t) = g(t)$, где $t \in P$. Из-за непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ по предыдущей теореме получим, что f также непрерывно и $f(P) = \Gamma(g)$ будет линией. ■

Следствие 2. Пусть функция $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда ее график является кривой.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего следствия получим непрерывность отображения $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, координатным заданием которого будет $x(t) = t$ & $y(t) = g(t)$, где $t \in [a; b]$. Тогда $\Gamma(g) = f([a; b])$ — кривая. ■

Следствие 3. Любая окружность является связным множеством.

Доказательство. Функция $g_1(t) : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая задается формулой $g_1(t) = \sqrt{1 - t^2}$ при $t \in [-1; 1]$, является непрерывной как композиция двух непрерывных функций. По предыдущему следствию «верхняя» половина единичной окружности, совпадающая с графиком $\Gamma(g_1)$, будет кривой k_1 и поэтому связна. Аналогично, кривой k_2 также будет график $\Gamma(g_2)$, где $g_2(t) = -\sqrt{1 - t^2}$ при $t \in [-1; 1]$, причем k_2 будет уже «нижней» половиной единичной окружности ω_1 . Связность $\omega_1 = k_1 \cup k_2$ теперь следует из связности k_1 и k_2 , условия $k_1 \cap k_2 \neq \emptyset$ и теоремы 1.3.

Для любой окружности $\omega = \omega(O_1, r)$ ($r > 0$) можно найти подобие f (даже гомотегию) с коэффициентом r , при котором $f(\omega_1) = \omega$. Уже известно (пример 2 предыдущего параграфа), что f — непрерывное отображение,



поэтому из теоремы 2.2 следует, что ω — связное множество. ■

Мы уже знаем, что любое плоское связное множество также связно и в пространстве, поэтому любая окружность связна в \mathbb{P}_3 . Сферу $Sph(O, r)$ невозможно получить конечным объединением окружностей, поэтому для доказательства ее связности сначала усилим результат теоремы 1.3.

Теорема 3.2. Пусть Φ_i — связное множество в \mathbb{P}_3 для любого $i \in I$ (I — произвольное множество индексов). Если для любых двух индексов $i, i^* \in I$ найдется такой конечный набор $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, что $i = i_1$, $i^* = i_n$ и $\Phi_{i_k} \cap \Phi_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ для любого $k \leq n-1$, то $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ является связным в пространстве множеством.

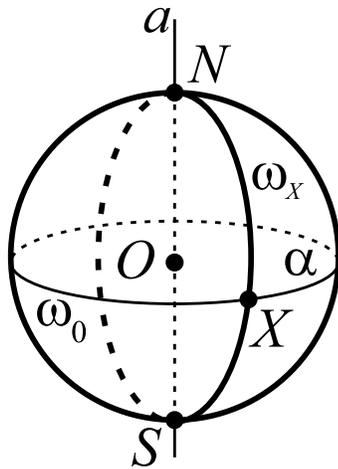


Рис. 91

Доказательство. Предположим противное: Φ не связно, тогда найдем для этой фигуры пару открытых множеств U и V со свойствами 1–3. Также выберем точки $A \in \Phi \cap U$ и $B \in \Phi \cap V$. Поскольку $A, B \in \Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$, найдутся такие два индекса $i, i^* \in I$, что $A \in \Phi_i$ и $B \in \Phi_{i^*}$. По условию теоремы найдется конечный набор $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, что $i = i_1$, $i^* = i_n$ и $\Phi_{i_k} \cap \Phi_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ для любого $k \leq n-1$. Обозначим через $\Phi^* = \bigcup_{k=1}^n \Phi_{i_k}$. Из теоремы 1.3 следует связность фигуры Φ^* , а поскольку $\Phi^* \subseteq \Phi \subseteq U \cup V$ и $U \cap V = \emptyset$, по лемме 1.2 мы получим одно из двух включений: $\Phi^* \subseteq U$ или $\Phi^* \subseteq V$. Отдельно рассмотрим оба эти варианта.

1-й случай: $\Phi^* \subseteq U$, тогда $B \in U$ и $B \in U \cap V = \emptyset$. ✗

2-й случай: $\Phi^* \subseteq V$, тогда $A \in V$ и $A \in U \cap V = \emptyset$. ✗

Следствие. Сфера $Sph(O, r)$ связна.

Доказательство. Пусть $O \in \alpha$ и $\omega_0 = \alpha \cap Sph(O, r)$. Проведем прямую $a \perp \alpha$ так, чтобы $O \in a$ и обозначим через $\{N, S\} = a \cap Sph(O, r)$ (рис. 91). Для произвольной точки $X \in \omega_0$ окружность ω_X получим как пересечение сферы $Sph(O, r)$ с плоскостью (SNX) . Тогда $Sph(O, r) = \bigcup_{X \in \omega_0} \omega_X$ и для любых $X, Y \in \omega_0$ справедливо, что $N \in \omega_X \cap \omega_Y$. Мы проверили выполнение



условий предыдущей теоремы, поэтому $Sph(O, r)$ — связное множество. ■

Новые кривые можно получать суммой уже определенных кривых. Сначала докажем утверждение, в котором проверяется корректность такой суммы.

Теорема 3.3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$ и отображения $f_i : [a_i; a_{i+1}] \rightarrow \alpha$ непрерывны при $i \leq n$. Если для каждого $i \leq n - 1$ выполняется условие⁷ $f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1})$, то отображение $f : [a_1; a_{n+1}] \rightarrow \alpha$, ограничение которого на отрезке $[a_i; a_{i+1}]$ совпадает с отображением f_i при всех $i \leq n$, является непрерывным отображением отрезка $[a_1; a_{n+1}]$ в плоскость.

Доказательство. Индукция по n .

Б.И. При $n = 1$ утверждение очевидно, пусть $n = 2$. Ограничение отображения f на полуинтервал $[a_1; a_2)$ совпадает с отображением f_1 , которое непрерывно в любом числе $t_0 \in [a_1; a_2)$. Обозначим через $C = f_1(t_0) = f(t_0)$ (рис. 92). Для любой окрестности $O_\varepsilon(C)$ из непрерывности f_1 найдем такое $\delta > 0$, что при всех $t \in O_\delta(t_0) \cap [a_1; a_2]$ выполняется $f_1(t) \in O_\varepsilon(C)$. Можно считать, что $\delta \leq |a_2 - t_0|$ (иначе в качестве δ можно взять $|a_2 - t_0|$). Но тогда равны множества $O_\delta(t_0) \cap [a_1; a_2]$ и $O_\delta(t_0) \cap [a_1; a_3]$, поэтому на этом пересечении верно $f(t) = f_1(t)$ и $f(t) \in O_\varepsilon(C)$. Мы проверили непрерывность $f(t)$ во всех точках полуинтервала $[a_1; a_2)$. Аналогично доказывается непрерывность этого отображения на полуинтервале $(a_2; a_3]$.

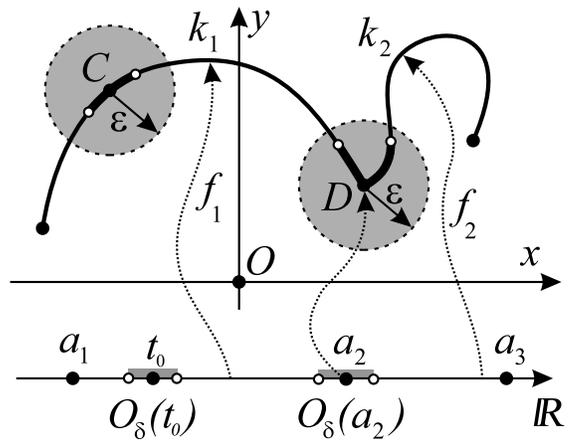


Рис. 92

Докажем непрерывность f в точке a_2 . По условию теоремы верны равенства $f_1(a_2) = f_2(a_2) = f(a_2)$. Обозначим через $D = f(a_2)$ и рассмотрим произвольную $O_\varepsilon(D)$ (рис. 92). Воспользуемся непрерывностью отображений f_1, f_2 в точке a_2 и найдем такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что

$$\text{если } t \in [a_1; a_2] \text{ и } |t - a_2| < \delta_1 \Rightarrow f_1(t) \in O_\varepsilon(D), \quad (*)$$

$$\text{если } t \in [a_2; a_3] \text{ и } |t - a_2| < \delta_2 \Rightarrow f_2(t) \in O_\varepsilon(D). \quad (**)$$

Если $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, то для δ одновременно будут выполняться условия (*) и (**). Поэтому для любого $t \in O_\delta(a_2) \cap [a_1; a_3]$ будет следовать, что

⁷Это условие называется *согласованностью* отображений на границе.



$f(t) \in O_\varepsilon(D)$. Тем самым мы проверили непрерывность отображения f в точке a_2 и база индукции доказана.

ШИ. Предположим, что утверждение верно для $n = k$ и докажем его для $n = k + 1$. Предположение индукции сразу дает непрерывность отображения f на отрезке $[a_1; a_{k+1}]$. Применяя базу индукции к отрезкам $[a_1; a_{k+1}]$ и $[a_{k+1}; a_{k+2}]$, получим непрерывность f на всём отрезке $[a_1; a_{k+2}]$. ■

Определение. В условиях предыдущей теоремы, кривая $k = f\left([a_1; a_{n+1}]\right)$ называется суммой кривых $k_i = f_i\left([a_i; a_{i+1}]\right)$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) и обозначается $k = \sum_{i=1}^n k_i$.

Усилим третье следствие первой теоремы.

Следствие. Любая окружность является кривой.

Доказательство. Пусть в плоскости α введена декартова система координат (Oxy) . Начнем с единичной окружности $\omega_1 = \omega(O, 1)$. Отображение f_1 нам уже знакомо, опишем его координатно формулами $x(t) = t$ & $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$, где $t \in [-1; 1]$. Обе координаты являются непрерывными функциями, поэтому по теореме 3.1 получим непрерывность f_1 и $k_1 = f_1\left([-1; 1]\right)$ является кривой (верхней половиной ω_1). Пусть отображение $f_2 : [1; 3] \rightarrow \alpha$ координатно задается формулами $x(t) = 2 - t$ & $y(t) = -\sqrt{1 - (2 - t)^2}$, где $t \in [1; 3]$. Снова обе координаты являются непрерывными функциями, поэтому можно применить теорему 3.1 и получить, что f_2 непрерывно и $k_2 = f_2\left([1; 3]\right)$ также является кривой (нижней половиной ω_1). Заметим, что $f_1(1) = (1, 0) = f_2(1)$, т.е. выполняется условие согласованности отображений. Из предыдущей теоремы следует, что $\omega_1 = k_1 + k_2$ является кривой.

Обозначим через $f : [-1; 3] \rightarrow \alpha$ отображение, для которого ограничения $f|_{[-1; 1]} = f_1$ и $f|_{[1; 3]} = f_2$. Это отображение непрерывно по предыдущей теореме и $\omega_1 = f\left([-1; 3]\right)$. Теперь для произвольной окружности $\omega = \omega(O_1, r)$ найдем подобие g с коэффициентом r , для которого $g(\omega_1) = \omega$. Тогда композиция непрерывных отображений $h = g \circ f$ является непрерывным отображением (по теореме 2.3) и $\omega = h\left([-1; 3]\right)$ также является кривой. ■

Далее опишем способы задания линий и кривых на плоскости, а также рассмотрим примеры классических плоских кривых.



I. Координатный или параметрический способ (КС). Напомним, что если в плоскости α введена декартова система координат (Oxy) , то отображение $f : A \rightarrow \alpha$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) можно задать с помощью системы $x = x(t)$ & $y = y(t)$, где $t \in A$. С другой стороны, если известно отображение f , то числовые функции $x(t)$ и $y(t)$ легко определяются композициями: $x(t) = \text{Пр}_{(Ox)} \circ f$ и $y(t) = \text{Пр}_{(Oy)} \circ f$. Непрерывность f по теореме 3.1 равносильна непрерывности числовых функций одной переменной $x(t)$ и $y(t)$, при этом $f(A)$ будет линией или кривой (соответственно), если A — промежуток на \mathbb{R} или $A = [a; b]$ (где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$).

II. Каноническое уравнение (КУ). Пусть в α задана декартова система координат (Oxy) , тогда уравнение $F(x, y) = 0$ (где $F(x, y)$ — некоторое алгебраическое выражение от переменных $x, y \in \mathbb{R}$) называется каноническим уравнением линии l (или кривой k), если точка $M(x, y) \in l$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Мы уже знаем (из пятой главы Геометрии 10), что уравнение $Ax + By + C = 0$ ($A, B, C \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 \neq 0$) является каноническим уравнением прямой, а уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ($r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$) задает окружность радиуса r с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$.

III. Геометрическое место точек (ГМТ). Пусть на плоскости α задано отображение P , которое принимает значения из множества $\{И, Л\}$ (отображение $P : X \rightarrow \{И, Л\}$ называется *предикатом* на множестве X). Тогда фигура $\Phi = \{M \in \alpha : P(M) = И\}$ называется геометрическим местом точек со свойством P . В первой и второй главах Геометрии 10 мы рассмотрели несколько классических ГМТ, например ГМТ7 (тринадцатый параграф второй главы Геометрии 10): пусть $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, $k \neq 1$, $A, B \in \alpha$ и $A \neq B$, тогда $\left\{ M \in \alpha : \frac{|MA|}{|MB|} = k \right\}$ является окружностью Аполлония⁸, диаметр которой лежит на прямой (AB) .

IV. Механическое задание (МЗ). Популярный в физике способ описания линии или кривой с помощью траектории движения некоторой материальной точки, при этом непрерывность таких процессов в механике просто постулируется. Однако для определения числовых характеристик (например, длины кривой) механически заданной кривой сначала находят ее координат-

⁸Аполлоний Пергский (2-я половина 3 в. – 1-я половина 2 в. до н.э.) — математик эпохи эллинизма, родился в Перге (Малая Азия), главный его труд «Конические сечения» сохранился не полностью (первые четыре книги) в оригинале, частично (три последующие книги) в арабском переводе, восьмая книга утеряна; исследуя свойства конических сечений, их диаметров, фокусов, нормалей и касательных, пользовался проективно-геометрическими методами.



ное задание или выражают одну переменную через другую из канонического уравнения (см. приложения определенного интеграла в книге Математический анализ 11).

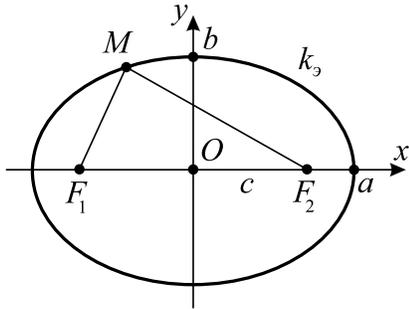


Рис. 93

Пример 2. Эллипс. ГМТ. Пусть точки $F_1, F_2 \in \alpha$, $|F_1F_2| = 2c$, $l \in \mathbb{R}$ и $l > 2c$. Эллипсом⁹ называют $k_3 = \{M \in \alpha : |MF_1| + |MF_2| = l\}$ (рис. 93). Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, число c (т.е. полурасстояние между фокусами) называется *фокальным* расстоянием. Точка O , середина отрезка $[F_1F_2]$ называется *центром* эллипса. У эллипса есть интересное оптическое свойство: если сделать зеркало эллиптической формы и поместить источник света в одном

из его фокусов, то лучи света, отражаясь от эллипса, соберутся во втором его фокусе. Эллипс превращается в окружность радиуса $l/2$ с центром в точке O , если $c = 0$ или $F_1 = F_2 = O$.

КЗ. Введем декартову систему координат (Oxy) , где O — центр эллипса и $(Ox) = (OF_2)$, в этой системе фокусы будут иметь координаты $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Хорда эллипса, лежащая на оси абсцисс, называется *большой осью* эллипса, ее длина обозначается через $2a$. Хорда эллипса, лежащая на оси ординат, называется *малой осью* эллипса и ее длина обозначается через $2b$. Ясно, что числа a и b называются соответственно длинами *большой* и *малой полуосей* эллипса. Точка $M(x, y)$ будет принадлежать эллипсу тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют системе: $x(t) = a \cos t$ & $y(t) = b \sin t$, где $t \in [0; 2\pi]$.

КУ. Во введенной выше системе координат уравнение эллипса принимает очень простой вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Пример 3. Астроида. МЗ. Сразу на плоскости α введем декартову систему координат, чтобы проще было дать определение. Внутри окружности ω_1 , которая задана уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$), расположена окружность ω_2 радиуса $a/4$, окружности касаются друг друга в точке $A(a, 0)$ (рис. 94). Теперь заставим ω_2 катиться без проскальзывания по ω_1 . Траектория движения точки A , которую пройдет эта точка за четыре полных оборота окружности ω_2 , называется астроидой¹⁰. Обозначим эту кривую че-

⁹Название эллипсу (от греч. *ελλειψις* — недостаток, выпадение) дал Аполлоний Пергский в своей «Коники».

¹⁰Название «Astroids» (от греч. *αστρον* — звезда) предложил австрийский астроном Й. Литров в 1838г.



рез k_a и заметим, что она состоит из четырех равных подкривых (они получаются друг из друга поворотами вокруг начала координат). Четыре точки пересечения этих частей (с координатами $(a, 0)$, $(0, a)$, $(-a, 0)$ и $(0, -a)$) называются *каспами* или *точками возврата*.

КЗ. Система $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0; 2\pi]$ описывает координаты тех и только тех точек плоскости α , которые лежат на астроиде.

КУ. В выбранной выше системе координат точка $M(x, y)$ принадлежит астроиду тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

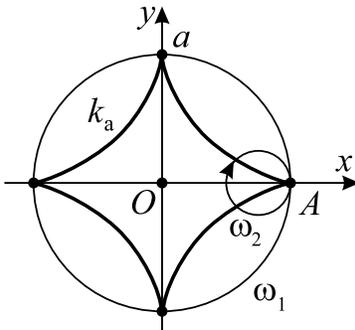


Рис. 94

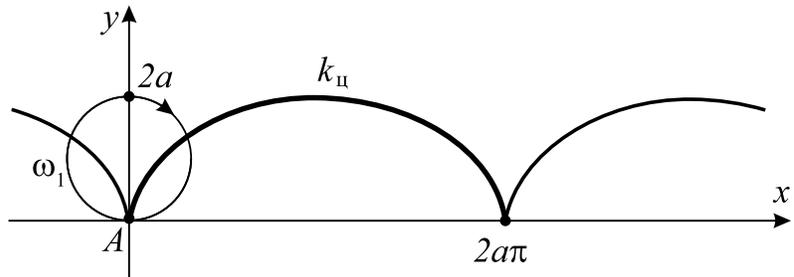


Рис. 95

Пример 4. Циклоида. МЗ. Пусть на плоскости α введена декартова система координат (Oxy) . Окружность ω , которая определена уравнением $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$), в начальный момент времени касается оси (Ox) в точке $A(0, 0)$. Теперь заставим ω катиться без проскальзывания вдоль (Ox) . Траектория движения точки A называется циклоидой¹¹ (рис. 95). Рассматривая только одну из ее арок, т.е. траекторию движения A за один полный оборот ω , мы получим кривую $k_ц$ (участок выделен на рис. 95). «Перевернутая» арка циклоиды является кривой наискорейшего спуска (т.е. *брахистохроной*). Каспы циклоиды лежат на оси абсцисс и имеют координаты $(2at\pi, 0)$, где $t \in \mathbb{Z}$. На исследовании циклоиды оттачивали методы только появившегося в XVII–XVIII веках математического анализа

Йозеф Иоганн фон Литров (1781–1840) — австрийский астроном чешского происхождения, учитель математика Николая Брашмана (основателя Московского математического общества), директор Венской обсерватории с 1819 по 1840 год, первый профессор астрономии Казанского университета, основатель Казанской обсерватории, член-корреспондент Императорской академии наук.

¹¹Название циклоида (от греч. *κυκλοειδης* — кругообразный) придумал Галилей (во Франции эту кривую называли *рулеттой*). Галилео Галилей (1564–1642) — итальянский физик, математик, астроном, один из основателей точного естествознания, сторонник гелиоцентрической системы, за что был инквизицией привлечен к ответственности и в течение девяти лет считался узником инквизиции.



Декарт¹², Ферма¹³, Ньютон¹⁴, Лейбниц¹⁵ и братья Бернулли¹⁶.

КЗ. В выбранной выше системе координат точка $M(x, y) \in k_{\text{ц}}$ тогда и только тогда, когда $x = a(t - \sin t)$ & $y = a(1 - \cos t)$, где $t \in [0; 2\pi]$. Если считать, что $t \in \mathbb{R}$, то мы получим всю циклоиду.

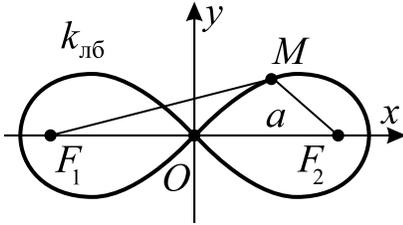


Рис. 96

Пример 5. Лемниската Бернулли. ГМТ.

Пусть $F_1, F_2 \in \alpha$, $|F_1F_2| = 2a$ и $a > 0$. Лемниската Бернулли¹⁷ называют множество $k_{\text{лб}} = \{M \in \alpha : |MF_1| \cdot |MF_2| = a^2\}$ (рис. 96). Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* лемнискаты. Точка O , середина отрезка $[F_1F_2]$ называется *узловой* или *двойной точкой*.

КУ. Введем декартову систему координат (Oxy) , где O — двойная точка лемнискаты и $(Ox) = (OF_2)$, в этой системе фокусы будут иметь координаты $F_1(-a, 0)$ и $F_2(a, 0)$. Точка $M(x, y)$ принадлежит лемнискате тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

¹²Рене Декарт (1596–1650) — французский математик, физик, физиолог; был на военной службе, много путешествовал; в главном математическом труде «Геометрия» Декарт заложил основы аналитической геометрии, считая, что единственным методом математики является алгебра; разработал теорию алгебраических уравнений; утверждал, что опыт играет подчиненную роль по отношению к рационалистической дедукции, считал математику образцом для всех наук.

¹³Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик, юрист по профессии; один из основоположников теории чисел и математического анализа; вывел формулы интегрирования по частям; сформулировал Великую теорему Ферма, которую не могли доказать более 350 лет, и Малую теорему Ферма.

¹⁴Исаак Ньютон (1643–1727) — английский математик, физик и астроном, создатель классической физики и математического анализа; президент Королевского общества (1703–1727); управляющий (1699–1727) Королевского монетного двора, под чьим руководством была существенно улучшена монетная система Англии, трижды Монетный двор посещал русский царь Петр и в 1700 году провел в России монетную реформу, сходную с английской; Ньютон был первым, кого посвятили в рыцари за научные достижения.

¹⁵Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик, философ, логик, физик, языковед и изобретатель, основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской академии и Лондонского Королевского общества; заложил основы математического анализа, комбинаторики и математической логики, описал двоичную систему счисления, ввел современные обозначения для интеграла и дифференциала, сформулировал закон сохранения энергии; был предшественником немецкой классической философии; несколько раз встречался с Петром I и сопровождал его в Теплице и Дрездене, следствием этих встреч было одобрение Петром создания Академии наук в Петербурге; от Петра Лейбниц получил титул тайного советника юстиции и пенсию в 2000 гульденов; Лейбниц стал первым гражданским лицом Германии, которому был воздвигнут памятник.

¹⁶Иоганн Бернулли (1667–1748) — швейцарский математик, младший брат Якоба Бернулли, ученик Лейбница и учитель Эйлера; по его конспекту был выпущен в 1696 г первый учебник по математическому анализу; ему принадлежит правило раскрытия неопределенностей вида $0/0$ (так называемое «правило Лопиталья»), правило интегрирования рациональных дробей; поставил и решил задачу о брахистохроне, поставил задачу о геодезических линиях; основоположник математической физики; его научная корреспонденция составляет около 2500 писем. Якоб Бернулли (1655–1705) — швейцарский математик, профессор Базельского университета (с 1687), его работы посвящены математическому анализу, механике и теории вероятностей; ввел термин «интеграл»; доказал расходимость гармонического ряда.

¹⁷Название лемнискаты (от греч. *λημνισκος* — лента, повязка, бантик с помощью которого в Древней Греции прикрепляли венок к голове победителя в спортивных играх) дано в честь Якоба Бернулли, положившего начало ее изучению в 1694 г.



КЗ. Будем использовать ту же систему координат, что и выше. Тогда точка $M(x, y)$ принадлежит лемнискате в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют системе $x = \frac{a\sqrt{2}\cos t}{1+\sin^2 t}$ & $y = \frac{a\sqrt{2}\cos t \sin t}{1+\sin^2 t}$, где $t \in [0; 2\pi]$.

Упражнения

1. Докажите, что для эллипса его определение с помощью ГМТ, КЗ и КУ приводят к одной и той же кривой.
2. Докажите, что для астроида ее определение с помощью МЗ, КЗ и КУ приводят к одной и той же кривой.
3. Докажите, что для циклоиды (одной ее арки) ее определение с помощью МЗ и КЗ приводят к одной и той же кривой.
4. Докажите, что для лемнискаты Бернулли ее определение с помощью ГМТ, КУ и КЗ приводят к одной и той же кривой.

3.4. Теорема об индексе для ломаных. Многоугольники

Сразу договоримся, что все точки и фигуры, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, расположены в некоторой плоскости α . На-

помним, что ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ называется

замкнутой, если $A_1 = A_{n+1}$. Звенья $s_i = [A_i A_{i+1}]$ и $s_{i+1} = [A_{i+1} A_{i+2}]$ ломаной z называются *смежными* (при $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$). Если ломаная z замкнута, то ее звенья s_1 и s_n также называются смежными. Ломаная называется *простой*, если ее несмежные звенья не пересекаются, а смежные имеют в пересечении только одну точку — их общую вершину. На рис. 97 и 98 приведены простые примеры непростых ломаных: на рис. 97 пересекаются несмежные звенья, а на рис. 98 два смежных звена пересекаются по нетривиальному отрезку. Простую замкнутую ломаную также называют *простым циклом*.

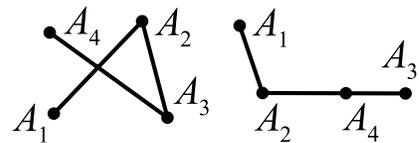


Рис. 97

Рис. 98

Определение. Будем говорить, что отрезки $s = [A_1 A_2]$ и $s^* = [B_1 B_2]$ находятся в общем положении, если концы каждого из них не принадлежат другому отрезку, т.е. $A_i \notin s^*$ и $B_i \notin s$ для $i \in \{1, 2\}$. Пусть s и s^* находятся в общем положении, тогда индекс пересечения этих отрезков определяется



следующим образом:

$$I(s, s^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } s \cap s^* = \emptyset, \\ 1, & \text{если } s \cap s^* \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ясно, что для отрезков $s = [A_1A_2]$ и $s^* = [B_1B_2]$, которые находятся в общем положении, равенство $I(s, s^*) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $]A_1A_2[\cap]B_1B_2[\neq \emptyset$. Прежде чем мы перейдем к индексу пересечения ломаных, договоримся для любого целого числа m под $m \pmod{2}$ понимать остаток от деления m на 2, т.е. $m \pmod{2} = 0$ при четных m , а при всех остальных целых m верно $m \pmod{2} = 1$.

Определение. Ломаные $z = \bigcup_{i=1}^n [A_iA_{i+1}]$ и $z^* = \bigcup_{j=1}^k [B_jB_{j+1}]$ находятся

в общем положении, если вершины каждой из них не принадлежат звеньям другой, т.е. $\{A_i : i \leq n\} \cap z^* = \emptyset$ и $\{B_j : j \leq k\} \cap z = \emptyset$. Индекс пересечения находящихся в общем положении ломаных z и z^* определяется взятием по $\text{mod} 2$ суммы индексов по всем звеньям:

$$I(z, z^*) = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} I(s_i, s_j^*) \right) \pmod{2}, \quad \text{где } s_i = [A_iA_{i+1}], s_j^* = [B_jB_{j+1}].$$

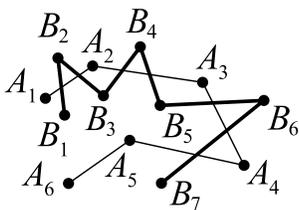


Рис. 99

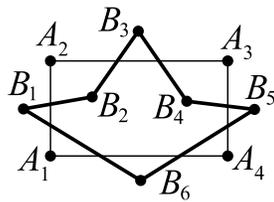


Рис. 100

Пример 1. На рис. 99 индекс пересечения ломаных z и z^* равен 1. А для двух простых циклов на рис. 100 индекс пересечения равен 0.

Совсем просто считать индекс пересечения для двух простых циклов, поскольку всегда будет получаться один и тот же результат. Предположим дока-

зательству этого факта следующую лемму о сохранении индекса пересечения отрезков при «малых» поворотах одного из них относительно произвольной точки плоскости.

Лемма 4.1. Пусть $s = [AB]$ и $s^* = [CD]$ — отрезки, находящиеся в общем положении, и O — произвольная точка. Тогда существует такой угол $\varphi_0 > 0$, что при повороте вокруг точки O на любой угол $\varphi \in (0; \varphi_0)$ для отрезка $s' = R_O^\varphi(s)$ выполняется $I(s', s^*) = I(s, s^*)$, т.е. индекс пересечения при таком повороте сохранится.



Доказательство. 1-й случай: отрезки s и s^* не пересекаются. Сначала проведем две окружности $\omega_1 = \omega(O, |OA|)$, $\omega_2 = \omega(O, |OB|)$ и отметим (если они есть) точки пересечения этих окружностей с отрезком $[CD]$: $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\} = \omega_1 \cap [CD]$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\} = \omega_2 \cap [CD]$ (на рис. 101 и 102 изображены два из девяти возможных вариантов пересечения). Определим через

$$\varphi_1 = \min\{\widehat{AOA_i}, \widehat{BOB_i}, \pi/2 : A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Мы добавили к множеству, по которому берется минимум, число $\pi/2$ на случай, если одновременно $\mathcal{A} = \emptyset$ и $\mathcal{B} = \emptyset$. Кроме того, договоримся под $\angle AOA_i$ понимать наименьший из двух углов, которые образованы лучами $[OA)$ и $[OA_i)$, т.е. всегда считаем $\angle AOA_i$ не больше развернутого. Точно так же проведем окружности $\omega_3 = \omega(O, |OC|)$, $\omega_4 = \omega(O, |OD|)$, обозначим через $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\} = \omega_3 \cap [AB]$, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\} = \omega_4 \cap [AB]$ и определим

$$\varphi_2 = \min\{\widehat{COC_i}, \widehat{DOD_i}, \pi/2 : C_i \in \mathcal{C}, D_i \in \mathcal{D}\}.$$

Осталось показать, что угол $\varphi_0 = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$ — искомый (рис. 103). Действительно, для любых $\varphi \in (0, \varphi_0)$ отрезки $s' = R_O^\varphi(s)$ и s^* не пересекаются, поэтому s' и s^* находятся в общем положении и $I(s', s^*) = I(s, s^*) = 0$.

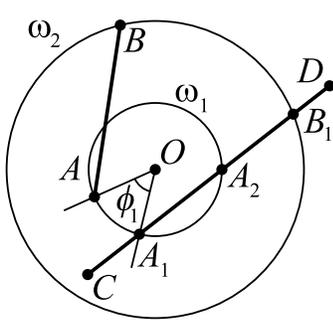


Рис. 101

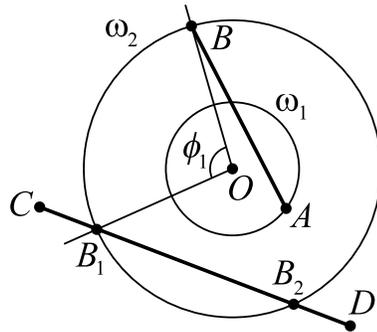


Рис. 102

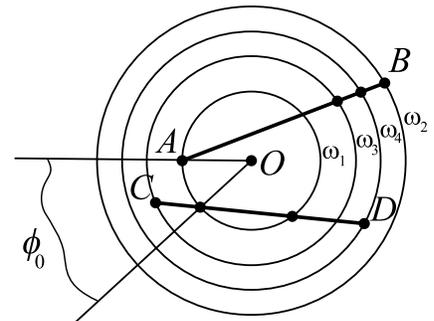


Рис. 103

2-й случай: интервалы $]AB[$ и $]CD[$ пересекаются. Аналогично предыдущему случаю проводим окружности $\omega_1 = \omega(O, |OA|)$, $\omega_2 = \omega(O, |OB|)$, $\omega_3 = \omega(O, |OC|)$, $\omega_4 = \omega(O, |OD|)$, но пересекаем их уже с прямыми (CD) и (AB) (рис. 104): $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\} = \omega_1 \cap (CD)$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2\} = \omega_1 \cap (CD)$, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\} = \omega_3 \cap (AB)$, $\mathcal{D} = \{D_1, D_2\} = \omega_4 \cap (AB)$. Поскольку точки A и B лежат по разные стороны от прямой (CD) , выполняется $A \notin \mathcal{A}$, $B \notin \mathcal{B}$, поэтому, например, $\angle AOA_1$ (если он существует) не может быть вырожденным. Определим

$$\varphi_1 = \min\{\widehat{AOA_i}, \widehat{BOB_i}, \pi/2 : A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}\},$$



$$\varphi_2 = \min\{\widehat{COC_i}, \widehat{DOD_i}, \pi/2 : C_i \in \mathcal{C}, D_i \in \mathcal{D}\}$$

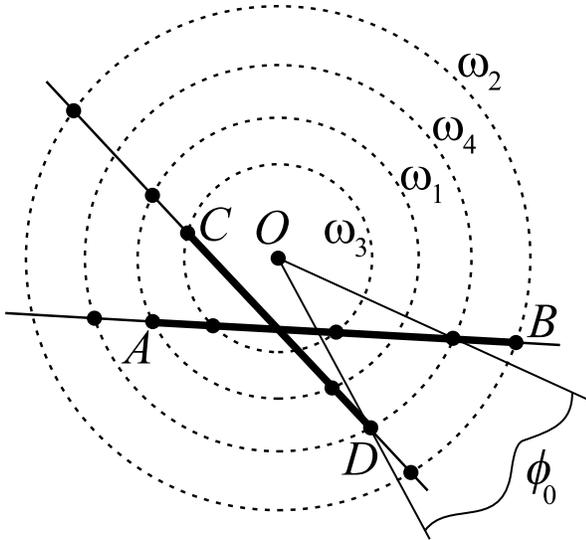


Рис. 104

и докажем, что угол $\varphi_0 = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$ будет искомым. Для произвольного числа $\varphi \in (0, \varphi_0)$ обозначим $A' = R_O^\varphi(A)$, $B' = R_O^\varphi(B)$ и заметим, что определение φ_1 гарантирует, что точки A' и B' по-прежнему лежат по разные стороны от прямой (CD) , поэтому существует точка K , для которой выполнено $\{K\} =]A'B'[\cap(CD)$. С другой стороны, определение φ_2 нам дает, что C и D лежат по разные стороны от $(A'B')$, поэтому существует такая точка L , что $\{L\} =]CD[\cap(A'B')$. Учитывая, что непараллельные прямые $(A'B')$ и (CD) имеют только одну точку пересечения, получим $K = L$ и $]A'B'[\cap]CD[\neq \emptyset$. Мы доказали, что отрезки s' и s^* находятся в общем положении и $I(s', s^*) = I(s, s^*) = 1$.

■

Следующий результат называют *теоремой об индексе пересечения простых циклов*.

Теорема 4.2. *Если простые циклы z и z^* находятся в общем положении, то $I(z, z^*) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим два простых цикла $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ и $z^* = \bigcup_{j=1}^k [B_j B_{j+1}]$, которые находятся в общем положении, и обозначим их звенья через $s_i = [A_i A_{i+1}]$ и $s_j^* = [B_j B_{j+1}]$ при всех натуральных $i \leq n$ и $j \leq k$ (в случае замкнутых ломаных мы считаем, что $A_{n+1} = A_1$ и $B_{k+1} = B_1$). Если $z \cap z^* = \emptyset$, то очевидно, что $I(z, z^*) = 0$. Далее считаем все циклы нетривиальными (т.е. состоящими более чем из одной точки) и рассмотрим два пересекающиеся простых цикла. Разобьем доказательство теоремы на несколько этапов.

I. Зафиксируем некоторую точку O плоскости α и найдем угол φ такой, что для простого цикла $z' = R_O^\varphi(z)$ выполняются следующие свойства:

- 1) z' и z^* не имеют попарно параллельных звеньев;
- 2) $I(z', z^*) = I(z, z^*)$;



3) z' и z^* находятся в общем положении.

То есть нам необходимо повернуть цикл z так, чтобы никакое звено образа не было параллельным никакому звену цикла z^* и при этом сохранить индекс пересечения циклов. Для начала определим

$$\varphi_1 = \min\{(\widehat{A_i A_{i+1}}, \widehat{B_j B_{j+1}}) : (A_i A_{i+1}) \nparallel (B_j B_{j+1}), i \leq n, j \leq k\}.$$

В простых циклах нет вырожденных звеньев, поэтому прямые $(A_i A_{i+1})$ и $(B_j B_{j+1})$ заданы однозначно. Кроме того, все вершины простого цикла не могут быть расположены на одной прямой, поэтому для звена s_i в цикле z найдется хотя бы одно не параллельное ему звено s_j^* в цикле z^* и множество, по которому выше берется минимум, состоит из непустого конечного (в нем не более $n \cdot k$ элементов) количества положительных чисел. Таким образом, число φ_1 определено корректно и $\varphi_1 > 0$. Заметим, что при повороте цикла z на любой угол $\varphi \in (0, \varphi_1)$ условие (1) будет выполнено, поскольку непараллельные звенья останутся непараллельными, а возможная параллельность в какой-то паре звеньев сразу исчезнет из-за условия $\varphi \in (0; \pi)$.

Чтобы сохранить индекс пересечения, воспользуемся леммой. Обозначим через $\varphi_0(s_i, s_j^*)$ — угол, определенный для отрезков s_i и s_j^* в предыдущей лемме. Положим

$$\varphi_2 = \min\{\varphi_0(s_i, s_j^*) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}.$$

Из леммы 4.1 следует, что при повороте цикла z на любой угол $\varphi \in (0, \varphi_2)$ индекс пересечения для любой пары $s'_i = R_O^\varphi(s_i)$ и s_j^* сохранится (при всех натуральных $i \leq n$ и $j \leq k$) и циклы останутся в общем положении. Пусть $\varphi^* = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$, тогда для любого $\varphi \in (0, \varphi^*)$ простой цикл $z' = R_O^\varphi(z)$ удовлетворяет свойствам 1–3.

II. Так как $I(z', z^*) = I(z, z^*)$, можно с самого начала считать, что для z и z^* выполняются свойства 1–3.

Рассмотрим теперь всевозможные прямые $(A_i B_j)$, соединяющие вершины циклов z и z^* ($A_i \neq B_j$ из-за общего положения z и z^*). Этих прямых конечное число (не более $n \cdot k$), поэтому легко найдется такая прямая l , для которой выполняется $l \nparallel (A_i B_j)$ при всех натуральных $i \leq n$ и $j \leq k$. Множества z и z^* ограничены на плоскости α (например, $z \subseteq O_r(A_1)$, где $r = \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$), поэтому существует такой вектор $\vec{v} \parallel l$, что $\tilde{z} \cap z^* = \emptyset$, где $\tilde{z} = T_{\vec{v}}(z)$ (достаточно воспользоваться аксиомой Архимеда так же, как это сделано в теореме 4.3 второй главы). Ясно, что $I(\tilde{z}, z^*) = 0$. Осталось



доказать, что при параллельном переносе цикла z на вектор \vec{v} индекс пересечения не изменится, т.е. $I(z, z^*) = I(\tilde{z}, z^*)$. Договоримся о следующей терминологии. Для любого ненулевого вектора \vec{w} , сонаправленного с вектором \vec{v} , будем говорить, что вершина A_i *проходит* через сторону s_j^* при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $]A_i A'_i[\cap]B_j B_{j+1}[\neq \emptyset$, где $A'_i = T_{\vec{w}}(A_i)$ (рис. 105). Вершина A_i *достигает* стороны s_j^* при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $A'_i \in]B_j B_{j+1}[$, где $A'_i = T_{\vec{w}}(A_i)$ (рис. 106). Не будем забывать, что мы смещаем только цикл z , поэтому для вершин цикла z^* похожие термины означают иное: вершина B_j *проходит* через сторону s_i при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $]B_j B'_j[\cap]A_i A_{i+1}[\neq \emptyset$, где $B'_j = T_{-\vec{w}}(B_j)$ (рис. 107); вершина B_j *достигает* стороны s_i при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $B'_j \in]A_i A_{i+1}[$, где $B'_j = T_{-\vec{w}}(B_j)$ (рис. 108). Заметим, что выбор прямой l исключает случай прохождения вершин цикла z через вершины цикла z^* .

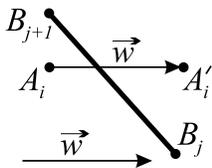


Рис. 105

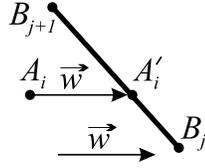


Рис. 106

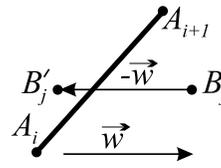


Рис. 107

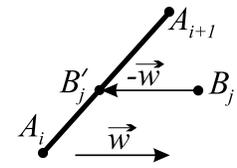


Рис. 108

Пусть $\vec{v} = \overrightarrow{KL}$, причем $K, L \in l$. Введем на l порядок с помощью \vec{v} и рассмотрим множество

$$\Phi = \{X \in]KL[: \text{ при } T_{\overrightarrow{KX}} \text{ вершина } A_i \text{ достигает стороны } s_j^* \text{ или}$$

$$\text{вершина } B_j \text{ достигает стороны } s_i, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}.$$

Множество Φ конечно, поскольку в нем не более $2 \cdot n \cdot k$ точек, поэтому $\Phi = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$, причем сразу считаем, что $X_1 < X_2 < \dots < X_p$. Выберем точки $Y_0 = K < Y_1 < \dots < Y_p = L$ так, чтобы $Y_{i-1} < X_i < Y_i$ при всех натуральных $i \leq p$ и рассмотрим параллельные переносы $f_i = T_{\overrightarrow{Y_{i-1}Y_i}}$ (их будем называть *элементарными сдвигами*) и конечную цепочку циклов: $z_0 = z$, $z_1 = f_1(z_0)$, $z_2 = f_2(z_1)$, \dots , $z_p = f_p(z_{p-1})$, $\tilde{z} = z_p$. Заметим, что точки X_i и Y_i выбраны так, что при элементарном сдвиге f_i каждая вершина z_i может пройти не более чем через одну сторону z^* и наоборот, каждая вершина z^* может пройти не более чем через одну сторону z_i . При этом если какая-либо вершина цикла z_i проходит через сторону s_j^* , то смежные с ней вершины еще не проходят через эту сторону (любой параллельный перенос сохраняет свойство: никакое звено цикла z_i не параллельно никакому



звену цикла z^*). Ясно, что достаточно доказать сохранение индекса только при первом элементарном сдвиге, а сделанное замечание позволяет ограничиться только случаем прохождения одной вершины A_i через сторону s_j^* (прохождение B_j через сторону s_i рассматривается аналогично).

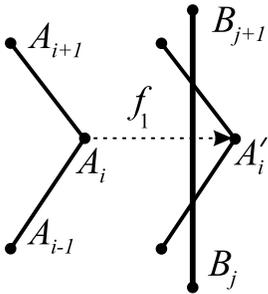


Рис. 109

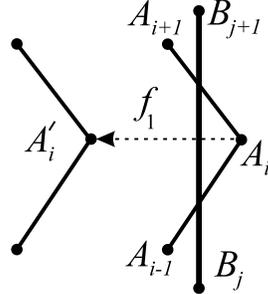


Рис. 110

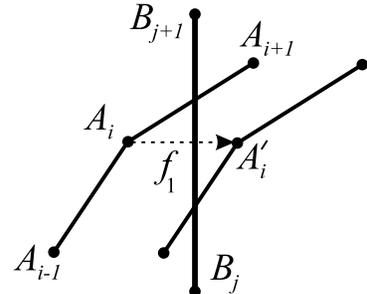


Рис. 111

Возможны три варианта прохождения A_i через сторону s_j^* , они представлены на рис. 109–111, в каждом из них образы звеньев s_{i-1} и s_i при первом элементарном сдвиге вместе со звеном s_j^* в общую сумму индексов будут добавлять $+2$ (рис. 109), -2 (рис. 110) или 0 (рис. 111). Взятая по $(\text{mod } 2)$ сумма попарных индексов не изменится, откуда

$$I(z, z^*) = I(z_1, z^*) = \dots = I(z_p, z^*) = I(\tilde{z}, z^*) = 0.$$

■

Следующее утверждение будем называть *леммой о редукции*.

Лемма 4.3. Для любой ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$, соединяющей A_1 с A_{n+1} , существует простая ломаная $z' \subseteq z$, которая соединяет A_1 с A_{n+1} .

Доказательство. Утверждение будем доказывать индукцией по n .

Б.И. При $n = 1$ сразу получаем простую ломаную, состоящую только из одного звена.

Ш.И. Предположим, что для любой ломаной, у которой число звеньев не больше k , простая ломаная выделяется. Рассмотрим ломаную z с $n = k + 1$ звеньями. Если z — простая, то $z' = z$. Пусть теперь z простой не является, тогда это может произойти по двум причинам.

1-й случай: в ломаной z существуют пересекающиеся несмежные звенья. Тогда найдется звено $s_{i_0} = [A_{i_0} A_{i_0+1}]$ (рис. 112) с минимальным номером i_0 ,



которое пересекается с несмежным звеном $s_j = [A_j A_{j+1}]$ ($j > i_0 + 1$). Пусть $\{A'\} = s_{i_0} \cap s_j$. Рассмотрим ломаную

$$z_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{i_0-1} s_i \right) \cup [A_{i_0} A'] \cup [A' A_{j+1}] \cup \left(\bigcup_{i=j+1}^n s_i \right).$$

Количество звеньев в z_1 не больше k и она по-прежнему соединяет A_1 с A_{n+1} . По предположению индукции существует простая ломаная $z' \subseteq z_1$, соединяющая A_1 с A_{n+1} . Она искомая. Если звенья s_{i_0} и s_j пересекаются более чем по одной точке (рис. 113), то в качестве A' можно взять любую точку отрезка $s_{i_0} \cap s_j$ и точно также получить ломаную z_1 с не более k звеньями, к которой можно применить индуктивное предположение.

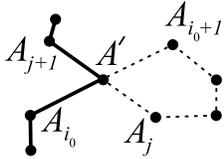


Рис. 112

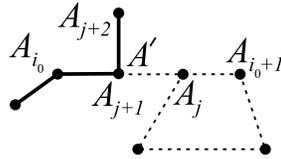


Рис. 113

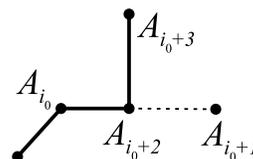


Рис. 114

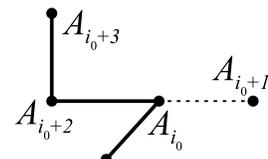


Рис. 115

2-й случай: в ломаной z существуют смежные звенья s_{i_0} и s_{i_0+1} , которые пересекаются по нетривиальному отрезку. У s_{i_0} и s_{i_0+1} есть общая вершина, поэтому один из них содержится в другом, что позволяет заменить два звена s_{i_0} и s_{i_0+1} одним звеном $s^* = [A_{i_0} A_{i_0+2}]$ (рис. 114 и 115) и получить ломаную $z_1 \subseteq z$, у которой k звеньев и она также соединяет A_1 с A_{n+1} . По предположению индукции существует простая ломаная $z' \subseteq z_1$, соединяющая A_1 с A_{n+1} . Она искомая. ■

Напомним, что расстоянием между непустыми фигурами $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \alpha$ называют число $d(\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{|AB| : A \in \Phi_1, B \in \Phi_2\}$. Числовое множество в скобках непусто и ограничено снизу нулем, поэтому из результатов математического анализа (см. первую главу Математического анализа 11) следует, что его инфимум однозначно определен и $d(\Phi_1, \Phi_2)$ определено корректно. Подробнее о случаях, когда расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 достигается на паре точек $A_0 \in \Phi_1, B_0 \in \Phi_2$ и о примерах, когда $d(\Phi_1, \Phi_2)$ не достигается, можно прочесть в шестом параграфе пятой главы Геометрии 10. Там же мы договорились, что если Φ_1 состоит только из одной точки A , вместо $d(\{A\}, \Phi_2)$ пишем $d(A, \Phi_2)$. Начнем с очень простого утверждения, перед которым вспомним определение ε -окрестности ($\varepsilon > 0$) непустой фигуры Φ : $O_\varepsilon(\Phi) = \{A \in \alpha : d(A, \Phi) < \varepsilon\}$. Например, $O_\varepsilon(\alpha) = \alpha$ и $O_\varepsilon(\{A\}) = O_\varepsilon(A)$.



Лемма 4.4. Пусть для $\varepsilon > 0$ выполняется $d(\Phi_1, \Phi_2) \geq \varepsilon$, тогда для любых точек $A \in O_{\varepsilon/3}(\Phi_1)$ и $B \in O_{\varepsilon/3}(\Phi_2)$ следует, что $|AB| \geq \frac{\varepsilon}{3}$.

Доказательство. Условие $A \in O_{\varepsilon/3}(\Phi_1)$ позволяет найти такую точку $X \in \Phi_1$, что $|AX| \leq \varepsilon/3$. Действительно, если бы для всех точек $X \in \Phi_1$ выполнялось бы $|AX| > \varepsilon/3$, то $d(A, \Phi_1) \geq \frac{\varepsilon}{3}$, что противоречит условию $A \in O_{\varepsilon/3}(\Phi_1)$. Аналогично рассуждая, найдем такую точку $Y \in \Phi_2$, что $|BY| \leq \varepsilon/3$. Применяя неравенство многоугольника (см. девятый параграф первой главы Геометрии 10), получим $|XY| \leq |XA| + |AB| + |BY|$, откуда

$$|AB| \geq |XY| - |XA| - |BY| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

■

Пример 2. Расстояние от произвольной точки C до невырожденного отрезка $[AB]$ определяется несложно. Сначала через концы этого отрезка проведем прямые $a, b \perp (AB)$ (рис. 116). Прямые a и b

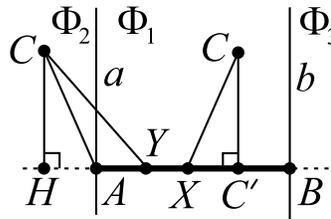


Рис. 116

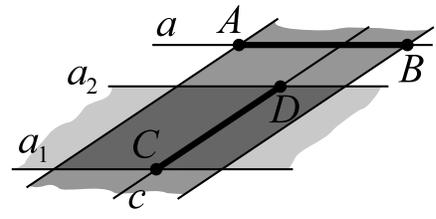


Рис. 117

разбивают плоскость на три множества: Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 . Если $C \in \Phi_1$, то $d(C, [AB]) = d(C, (AB)) = |CC'|$, где $C' = \text{Пр}_{(AB)}(C)$ (поскольку катет $[CC']$ короче гипотенузы $[CX]$). Если $C \in \Phi_2$, то $d(C, [AB]) = |CA|$, поскольку в двух прямоугольных треугольниках $CНА$ и $CНУ$ с общим катетом $[CH]$ из неравенства $|НА| < |НУ|$ сразу следует $|СА| < |СУ|$. Точно так же для $C \in \Phi_3$ получим, что $d(C, [AB]) = |CB|$.

Пример 3. Рассмотрим два отрезка $\Phi_1 = [AB]$ и $\Phi_2 = [CD]$. Ясно, что если фигуры пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Далее считаем, что $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ и в случае отрезков докажем, что $d(\Phi_1, \Phi_2) > 0$. Если хотя бы один из них вырождается в точку, то этот результат следует из предыдущего примера. Пусть отрезки нетривиальны, тогда обозначим через $a = (AB)$ и $c = (CD)$. При $a = c$ неравенство $d(\Phi_1, \Phi_2) > 0$ очевидно, поскольку $d(\Phi_1, \Phi_2)$ равно минимальному расстоянию между концами этих отрезков. Если $a \parallel c$ и $a \neq c$ выполнено $d(\Phi_1, \Phi_2) \geq d(a, c) > 0$. Остается рассмотреть случай $a \not\parallel c$. Через каждую точку отрезка $[AB]$ проведем прямую, параллельную прямой c , а через каждую точку отрезка $[CD]$ проведем прямую, параллельную прямой a (рис. 117). Получим две полосы и хотя бы



один из данных отрезков расположен вне полосы другого отрезка (иначе A , B расположены по разные стороны от c , а также C , D расположены по разные стороны от a , откуда следует противоречивое $[AB] \cap [CD] \neq \emptyset$). Б.о.о. считаем, что $[AB]$ расположен вне полосы второго отрезка (рис. 117) и граница этой полосы, прямая a_2 , расположена к a ближе, чем прямая a_1 . Из $a_2 \parallel a$ и $a_2 \neq a$ сразу следует, что $d(\Phi_1, \Phi_2) \geq d(a_2, a) > 0$.

Определение. Для ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n s_i$, у которой есть несмежные звенья, ее внутренним диаметром называется число

$$\text{Vd}(z) = \min\{d(s_i, s_j) : i \neq j, \text{ звенья } s_i \text{ и } s_j \text{ не смежные}\}.$$

Для многих ломаных положительность внутреннего диаметра равносильна их простоте, об этом в следующем утверждении.

Лемма 4.5. Предположим, что у ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^n s_i$ есть несмежные звенья.

1) пусть ломаная z не замкнута, причем ее первые два звена s_1 и s_2 пересекаются только по вершине A_2 , а ее последние два звена s_{n-1} и s_n пересекаются только по вершине A_n . Ломаная z является простой тогда и только тогда, когда $\text{Vd}(z) > 0$.

2) пусть ломаная z замкнута. Ломаная z является простой тогда и только тогда, когда $\text{Vd}(z) > 0$.

Доказательство. 1) \Rightarrow) по определению простой ломаной сразу получим $s_i \cap s_j = \emptyset$ для любых двух различных несмежных звеньев s_i и s_j . Для этих звеньев из предыдущего примера следует неравенство $d(s_i, s_j) > 0$, поэтому минимум конечного непустого множества, состоящего только из положительных чисел, также положителен и $\text{Vd}(z) > 0$.

\Leftarrow) неравенство $\text{Vd}(z) > 0$ и предыдущий пример дают, что несмежные звенья z не пересекаются, остается только проверить, что $s_i \cap s_{i+1}$ состоит только из общей вершины A_{i+1} (при всех $i \in \{2, \dots, n-2\}$). О/п: для некоторого $i_0 \in \{2, \dots, n-2\}$ звенья s_{i_0} и s_{i_0+1} пересекаются по нетривиальному отрезку. У этих звеньев есть общая вершина, тогда одно из них содержится в другом и мы быстро получаем противоречие: на рис. 114 несмежные звенья s_{i_0} и s_{i_0+2} пересекаются; на рис. 115 несмежные звенья s_{i_0-1} и s_{i_0+1} пересекаются.

2) \Rightarrow) аналогично (1).



\Leftarrow) применив (1), получим, что несмежные звенья цикла z не пересекаются, а пересечение $s_i \cap s_{i+1}$ состоит только из общей вершины A_{i+1} (при всех $i \in \{2, \dots, n-2\}$). Проверим, что первые два звена пересекаются только по вершине A_2 . Предположив противное, как и в (1) мы приходим к пересекающимся несмежным звеньям s_n и s_2 или s_1 и s_3 . $\swarrow \searrow$. Аналогично доказывается, что s_{n-1} и s_n пересекаются только по вершине A_n . ■

Перед формулировкой основного результата этого параграфа осталось сделать несколько определений.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда ε -маяком невырожденного угла $\angle A$ называются две точки A_1 и A_2 , расположенные на прямой, содержащей биссектрису этого угла и удаленные от вершины A на расстояние ε . Характеристикой маяка называют расстояние d_ε , на которое удалены каждая из точек маяка от прямых, содержащих стороны угла (рис. 118).

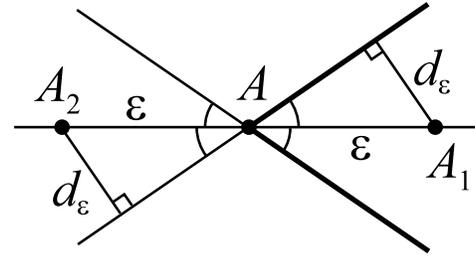


Рис. 118

Определение. Областью на плоскости α называют открытое связное множество этой плоскости.

Примерами областей будут $O_\varepsilon(A)$ или любая открытая полуплоскость. Напомним, что из результатов первого параграфа этой главы следует, что линейная связность или выпуклость являются более сильными свойствами, чем обычная связность.

Определение. Фигура Φ разбивает плоскость α на два множества U и V , если выполняются два свойства:

- 1) $\Phi \cup U \cup V = \alpha$;
- 2) $\Phi \cap U = \Phi \cap V = U \cap V = \emptyset$.

Следующий результат называется теоремой Жордана¹⁸ для ломаной.

Теорема 4.6. Простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две линейно связных области, причем точно одна из них является ограниченным множеством на плоскости.

¹⁸Мари Эдмон Камиль Жордан (1838–1922) — французский математик, член Парижской Академии наук (с 1881), ее президент (1916); основные направления исследований — математический анализ, теория групп, топология, кристаллография, теория чисел, дифференциальные уравнения; написал первый систематический курс теории групп; ввел понятие фактор-группы и функции с ограниченным изменением; один из первых создателей новой математики.



Доказательство. Пусть $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^n s_i$ — простая замкнутая ломаная. Применим к z утверждение (2) предыдущей леммы и получим, что $Vd(z) > 0$. Это неравенство, а также свойство простоты сразу дают, что в z нет вырожденных звеньев и вырожденных углов при вершинах ломаной. Далее разобьем доказательство на несколько этапов.

I. Обозначим через $\varepsilon = Vd(z)/4 > 0$ и построим ε -маяки для всех углов $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ ломаной z , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (договоримся, что $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$). Из определения ε -маяка следует, что он одинаков для двух углов, которые образуются лучами $[A_i A_{i-1})$ и $[A_i A_{i+1})$. Пусть $d_\varepsilon(i)$ — характеристика ε -маяка при вершине A_i , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и положим $d^* = \min\{d_\varepsilon(i) : 1 \leq i \leq n\}$. Поскольку $\varepsilon > 0$ и все углы при вершинах z не вырождены, получим $d_\varepsilon(i) > 0$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $d^* > 0$.

Обозначим через O середину звена $[A_1 A_2]$ и проведем через нее прямую a — серединный перпендикуляр к $[A_1 A_2]$. На прямой a выберем две точки P и P' , симметричные относительно O и удаленные от нее на расстояние d^* . Договоримся называть два невырожденных отрезка параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Теперь построим ломаную

$z_1 = \bigcup_{i=1}^{n+1} [B_i B_{i+1}] = \bigcup_{i=1}^{n+1} t_i$ следующим образом (рис. 119):

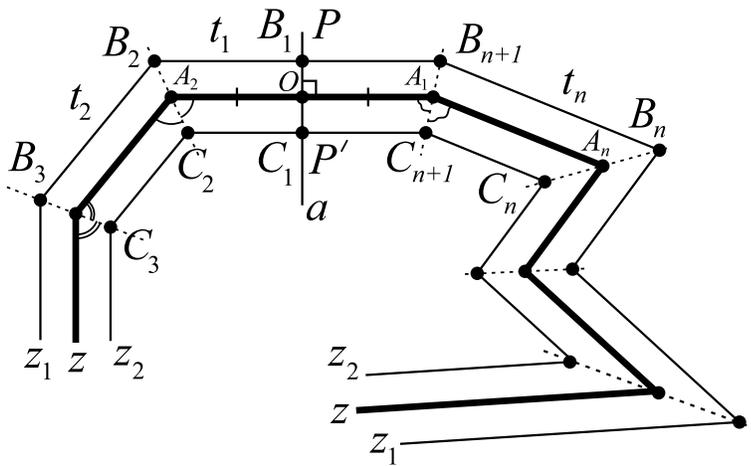


Рис. 119

1) $B_1 = P$, точка B_2 принадлежит прямой, содержащей биссектрису угла $\angle A_2$ и $t_1 = [B_1 B_2] \parallel s_1$;

2) $t_i = [B_i B_{i+1}] \parallel s_i$ и B_{i+1} принадлежит прямой, содержащей биссектрису угла $\angle A_{i+1}$, $i \in \{2, \dots, n\}$;

3) $t_{n+1} = [B_{n+1} B_{n+2}] \parallel s_1$ и $B_{n+2} \in a$.

Так как при всех значениях $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ расстояние от t_i до звена s_i равно

d^* и $d(t_{n+1}, s_1) = d^*$, то $B_{n+2} = P$ или $B_{n+2} = P'$. Покажем, что второй случай невозможен. О/п: $B_{n+2} = P'$. По построению $t_i \subseteq O_{Vd(z)/3}(s_i)$ (так как $d^* \leq d_\varepsilon(i) \leq \varepsilon = Vd(z)/4 < Vd(z)/3$), поэтому можно применить



лемму 4.4 и получить, что $d(t_i, t_j) \geq \text{Vd}(z)/3 > 0$ для любой пары несмежных звеньев t_i и t_j . Отсюда $\text{Vd}(z_1) \geq \min\{\text{Vd}(z)/3, |PP'|\} > 0$. Используя теперь лемму 4.5, приходим к тому, что z_1 — простая ломаная. Добавим к z_1 звено $[PP']$, получим замкнутую ломаную $z_1^* = z_1 \cup [PP']$. Добавление звена $[PP']$ не нарушит простоты, поскольку $[PP']$ перпендикулярно своим смежным звеньям (поэтому может пересекаться с ними только по общей вершине), и не пересекается с несмежными звеньями из-за включения $[PP'] \subseteq O_{\text{Vd}(z)/3}(s_1)$. Таким образом, для простых замкнутых ломаных z и z_1^* выполняется $I(z, z_1^*) = 1$, что противоречит теореме 4.2 об индексе пересечения простых циклов. Следовательно $B_{n+2} = P$.

Аналогично построим ломаную $z_2 = \bigcup_{i=1}^{n+1} [C_i C_{i+1}]$, где $C_1 = P'$, точка C_2 принадлежит прямой, содержащей биссектрису угла $\angle A_2$ и $[C_1 C_2] \parallel s_1$, и т.д. (рис. 119) до точки $C_{n+2} \in a$ и $[C_{n+1} C_{n+2}] \parallel s_1$. Предположив, что $C_{n+2} = P$, добавляем к z_2 звено $[PP']$ и снова получаем противоречие с теоремой 4.2. Таким образом, $C_{n+2} = P' = C_1$ и z_2 также является простой замкнутой ломаной.

II. Точки P и P' далее будут играть ключевую роль в определении областей. Поэтому сначала покажем, что P и P' удовлетворяют некоторым свойствам. Справедливы следующие утверждения:

1) точки P и P' нельзя соединить простой ломаной \tilde{z} , которая не пересекает z и не пересекает интервал $]PP'[$;

2) для любых двух различных точек $S, S' \in [PP']$ и симметричных относительно точки O (при этом $S \in [OP]$ и $S' \in [OP']$) не существует соединяющих их простой ломаной \tilde{z} , которая не пересекает z и не пересекает интервал $]SS'['$;

3) точки P и P' нельзя соединить простой ломаной \tilde{z} , которая не пересекает z ;

4) точки P и P' нельзя соединить ломаной \tilde{z} , которая не пересекает z .

Если существует ломаная \tilde{z} из первого утверждения, то простая замкнутая ломаная $\tilde{z}^* = \tilde{z} \cup [PP']$ пересекает z ровно в одной точке O . Это противоречит теореме 4.2 об индексе пересечения. Доказательство второго утверждения аналогично, только добавлять к ломаной \tilde{z} следует звено $]SS'['$. Если существует ломаная со свойствами из третьего утверждения, то найдем ближайшую к O точку пересечения \tilde{z} с отрезком $[PP']$ (это пересечение состоит из конечного числа точек и отрезков, поэтому ближайшая точка к O найдется). Обозначим эту точку через S и б.о.о. $S \in]OP]$. Пусть



$S' = Z_O(S)$, тогда рассмотрим $\tilde{z}^* = [SP] \cup \tilde{z} \cup [P'S']$ — ломаную, соединяющую S и S' и не пересекающую интервал $]SS'[$. По лемме 4.3 о редукции выделим простую ломаную $\tilde{t}^* \subseteq \tilde{z}^*$, соединяющую S и S' . Но такой ломаной не может быть в силу утверждения (2). И, наконец, если существует ломаная из утверждения (4), то, используя лемму 4.3 о редукции, выделяем простую ломаную, но ее не может быть в силу утверждения (3).

III. Определим теперь искомые области. Пусть

$U = \{X \in \alpha : \text{существует ломаная } t \subseteq \alpha, \text{ которая соединяет } X \text{ с } P \text{ и не пересекает ломаную } z\},$

$V = \{Y \in \alpha : \text{существует ломаная } t' \subseteq \alpha, \text{ которая соединяет } Y \text{ с } P' \text{ и не пересекает ломаную } z\}.$

1. Покажем что U и V являются линейно связными множествами. Пусть $A, B \in U$, тогда найдутся ломаные t и t_1 , которые соответственно соединяют A с P , B с P и не пересекают ломаную z . Тогда $t \cup t_1$ — ломаная, соединяющая A и B , не пересекающая z , и, кроме того, $t \cup t_1 \subseteq U$ (действительно, для каждой точки $X \in t \cup t_1$ нетрудно выделить фрагмент ломаной $t \cup t_1$, который соединит X с P). Аналогично доказывается линейная связность множества V .

2. Докажем, что U и V открыты. Если $A \in U$, то найдется ломаная t , соединяющая A и P и $t \cap z = \emptyset$. Последнее условие и включение $A \in t$ дают $A \notin z$. Ломаная z состоит из конечного числа звеньев, поэтому из второго примера следует, что $d(A, z) = \delta > 0$. Определение δ гарантирует, что $O_\delta(A) \cap z = \emptyset$. Тогда для любой точки $X \in O_\delta(A)$ ломаная $[XA] \cup t$ соединяет X с P и также не пересекает z , откуда $X \in U$. Мы доказали, что $O_\delta(A) \subseteq U$, поэтому множество U открыто. Аналогично доказывается открытость множества V .

Из (1) и (2) следует, что U и V — линейно связные области.

3. Из определения U и V сразу следует, что $U \cap z = \emptyset$ и $V \cap z = \emptyset$. Покажем, что $U \cap V = \emptyset$. Предположим противное, тогда существует точка $A \in U \cap V$, поэтому найдутся ломаные t и t' , соединяющие соответственно A с P , A с P' и не пересекающие z . Ломаная $t \cup t'$ соединяет P с P' и не пересекает z . Это противоречит последнему утверждению предыдущей части доказательства.

4. Осталось проверить, что $U \cup V \cup z = \alpha$, точнее, доказать включение $\alpha \subseteq U \cup V \cup z$. Для произвольной точки $A \in \alpha \setminus z$ снова воспользуемся вторым примером чтобы получить $\delta = d(A, z) > 0$. Так как ломаная z яв-



ляется конечным объединением отрезков, то $\delta = \min\{d(A, s_i) : 1 \leq i \leq n\}$, поэтому существуют индекс $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ и точка $X \in s_{i_0}$ такая, что $d(A, z) = d(A, s_{i_0}) = |AX|$. На полуинтервале $[AX[$ выберем любую точку D_1 , чтобы $|D_1X| < d^*$. Заметим, что отрезок $[AD_1]$ не пересекает z , иначе расстояние $d(A, z)$ было бы меньше δ . С началом в точке D_1 строим ломаную z^* аналогично ломаным z_1 и z_2 , т.е. точку D_2 выбираем на прямой, содержащей биссектрису угла $\angle A_{i_0+1}$, и $[D_1D_2] \parallel s_{i_0}$ и т.д. до пересечения с прямой a . Обозначим эту точку пересечения (которая одновременно является последней вершиной ломаной z^*) через D_k . Тогда $0 < d(D_k, z) < d^*$. Следовательно, возможен один из двух случаев: $D_k \in]OP[$ или $D_k \in]OP' [$. В первом случае ломаная $t = [AD_1] \cup z^* \cup [D_kP]$ соединяет A с P и не пересекает z , во втором — искомой ломаной будет $t' = [AD_1] \cup z^* \cup [D_kP']$. В первом случае мы получим $A \in U$, а во втором — $A \in V$.

В результате, из 1–4 следует, что ломаная z разбивает плоскость α на две линейно связных области.

IV. Для ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ обозначим через $r = \left(\sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}| \right) + 1$,

тогда из неравенства многоугольника следует, что $z \subseteq O_r(A_1)$. Рассмотрим фигуру $\Phi = \alpha \setminus O_r(A_1)$ и докажем, что эта фигура линейно связна. Выберем произвольную пару точек $X, Y \in \Phi$. Если $[XY] \cap O_r(A_1) = \emptyset$, то $[XY]$ — простейшая ломаная, для которой выполняется включение $[XY] \subseteq \Phi$. Пусть $[XY] \cap O_r(A_1) \neq \emptyset$, тогда рассмотрим два случая.

1-й случай: $A_1 \notin [XY]$, тогда $d(A_1, [XY]) = |A_1K| > 0$, где $K = \text{Пр}_{(XY)}(A_1)$ (рис. 120). Подберем коэффициент $k > 0$ гомотетии с центром в точке A_1 так, чтобы $k \cdot |A_1K| > r$, тогда $d(A_1, [X'Y']) > r$ (где $X' = H_{A_1}^k(X)$ и $Y' = H_{A_1}^k(Y)$), откуда следует, что трехзвенная ломаная $[XX'] \cup [X'Y'] \cup [Y'Y]$ соединяет X с Y и не пересекается с $O_r(A_1)$.

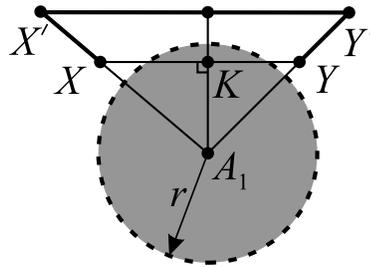


Рис. 120

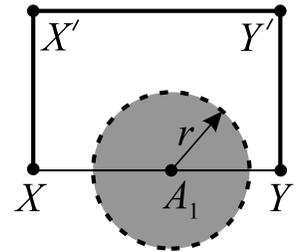


Рис. 121

2-й случай: $A_1 \in [XY]$ (рис. 121), тогда в одной из полуплоскостей с границей (XY) выберем точки X' и Y' так, чтобы (XX') , $(YY') \perp (XY)$ и $|XX'| = |YY'| = 2r$. Из построения получим $d(A_1, [X'Y']) = 2r$, поэтому $[X'Y'] \cap O_r(A_1) = \emptyset$ и ломаная $[XX'] \cup [X'Y'] \cup [Y'Y]$ соединяет X с Y и не пересекается с $O_r(A_1)$.



Итак, Φ — линейно связное множество не пересекающееся с z , поэтому $\Phi \subseteq U \cup V$. Мы уже знаем, что $U \cap V = \emptyset$, поэтому можно применить лемму 1.2 и получить, что $\Phi \subseteq U$ или $\Phi \subseteq V$. Б.о.о. $\Phi \subseteq U$. Заметим, что фигура Φ является неограниченным множеством, поскольку содержит любую касательную к окружности $\omega = \omega(A_1, r)$ (так как все точки этой касательной удалены от A_1 на расстояние не меньше r), поэтому и U является неограниченным множеством. С другой стороны, из включения $\Phi \subseteq U$ и равенства $\alpha = U \cup V \cup z$ следует, что $V \subseteq \alpha \setminus \Phi = O_r(A_1)$. Мы получили, что область V является ограниченным множеством. Все утверждения теоремы доказаны. ■

Определение. Пусть U и V — линейно связные области, найденные в предыдущей теореме для простой замкнутой ломаной z , причем U — неограниченное множество и V — ограниченное множество, тогда U называется внешней областью ломаной z , а V — ее внутренней областью.

Счастливым финалом этого параграфа является следующее определение.

Определение. Многоугольником называется простая замкнутая ломаная z вместе со своей внутренней областью (т.е. $z \cup V$, где V — внутренняя область ломаной z). При этом если z состоит из n звеньев ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), то многоугольник называется n -угольником и обозначается $A_1 A_2 \dots A_n$.

Следствие. Любой многоугольник является ограниченным множеством.

Доказательство. В доказательстве теоремы Жордана мы получили, что $\Phi = \alpha \setminus O_r(A_1) \subseteq U$. Учитывая представление плоскости $\alpha = z \cup V \cup U$, мы сразу получим $z \cup V = \alpha \setminus U \subseteq \alpha \setminus \Phi = O_r(A_1)$, откуда и следует ограниченность многоугольника $z \cup V$. ■

Упражнения

1. Для $\Phi = [AB]$ и произвольного положительного ε постройте множество $O_\varepsilon(\Phi)$.
2. Для $\omega = \omega(O, r)$ и произвольного положительного ε постройте множество $O_\varepsilon(\omega)$.
3. Приведите пример ограниченных, непустых и непересекающихся множеств Φ_1 и Φ_2 , для которых $d(\Phi_1, \Phi_2) = 0$.
4. Докажите, что для непересекающихся отрезков $\Phi_1 = [AB]$ и $\Phi_2 = [CD]$, расположенных в одной плоскости, $d(\Phi_1, \Phi_2)$ достигается на паре точек $X_0 \in [AB]$, $Y_0 \in [CD]$, причем по крайней мере одна из этих точек совпадет с концом отрезка.



5. Постройте ломаную z на рис. 119 так, чтобы область U , определенная в теореме Жордана, стала внутренней областью для этой ломаной.
6. Докажите, что любой многоугольник можно представить в виде конечного объединения треугольников без общих внутренних точек.
7. Докажите, что любой многоугольник является линейно связным множеством.

3.5. Теорема об индексе для поверхностей. Многогранники

Напомним определение многогранной поверхности.

Определение. Многогранной поверхностью M называют конечное объединение многоугольников $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ (каждый из которых называется гранью этой поверхности, его стороны называются ребрами M и вершины — вершинами M), которое удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) каждое ребро любой грани является одновременно ребром другой и только одной грани (грани, имеющие общее ребро, называются смежными);
- 2) для любых двух различных граней Γ, Γ' существует цепочка граней $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k)$ такая, что $\Gamma(1) = \Gamma, \Gamma(k) = \Gamma'$, и для любого $j \leq k - 1$ грани $\Gamma(j)$ и $\Gamma(j + 1)$ — смежные;
- 3) если две грани Γ и Γ' имеют общую вершину A , то цепочку граней из предыдущего пункта можно выбрать так, чтобы A являлась вершиной каждой грани $\Gamma(j)$.

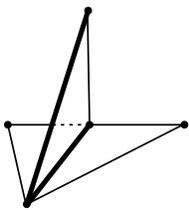


Рис. 122

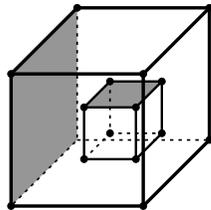


Рис. 123

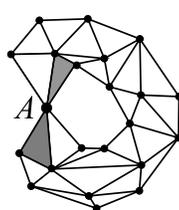


Рис. 124

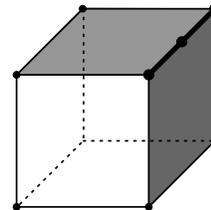


Рис. 125

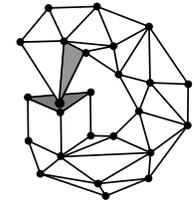


Рис. 126

Объединения многоугольников на рис. 122-124 не являются многогранными поверхностями. На рис. 122 одно из выделенных ребер является общим сразу для трех граней, а другое выделенное ребро является ребром только одной грани. На рис. 123 нарушается свойство (2) определения, поскольку от одной выделенной грани до другой нельзя перейти по смежным граням. На рис. 124 две выделенные грани имеют общую вершину A , но цепочку граней, удовлетворяющую свойству (3) определения, нельзя построить — вершина A



не будет вершиной всех граней в цепочке (на этом рисунке невидимые вершины и ребра не изображены).

Определение. Многогранная поверхность называется простой, если выполняются два дополнительных свойства:

- 4) любые две смежные грани кроме одного общего ребра других общих точек не имеют;
- 5) пересечением несмежных граней может быть только общая вершина.

На рис. 125–126 изображены многогранные поверхности, которые не являются простыми. Так, на рис. 125 две выделенные грани имеют два общих ребра, поэтому нарушается свойство (4). На рис. 126 вершина одной выделенной грани принадлежит внутренней области другой выделенной грани, тем самым нарушается свойство (5).

Теорема 5.1. Если M — многогранная поверхность, то:

- 1) M ограничена;
- 2) цепочку $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k)$ из определения многогранной поверхности всегда можно выбрать так, чтобы грани не повторялись;
- 3) если дополнительно потребовать, чтобы M была простой, то для любой ломаной z из внутренней области Γ_i верно $d(z, \Gamma_j) > 0$, при $i \neq j$.

Доказательство. 1) ограниченность многоугольника была доказана в конце предыдущего параграфа, осталость проверить, что конечное объединение ограниченных множеств также ограничено. Пусть $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ — объединение ограниченных множеств. Используя лемму 4.2 второй главы, для точки $B \in \mathbb{P}_3$ найдем такое $r_i > 0$, что $\Phi_i \subseteq O_{r_i}(B)$, но тогда $\Phi \subseteq O_{r^*}(B)$, где $r^* = \max\{r_i : 1 \leq i \leq n\}$ и ограниченность Φ доказана.

2) легко доказывается индукцией по k . Б.И. При $k = 2$ грани $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$ различны по определению.

Ш.И. Предположив, что утверждение верно для всех цепочек из не более чем k граней, проверим его для $k + 1$. Если в цепочке $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k), \Gamma(k + 1)$ нет повторяющихся граней, то она искомая. Иначе найдется минимальный индекс $i \leq k$, а также индекс j , для которого $i < j \leq k + 1$ и $\Gamma(i) = \Gamma(j)$. Выбрасывая грани с промежуточными индексами, получим цепочку $\Gamma(1), \dots, \Gamma(i), \Gamma(j + 1), \dots, \Gamma(k + 1)$, к которой уже можно применить предположение индукции.

3) пусть ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ содержится во внутренней области многоугольника $\Gamma_i = B_1 \dots B_m$ и $\Gamma_j = C_1 \dots C_k$. Обозначим через V внутрен-



ную область грани Γ_i , через $z_1 = \bigcup_{p=1}^m [B_p B_{p+1}]$ и $z_2 = \bigcup_{q=1}^k [C_q C_{q+1}]$ — границы рассматриваемых граней и через $\alpha_i = (B_1 \dots B_m)$ и $\alpha_j = (C_1 \dots C_k)$ — плоскости этих двух граней. Рассмотрим несколько случаев расположения первого звена $s_1 = [A_1 A_2]$ ломаной z по отношению к плоскости α_j .

1-й случай: $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$ (рис. 127). По условию $s_1 \subseteq V$, поэтому пересечение $s_1 \cap z_1 = \emptyset$ и из второго примера предыдущего параграфа следует, что $d(s_1, z_1) = 2\delta > 0$. Откуда $O_\delta(s_1) \cap z_1 = \emptyset$ (здесь достаточно рассмотреть $O_\delta(s_1)$ в плоскости α), поэтому $O_\delta(s_1) \subseteq V$ и $O_\delta(s_1) \cap \Gamma_j = \emptyset$ (из-за простоты многогранной поверхности). В результате, $d(s_1, \Gamma_j) \geq \delta > 0$.

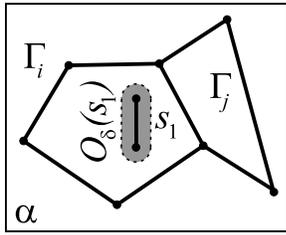


Рис. 127

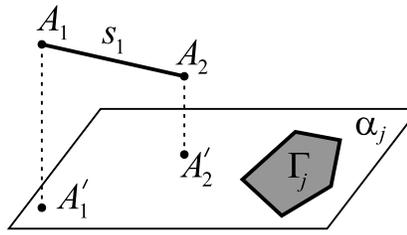


Рис. 128

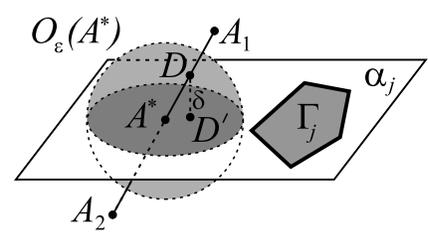


Рис. 129

2-й случай: $\alpha_i \neq \alpha_j$ и отрезок $s_1 = [A_1 A_2]$ целиком расположен в одном из открытых полупространств с границей α_j (рис. 128). Тогда верны неравенства $d(s_1, \Gamma_j) \geq d(s_1, \alpha_j) = \min\{d(A_1, \alpha_j), d(A_2, \alpha_j)\} > 0$.

3-й случай: $\alpha_i \neq \alpha_j$ и $s_1 \cap \alpha_j = \{A^*\}$ (рис. 129). Условие $A^* \in V$ и простота поверхности сразу дают, что $A^* \notin \Gamma_j$, поэтому найдется $O_\epsilon(A^*)$ (в \mathbb{P}_3), для которой $O_\epsilon(A^*) \cap \Gamma_j = \emptyset$. На луче $[A^*A_1]$ выберем такую точку D , что $|A^*D| = \epsilon/2$, тогда $d([A^*D], \Gamma_j) \geq \epsilon/2 > 0$. Пусть $D' = \text{Пр}_{\alpha_j}(D)$ и $\delta = |DD'| > 0$. Если $D \in [A^*A_1]$ (как на рис. 129), то из второго случая имеем: $d([DA_1], \Gamma_j) \geq \delta > 0$. При любом расположении точек D и A_1 получим $d([A^*A_1], \Gamma_j) \geq \max\{\epsilon/2, \delta\} > 0$. Аналогично $d([A^*A_2], \Gamma_j) > 0$. В результате $d(s_1, \Gamma_j) = \min\{d([A^*A_1], \Gamma_j), d([A^*A_2], \Gamma_j)\} > 0$.

Для остальных ребер z точно также доказывается, что $d_i = d(s_i, \Gamma_j) > 0$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть теперь $d^* = \min\{d_i : 1 \leq i \leq n\}$, тогда $d(z, \Gamma_j) = d^* > 0$.



Определение. Многоугольник Γ и отрезок $[AB]$ находятся в общем положении, если отрезок не пересекает стороны Γ и концы отрезка не принадлежат Γ . Если Γ и $[AB]$ находятся в общем положении, то индекс их



пересечения определяется следующим образом:

$$I([AB], \Gamma) = \begin{cases} 0, & \text{если } [AB] \cap \Gamma = \emptyset, \\ 1, & \text{если } [AB] \cap \Gamma \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом, условие $I([AB], \Gamma) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $]AB[\cap V \neq \emptyset$, где V — внутренняя область многоугольника Γ .

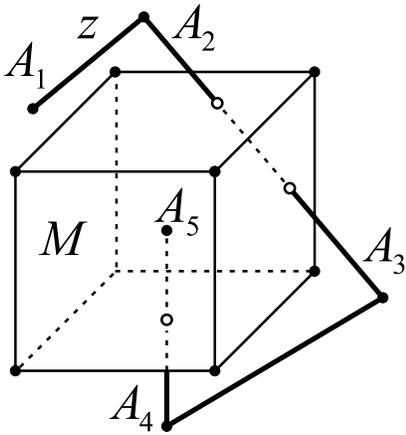


Рис. 130

Определение. Ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n s_i$, где $s_i = [A_i A_{i+1}]$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, и многогранная поверхность $M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ находятся в общем положении, если звено s_i ломаной z с гранью Γ_j поверхности M находится в общем положении при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$. Индекс пересечения находящихся в общем положении ломаной z и многогранной поверхности M определяется взятием по mod 2 суммы индексов по всем звеньям z и граням M :

$$I(z, M) = \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} I(s_i, \Gamma_j) \right) \pmod{2}.$$

Пример 1. На рис. 130 светлыми обозначены точки пересечения звеньев ломаной z с гранями поверхности M . Таких точек всего три, поэтому $I(z, M) = 1$.

Докажем аналог леммы 4.1, только поворачивать отрезок будем в пространстве относительно произвольной оси.

Лемма 5.2. Пусть отрезок $s = [AB]$ и многоугольник Γ находятся в общем положении. Тогда для любой прямой a можно найти такое число $\varphi_0 > 0$, что при всех $\varphi \in (0, \varphi_0)$ будет выполняться $I(s, \Gamma) = I(s', \Gamma)$, где $s' = R_a^\varphi(s)$.

Доказательство. Обозначим через V внутреннюю область многоугольника Γ и рассмотрим два возможных варианта.

1-й случай: $I(s, \Gamma) = 0$, поэтому $s \cap \Gamma = \emptyset$. В пункте (3) предыдущей теоремы было доказано, что $d(s, \Gamma) > 0$. Обозначим через $\delta = d(s, \Gamma)$ и $\Phi = O_\delta(s)$, тогда $\Phi \cap \Gamma = \emptyset$ (рис. 131). Пользуясь открытостью Φ , найдем такие два положительных числа φ_1 и φ_2 , что



- 1) для любых $\varphi \in (0; \varphi_1)$ следует, что $A' = R_a^\varphi(A) \in \Phi$;
- 2) для любых $\varphi \in (0; \varphi_2)$ следует, что $B' = R_a^\varphi(B) \in \Phi$.

Тогда возьмем в качестве $\varphi_0 = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$, и докажем, что это число — искомое. Действительно, для любого числа $\varphi \in (0; \varphi_0)$ одновременно $A', B' \in \Phi$, а в силу выпуклости Φ выполняется $s' = [A'B'] \subseteq O_\delta(s)$, поэтому $s' \cap \Gamma = \emptyset$ и $I(s', \Gamma) = 0$.

2-й случай: $I(s, \Gamma) = 1$, поэтому найдется такая точка C , для которой $]AB[\cap V = \{C\}$ (рис. 132). Пусть α — плоскость многоугольника Γ , тогда A и B расположены по разные стороны от α и можно найти такие числа $\delta_1 = d(A, \alpha) > 0$ и $\delta_2 = d(B, \alpha) > 0$, для которых $O_{\delta_1}(A) \cap \alpha = \emptyset$ и $O_{\delta_2}(B) \cap \alpha = \emptyset$. Воспользуемся открытостью V (в плоскости α), поэтому можно найти такое $\delta_3 > 0$, что $O_{\delta_3}(C) \cap \alpha \subseteq V$. Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ и рассмотрим открытое выпуклое множество $\Phi = O_\delta(s)$. Пользуясь открытостью Φ , найдем такие два положительных числа φ_1 и φ_2 , что

- 1) для любых $\varphi \in (0; \varphi_1)$ следует, что $A' = R_a^\varphi(A) \in O_\delta(A) \subseteq \Phi$;
- 2) для любых $\varphi \in (0; \varphi_2)$ следует, что $B' = R_a^\varphi(B) \in O_\delta(B) \subseteq \Phi$.

Снова возьмем в качестве $\varphi_0 = \min\{\varphi_1, \varphi_2\}$, и докажем, что это число — искомое. Действительно, для любого $\varphi \in (0; \varphi_0)$ одновременно выполняются включения $A' \in O_\delta(A)$ и $B' \in O_\delta(B)$, поэтому A' и B' по-прежнему лежат по разные стороны от α и найдется точка $D \in]A'B'[\cap \alpha$. В силу выпуклости Φ выполняется $s' = [A'B'] \subseteq \Phi$, и, поскольку $\delta \leq \delta_3$, верно включение $D \in \Phi \cap \alpha \subseteq O_{\delta_3}(C) \cap \alpha \subseteq V$. Поэтому $]A'B'[\cap V \neq \emptyset$ и $I(s', \Gamma) = 1$.

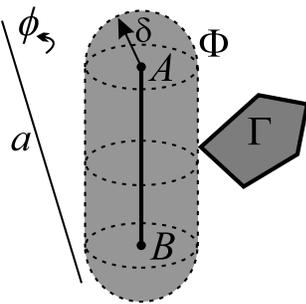


Рис. 131

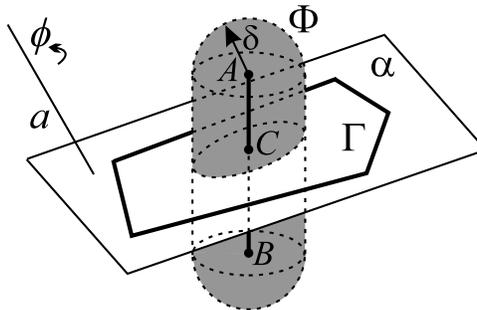


Рис. 132

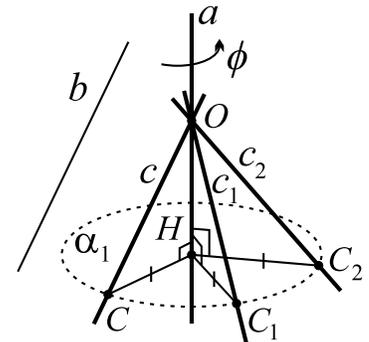


Рис. 133

Лемма 5.3. Пусть прямая a — наклонная к плоскости α , тогда для любой прямой $b \parallel \alpha$ существует не более одного числа $\varphi \in (0, \pi)$, что $b' \parallel \alpha$, где $b' = R_a^\varphi(b)$.

Доказательство. О/п: нашлась такая прямая $b \parallel \alpha$ и два различных числа $\varphi_1, \varphi_2 \in (0; \pi)$, что $b_1, b_2 \parallel \alpha$, где $b_1 = R_a^{\varphi_1}(b)$ и $b_2 = R_a^{\varphi_2}(b)$. Обо-



значим через O точку пересечения a и α и проведем через O прямую c , для которой выполняется $c \parallel b$ (рис. 133). Пусть $c_1 = R_a^{\varphi_1}(c)$ и $c_2 = R_a^{\varphi_2}(c)$. Сохранение параллельности прямых при движении (свойство (9) теоремы 1.5 второй главы) дают $c_1 \parallel b_1$ и $c_2 \parallel b_2$. Учитывая, что $b, b_1, b_2 \parallel \alpha$ получим $c, c_1, c_2 \parallel \alpha$ (*). Точка O неподвижна при повороте и принадлежит c , поэтому $O \in c_1$, $O \in c_2$ и $O \in \alpha$. Учитывая (*), получим $c, c_1, c_2 \subseteq \alpha$ (**). Выберем произвольно точку $C \in c \setminus \{O\}$ и найдем $H = \text{Pr}_a(C)$. Проведем через точку H плоскость $\alpha_1 \perp a$. Тогда по определению поворота вокруг оси a точки $C_1 = R_a^{\varphi_1}(C) \in c_1 \subseteq \alpha$ и $C_2 = R_a^{\varphi_2}(C) \in c_2 \subseteq \alpha$ получаются поворотом плоскости α_1 вокруг точки H на углы φ_1 и φ_2 соответственно и, конечно же, лежат в этой плоскости. Из-за условия $\varphi_1, \varphi_2 \in (0; \pi)$ точки C, C_1 и C_2 не лежат на одной прямой, поэтому из (**) получим $C, C_1, C_2 \in \alpha \cap \alpha_1$, что дает $\alpha = \alpha_1 \perp a$, что противоречит условию: a — наклонная к плоскости α . ∇ .

■

Лемма 5.4. *Для любого конечного числа плоскостей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ существует такая прямая b , что $b \nparallel \alpha_i$ и $b \not\perp \alpha_i$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Доказательство. Пусть O — произвольная точка пространства, $r > 0$ и $\Phi = \text{Sph}(O, r)$. Б.о.о. можно считать, что все плоскости α_i проходят через точку O (иначе через O можно провести плоскость $\beta_i \parallel \alpha_i$ и прямая b , найденная для этих плоскостей будет искомой). Обозначим через $\omega_i = \Phi \cap \alpha_i$ и $\{N_i, S_i\} = a_i \cap \Phi$, где a_i — прямая, перпендикулярная плоскости α_i и проходящая через точку O . Для любой точки $X \in \omega_1$ будем рассматривать окружность $\omega_X = \Phi \cap (N_1 S_1 X)$. Множество таких окружностей $\Omega = \{\omega_X : X \in \omega_1\}$ бесконечно (поскольку при $X, Y \in \omega_1$ и $X \neq Y$ следует $(N_1 S_1 X) \neq (N_1 S_1 Y)$ и $\omega_X \neq \omega_Y$), поэтому найдется окружность $\omega^* \in \Omega$, для которой $\omega^* \neq \omega_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $F_1 = \bigcup_{i=1}^n \omega_i$. Из неравенства $\omega_i \neq \omega^*$ следует, что окружность ω^* с окружностью ω_i может иметь не более двух общих точек, поэтому множество $\omega^* \cap F_1$ содержит не более $2n$ точек. Пусть $F_2 = \{N_i, S_i : 1 \leq i \leq n\}$, тогда $\omega^* \cap F_2$ также содержит не более $2n$ точек. Учитывая бесконечность окружности ω^* , с легкостью найдем точку $B \in \omega^* \setminus (F_1 \cup F_2)$ и докажем, что прямая $b = (OB)$ искомая.

Условие $B \notin F_1$ дает $B \notin \alpha_i$, но $O \in b \cap \alpha_i$, поэтому $b \not\perp \alpha_i$ и $b \cap \alpha_i \neq \emptyset$, поэтому $b \nparallel \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Из $B \notin F_2$ и $O \in b \cap \alpha_i$ следует, что



$b \neq a_i$. Поскольку a_i — единственная прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная плоскости α_i , получим $b \not\perp \alpha_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. ■

Следствие 1. Пусть $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ — произвольная ломаная в пространстве и O — точка, не лежащая на z . Тогда найдется прямая b , для которой выполняется $b \not\parallel (OX)$ для всех точек $X \in z$.

Доказательство. Если $O \notin (A_i A_{i+1})$, обозначим через $\alpha_i = (OA_i A_{i+1})$. Если отрезок $[A_i A_{i+1}]$ вырождается или $O \in (A_i A_{i+1})$ в качестве α_i выберем одну из плоскостей, содержащих прямую (OA_i) . Применив предыдущую лемму, найдем прямую b , для которой верно $b \not\parallel \alpha_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Для любой из рассматриваемых прямых (OX) при некотором $i \leq n$ будет выполняться $(OX) \subseteq \alpha_i$, поэтому $b \not\parallel (OX)$. ■

Следствие 2. Для любого конечного числа ломаных z_i существует прямая b , которая не параллельна никакой прямой, соединяющей вершины одной ломаной с точками других ломаных.

Доказательство. Для любой вершины каждой из ломаных проведем плоскость через звено любой другой ломаной. В случае, если вершина и звено однозначно плоскость не определяют (звено вырождается или вершина лежит на прямой, которая содержит данное звено), выбираем одну плоскость, которая их содержит. Получаем конечный набор плоскостей, к которому применим предыдущую лемму и найдем прямую b с нужным свойством. ■

Следующий результат называется *теоремой об индексе пересечения простого цикла и простой многогранной поверхности*.

Теорема 5.5. Если простая замкнутая ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ и простая многогранная поверхность $M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ находятся в общем положении, то $I(z, M) = 0$.

Доказательство. Как и в теореме об индексе пересечения простых циклов на плоскости начнем с подготовительного этапа: сохраняя индекс пересечения, цикл z повернем вокруг оси так, чтобы звенья его образа не были параллельны граням поверхности M . Покажем, как для этого можно выбрать ось и угол поворота.

I. По лемме 5.4 найдется такая прямая a , которая будет наклонной к каждой плоскости α_j при всех $j \in \{1, \dots, m\}$, где α_j — это плоскость грани



Γ_j . Ось выбрана, далее займемся поисками подходящего угла. Во-первых, из леммы 5.2 для каждого звена $s_i = [A_i A_{i+1}]$ и грани Γ_j ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$), найдем такой угол $\varphi(i, j) > 0$, что при повороте вокруг прямой a на углы $\varphi \in (0; \varphi(i, j))$ индекс пересечения для этой пары не меняется, т.е. $I(s'_i, \Gamma_j) = I(s_i, \Gamma_j)$ где $s'_i = R_a^\varphi(s_i)$. Обозначим через $\varphi_1 = \min\{\varphi(i, j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Таким образом, поворачивая вокруг прямой a на положительные углы меньше φ_1 , мы сохраним индекс пересечения для всего цикла и поверхности M , т.е. $I(z', M) = I(z, M)$, где $z' = R_a^\varphi(z)$ и $\varphi \in (0; \varphi_1)$. Можно считать, что $\varphi_1 \leq \pi$ (иначе можно положить $\varphi_1 = \pi$). Во-вторых, оценим мощность множества

$$\Psi = \{\psi \in (0; \varphi_1) : \text{найдется пара индексов } (i, j), \text{ где } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

для которой выполняется $R_a^\psi(s_i) \parallel \Gamma_j\}$.

Лемма 5.3 гарантирует, что для каждой пары (i, j) ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) найдутся не более двух углов $\varphi \in (0; \varphi_1)$ с таким свойством (возможно, при первом угле мы добиваемся выполнения условия $R_a^\varphi(s_i) \parallel \Gamma_j$ и тогда лемма даст еще не более одного угла с таким свойством). Следовательно Ψ конечно, поскольку содержит не более $2nm$ элементов. Если $\Psi = \emptyset$, положим $\varphi_2 = \varphi_1$, иначе по определению будем считать, что $\varphi_2 = \min \Phi$. В результате для любого $\varphi^* \in (0; \varphi_2)$ простой цикл $z' = R_a^{\varphi^*}(z)$ обладает свойством (*): каждое звено s'_i цикла z' не параллельно никакой грани Γ_j поверхности M ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$). Также неравенство $0 < \varphi^* < \varphi_1$ сохраняет индекс пересечения: $I(z', M) = I(z, M)$. Заметим, что свойство $s'_i \not\parallel \Gamma_j$, которое выполняется при всех индексах $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, m\}$, дает выполнение свойства (**): каждое звено s'_i цикла z' не параллельно никакому ребру многогранной поверхности M ($1 \leq i \leq n$). Теперь можно договориться, что простой цикл z с самого начала обладает свойствами (*) и (**).

II. Если $z \cap M = \emptyset$, то $I(z, M) = 0$ и доказывать нечего, поэтому далее считаем, что $z \cap M \neq \emptyset$. Пусть грань Γ_j является объединением простого цикла z_j и ее внутренней области V_j в плоскости α_j ($1 \leq j \leq m$). К набору ломаных z , z_j ($1 \leq j \leq m$) применим второе следствие леммы 5.4 и найдем такую прямую b , которая не параллельна никакой прямой, соединяющей вершины одной ломаной с точками других ломаных. Для этой прямой выберем базисный вектор $\vec{v} \parallel b$, такой, что $\tilde{z} = T_{\vec{v}}(z) \cap M = \emptyset$. Существование такого вектора следует из ограниченности множеств z , M



(см. теорему 5.1) и аксиомы Архимеда (аксиома **V.1** из третьего параграфа первой главы Геометрии 10). Ясно, что $I(\tilde{z}, M) = 0$, поэтому достаточно доказать справедливость равенства $I(z, M) = I(\tilde{z}, M)$. Будем использовать уже знакомую терминологию. Для любого ненулевого вектора \vec{w} , сонаправленного с вектором \vec{v} , по определению считаем, что вершина A_i (или ребро $s_i = [A_i A_{i+1}]$) цикла z *проходит* через грань Γ_j (соответственно через ребро $l_k = [B_k B_{k+1}]$ грани Γ_j) при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $]A_i A'_i[\cap V_j \neq \emptyset$, где $A'_i = T_{\vec{w}}(A_i)$ (или $]K K'[\cap]B_k B_{k+1}[\neq \emptyset$ для некоторой точки $K \in]A_i A_{i+1}[$ и ее образа $K' = T_{\vec{w}}(K)$). Вершина A_i *достигает* грани Γ_j при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $A'_i \in V_j$, где $A'_i = T_{\vec{w}}(A_i)$. Аналогично, ребро $s_i = [A_i A_{i+1}]$ *достигает* ребра $l_k = [B_k B_{k+1}]$ грани Γ_j при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $K'_i \in]B_k B_{k+1}[$ для некоторой точки $K \in]A_i A_{i+1}[$ и ее образа $K' = T_{\vec{w}}(K)$. Не будем забывать, что мы смещаем только цикл z , поэтому для вершин и ребер поверхности M похожие термины означают иное: ребро $l_k = [B_k B_{k+1}]$ грани Γ_j при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$ *проходит* через сторону s_i , если $]P P'[\cap]A_i A_{i+1}[\neq \emptyset$, для некоторой точки $P \in]B_k B_{k+1}[$ и ее образа $P' = T_{-\vec{w}}(P)$; ребро $l_k = [B_k B_{k+1}]$ *достигает* стороны s_i при параллельном переносе $T_{\vec{w}}$, если $P' \in]A_i A_{i+1}[$, где $P \in]B_k B_{k+1}[$ и $P' = T_{-\vec{w}}(P)$. Заметим, что выбор прямой b исключает случай прохождения вершин цикла z через ребра поверхности M и вершин M через звенья цикла z .

Пусть $\vec{v} = \overrightarrow{QS}$, причем $Q, S \in b$. Введем на b порядок с помощью \vec{v} и рассмотрим множество

$$\Phi = \{X \in]QS[: \text{ при } T_{\overrightarrow{QX}} \text{ вершина } A_i \text{ достигает грань } \Gamma_j; \text{ или звено } s_i$$

достигает ребро l_k грани Γ_j ; или звено l_k грани Γ_j достигает ребро s_i ,

при всех $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$ и произвольного звена l_k грани $\Gamma_j\}$.

Обозначим через q число всех ребер поверхности M , тогда множество Φ конечно, поскольку в нем не более $n \cdot t + n \cdot q$ точек (первое слагаемое отвечает за достижение вершин z граней M , а второе — за достижение звеньев z ребер M), поэтому $\Phi = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$, причем сразу считаем, что $X_1 < X_2 < \dots < X_p$. Выберем точки $Y_0 = Q < Y_1 < \dots < Y_p = S$ так, чтобы $Y_{i-1} < X_i < Y_i$ при всех натуральных $i \leq p$ и рассмотрим параллельные переносы $f_i = T_{\overrightarrow{Y_{i-1}Y_i}}$ (их будем называть *элементарными сдвигами*) и конечную цепочку циклов: $z_0 = z, z_1 = f_1(z_0), z_2 = f_2(z_1), \dots, z_p = f_p(z_{p-1}), \tilde{z} = z_p$. Заметим, что точки X_i и Y_i выбраны так, что при элементарном



сдвиге f_i каждая вершина z_i может пройти не более чем через одну грань M , ребро s_i проходит не более чем через одно ребро M и наоборот, каждое ребро l_k любой грани Γ_j поверхности M может пройти не более чем через одно ребро цикла z_i . При этом если какая-либо вершина цикла z_i проходит через грань Γ_j , то смежные с ней вершины еще не проходят через эту грань (любой параллельный перенос сохраняет свойство $(*)$: никакое звено цикла z_i не параллельно никакой грани поверхности M), а также если звено s_i проходит через ребро l_k , то вершины A_i и A_{i+1} этого звена еще не проходят через грани поверхности M . Ясно, что достаточно доказать сохранение индекса только при первом элементарном сдвиге, а сделанное замечание позволяет ограничиться только случаем прохождения одной вершины A_i через грань Γ_j и звена s_i через ребро l_k (прохождение ребра l_k через звено s_i рассматривается аналогично).

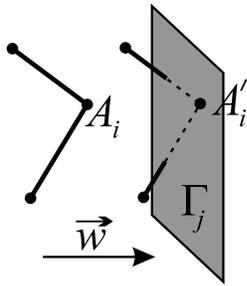


Рис. 134

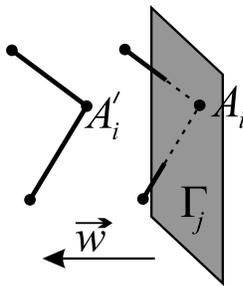


Рис. 135

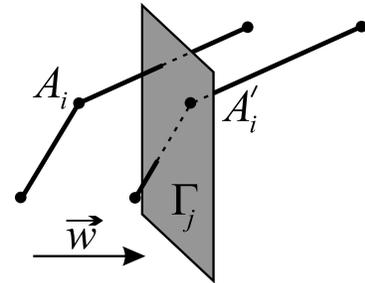


Рис. 136

Возможны три варианта прохождения A_i через грань Γ_j , они представлены на рис. 134–136, в каждом из них образы звеньев s_{i-1} и s_i при первом элементарном сдвиге вместе со гранью Γ_j в общую сумму индексов будут добавлять $+2$ (рис. 134), -2 (рис. 135) или 0 (рис. 136). Взятая по $(\text{mod } 2)$ сумма попарных индексов не изменится при прохождении A_i через Γ_j .

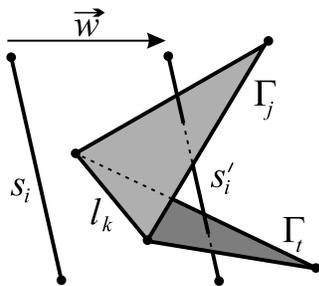


Рис. 137

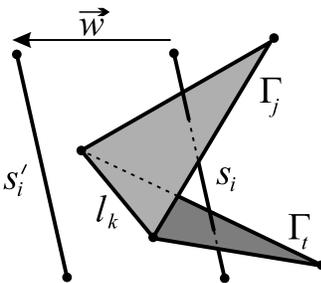


Рис. 138

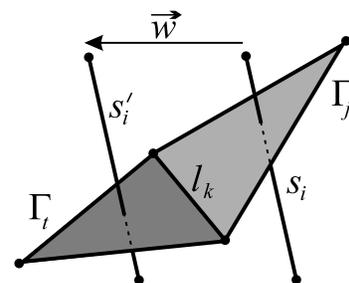


Рис. 139

Также возможны три варианта прохождения звена s_i через ребро l_k , которое является общим ребром граней Γ_j и Γ_t поверхности M , эти варианты



представлены на рис. 137–139, в каждом из них образ звена s_i при первом элементарном сдвиге вместе с гранями Γ_j и Γ_t в общую сумму индексов будут добавлять $+2$ (рис. 137), -2 (рис. 138) или 0 (рис. 139). Поэтому взятая по $(\text{mod } 2)$ сумма попарных индексов не изменится при прохождении звена s_i через ребро l_k . Таким образом,

$$I(z, M) = I(z_1, M) = \dots = I(z_p, M) = I(\tilde{z}, M) = 0.$$

■

Определение. Если многоугольник Γ является объединением простой замкнутой ломаной z и ее внутренней области V , то любую точку множества V будем называть внутренней точкой Γ , а точки ломаной z будем называть граничными точками Γ ¹⁹.

Определение. Пусть точка A не принадлежит многогранной поверхности $M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$. Собственным M -лучом для точки A называется произвольный луч $r_A = [AX)$, не пересекающий M или пересекающий ее только во внутренних точках всех ее граней.

Лемма 5.6. Для любой многогранной поверхности $M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ и точки $A \notin M$ существует собственный M -луч, который пересекает M .

Доказательство. Пусть многоугольник Γ_j является объединением простой замкнутой ломаной z_j и ее внутренней области V_j и α_j — плоскость многоугольника Γ_j . Из определения многогранной поверхности следует, что все плоскости α_j не могут быть одинаковыми (если все грани находятся в одной плоскости, то ограниченность M позволит найти ребро, которое будет ребром только одной грани M). Поэтому для точки A найдется хотя бы одна плоскость α_j , для которой $A \notin \alpha_j$. Тогда выберем произвольную точку $B \in V_j$ и такую ее $O_\varepsilon(B)$ (в плоскости α_j), что $O_\varepsilon(B) \subseteq V_j$ (рис. 140). Для каждого ребра $[XY]$ поверхности M рассмотрим плоскость (AXY) (если $A \in (XY)$, то зафиксируем одну плоскость, которая содержит эти три точки). Эта плоскость не совпадает с α_j (поскольку $A \notin \alpha_j$) поэтому ее пересечение с α_j содержится в некоторой прямой. В силу конечного числа рассматриваемых

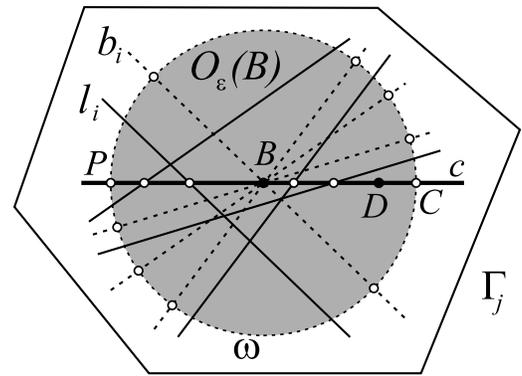


Рис. 140

¹⁹В плоскости α , которая содержит многоугольник Γ , эти понятия согласованы с терминами, введенными в третьем параграфе первой главы.



плоскостей, мы получим конечное число прямых l_1, \dots, l_p , которые являются их следами²⁰ на плоскость α_j . Через B проведем прямую $b_i \parallel l_i$ при всех $i \in \{1, \dots, p\}$ и обозначим через $\omega = \omega(B, \varepsilon)$ окружность в плоскости α_j , которая является границей $O_\varepsilon(B)$. Множество $\Phi = \omega \cap \left(\bigcup_{i=1}^p b_i\right)$ содержит не более $2p$ точек, поэтому найдется $C \in \omega \setminus \Phi$. Прямая $c = (OC)$ не совпадает ни с одной из прямых b_i , поэтому $c \not\parallel l_i$ при всех $i \in \{1, \dots, p\}$. Это означает, что на открытом диаметре $]PC[= c \cap O_\varepsilon(B)$ прямая l_i может высечь не более одной точки, поэтому найдется точка $D \in]PC[\setminus \left(\bigcup_{i=1}^p l_i\right)$. Осталось доказать, что луч $r_A = [AD)$ — искомый. По построению точка $D \in]PC[\subseteq V_j$, поэтому r_A пересекает грань Γ_j во внутренней точке. Условие $D \notin l_i$ дает, что r_A не может содержаться в плоскости (AXY) , поэтому луч r_A не пересекает ребро $[XY]$. Итак, луч r_A пересекает M , но не пересекает ни одного ребра M , поэтому он M -собственный. ■

Последний вспомогательный результат получим из теоремы Жордана для простой замкнутой ломаной.

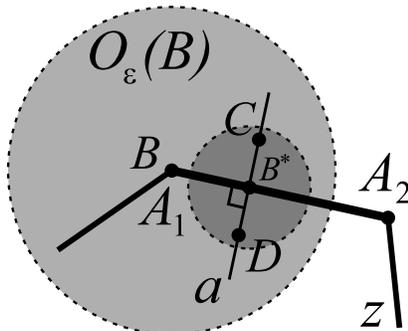


Рис. 141

Лемма 5.7. Пусть $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ — простая замкнутая ломаная, лежащая в плоскости α и разбивающая ее на внутреннюю область V и внешнюю область U . Тогда для любой точки $B \in z$ и произвольной ее ε -окрестности $O_\varepsilon(B)$ существуют $C, D \in O_\varepsilon(B)$, для которых $C \in V$ и $D \in U$.

Доказательство. Б.о.о. считаем, что точка $B \in s_1 = [A_1 A_2]$. Если $B \in]A_1 A_2[$, определим $B^* = B$, иначе в качестве B^* выберем любую точку интервала $]A_1 A_2[$, для которой $|BB^*| \leq \varepsilon/2$ (как на рис. 141). Из простоты ломаной z следует, что $d^* = \min\{d(B^*, s_i) : 2 \leq i \leq n\} > 0$. Положим $\delta = \min\{d^*, \varepsilon/2\}$ и проведем $O_\delta(B^*)$. Выбор числа δ одновременно обеспечивает выполнение двух условий: $O_\delta(B^*) \subseteq O_\varepsilon(B)$ (*); а также $O_\delta(B^*) \cap s_i = \emptyset$ при всех $i \in \{2, \dots, n\}$ (**). Проведем через точку B^* прямую $a \perp (A_1 A_2)$ и отметим на ней точку $C \neq B^*$, для которой $|B^*C| < \delta$ (рис. 141). Обозначим $D = Z_{B^*}(C)$ и докажем, что точки C и D — искомые. Включение $[CD] \subseteq O_\delta(B^*)$ и условие (**) гарантируют, что $C, D \notin z$, поэтому $C, D \in V \cup U$. Б.о.о. $C \in V$, тогда покажем, что $D \in U$.

²⁰Если $l = \alpha \cap \beta$, то прямая l называется следом одной плоскости на другую.



О/п: $D \in V$, тогда по теореме Жордана из линейной связности области V найдем ломаную z_1 , которая соединяет точки C и D между собой и не пересекает z . Из цикла $z_2 = z_1 \cup [CD]$ выделим (с помощью леммы 4.3) простой цикл z^* . Тогда $z^* \cap z = \{B^*\}$, поэтому z и z^* находятся в общем положении и $I(z, z^*) = 1$, что противоречит теореме 4.2. ∇ .

Следующее утверждение называется *теоремой Жордана для многогранной поверхности*.

Теорема 5.8. *Простая многогранная поверхность $M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ разбивает пространство на две линейно связные области, причем одна из этих областей является ограниченным множеством, другая область не ограничена в пространстве.*

Доказательство. **I.** Сразу воспользуемся ограниченностью многогранной поверхности M (она является объединением конечного числа ограниченных множеств), для некоторой точки $O^* \in \mathbb{P}_3$ и найдем такое число $\varepsilon^* > 0$, что $M \subseteq O_{\varepsilon^*}(O^*)$. Обозначим через $V = \{A \in \mathbb{P}_3 \setminus M : \text{существует собственный луч } r_A, \text{ который пересекает } M \text{ в нечетном числе точек}\}$, $U = \{B \in \mathbb{P}_3 \setminus M : \text{существует собственный луч } r_B, \text{ пересекающий } M \text{ в четном числе точек}\}$. Последовательно докажем несколько свойств множеств U и V .

1) $U \cap V = \emptyset$. О/п: существует $A \in V \cap U$, тогда можно выбрать такие два собственных луча r_A и r'_A с вершиной в точке A , что r_A пересекает M в нечетном числе точек, а r'_A — в четном. Если O^* не лежит на прямой, содержащей луч r_A , можно выбрать (см. 1-й случай IV-й части теоремы 4.6) точки $C \in r_A$ и $D \in r'_A$ так, чтобы $[CD] \cap O_{\varepsilon^*}(O^*) = \emptyset$ и получить цикл $z^* = [AC] \cup [CD] \cup [DA]$. Если же точка O^* лежит на прямой, которая содержит луч r_A , можно выбрать (см. 2-й случай IV-й части теоремы 4.6) точки $C \in r_A$, $D \in r'_A$, а также точки C' , D' так, что $(CC') \parallel (DD')$ и ломаная $[CC'] \cup [C'D'] \cup [D'D]$ не пересекается с $O_{\varepsilon^*}(O^*)$, тогда определим $z^* = [AC] \cup [CC'] \cup [C'D'] \cup [D'D] \cup [DA]$. В результате простой цикл z^* находится в общем положении с поверхностью M (из определения собственного M -луча а также того, что добавленные звенья не пересекают M) и пересекает M в нечетном числе точек, откуда $I(z^*, M) = 1$, что противоречит теореме 5.5. ∇ .

2) $U \cap M = V \cap M = \emptyset$. Это свойство сразу следует из определения множеств U и V .



3) $U \cup V \cup M = \mathbb{P}_3$. Если $X \notin M$, то по лемме 5.6 для этой точки существует собственный луч r_X . Каждую грань M луч r_X пересекает не более чем в одной точке, поэтому общее число точек пересечения с M четно или нечетно, откуда $X \in U$ или $X \in V$.

4) множества V и U открыты. Докажем, например, что V открыто. Выберем произвольную точку $A \in V$. Так как $A \notin M = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$, то $d(A, M) = \min\{d(A, \Gamma_j) : 1 \leq j \leq m\} = \delta_1 > 0$. Покажем, что $O_{\delta_1}(A) \subseteq V$. О/п: существует точка $B \in O_{\delta_1}(A) \cap U$. Заметим, что точка B не может лежать на прямой, содержащей луч r_A , иначе $B \in V$, что противоречит (1). Пусть r_B — собственный луч с вершиной в B , который пересекающий M в четном числе точек. В лемме 5.6 можно дополнительно потребовать, чтобы прямая, которая содержит собственный луч с началом в точке B , также является наклонной к плоскости (BXY) , где $X, Y \in r_A$ и в результате получить собственный M -луч r_B с дополнительным свойством: $r_B \cap r_A = \emptyset$. Также как и в (1) на лучах r_A и r_B вне множества $O_{\varepsilon^*}(O^*)$ выбираем соответственно точки C и D так, чтобы $[CD] \cap O_{\varepsilon^*}(O^*) = \emptyset$, тогда цикл $z^* = [AB] \cup [BD] \cup [DC] \cup [CA]$ является простым, находится в общем положении с M ($[AB] \subseteq O_{\delta_1}(A)$, $O_{\delta_1}(A) \cap M = \emptyset$, поэтому $[AB]$ не пересекается с M) и пересекает M в нечетном числе точек, откуда $I(z^*, M) = 1$, что противоречит теореме 5.5. $\nearrow \nwarrow$. Точно также устанавливается открытость множества U .

5) любая простая ломаная z , соединяющая точку $A \in V$ с точкой $B \in U$ и находящаяся в общем положении с M , пересекает M в нечетном числе точек. О/п: нашлась такая ломаная z , которая пересекает M в четном числе точек. Выберем два собственных луча r_A и r_B с вершинами в A и B соответственно. Используя лемму 5.6, можно дополнительно потребовать выполнение условий: $r_A \cap r_B = \emptyset$, $r_A \cap z = \{A\}$ и $r_B \cap z = \{B\}$. Как и в пункте (1) выберем точки $C \in r_A$ и $D \in r_B$ так, чтобы отрезок $[CD]$ не пересекал $O_{\varepsilon^*}(O^*)$. Тогда $z_1 = z \cup [BD] \cup [DC] \cup [CA]$ — простой цикл, находящийся в общем положении с M и пересекающий M в нечетном числе точек, т.е. $I(z_1, M) = 1$. $\nearrow \nwarrow$. Аналогично доказывается, что если точки принадлежат одному множеству (U или V), то каждая соединяющая их простая ломаная, находящаяся с M в общем положении, пересекает M в четном числе точек.

6) V и U являются непустыми множествами. По лемме 5.7 получим, что $V_1 \neq \emptyset$, где V_1 — внутренняя область грани Γ_1 и можно выбрать точку



$X \in V_1$. К тривиальной ломаной $z = \{X\}$ можно применить утверждение (3) теоремы 5.1 и найти число $\delta_2 = \min\{d(X, \Gamma_j) : 2 \leq j \leq m\} > 0$, для него будет верно $O_{\delta_2}(X) \cap \Gamma_j = \emptyset$ для всех $j \in \{2, \dots, m\}$. Проведем через точку X прямую $a \perp \alpha_1$, где α_1 — плоскость грани Γ_1 , и выберем на этой прямой точку A так, чтобы $0 < |XA| < \delta_2$. Пусть $B = Z_X(A)$, тогда $[AB] \subseteq O_{\delta_2}(X)$ и простая ломаная $z_1 = [AB]$ не пересекает грани Γ_j при всех $j \in \{2, \dots, m\}$, но $z_1 \cap \Gamma_1 = \{X\}$. Учитывая, что $A, B \notin M$, из (3) получим $A, B \in U \cup V$ и из нечетности $|z_1 \cap M|$ и (5) следует, что если $A \in V$, то $B \in U$.

II. Докажем, что множества V и U являются линейно связными. Пусть $A, B \in V$ (случай $A, B \in U$ доказывается аналогично). Покажем, что существует ломаная $z \subseteq V$, соединяющая A с B и не пересекающая M . Для этого по лемме 5.6 выберем два собственных луча с вершинами в A и B , которые пересекают M . Обозначим через A' ближайшую к A точку из пересечения r_A с M . Аналогично, пусть B' — ближайшая к B точка из $M \cap r_B$. Если полуинтервалы $[AA']$ и $[BB']$ пересекаются в некоторой точке T , то ломаная $[AT] \cup [TB]$ будет искомой, поэтому далее считаем их непересекающимися. Пусть $\Gamma(A')$ и $\Gamma(B')$ — грани поверхности M , которые содержат точки A' и B' . По определению многогранной поверхности найдется путь по смежным граням $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k)$, где $\Gamma(1) = \Gamma(A')$, $\Gamma(k) = \Gamma(B')$ и грани $\Gamma(p), \Gamma(p+1)$ — смежные при всех натуральных $p \leq k-1$. Далее существование ломаной будем доказывать индукцией по k . В качестве базы рассмотрим два случая: $k=1$ и $k=2$.

Пусть $k=1$ (рис 142). Пользуясь тем, что A' и B' — внутренние точки $\Gamma(1)$, найдем окрестности $O_\delta(A')$, $O_\delta(B')$ в плоскости $\Gamma(1)$, которые содержатся в $V(1)$ — внутренней области $\Gamma(1)$. Так как отрезки $[AA']$ и $[BB']$ не пересекают грани, отличные от $\Gamma(1)$, то

$$d_1 = \min\{\delta, d([AA'], \Gamma_j), d([BB'], \Gamma_j) : \Gamma_j \neq \Gamma(1)\} > 0.$$

На отрезках $[AA']$ и $[BB']$ выберем точки C, D так, что:

- а) $|CA'| < d_1, |DB'| < d_1$;
- б) $d(C, \alpha(1)) = d(D, \alpha(1)) > 0$, где $\alpha(1)$ — плоскость грани $\Gamma(1)$.

Обозначим через C' и D' ортогональные проекции C и D на плоскость $\alpha(1)$. Так как $|C'A'| \leq |CA'| < d_1 \leq \delta$ и $|D'B'| < \delta$, то $C', D' \in V(1)$ и в силу линейной связности $V(1)$ точки C' и D' можно соединить ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [E_i E_{i+1}]$, целиком лежащей во множестве $V(1)$. Согласно теореме 5.1



расстояние от z до любой грани Γ_j (при $\Gamma_j \neq \Gamma(1)$) больше нуля. Обозначим минимум этих расстояний через d^* и выберем на интервалах $]CC'[$ и $]DD'[$ точки F и G так, что $0 < |FC'| = |GD'| < d^*$. Опишем теперь построение ломаной $z^* = \bigcup_{i=1}^{n+2} [A_i A_{i+1}]$:

А) $A_1 = A$, $A_2 = C$, $A_3 = F$;

Б) $(A_{i+2}A_{i+3}) \parallel (E_i E_{i+1})$ и $(A_{i+3}E_{i+1}) \perp \alpha(1)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

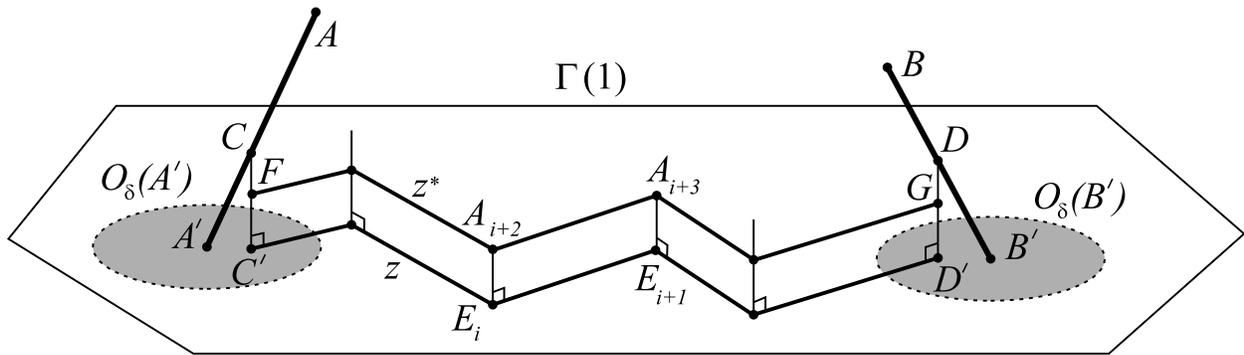


Рис. 142

Из (Б) следует, что кроме первых двух, остальные звенья z^* параллельны плоскости $\alpha(1)$, поэтому $d(A_{n+3}, \alpha(1)) = |FC'| = |GD'|$. Так как выполняется $E_{n+1} = D'$ и $(A_{n+3}E_{n+1}) \perp \alpha(1)$, точка A_{n+3} совпадает с G или с точкой $G' = S_{\alpha(1)}(G)$. Покажем, что второй случай невозможен. О/п: $A_{n+3} = G'$. По лемме 4.3 можно считать, что ломаная z была простой, поэтому простыми будут ломаные z^* и $z_1 = z^* \cup [G'D] \cup [DB]$. Но ломаная z_1 соединяет A с B и пересекает M только в одной точке, а это невозможно в силу (5) предыдущего пункта доказательства. ∇ . Поэтому $A_{n+3} = G$ и осталось показать, что ломаная $z_2 = z^* \cup [GD] \cup [DB]$ будет искомой. Звенья $[AC]$ и $[BD]$ этой ломаной не пересекают M , поскольку $C \in [AA']$, $D \in [BB']$ и A' , B' — ближайшие к вершинам лучей точки пересечения $r_A \cap M$ и $r_B \cap M$. Так как $C \in [AA']$ и $d(C', [AA']) < d_1$, выполняется $[CF] \subseteq O_{d_1}([AA'])$, поэтому $[CF] \cap \Gamma_j = \emptyset$ при всех $\Gamma_j \neq \Gamma(1)$. Условие $F \in]CC'[$ влечет $[CF] \cap \Gamma(1) = \emptyset$. Аналогично доказывается, что $[DG] \cap M = \emptyset$. Остальные звенья ломаной z_2 находятся в $O_{d^*}(z)$, а эта окрестность выбиралась так, что $O_{d^*}(z) \cap \Gamma_j = \emptyset$ при всех $\Gamma_j \neq \Gamma(1)$, а с $\Gamma(1)$ эти звенья не пересекаются по свойствам (А) и (Б). Мы доказали, что $z_2 \cap M = \emptyset$, эта ломаная соединяет A с B , поэтому случай $k = 1$ проверен.

Пусть $k = 2$. Обозначим общее ребро граней $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$ через $[KL]$; середину ребра $[KL]$ — через O ; $V(1)$ и $V(2)$ — внутренние области гра-



нией $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$, $\alpha(1)$ и $\alpha(2)$ — плоскости граней $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$ (соответственно). По лемме 5.7, существуют такие внутренние точки $P \in V(1)$ и $P' \in V(2)$, что $(PO), (P'O) \perp (KL)$ и $]PO[\subseteq V(1)$, $]P'O[\subseteq V(2)$. Биссекторную плоскость для двугранного угла с ребром (KL) , плоскости которого содержат $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$, обозначим через β (т.е. β содержит (KL) и биссектрису $\angle POP'$). Две точки Q, Q_1 этой плоскости, удаленные от O на расстояние $\varepsilon > 0$ и $(OQ), (OQ') \perp (KL)$, будем называть ε -маяком при ребре $]KL[$. Расстояние d_ε от Q и Q' до плоскостей $\alpha(1)$ и $\alpha(2)$ будем называть *характеристикой* ε -маяка. Из определения многогранной поверхности следует, что полуплоскости с границей (KL) , которые содержат грани $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$, не могут совпасть, поэтому для характеристики будет выполняться двойное неравенство $0 < d_\varepsilon \leq \varepsilon$ (равенство будет достигаться для развернутого двугранного угла).

Далее будем следовать случаю $k = 1$ и вносить необходимые изменения. Для отрезка $]BB'[$, например, будем находить расстояние до граней, отличных от $\Gamma(2)$. Поэтому положим

$$d_1 = \min\{\delta, d([AA'], \Gamma_j), d([BB'], \Gamma_t) : \Gamma_j \neq \Gamma(1), \Gamma_t \neq \Gamma(2)\} > 0.$$

Точки C, D, C', D' определяются аналогично (рис. 143). Далее, пусть ломаная $z = \bigcup_{i=1}^n [E_i E_{i+1}]$ соединяет C' с P и лежит в $V(1)$. Договоримся, что z не пересекает интервал $]PO[$ (иначе в качестве P_1 выбираем ближайшую к O точку из пересечения $z \cap]PO[$, добавляем к z звено $]PP_1[$ и работаем дальше с P_1 и увеличенной на одно звено ломаной). По лемме о редукции (лемма 4.3) можно считать, что z — простая ломаная. Аналогично построим простую ломаную $\tilde{z} = \bigcup_{l=1}^s [H_l H_{l+1}] \subseteq V(2)$, которая соединяет D' с P' и не пересекается с интервалом $]P'O[$.

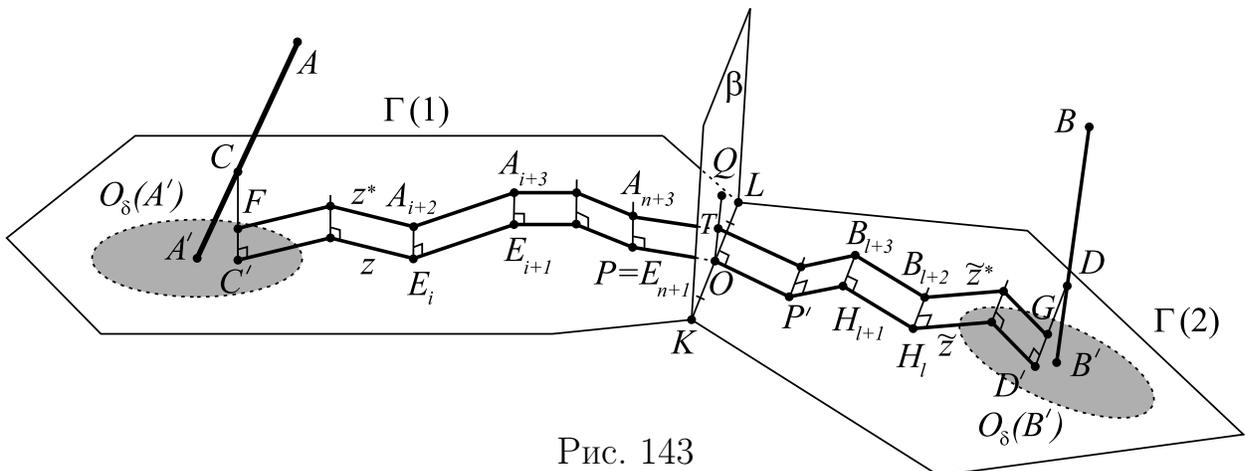


Рис. 143



Простота поверхности M и теорема 5.1 гарантируют положительность следующих двух чисел:

$$d_2 = \min\{d(z, \Gamma_j), d(\tilde{z}, \Gamma_t) : \Gamma_j \neq \Gamma(1), \Gamma_t \neq \Gamma(2)\} > 0 \quad \text{и}$$

$$d_3 = d([PO] \cup [OP'], \Gamma_j) : \Gamma_j \neq \Gamma(1), \Gamma(2)\} > 0.$$

Построим ε -маяк $\{Q, Q'\}$ при $\varepsilon = \min\{d_1, d_2, d_3\}/2$ для ребра $[KL]$ и пусть d_ε^* — его характеристика. Теперь на интервале $]CC'[$ выбираем точку F так, чтобы $0 < |FC'| \leq d_\varepsilon^*$. Обозначим через $d^* = |FC'|$ и, как и в случае $k = 1$, определяем ломаную $z^* = \bigcup_{i=1}^{n+2} [A_i A_{i+1}]$:

А) $A_1 = A, A_2 = C, A_3 = F$;

Б) $(A_{i+2}A_{i+3}) \parallel (E_i E_{i+1})$ и $(A_{i+3}E_{i+1}) \perp \alpha(1)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть γ — экваториальная плоскость отрезка KL , тогда $O, P, P', Q, Q' \in \gamma$. Из $(KL) = \alpha(1) \cap \alpha(2)$ и $(KL) \perp \gamma$ следует, что $\gamma \perp \alpha(1), \alpha(2)$. Через точку A_{n+3} параллельно (PO) проведем прямую b и обозначим через $\{T\} = b \cap \beta$. Условия $P \in \gamma, (PA_{n+3}) \perp \alpha(1)$ дают $A_{n+3} \in \gamma$ и $T \in \gamma \cap \beta = (OQ)$. Б.о.о. будем считать (как на рис. 143), что $T \in [OQ]$ (иначе точки Q и Q' поменяем местами). Учитывая, что $d^* = |PA_{n+3}| = d(T, \alpha(1))$ и $d^* \leq d_\varepsilon$ получим более сильное включение — $T \in [OQ]$. Далее проведем звено $[TB_{s+3}] \parallel (OP')$ так, что $(B_{s+3}P') \perp \alpha(2)$ (это можно сделать, так как $T, O, P' \in \gamma$ и $\gamma \perp \alpha(2)$). С концом в точке B_{s+3} строим ломаную \tilde{z}^* по следующему правилу:

В) $(B_{l+3}B_{l+2}) \parallel (H_{l+1}H_l)$ и $(B_{l+2}H_l) \perp \alpha(2)$ при всех $l \in \{s, s-1, \dots, 1\}$.

Выберем точку $G \in]DD'[$ так, чтобы $|GD'| = d^*$ и определим через $G' = S_{\alpha(2)}(G)$. Из (В) следует, что $(B_3H_1) \perp \alpha(2)$ и $d(B_3, \alpha(2)) = d^*$, поэтому $B_3 = G$ или $B_3 = G'$, но второй случай невозможен. О/п: $B_3 = G'$. Ломаная

$$z_1 = z^* \cup [A_{n+3}T] \cup [TB_{s+3}] \cup \tilde{z}^* \cup [G'D] \cup [DB]$$

является простой, соединяет точку A с точкой B и пересекает M только в точке $D' \in V(2)$, что противоречит (5) предыдущего пункта доказательства. ∇ . Поэтому $B_3 = G$ и можно рассмотреть ломаную

$$\hat{z} = z^* \cup [A_{n+3}T] \cup [TB_{s+3}] \cup \tilde{z}^* \cup [GD] \cup [DB].$$

Звенья $[AC]$ и $[BD]$ не пересекают M из-за выбора точек A' и B' . Включения $[CF] \subseteq O_{d_1}([AA'])$, $[DG] \subseteq O_{d_1}([BB'])$ и пустота пересечений $O_{d_1}([AA']) \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $\Gamma_j \neq \Gamma(1)$, $O_{d_1}([BB']) \cap \Gamma_t = \emptyset$ при $\Gamma_t \neq \Gamma(2)$



а также неравенство $d^* < d_1$ дают $([CF] \cup [DG]) \cap M = \emptyset$. Остальные звенья ломаной z^* находятся на расстоянии d^* от соответствующих звеньев ломаной z , поэтому условия $O_{d_2}(z) \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $\Gamma_j \neq \Gamma(1)$ и неравенство $d^* < d_2$ дают $z^* \cap M = \emptyset$. Точно также устанавливается, что $\tilde{z}^* \cap M = \emptyset$. Наконец, отрезки $[A_{n+3}T]$ и $[TB_{s+3}]$ содержатся в $O_{d_3}([OP] \cup [OP'])$ (так как $d^* < d_3$) и $O_{d_3}([OP] \cup [OP']) \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $\Gamma_j \neq \Gamma(1), \Gamma(2)$, поэтому эти отрезки не пересекаются с гранями Γ_j при $\Gamma_j \neq \Gamma(1), \Gamma(2)$. По построению звенья $[A_{n+3}T]$ и $[TB_{s+3}]$ не пересекаются с гранями $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$, поэтому они не пересекаются с M . Мы доказали, что $\hat{z} \cap M = \emptyset$, откуда $\hat{z} \subseteq V \cup U$. Но условие $A \in V$ и (5) предыдущего пункта доказательства дают $\hat{z} \subseteq V$ и случай $k = 2$ доказан.

Ш.И. Предположим, что для k это утверждение выполняется и докажем его для $k + 1$. В цепочке граней $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k + 1)$ — рассмотрим грань $\Gamma(2)$, ее внутреннюю область $V(2)$ и произвольную точку $Y \in V(2)$. В (6) предыдущего пункта доказательства были найдены точки $Y_1 \in V$ и $Y_2 \in U$, для которых $(Y_1Y_2) \perp \alpha(2)$ и $[Y_1Y_2] \cap M = \{Y\}$. По базе индукции (для $k = 2$) найдется ломаная $z_1 \subseteq V$, которая соединяет A с Y_1 . По предположению индукции (для цепочки $\Gamma(2), \dots, \Gamma(k + 1)$) найдется ломаная $z_2 \subseteq V$, которая соединяет Y_1 с B . Тогда ломаная $z_1 \cup z_2 \subseteq V$ и соединяет точку A с точкой B . Шаг индукции доказан и множество V линейно связно. Аналогично устанавливается, что U — линейно связное множество.

Ш.И. Докажем, что в паре $\{U, V\}$ только V является ограниченным множеством в \mathbb{P}_3 . Рассмотрим фигуру $\Phi = \mathbb{P}_3 \setminus O_{\varepsilon^*}(O^*)$. Для любой точки $X \in \Phi$ на прямой (XO^*) выберем с вершиной в точке X луч r_X , который не содержит точку O^* , тогда $r_X \cap M = \emptyset$ и $X \in U$. Мы доказали, что $\Phi \subseteq U$. Пусть $X^* \in Sph(O^*, \varepsilon^*)$ и α^* — плоскость, для которой $X^* \in \alpha^*$ и $\overrightarrow{X^*O^*} \perp \alpha^*$. Тогда $\alpha^* \subseteq \Phi \subseteq U$ и U не может быть ограниченным множеством. В (3) было доказано, что $\mathbb{P}_3 = U \cup V \cup M$, поэтому включение $\Phi \subseteq U$ приводит к $V \subseteq \mathbb{P}_3 \setminus \Phi = O_{\varepsilon^*}(O^*)$. Отсюда V — ограниченное множество. ■

Определение. Пусть U и V — линейно связные области, найденные в предыдущей теореме для простой многогранной поверхности M , причем U — неограниченное множество и V — ограниченное множество, тогда U называется внешней областью поверхности M , а V — ее внутренней областью. Многогранником называется простая многогранная поверхность M вместе со своей внутренней областью (т.е. $M \cup V$).

Глава 4

Длина, площадь и объем

4.1. Функция длины на множестве отрезков

Напомним некоторые обозначения и результаты из первой главы Геометрии 10. Считаем, что $[OE] \subseteq a \subseteq \alpha \subseteq \mathbb{P}_3$ и $O \neq E$. Множество всех отрезков прямой a (плоскости α , всего пространства) обозначаем через Seg_a (соответственно Seg_α и Seg).

Определение. *Длиной на множестве Seg_a (Seg_α и Seg) с единичным отрезком $[OE]$ называется функция $l : \text{Seg}_a \rightarrow \mathbb{R}$ (соответственно $l : \text{Seg}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ и $l : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$), которая удовлетворяет следующим свойствам:*

- 1) $l([AB]) \geq 0$;
- 2) (аддитивность) если $C \in [AB]$, то $l([AB]) = l([AC]) + l([CB])$;
- 3) если $[AB] = [CD]$, то $l([AB]) = l([CD])$;
- 4) $l([OE]) = 1$.

Если в определении нет квантора, то по умолчанию¹ используется квантор всеобщности, действующий на всём рассматриваемом множестве. Так, например, свойство (1) правильно читается так: для каждого отрезка $[AB] \in \text{Seg}_a$ (соответственно $[AB] \in \text{Seg}_\alpha$ и $[AB] \in \text{Seg}$) выполняется $l([AB]) \geq 0$. В свойстве (2) опущены сразу два квантора всеобщности: первый действует на множестве отрезков, а второй квантор «пробегают» по всем точкам C из отрезка $[AB]$. Отрезок $[XY]$ называется суммой отрезков $[AB]$ и $[CD]$, если найдется такая точка $Z \in [XY]$, для которой $[XZ] = [AB]$ и $[ZY] = [CD]$ (используем обозначение $[XY] = [AB] + [CD]$). Существование хотя бы одного такого отрезка можно проще всего обосновать, если начать построение от точки Z : проведем через Z произвольную прямую b , ее точка Z разобьет на два противоположных луча r_1 и r_2 (по теореме об открытом луче

¹Это правило называется замыканием формулы с помощью квантора всеобщности.



из второго параграфа первой главы Геометрии 10), на r_1 и r_2 от Z откладываем (соответственно) отрезки $[ZX] = [AB]$, $[ZY] = [CD]$ (что можно сделать по аксиоме III.1) и получим $[XY] = [AB] + [CD]$. Теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ можно определить $k \cdot [AB]$ (знак умножения можно опускать): $1 \cdot [AB] = [AB]$, $2 \cdot [AB] = [AB] + [AB]$ (т.е. это такой отрезок $[XY]$, что для некоторой точки $Z \in [XY]$ выполняется $[XZ] = [AB] = [ZY]$) и $(k + 1) \cdot [AB] = k \cdot [AB] + [AB]$. Основные свойства функции длины нам хорошо знакомы из следующего утверждения.

Теорема 1.1. Пусть $l : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$ — длина с единичным отрезком $[OE]$, тогда выполняются следующие свойства:

- а) если $[CD] \subseteq [AB]$, то $l([CD]) \leq l([AB])$;
- б) если $[KL] \leq [AB]$, то $l([KL]) \leq l([AB])$;
- в) для любого $k \in \mathbb{N} \Rightarrow l(k[AB]) = k \cdot l([AB])$;
- г) если $A \neq B$, то $l([AB]) > 0$;
- д) если $l([AB]) = l([CD])$, то $[AB] = [CD]$;
- е) для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $C \in [AB]$, для которой $l([AC]) = k \cdot l([AB])$;
- ж) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $D \in [AB]$, для которой $l([AD]) = \frac{1}{n} \cdot l([AB])$;
- з) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $M \in [AB]$, для которой $l([AM]) = \frac{k}{n} \cdot l([AB])$;
- и) пусть $A \neq B$ и \leq — порядок на прямой (AB) , введенный с помощью луча $[AB)$, $C \in [AB)$, тогда условие $A < C < B$ выполняется в том и только в том случае, когда $0 < l([AC]) < l([AB])$.

Доказательство. Эта теорема доказана в шестом параграфе первой главы Геометрии 10. ■

Здесь нас будет интересовать фундаментальный вопрос о существовании функции длины. Наберемся смелости и решим его положительно. Но сначала договоримся об одном удобном обозначении: если некоторому объекту a по определению присваивается какое-то значение a_0 , то используют запись $a \stackrel{\text{df}}{=} a_0$, где «df» над равенством является сокращением английского слова definition — определение. Например, аксиомы Пеано описывают отношение «следовать за» (запись $a' = b$ означает, что b следует за a) и первая аксиома Пеано гарантирует существование единицы, тогда остальные цифры десятичной системы можно определить так: $2 \stackrel{\text{df}}{=} 1'$, $3 \stackrel{\text{df}}{=} 2'$, \dots , $9 \stackrel{\text{df}}{=} 8'$.



Теорема 1.2. *Существует и единственна функция $l : \text{Seg}_a \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами 1–4.*

Доказательство. I. Построение функции l . Последовательно зададим l на всех отрезках прямой a , начиная с самых простых случаев.

а) по нашей договоренности $[OE] \subseteq a$, для этого отрезка будем считать, что $l([OE]) \stackrel{\text{df}}{=} 1$. Также определим $l([OO]) \stackrel{\text{df}}{=} 0$.

б) индукцией по $k \in \mathbb{N}$ докажем, что на луче $[OE)$ существует и единственна такая точка E_k , что $[OE_k] = k[OE]$. Б.И. Случай $k = 1$ сразу следует из аксиомы III.1 (см. третий параграф первой главы Геометрии 10). Ш.И. Предположим, что точка E_k построена, она разбивает (по теореме об открытом луче — см. второй параграф первой главы Геометрии 10) прямую (OE) на два луча: $r_1 = [E_kO)$ и r_2 . По аксиоме III.1 на луче r_2 от точки E_k можно отложить отрезок $[OE]$ и получить точку E_{k+1} . Она будет искомой, поскольку $[OE_{k+1}] = [OE_k] + [OE] = (k+1)[OE]$. Единственность такой точки на луче $[OE)$ также гарантируется аксиомой III.1. Теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ положим $l([OE_k]) \stackrel{\text{df}}{=} k$ и точки множества $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ будем называть натуральными точками на луче $[OE)$.

в) для любого $n \in \mathbb{N}$ докажем, что на луче $[OE)$ существует и единственна такая точка $E_{1/n}$, что $[OE] = n[OE_{1/n}]$. Выберем произвольную точку $X \notin a$ и на луче $[OX)$, пользуясь пунктом (б), отметим точки $Y_i \in [OX)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ так, что $[OY_i] = i[OE]$. С помощью аксиомы Евклида о параллельных (аксиома IV.1) через Y_i проведем прямую $b_i \parallel (Y_nE)$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Из аксиомы Паша (аксиома II.4) следует, что существует точка $\{X_i\} = b_i \cap [OE]$. Применив теорему Фалеса (см. пятый параграф первой главы Геометрии 10) получим равенства $[OX_1] = [X_1X_2] = \dots = [X_{n-1}E]$ (поскольку $X_n = E$), откуда $n[OX_1] = [OE]$ и точка $E_{1/n} = X_1$ — искомая. Единственность такой точки следует из аксиомы III.1. Положим $l([OE_{1/n}]) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{n}$.

г) из (б) и (в) следует, что для любой пары $k, n \in \mathbb{N}$ на луче $[OE)$ существует и единственна такая точка $E_{k/n}$, что $[OE_{k/n}] = k[OE_{1/n}]$. Положим $l([OE_{k/n}]) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{k}{n}$ для любой пары натуральных чисел k и n , а также точки множества $\{O\} \cup \{E_{k/n} : k, n \in \mathbb{N}\}$ будем называть рациональными точками на луче $[OE)$. Напомним, что отношение $[AB] < [CD]$ для отрезков равносильно существованию такой точки $F \in [CD[$, что $[AB] = [CF]$, поэтому условие $[OE_r] < [OE_s]$ для положительных рациональных чисел равносильно числовому неравенству $r < s$. Действительно, дроби $r = k_1/n$



и $s = k_2/n$ сразу можно привести к общему знаменателю и теперь неравенство $[OE_r] < [OE_s]$ можно переписать в виде $k_1[OE_{1/n}] < k_2[OE_{1/n}]$, что равносильно $k_1 < k_2$ или $r < s$. Если также вспомнить о порядке \leq на прямой a , введенном с помощью луча $[OE]$, мы только что показали, что для рациональных точек соотношение $E_r < E_s$ равносильно неравенству $r < s$.

д) пусть $A \in [OE)$ и A не является рациональной точкой этого луча. Рассмотрим два числовых множества: $U_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ или } r > 0 \text{ и } [OE_r] \subseteq [OA]\}$ и $U_2 = \{q \in \mathbb{Q} : [OA] \subseteq [OE_q]\}$. Ясно, что $U_1 \cup U_2 = \mathbb{Q}$ и для любых $r \in U_1$ и $s \in U_2$ следует, что $r \leq s$. Поскольку точка A не является рациональной точкой, получим $r < s$ и пара (U_1, U_2) является сечением в \mathbb{Q} (надо было еще заметить, что $0 \in U_1$ и из аксиомы Архимеда найдется такое натуральное число k , что $[OA] < k[OE]$, поэтому $k \in U_2$). Покажем, что в U_2 нет минимального элемента. О/п: нашелся $s^* = \min U_2$. Учитывая, что $A \neq E_{s^*}$, получим $[OA] \subseteq [OE_{s^*}]$ и $[OE_{s^*}] \neq [OA]$, поэтому отрезок $[AE_{s^*}]$ нетривиальный, и из аксиомы Архимеда (аксиома V.1) найдем такое натуральное число n , что $[OE] < n[AE_{s^*}]$, откуда $[OE_{1/n}] < [AE_{s^*}]$ (иначе $n[OE_{1/n}] = [OE] \geq n[AE_{s^*}]$). Тогда неравенство $[OA] + [OE_{1/n}] \leq [OE_{s^*}]$ дает, что $[OA] \subseteq [OE_{s^*-1/n}]$ и $s^* - \frac{1}{n} \in U_2$, что противоречит предположению $s^* = \min U_2$. \times . Итак, (U_1, U_2) — сечение в \mathbb{Q} , в верхнем классе которого нет минимального элемента, поэтому найдется число $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, для которого $\tilde{\alpha} = (U_1, U_2)$ (см. пятый параграф первой главы Математического Анализа 11). Положим $l([OA]) \stackrel{df}{=} \tilde{\alpha}$. Попутно заметим, что из условия $0 \in U_1$ следует, что $\tilde{\alpha} \geq 0$.

е) для любого отрезка $[BC] \subseteq a$ найдем такую точку $A \in [OE)$ (снова воспользовавшись аксиомой III.1), для которой $[BC] = [OA]$. Из (а)–(д) следует, что число $l([OA])$ уже задано, осталось положить $l([BC]) \stackrel{df}{=} l([OA])$.

Из (а)–(е) следует, что соответствие $l : \text{Seg}_a \rightarrow \mathbb{R}$ всюду определено. Однозначность этого соответствия следует из аксиомы III.1 — отрезок, равный данному, на луче $[OE)$ можно отложить единственным способом. Таким образом, l является функцией.

II. Функция l обладает свойствами 1–4. Неотрицательность функции l , а также $l([OE]) = 1$ сразу следуют из (а)–(е). Если $[BC] = [B_1C_1]$, то для этих двух отрезков найдется единственная такая точка $A \in [OE)$, что $[OA] = [BC] = [B_1C_1]$, поэтому из (е) получим $l([BC]) = l([OA])$ и $l([B_1C_1]) = l([OA])$. Осталось проверить выполнение свойства аддитивности, которое перепишем в следующем виде: для произвольной точки $C \in [AB]$



найдем такие точки $M, N, K \in [OE)$, что $[OM] = [AC]$, $[ON] = [CB]$, $[OK] = [AB]$, обозначим через $\tilde{\alpha} = l([OM])$, $\tilde{\beta} = l([ON])$, $\tilde{\gamma} = l([OK])$, и докажем, что $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. Если хотя бы один из отрезков вырождается, то последнее равенство очевидно, поэтому далее считаем все три отрезка невырожденными. Рассмотрим два случая.

1-й случай: $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{Q}$. Сразу приведем эти числа к общему знаменателю, т.е. найдем такую тройку $k, m, n \in \mathbb{N}$, что $\tilde{\alpha} = \frac{k}{n}$ и $\tilde{\beta} = \frac{m}{n}$. Из (г) и (д) следует, что $[ON] = k[OE_{1/n}]$ и $[OM] = m[OE_{1/n}]$, откуда

$$[OK] = k[OE_{1/n}] + m[OE_{1/n}] = (k + m)[OE_{1/n}].$$

Осталось применить (г) чтобы получить $l([OK]) = (k + m) \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$.

2-й случай: $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$. Считаем, что $\tilde{\alpha} = (U_1, U_2)$, $\tilde{\beta} = (V_1, V_2)$ и $\tilde{\gamma} = (W_1, W_2)$ — сечения множества \mathbb{Q} , в верхних классах которых нет минимальных элементов. Выберем произвольные неотрицательные $r_1 \in U_1$, $s_1 \in U_2$, $r_2 \in V_1$ и $s_2 \in V_2$, тогда из (г) и (д) следуют включения:

$$\begin{aligned} [OE_{r_1}] \subseteq [OM] \subseteq [OE_{s_1}], \quad [OE_{r_2}] \subseteq [ON] \subseteq [OE_{s_2}] &\Rightarrow \\ \Rightarrow [OE_{r_1}] + [OE_{r_2}] \leq [OM] + [ON] = [OK] \leq [OE_{s_1}] + [OE_{s_2}], \end{aligned}$$

откуда из (г) и (д) следует, что $r_1 + r_2 \leq l([OK]) = \tilde{\gamma} \leq s_1 + s_2$, т.е. $\tilde{\gamma}$ разделяет множества $U_1 + V_1$ и $U_2 + V_2$. Но $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ по определению разделяет $U_1 + V_1$ и $U_2 + V_2$, поэтому в силу корректности сложения на \mathbb{R} (в седьмом параграфе первой главы Математического анализа 11 было доказано, что существует единственное число, разделяющее $U_1 + V_1$ и $U_2 + V_2$) мы получим, что $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$.

III. Единственность функции l . Рассмотрим произвольную функцию $l_1 : \text{Seg}_a \rightarrow \mathbb{R}$, обладающую свойствами (1)–(4), и найдем все отрезки, на которых значения l_1 и l совпадают.

А) из (4) для l_1 и (а) для l следует, что $l_1([OE]) = 1 = l([OE])$.

Б) рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}$ и точку E_k . По свойству аддитивности (точнее, по (в) теоремы 1.1) для функции l_1 и из (б) для функции l получим, что

$$l_1([OE_k]) = k \cdot l_1([OE]) = k = l([OE_k]).$$

В) рассмотрим произвольное $n \in \mathbb{N}$ и точку $E_{1/n}$. Снова свойство аддитивности функции l_1 и определение (в) функции l дают

$$1 = l_1([OE]) = l_1(n[OE_{1/n}]) = n \cdot l_1([OE_{1/n}]) \Rightarrow l_1([OE_{1/n}]) = \frac{1}{n} = l([OE_{1/n}]).$$



Г) рассмотрим произвольную пару чисел $k, n \in \mathbb{N}$ и точку $E_{k/n}$. В очередной раз воспользуемся аддитивностью функции l_1 и определением (г) для функции l чтобы получить

$$l_1([OE_{k/n}]) = l_1(k[OE_{1/n}]) = k \cdot l_1([OE_{1/n}]) = \frac{k}{n} = l([OE_{k/n}]).$$

Д) выберем произвольную точку $A \in [OE)$, которая не является рациональной точкой этого луча и с помощью этой точки определим два подмножества рациональных чисел: $U_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ или } r > 0 \text{ и } [OE_r] \subseteq [OA]\}$ и $U_2 = \{q \in \mathbb{Q} : [OA] \subseteq [OE_q]\}$. Мы уже знаем (из пункта (д) первой части доказательства), что $\tilde{\alpha} = (U_1, U_2) \in \mathbb{R}$ и $l([OA]) = \tilde{\alpha}$. По (а) теоремы 1.1 функция l_1 обладает свойством монотонности, поэтому для любой пары неотрицательных $r \in U_1$, $s \in U_2$ из двойного включения $[OE_r] \subseteq [OA] \subseteq [OE_s]$ следует, что $l_1([OE_r]) \leq l_1([OA]) \leq l_1([OE_s])$. Обозначим через $\tilde{\beta} \stackrel{df}{=} l_1([OA])$, тогда из (Г) получим, что $r \leq \tilde{\beta} \leq s$ и число $\tilde{\beta}$ разделяет множества U_1 и U_2 . Но $\tilde{\alpha}$ также разделяет эти два множества, а в силу близости и правильной расположенности множеств U_1 и U_2 , из результатов шестого параграфа первой главы Математического анализа 11 следует, что $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, т.е. $l_1([OA]) = l([OA])$.

Е) теперь для произвольного отрезка $[BC] \in \text{Seg}_a$ найдем такую точку $A \in [OE)$, что $[OA] = [BC]$. Из свойства (з) для функции l_1 и (е) для функции l получим, что $l_1([BC]) = l_1([OA]) = l([OA]) = l([BC])$. Таким образом, функции l_1 и l принимают одинаковые значения на каждом элементе Seg_a , поэтому $l_1 = l$. ■

Следствие 1. а) существует и единственна функция $l_2 : \text{Seg}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами 1–4.

б) существует и единственна функция $l_3 : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами 1–4.

Доказательство. Оба утверждения доказываются аналогично, поэтому рассмотрим только случай \mathbb{P}_3 . Для произвольного отрезка $[BC] \subseteq \mathbb{P}_3$ с помощью аксиомы III.1 найдем такую точку $A \in [OE)$, что $[BC] = [OA]$ и положим $l_3([BC]) = l([OA])$. Выполнение свойств 1–4 для функции l_3 очевидно, поскольку функция l обладает этими свойствами. Если еще какая-то функция $l_3^* : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$ также удовлетворяет свойствам 1–4, то ограничения l_3 и l_3^* на множество Seg_a должны совпасть (в силу единственности функции $l : \text{Seg}_a \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами 1–4), поэтому для любого отрезка $[BC] \subseteq \mathbb{P}_3$



будет выполняться

$$l_3([BC]) = l_3([OA]) = l([OA]) = l_3^*([OA]) = l_3([BC])$$

и функции l_3 и l_3^* принимают одинаковые значения на каждом элементе из Seg , поэтому $l_3 = l_3^*$. ■

Договоримся опускать индекс у функции длины, поскольку эти функции дают одинаковые значения на пересечении их областей определения. Кроме того, обозначения $l([AB])$, $|AB|$ и AB являются математическими синонимами (в последнем случае, только если перед AB нет определяющего слова, например «отрезок AB » уже означает $[AB]$), т.е. считаем, что $|AB| \stackrel{df}{=} l([AB])$ и $AB \stackrel{df}{=} l([AB])$.

Определение. Длиной ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ называется неотрицательное число $l(z) = \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$.

Определение. Если для ломаных $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ и $z_1 = \bigcup_{j=1}^m [B_j B_{j+1}]$ выполнено $A_{n+1} = B_1$, то суммой z и z_1 называется ломаная $z_2 = z + z_1 = \bigcup_{k=1}^{n+m} [C_k C_{k+1}]$, где $C_k = A_k$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$ и $C_{n+j} = B_j$ при всех $j \in \{1, \dots, m+1\}$.

Следствие 2. Пусть для ломаных $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ и $z_1 = \bigcup_{j=1}^m [B_j B_{j+1}]$ выполнено $A_{n+1} = B_1$, тогда $l(z + z_1) = l(z) + l(z_1)$.

Доказательство. Очевидно следует из двух предыдущих определений. ■

Заметим, что геометрический смысл длины ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ — это длина пути точки, которая, двигаясь по звеньям z , побывает последовательно в каждой вершине A_i при всех $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Так, активный лектор во время занятия может пройти несколько километров вдоль доски, хотя может показаться, что его путь составил только от одной стены кабинета до другой. Другими словами, не надо использовать теорию множеств чтобы «упростить» объединение (в случае присутствия в ломаной одинаковых звеньев), поскольку это скажется на длине ломаной и сделает неверным результат последнего следствия.



4.2. Спрямоляемые кривые

В этом параграфе вернемся к изучению плоских кривых, т.е. образов при непрерывных отображениях некоторого отрезка в фиксированную плоскость α . В множестве \mathcal{K} всех кривых на плоскости α будем рассматривать только те кривые, для которых удастся определить длину. В \mathbb{P}_3 мы выходить не будем, хотя многие результаты этого параграфа легко переносятся и на пространственные кривые. В плоскости α сразу введем декартову систему координат (Oxy) и, как обычно, наделим плоскость евклидовой метрикой: расстояние между любыми ее точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ считаем по формуле $d(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Метрика порождает систему открытых множеств и позволяет определить непрерывные отображения в α из других метрических пространств (подробно об этом во втором и третьем параграфах предыдущей главы).

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ непрерывное отображение, $k = f([a; b])$ — кривая и \mathcal{K} — множество всех плоских кривых. Разбиением отрезка $[a; b]$ называется множество $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subseteq [a; b]$, причем $t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ ($n \in \mathbb{N}$). Ломаной, вписанной в k и построенной по разбиению T , называется $z(T) = \bigcup_{i=0}^{n-1} [A_i A_{i+1}]$, где $A_i = f(t_i)$ при всех $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Кривая k называется спрямоляемой, если существует число $l(k) = \sup \left\{ l(z(T)) : T \text{ — разбиение отрезка } [a; b] \right\}$. Число $l(k)$ называется длиной k и \mathcal{K}_0 — множество всех спрямоляемых кривых.

Определение. Пусть T, T^* — разбиения отрезка $[a; b]$. Если $T \subseteq T^*$, то T^* называется измельчением разбиения T .

В следующем утверждении покажем, что при переходе к измельчению длина вписанной ломаной увеличивается. Договоримся термин «увеличиваться» воспринимать, как и в определении возрастающей функции, в «нестрогом» смысле, допуская случай равенства.

Лемма 2.1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ непрерывное отображение. Если T, T^* — разбиения отрезка $[a; b]$ и $T \subseteq T^*$, то $l(z(T)) \leq l(z(T^*))$.

Доказательство. Докажем это неравенство индукцией по $k = |T^* \setminus T|$ — количеству добавленных к разбиению $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ точек.

Б.И. Случай $k = 0$ очевиден. Рассмотрим $k = 1$, тогда $T^* = T \cup \{t^*\}$ и найдется такой индекс $1 \leq i \leq n$, для которого верно $t_{i-1} < t^* < t_i$.



Обозначим через $A^* = f(t^*)$ (рис. 144), $A_i = f(t_i)$ при всех $i \in \{0, \dots, n\}$, тогда $l(z(T^*)) - l(z(T)) = |A_{i-1}A^*| + |A^*A_i| - |A_{i-1}A_i| \geq 0$, что следует из неравенства треугольника для тройки точек: A_{i-1} , A_i и A^* (мы заменили одно звено $[A_{i-1}A_i]$ ломаной на два — $[A_{i-1}A^*]$ и $[A^*A_i]$). Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $A^* \in [A_{i-1}A_i]$. В результате, $l(z(T)) \leq l(z(T^*))$.

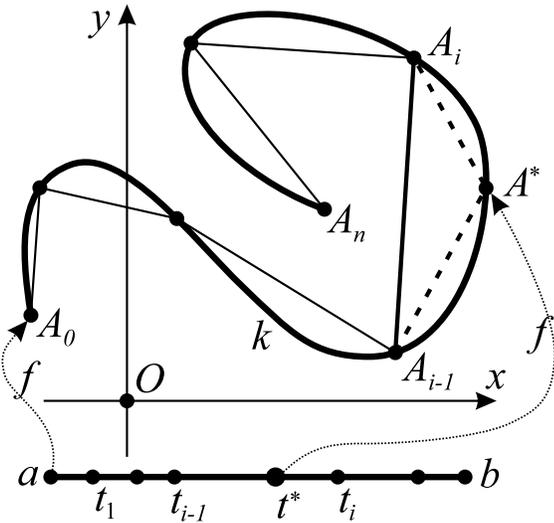


Рис. 144

Ш.И. Предположим, что при добавлении k точек к разбиению T неравенство выполняется, пусть теперь $|T^* \setminus T| = k + 1$. Выберем одну из добавленных точек $t^* \in T^* \setminus T$ и рассмотрим разбиение $T_1 = T \cup \{t^*\}$. По базе индукции выполняется, что $l(z(T)) \leq l(z(T_1))$. Учитывая, что $|T^* \setminus T_1| = k$, можно применить предположение индукции, по которому $l(z(T_1)) \leq l(z(T^*))$. Транзитивность влечет $l(z(T)) \leq l(z(T^*))$ и шаг индукции доказан. ■

Еще одно вспомогательное утверждение является характеристикой супремума и относится скорее к математическому анализу, но будет часто применяться в этой главе.

Лемма 2.2. Пусть $F \subseteq \mathbb{R}$ — непустое ограниченное сверху множество и a^* — некоторая верхняя граница множества F . Равенство $a^* = \sup F$ выполняется тогда и только тогда, когда найдется последовательность $\{x_n\} \subseteq F$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^*$.

Доказательство. \Rightarrow) для любого натурального n число $a^* - \frac{1}{n}$ верхней границей множества F не является, поэтому найдется такое $x_n \in F$, для которого выполняется двойное неравенство $a^* - \frac{1}{n} < x_n \leq a^*$. Учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^* - \frac{1}{n}) = a^*$, по принципу двух полицейских (см. пятый параграф второй главы Математического анализа 11) получим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^*$.

\Leftarrow) мы знаем, что a^* — верхняя граница F , для которой найдется сходящаяся к ней последовательность $\{x_n\} \subseteq F$. Докажем, что $a^* = \sup F$. О/п: найдется число $a_0 < a^*$, которое также является верхней границей F .



Множество $(a_0; \infty)$ открыто и $a^* \in (a_0; \infty)$, поэтому $O(a^*) = (a_0; \infty)$ — некоторая окрестность числа a^* , и из определения предела последовательности найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $n > N$ выполняется $x_n \in O(a^*)$. Отсюда $a_0 < x_n$ и a_0 не может быть верхней границей множества F . $\nabla \times$.

Определение. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывное отображение и $[c; d] \subseteq [a; b]$, тогда $k_1 = f([c; d])$ называется подкривой для кривой $k = f([a; b])$.

Напомним, что складывать несколько кривых можно только при условии их согласованности на границе — см. теорему 3.3 предыдущей главы. В следующей теореме опишем основные свойства спрямяемых кривых.

Теорема 2.3. 1) пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывное отображение и $k = f([a; b]) \in \mathcal{K}_0$. Равенство $l(k) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда k — тривиальная кривая, т.е. $k = \{A\}$ для некоторой точки $A \in \alpha$.

2) пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывное отображение и $k = f([a; b]) \in \mathcal{K}_0$. Тогда для любого $[c; d] \subseteq [a; b]$ подкривая $k_1 = f([c; d])$ также спрямяема и $l(k_1) \leq l(k)$.

3) пусть $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$ и отображения $f_i : [a_i; a_{i+1}] \rightarrow \alpha$ непрерывны при $i \leq n$. Если для каждого $i \leq n-1$ выполняется условие $f_i(a_{i+1}) = f_{i+1}(a_{i+1})$ и $k_i = f_i([a_i; a_{i+1}]) \in \mathcal{K}_0$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то кривая $k = \sum_{i=1}^n k_i$ также спрямяема и $l(k) = \sum_{i=1}^n l(k_i)$.

4) пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ — непрерывное отображение и $k = f([a; b]) \in \mathcal{K}_0$, $g \in \text{Sim}_2$ и p — коэффициент подобия p . Тогда кривая $k^* = g(k)$ также спрямяема и $l(k^*) = p \cdot l(k)$.

Доказательство. 1) \Rightarrow) о/п: предположим, что кривая k нетривиальна, т.е. найдутся различные точки $A, B \in k$. Найдем такие $t_1, t_2 \in [a; b]$, для которых $f(t_1) = A$ и $f(t_2) = B$. Б.о.о. считаем, что $t_1 < t_2$ (равенство невозможно в силу однозначности f), тогда рассмотрим разбиение $T = \{a, t_1, t_2, b\}$. Длина ломаной, построенной по этому разбиению содержит слагаемое $|AB|$, поэтому $l(k) \geq l(z(T)) \geq |AB| > 0$. $\nabla \times$.

\Leftarrow) очевидно, поскольку длина любой ломаной, вписанной в эту кривую равна $0 = |AA|$.

2) рассмотрим T — произвольное разбиение отрезка $[c; d]$ и добавим к



этому разбиению две точки: $T^* = T \cup \{a, b\}$. Тогда T^* является разбиением $[a; b]$ и условие $k \in \mathcal{K}_0$ дает $l(z(T^*)) \leq l(k)$. Учитывая, что $l(z(T^*))$ содержит на два неотрицательных слагаемых больше, чем $l(z(T))$, получим $l(z(T)) \leq l(k)$. Таким образом, $l(k)$ является некоторой верхней границей числового множества $F_1 = \{l(z(T)) : T \text{ — разбиение отрезка } [c; d]\}$, откуда следует ограниченность множества F_1 , спрямляемость кривой k_1 и неравенство $l(k_1) = \sup F_1 \leq l(k)$.

3) докажем это утверждение индукцией по n .

Б.И. При $n = 1$ утверждение очевидно, рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $k = k_1 + k_2$, где $k_1 = f_1([a_1; a_2])$, $k_2 = f_2([a_2; a_3])$, $f_1(a_2) = f_2(a_2)$ и $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_0$. Чтобы доказать спрямляемость кривой $k = f([a_1; a_3])$ (где $f|_{[a_1; a_2]} = f_1$ и $f|_{[a_2; a_3]} = f_2$) рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a_1; a_3]$. Добавив к T число a_2 , получим измельчение $T^* = T \cup \{a_2\}$ разбиения T и по лемме 2.1 верно неравенство $l(z(T)) \leq l(z(T^*))$. Ясно, что после добавления точки a_2 , множества $T^* \cap [a_1; a_2]$ и $T^* \cap [a_2; a_3]$ будут соответственно разбиениями отрезков $[a_1; a_2]$ и $[a_2; a_3]$, поэтому ломаную $z(T^*)$ можно разбить на две ломаных, одна из которых будет вписана в кривую k_1 , другая — в кривую k_2 . Учитывая спрямляемость этих кривых, получим

$$l(z(T)) \leq l(z(T^*)) = l(T^* \cap [a_1; a_2]) + l(T^* \cap [a_2; a_3]) \leq l(k_1) + l(k_2).$$

Поэтому множество $F = \{l(z(T)) : T \text{ — разбиение отрезка } [a_1; a_3]\}$ ограничено сверху и $l(k_1) + l(k_2)$ — одна из верхних границ этого множества. Отсюда получим спрямляемость кривой k и неравенство $l(k) \leq l(k_1) + l(k_2)$ (*). Мы знаем, что

$$l(k_1) = \sup \{l(z(\overline{T})) : \overline{T} \text{ — разбиение отрезка } [a_1; a_2]\},$$

$$l(k_2) = \sup \{l(z(\overline{\overline{T}})) : \overline{\overline{T}} \text{ — разбиение отрезка } [a_2; a_3]\},$$

поэтому можно дважды применить лемму 2.2 и найти последовательность $\{\overline{T}_n\}$ разбиений отрезка $[a_1; a_2]$ и $\{\overline{\overline{T}}_n\}$ — последовательность разбиений отрезка $[a_2; a_3]$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} l(z(\overline{T}_n)) = l(k_1)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} l(z(\overline{\overline{T}}_n)) = l(k_2)$.

Определим для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ множество $T_n = \overline{T}_n \cup \overline{\overline{T}}_n$, которое является разбиением всего отрезка $[a_1; a_3]$. Уже установлен факт $k \in \mathcal{K}_0$, а также неравенство (*), поэтому справедливо

$$l(z(\overline{T}_n)) + l(z(\overline{\overline{T}}_n)) = l(z(T_n)) \leq l(k) \leq l(k_1) + l(k_2). \quad (**)$$



Применяя к (**) П2П², получим, что $l(k) = l(k_1) + l(k_2)$.

Ш.И. Предположим, что утверждение верно для n , проверим его для $n + 1$. По предположению индукции кривая $k^* = \sum_{i=1}^n k_i$ спрямоляема и выполняется $l(k^*) = \sum_{i=1}^n l(k_i)$. Применив базу для двух кривых, получим спря-

моляемость кривой $k = k^* + k_{n+1}$ и $l(k) = l(k^*) + l(k_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} l(k_i)$.

4) из второго параграфа предыдущей главы (см. пример 2) следует, что подобие $g : \alpha \rightarrow \alpha$ непрерывно, поэтому $k^* = g(k)$ также является плоской кривой. Определение подобия дает равенство $l(g(z(T))) = p \cdot l(z(T))$. Осталось заметить, что для любого непустого ограниченного сверху множества $F \subseteq \mathbb{R}$ и положительного $p \in \mathbb{R}$ из $a^* = \sup F$ следует, что $p \cdot a^* = \sup p \cdot F$, где $p \cdot F \stackrel{\text{df}}{=} \{px : x \in F\}$. При положительном p неравенство $a^* \geq x$ равносильно $pa^* \geq px$, поэтому pa^* является верхней границей множества $p \cdot F$. По лемме 2.2 найдется последовательность $\{x_n\} \subseteq F$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^*$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} px_n = pa^*$. Поскольку $\{px_n\} \subseteq p \cdot F$, можно снова применить лемму 2.2 и получить, что $p \cdot a^* = \sup p \cdot F$ (т.е. положительный множитель можно выносить за знак супремума). Теперь

$$\begin{aligned} l(k^*) &= \sup \left\{ l(g(z(T))) : T - \text{разбиение отрезка } [a; b] \right\} = \\ &= \sup \left\{ p \cdot l(z(T)) : T - \text{разбиение отрезка } [a; b] \right\} = \\ &= p \cdot \sup \left\{ l(z(T)) : T - \text{разбиение отрезка } [a; b] \right\} = p \cdot l(k). \end{aligned}$$

■

Следующий результат является достаточным условием спрямоляемости кривой $k = f([a; b])$, если отображение $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ задается координатным способом, т.е. с помощью двух функций $x = x(t)$ & $y = y(t)$, где $t \in [a; b]$ (подробнее: $x(t) = \text{Пр}_{(Ox)} \circ f$ и $y(t) = \text{Пр}_{(Oy)} \circ f$). В теореме 3.1 третьей главы было установлено, что непрерывность $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ равносильна непрерывности двух функций $x(t), y(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. В доказательстве следующей теоремы мы используем простое неравенство, которое справедливо для любых $a, b \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ (оно проверяется возведением в квадрат).

²П2П — стандартное сокращение для принципа двух полицейских.



Теорема 2.4. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и отображение $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ задается координатным способом с помощью системы $x = x(t)$ & $y = y(t)$, где $t \in [a; b]$. Если обе функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны и монотонны на отрезке $[a; b]$, то кривая $k = f([a; b])$ является спрямляемой.

Доказательство. Для произвольного разбиения $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$ обозначим через $A_i = f(t_i)$, координаты этой точки $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Оценим сверху длину ломаной $z(T)$:

$$\begin{aligned} l(z(T)) &= \sum_{i=1}^n |A_{i-1}A_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - x_{i-1}| + |y_i - y_{i-1}|) = \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| + \sum_{i=1}^n |y_i - y_{i-1}|. \quad (*) \end{aligned}$$

Обозначим две суммы в правой части (*) через X и Y и оценим их в зависимости от характера монотонности функций $x(t)$ и $y(t)$.

1-й случай: $x(t)$ — возрастающая функция, тогда из неравенства $t_{i-1} \leq t_i$ получим $x_{i-1} \leq x_i$ и каждый модуль в сумме X раскрывается со знаком плюс:

$$X = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = x(b) - x(a).$$

2-й случай: $x(t)$ — убывающая функция, тогда из неравенства $t_{i-1} \leq t_i$ получим $x_i \leq x_{i-1}$ и каждый модуль в сумме X раскрывается со знаком минус:

$$X = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{n-1} - x_n) = x_0 - x_n = x(a) - x(b).$$

Из обоих случаев следует, что $X = |x(b) - x(a)|$. Точно также, раскрывая модули в сумме Y при $y(t) \nearrow$ и $y(t) \searrow$, получим $Y = |y(b) - y(a)|$.

Таким образом, из (*) получим, что множество

$$F = \{l(z(T)) : T \text{ — разбиение отрезка } [a; b]\}$$

ограничено сверху числом $|x(b) - x(a)| + |y(b) - y(a)|$, откуда следует спрямляемость $k = f([a; b])$ и неравенство $l(k) \leq |x(b) - x(a)| + |y(b) - y(a)|$. ■

Следствие 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и функция $g(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной и монотонной, тогда график этой функции является спрямляемой кривой.



Доказательство. Обозначим график этой функции через $\Gamma(g)$ (рис. 145) и рассмотрим отображение $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое координатно задается с помощью системы: $x(t) = t$ & $y(t) = g(t)$, где $t \in [a; b]$. Обе координаты являются непрерывными и монотонными функциями, и по теореме 2.4 спрямоляемой будет кривая

$$k = f([a; b]) = \left\{ (t, g(t)) : t \in [a; b] \right\} = \Gamma(g).$$

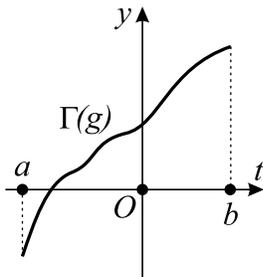


Рис. 145

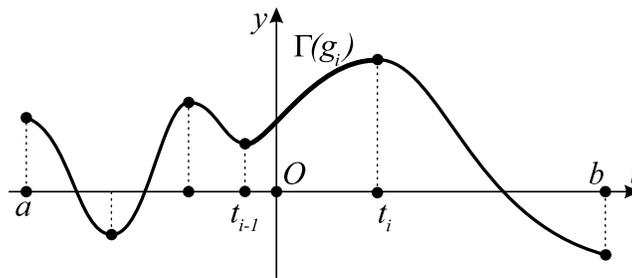


Рис. 146

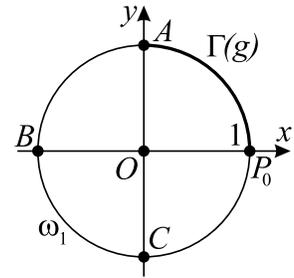


Рис. 147

Следствие 2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и функция $g(t) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной. Если существует такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$, что ограничение $g|_{[t_{i-1}; t_i]}$ монотонно для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, то $\Gamma(g)$ является спрямоляемой кривой.

Доказательство. Обозначив через $g_i = g|_{[t_{i-1}; t_i]}$ (рис. 146), по предыдущему следствию сразу получим, что $k_i = \Gamma(g_i) \in \mathcal{K}_0$ для любого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда из утверждения (3) теоремы 2.3 следует, что $k = \Gamma(g) = \sum_{i=1}^n k_i \in \mathcal{K}_0$ и $l(k) = \sum_{i=1}^n l(k_i)$.

Таким образом, если график непрерывной функции на отрезке можно разбить на конечное число монотонных участков, то график этой функции имеет длину! Интересным является вопрос: можно ли формулой задать непрерывную функцию на отрезке так, чтобы ее график был неспрямоляемой кривой (договоримся играть честно и вне этого отрезка функцию не рассматривать)? Ясно что синус, ограниченный на любой непустом числовом отрезке, будет иметь спрямоляемый график.

Следствие 3. Рассмотрим на плоскости (Oxy) единичную окружность $\omega_1 = \omega(O, 1)$. Тогда $\omega_1 \in \mathcal{K}_0$.

Доказательство. На ω_1 выберем точки $P_0(1, 0)$, $A(0, 1)$, $B(-1, 0)$ и $C(0, -1)$ (рис. 147). Рассмотрим функцию $g(t) = \sqrt{1-t^2} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Эта



функция является непрерывной (как композиция двух непрерывных функций) и монотонной на $[0; 1]$, поэтому $k_1 = \overline{P_0A} = \Gamma(g) \in \mathcal{K}_0$. По (4) теоремы 2.3 при повороте спрямляемость и длина кривой сохраняется, значит кривые $k_2 = \overline{AB}$, $k_3 = \overline{BC}$, $k_4 = \overline{CP_0}$ спрямляемы и имеют одинаковую длину. Отсюда по (3) теоремы 2.3 получим, что $\omega_1 = \sum_{i=1}^4 k_i \in \mathcal{K}_0$ и $l(\omega_1) = 4 \cdot l(P_0A)$. ■

Определение. Используя обозначения предыдущего следствия, определим число $\pi = l(\omega_1)/2 = l(\overline{P_0B}) = 2 \cdot l(\overline{P_0A})$.

Следствие 4. Любая окружность $\omega = \omega(O_1, r_1)$ спрямляема и ее длина равна $l(\omega) = 2\pi r$.

Доказательство. В плоскости α , которая содержит окружность ω , введем декартову систему координат (Oxy) , рассмотрим единичную окружность $\omega_1 = \omega(O, 1)$ и подобие g с коэффициентом r , для которого выполняется $\omega = g(\omega_1)$. Осталось применить предыдущее следствие, определение числа π и утверждение (4) теоремы 2.3, чтобы получить $\omega \in \mathcal{K}_0$ и $l(\omega) = r \cdot l(\omega_1) = 2\pi r$. ■

О том, как определенный интеграл помогает находить длину кривой, можно прочитать в пятом параграфе пятой главы Математического анализа 11.

Упражнения

1. Постройте пример непрерывной функции $g(t); [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполняется $\Gamma(g) \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_0$. Указание: докажите сначала, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится и подумайте, как нужно доопределить в нуле функцию $g(t) = t \cdot \sin \frac{1}{t}$.
2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ и отображение $f : [a; b] \rightarrow \alpha$ задается координатным способом с помощью системы $x = x(t) \& y = y(t)$, где $t \in [a; b]$. Докажите, что если обе функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют производные на интервале $(a; b)$, то кривая $k = f([a; b])$ является спрямляемой.

4.3. Радианное измерение дуг и углов

Напомним, что через $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы обозначали множество всех неотрицательных целых чисел.



Определение. Двоично-рациональными числами отрезка $[0; 2\pi]$ называются элементы множества

$$\mathcal{D} = \left\{ 2\pi \cdot \frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{Z}^+, k \leq 2^n \right\}.$$

Очевидно, что \mathcal{D} является счетным (как счетное объединение конечных множеств — см. десятый параграф второй главы Алгебры 10) подмножеством отрезка $[0; 2\pi]$, поскольку $k/2^n \leq 1$. Показатель n будем называть *глубиной* двоично-рационального числа $2\pi \cdot \frac{k}{2^n}$. Существуют только два числа нулевой глубины: 0 и 2π . Чтобы получить из чисел глубины $n-1$ числа следующей глубины, надо к ним добавить середины отрезков, концы которых являются соседними числами глубины $n-1$. Таким образом, элементы множества \mathcal{D} имеют ясное геометрическое описание. Перед основным результатом этого параграфа установим еще несколько свойств множества \mathcal{D} .

Лемма 3.1. 1) для любых $x_1, x_2 \in [0; 2\pi]$, $x_1 < x_2$ найдется такой элемент $r_0 \in \mathcal{D}$, что $x_1 < r_0 < x_2$.

2) если $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$, $\mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ и для всех $r_1 \in \mathcal{D}_1$, $r_2 \in \mathcal{D}_2$ выполнено $r_1 < r_2$ (т.е. $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ — сечение множества \mathcal{D}), то существует единственное число $x^* \in [0; 2\pi]$, которое разделяет множества \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 (т.е. при всех $r_1 \in \mathcal{D}_1$, $r_2 \in \mathcal{D}_2$ выполнено $r_1 \leq x^* \leq r_2$).

Доказательство. 1) обозначим через $\varepsilon = x_2 - x_1 > 0$. Раз $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2^n} = 0$, то найдется такое натуральное число n_0 , для которого $2\pi/2^{n_0} < \varepsilon/2$. Пусть $k^* = \min K$, где $K = \{k \in \mathbb{N} : 2\pi \cdot \frac{k}{2^{n_0}} > x_1\}$. Множество $K \neq \emptyset$, поскольку $k = 2^{n_0} \in K$. Осталось доказать, что число $r_0 = 2\pi \cdot \frac{k^*}{2^{n_0}}$ — искомое. Неравенство $r_0 > x_1$ сразу следует из включения $k^* \in K$. Покажем, что $r_0 < x_2$. О/п: $r_0 \geq x_2$. Если $k^* = \min K$, то $k^* - 1 \notin K$ и $2\pi \cdot \frac{k^* - 1}{2^{n_0}} \leq x_1$, откуда

$$\frac{2\pi}{2^{n_0}} = 2\pi \cdot \frac{k^*}{2^{n_0}} - 2\pi \cdot \frac{k^* - 1}{2^{n_0}} \geq x_2 - x_1 = \varepsilon,$$

что противоречит выбору n_0 . \nexists

2) **I. Существование.** По условию множество $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$ и ограничено сверху (например, число 2π является одной из верхних границ этого множества) поэтому найдется такое число $x^* = \sup \mathcal{D}_1$. Из включения $0 \in \mathcal{D}_1$ следует, что $x^* \in [0; 2\pi]$. По условию каждый элемент множества \mathcal{D}_2 является верхней границей множества \mathcal{D}_1 , поэтому из определения супремума следует, что $x^* \leq r_2$ для всех $r_2 \in \mathcal{D}_2$.



II. Единственность. О/п: нашелся еще один элемент $\tilde{x} \in [0; 2\pi]$, который разделяет множества \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 и $\tilde{x} \neq x^*$. Б.о.о. считаем, что $x^* < \tilde{x}$ и по (1) найдем такое двоично-рациональное число $r^* \in \mathcal{D}$, что $x^* < r^* < \tilde{x}$. Из неравенства $x^* < r^*$ следует, что $r^* \notin \mathcal{D}_1$, а из неравенства $r^* < \tilde{x}$ следует, что $r^* \notin \mathcal{D}_2$, откуда $r^* \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$. $\nabla \times$.

■

Напомним некоторые определения и обозначения (подробнее — см. пятый параграф второй главы Геометрии 10). Если на плоскости α введена декартова система координат (Oxy) , то ее положительная ориентация $K(\mathcal{F}_0)$ (т.е. множество всех флагов, одинаково ориентированных с \mathcal{F}_0) вводится с помощью флага \mathcal{F}_0 , древком которого является луч $[OP_0)$ (как обычно, P_0 — точка с координатами $(1, 0)$), а полотнищем — множество всех точек плоскости α с положительной второй координатой. Угол $\angle P_0OA$ отложен от луча $[OP_0)$ в положительном направлении, если $\angle P_0OA \subseteq \mathcal{F}_0$ или $\mathcal{F}_0 \subseteq \angle P_0OA$. Пусть $A, B \in \omega_1 = \omega(O, 1)$, тогда дугой $\overset{\frown}{AB}$ окружности ω_1 называется пересечение $\angle AOB \cap \omega_1$ (при этом говорят, что угол $\angle AOB$ опирается на эту дугу). Пусть $A \in \omega_1$, тогда дуга $\overset{\frown}{P_0A}$ отложена от точки P_0 в положительном направлении, если опирающийся на нее угол $\angle P_0OA$ отложен от луча $[OP_0)$ в положительном направлении. Множество всех дуг окружности ω_1 с фиксированных концом P_0 и отложенных от этой точки в положительном направлении обозначается через $\text{Arc}_0^+ = \{\overset{\frown}{P_0A} : A \in \omega_1 \text{ и } \overset{\frown}{P_0A} \text{ отложена от точки } P_0 \text{ в положительном направлении}\}$.

Теорема 3.2. *Функция $l : \text{Arc}_0^+ \rightarrow [0; 2\pi]$, которая ставит в соответствие каждой дуге $\overset{\frown}{P_0A} \in \text{Arc}_0^+$ ее длину $l(\overset{\frown}{P_0A})$, является биекцией.*

Доказательство. В задании единичной окружности $\omega_1 = \omega(O, 1)$ мы не можем использовать косинус и синус, поскольку определение этих функций зависит от результатов этой теоремы и ее следствий, поэтому рассмотрим отображения f_1 и f_2 . Отображение $f_1 : [-1; 1] \rightarrow (Oxy)$ координатно будет описываться с помощью системы: $x = -t$ & $y = \sqrt{1 - t^2}$, где $t \in [-1; 1]$. Отображение $f_2 : [1; 3] \rightarrow (Oxy)$ координатно будет описываться с помощью системы: $x = t - 2$ & $y = -\sqrt{1 - (t - 2)^2}$, где $t \in [1; 3]$. Эти два отображения непрерывны (поскольку каждая координата является непрерывной функцией), согласованы при $t = 1$ (так как $f_1(1) = (-1, 0) = f_2(1)$), поэтому отображение $f : [-1; 3] \rightarrow (Oxy)$, для которого $f|_{[-1; 1]} = f_1$ и $f|_{[1; 3]} = f_2$, также непрерывно. Отрезок $[-1; 3]$ состоит из четырех единичных отрезков, на каждом из которых обе координаты f являются моно-



тонными отображениями, поэтому из теоремы 2.4 и утверждения (3) теоремы 2.3 кривая $\omega_1 = k = f([-1; 3])$ спрямляема и $k = k_1 + k_2$, где $k_1 = f_1([-1; 1])$, $k_2 = f_2([1; 3])$. Заметим, что $f(-1) = f(3) = P_0$ и для любого $a \in [-1; 3]$ и $A = f(a)$ дуга $\overset{\frown}{P_0A} = f(\overset{\frown}{[0; a]})$ отложена от точки P_0 в положительном направлении. Теперь перейдем к изучению свойств соответствия $l : \text{Arc}_0^+ \rightarrow [0; 2\pi]$.

I. Всюду определенность. По определению $l(\omega_1) = 2\pi$, поэтому любую дугу $\overset{\frown}{P_0A} \in \text{Arc}_0^+$ можно рассматривать как подкривую ω_1 и по (2) теоремы 2.3 получить $\overset{\frown}{P_0A} \in \mathcal{K}_0$ и $l(\overset{\frown}{P_0A}) \leq l(\omega_1) = 2\pi$. Отсюда следует, что l — всюду определенное соответствие, действующее в отрезок $[0; 2\pi]$.

II. Однозначность. Для любой дуги $\overset{\frown}{P_0A} \in \text{Arc}_0^+$ найдем такое число $a \in [-1; 3]$, для которого $f(a) = A$ и рассмотрим множество

$$L = \{l(z(T)) : T \text{ разбиение отрезка } [0; a]\}.$$

Множество L непусто, поскольку $|P_0A| \in L$, и ограничено сверху числом 2π . Супремум у непустого и ограниченного сверху числового множества определен однозначно (см. третий параграф второй главы Математического анализа 11), поэтому значение $l(\overset{\frown}{P_0A})$ определено однозначно.

III. Инъективность. Пусть $\overset{\frown}{P_0A}, \overset{\frown}{P_0B} \in \text{Arc}_0^+$ и $\overset{\frown}{P_0A} \neq \overset{\frown}{P_0B}$. Б.о.о. считаем, что $\overset{\frown}{P_0A} \subseteq \overset{\frown}{P_0B}$, откуда $l(\overset{\frown}{P_0B}) = l(\overset{\frown}{P_0A}) + l(\overset{\frown}{AB}) > l(\overset{\frown}{P_0A})$ (здесь мы использовали утверждения (3) и (1) теоремы 2.3), поэтому выполняется неравенство $l(\overset{\frown}{P_0B}) \neq l(\overset{\frown}{P_0A})$ и отображение l инъективно.

IV. Сюръективность. Доказательство включения $[0; 2\pi] \subseteq E(l)$ разобьем на несколько случаев³.

1-й случай: проверим, что $\mathcal{D} \subseteq E(l)$. Доказывать будем индукцией по глубине числа $2\pi \cdot \frac{k}{2^n}$.

Б.И. При $n = 0$ число k может принимать только два значения (по определению должно выполняться $k \leq 2^n$). Ясно, что $l(\overset{\frown}{P_0P_0}) = 0$, $l(\omega_1) = 2\pi$, поэтому $\{0, 2\pi\} \subseteq E(l)$ и случай $n = 0$ рассмотрен. При $n = 1$ выполняется $k \in \{0, 1, 2\}$ и необходимо обосновать, что $\pi \in E(l)$. Обозначим через $P^* = f(1) = (-1, 0)$ и $k_1 = f([-1; 1]) = \overset{\frown}{P_0P^*}$. Тогда $k_2 = f([1; 3]) = Z_O(k_1)$, поэтому $l(k_2) = l(k_1)$ (из (4) теоремы 2.3) и равенство $\omega_1 = k_1 + k_2$ дает $l(k_1) = l(\omega_1)/2 = \pi$ и $\pi \in E(l)$.

³ $E(l)$ обозначает множество значений соответствия l .



Ш.И. Предположим, что все числа множества \mathcal{D} , которые имеют глубину n , принадлежат множеству $E(l)$, это дает существование таких точек $P_0 = A_0, A_1, \dots, A_{2^n} \in \omega_1$, что $l(\overset{\frown}{P_0 A_k}) = 2\pi \cdot \frac{k}{2^n}$ при всех $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Обозначим через B_k середину дуги $A_{k-1}A_k$ (т.е. точку пересечения биссектрисы угла $\angle A_{k-1}OA_k$ с ω_1) при всех $k \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$. При осевой симметрии относительно прямой (OB_k) дуги $A_{k-1}B_k, B_kA_k$ отображаются друг на друга, поэтому из теоремы 2.3 следует, что $l(\overset{\frown}{A_{k-1}B_k}) = l(\overset{\frown}{B_kA_k}) = \frac{1}{2} \cdot l(\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}) = \frac{2\pi}{2^{n+1}}$, откуда

$$\left\{ l(\overset{\frown}{P_0 A_k}), l(\overset{\frown}{P_0 B_k}) : 0 \leq k \leq 2^n \right\} = \left\{ 2\pi \cdot \frac{k}{2^{n+1}} : 0 \leq k \leq 2^{n+1} \right\},$$

и мы доказали, что все числа множества \mathcal{D} , которые имеют глубину $n + 1$, также принадлежат множеству $E(l)$.

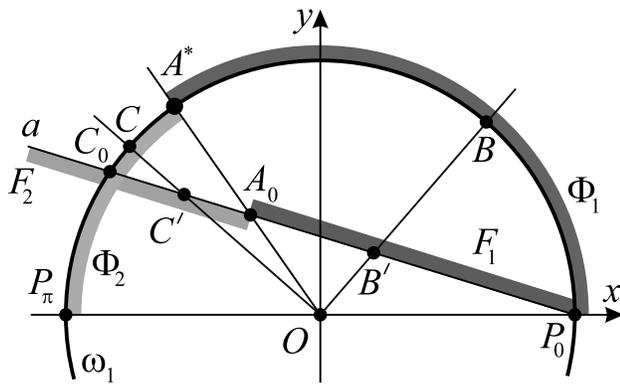


Рис. 148

2-й случай: $x_0 \in (0; \pi) \setminus \mathcal{D}$. По лемме 3.1 найдется такое $s_0 \in \mathcal{D}$, что $x_0 < s_0 < \pi$ и предыдущий случай позволяет найти точку $C_0 \in \omega_1$, для которой $l(\overset{\frown}{P_0 C_0}) = s_0$ (рис. 148). Множества $\mathcal{D}_1 = \{r \in \mathcal{D} : r < x_0\}$ и $\mathcal{D}_2 = \{s \in \mathcal{D} : s > x_0\}$ удовлетворяют условиям утверждения (2) леммы 3.1, поэтому x_0 — единственное число из отрезка $[0; 2\pi]$, которое разделяет \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 . Проведем прямую

$a = (P_0 C_0)$ и введем на ней порядок \leq с помощью вектора $\overrightarrow{P_0 C_0}$. Теперь рассмотрим два подмножества (Φ_1 и Φ_2) точек на окружности ω_1 и два соответствующих им множества (F_1 и F_2) на прямой a , которые определим так:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left\{ B \in \omega_1 : l(\overset{\frown}{P_0 B}) \in \mathcal{D}_1 \right\}, & \Phi_2 &= \left\{ C \in \omega_1 : \pi > l(\overset{\frown}{P_0 C}) \in \mathcal{D}_2 \right\}, \\ F_1 &= \left\{ B' \in a : \{B\} = [OB'] \cap \omega_1 \ \& \ B \in \Phi_1 \right\}, \\ F_2 &= \left\{ C' \in a : \{C\} = [OC'] \cap \omega_1 \ \& \ C \in \Phi_2 \right\}. \end{aligned}$$

Дуги в определении множеств Φ_1 и Φ_2 рассматриваются только из Arg_0^+ . Если вспомнить понятие освещения фигуры из точки O (см. третий параграф первой главы), то F_1 и F_2 можно задать проще: $F_1 = L(O, \Phi_1) \cap a$ и



$F_2 = L(\overset{\frown}{O}, \overset{\frown}{\Phi_2}) \cap a$. Теперь для любых точек $B \in \overset{\frown}{\Phi_1}$, $C \in \overset{\frown}{\Phi_2}$ а также чисел $r = l(\overset{\frown}{P_0B})$ и $s = l(\overset{\frown}{P_0C})$ справедливы следующие переходы:

$$r < s \Rightarrow \overset{\frown}{P_0B} \subseteq \overset{\frown}{P_0C} \Rightarrow \angle P_0OB \subseteq \angle P_0OC \Rightarrow [P_0B'] \subseteq [P_0C'] \Rightarrow B' \leq C'.$$

Последнее означает, что множества F_1 и F_2 правильно расположены на прямой a и можно применить аксиому полноты (аксиома V.2 — см. третий параграф первой главы Геометрии 10) чтобы найти такую точку $A_0 \in a$, которая разделяет множества F_1 и F_2 . Пусть точка $\overset{\frown}{A^*}$ определяется равенством $\{A^*\} = [OA_0) \cap \omega_1$ и $y_0 = l(\overset{\frown}{P_0A^*})$, где $\overset{\frown}{P_0A^*} \in \text{Arc}_0^+$. Тогда для любых $r \in \mathcal{D}_1$, $s \in \mathcal{D}_2$, $s < \pi$ и соответствующих им таких точек $B \in \overset{\frown}{\Phi_1}$, $C \in \overset{\frown}{\Phi_2}$, что $r = l(\overset{\frown}{P_0B})$ и $s = l(\overset{\frown}{P_0C})$, справедливы обратные переходы:

$$\begin{aligned} B' \leq A_0 \leq C' &\Rightarrow [P_0B'] \subseteq [P_0A_0] \subseteq [P_0C'] \Rightarrow \angle P_0OB \subseteq \angle P_0OA^* \subseteq \angle P_0OC \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overset{\frown}{P_0B} \subseteq \overset{\frown}{P_0A^*} \subseteq \overset{\frown}{P_0C} \Rightarrow l(\overset{\frown}{P_0B}) \leq l(\overset{\frown}{P_0A^*}) \leq l(\overset{\frown}{P_0C}) \Rightarrow r \leq y_0 \leq s. \end{aligned}$$

Таким образом, число y_0 также разделяет множества \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 , поэтому по утверждению (2) леммы 3.1 мы получим $x_0 = y_0 = l(\overset{\frown}{P_0A^*}) \in E(l)$.

3-й случай: $x_0 \in (\pi; 2\pi) \setminus \mathcal{D}$ рассматривается аналогично второму случаю. ■

Обозначим через $\text{Arc}_0 = \{\overset{\frown}{P_0A} : A \in \omega_1, \overset{\frown}{P_0A} \neq \omega_1\}$ — множество всех дуг с фиксированным концом в точке $P_0 = (1, 0)$, не совпадающих с полной окружностью.

Определение. Радианным измерением дуг называется такая функция $g : \text{Arc}_0 \rightarrow (-2\pi; 2\pi)$, что для любой дуги $\overset{\frown}{P_0A} \in \text{Arc}_0$ выполняются два свойства:

1) $|g(\overset{\frown}{P_0A})| = l(\overset{\frown}{P_0A})$;

2) $g(\overset{\frown}{P_0A}) \geq 0 \Leftrightarrow$ дуга $\overset{\frown}{P_0A}$ отложена от точки P_0 в положительном направлении.

Величиной дуги $\overset{\frown}{P_0A}$ называется число $g(\overset{\frown}{P_0A})$ (или $g(\overset{\frown}{P_0A})$ радиан).

Следствие. Соответствие g из предыдущего определения является биекцией между множествами Arc_0 и $(-2\pi; 2\pi)$.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы и замечания, что для любой дуги $\overset{\frown}{P_0A} \in \text{Arc}_0^+$ дуга $\overset{\frown}{P_0A'}$ (где $\overset{\frown}{P_0A'} = S_{(Ox)}(\overset{\frown}{P_0A})$) отложена в отрицательном направлении от точки P_0 и $g(\overset{\frown}{P_0A'}) = -g(\overset{\frown}{P_0A})$. ■



Определение. Обобщенной дугой $\widetilde{P_0A}$ называется алгебраическое выражение $k \cdot \psi_0 + P_0A$, где $k \in \mathbb{Z}$, $P_0A \in \text{Arc}_0$ и $\psi_0 = \omega_1$ — полная окружность.

Через $\widetilde{\text{Arc}}_0$ обозначим множество всех обобщенных дуг.

Смысл целого коэффициента k в предыдущем определении состоит в том, что от точки P_0 мы откладываем $|k|$ раз полную окружность в направлении, которое определено знаком k , а затем откладываем от точки P_0 обычную дугу $P_0A \in \text{Arc}_0$.

Замечания. 1) функцию g можно продолжить до функции $\tilde{g} : \widetilde{\text{Arc}}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: на обобщенной дуге $\widetilde{P_0A} = k \cdot \psi_0 + P_0A$ по определению будем считать, что $\tilde{g}(\widetilde{P_0A}) = 2\pi \cdot k + g(P_0A)$.

2) для любого $x \in \mathbb{R}$ и $x \geq 0$ однозначно найдутся такие два числа $k \in \mathbb{Z}^+$, $x_1 \in [0; 2\pi)$, что $x = 2\pi \cdot k + x_1$ (делим x на 2π с остатком).

3) для любого $x \in \mathbb{R}$ и $x < 0$ однозначно найдутся такие два числа $k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, $x_1 \in (-2\pi; 0]$, что $x = 2\pi \cdot k + x_1$ (для этого меняем знак у x , используем (2) и снова меняем знак).

4) из предыдущих замечаний следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ однозначно найдется такая обобщенная дуга $\widetilde{P_0P_x}$, что $\tilde{g}(\widetilde{P_0P_x}) = x$. В этом случае будем говорить, что величина $\widetilde{P_0P_x}$ равна x радиан.

Радиианное измерение для неориентированного угла $\angle KLM$ (т.е. вырожденного, обычного, развернутого, супертупого и полного — см. второй параграф первой главы Геометрии 10) вводится очень просто: с помощью аксиомы III.4 отложим от луча $[OP_0)$ угол $\angle P_0OA$ так, чтобы $\angle KLM = \angle P_0OA$, затем найдем дугу $P_0A = \angle P_0OA \cap \omega_1$ (где $\omega_1 = \omega(O, 1)$), на которую опирается $\angle P_0OA$, и считаем число $l(P_0A)$ радианной величиной угла $\angle KLM$ и записываем $(\widehat{KLM})_{rad} = l(P_0A)$. Градусная величина угла использует другую форму записи чисел отрезка $[0; 2\pi]$. На первом шаге полуинтервал $[0; 2\pi)$ разбивается на 360 одинаковых «градусных» полуинтервалов; на втором — каждый градусный полуинтервал разбивается на 60 одинаковых «минутных» полуинтервалов; на третьем — каждый минутный полуинтервал разбивается на 60 одинаковых «секундных» полуинтервалов; начиная с четвертого шага, полуинтервалы предыдущего шага разбиваются на десять одинаковых полуинтервалов; процесс продолжается счетное число раз. В результате, каждое число $x \in [0; 2\pi]$ из десятичной системы счисления можно биективно перевести в \tilde{x} , записанное в смешанной шестидесятерично-десятичной



системе счисления, причем в бесконечной десятичной дроби для записи секунд не будет девятки в периоде (см. теорему о десятичном представлении действительных чисел из восьмого параграфа первой главы Математического анализа 11). После этого можно смело записать, что градусная величина угла $\angle KLM$ равна $\widehat{KLM} = \tilde{x} = a_0 a_1' (a_2, a_3 \dots a_n \dots)''$, где $a_0 \in \{0, 1, \dots, 360\}$, $a_1, a_2 \in \{0, 1, \dots, 59\}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ при $i \geq 3$. Отрезок $[0; 2\pi]$, записанный в такой системе счисления обозначают через $[0^\circ; 360^\circ]$ и называют *градусной шкалой* (сокращенно — ГШ), поэтому градусное измерение углов — это отображение из множества всех углов в ГШ, при котором равенства $\left(\widehat{KLM}\right)_{rad} = l(\overset{\sim}{P_0}A) = x$ и $\widehat{KLM} = \tilde{x}$ должны выполняться одновременно. Похожие на ГШ (которая является «исторически традиционной») числовые системы используют для фиксирования времени или описания географического местоположения. В последнем случае надо быть осторожными: в более современных вариантах записи координат географических точек опускают секунды и десятичная дробь строится для минут, или опускают минуты и секунды и находят сразу десятичную дробь для градусов. Навигационные системы могут использовать разные варианты записи данных, поэтому надо быть внимательными при передаче координат своего местоположения, есть шанс быть неверно понятыми. Так, например, следующие координаты описывают примерно одну и ту же красивую и малодоступную точку на Земле (используем стандартные сокращения: N — северная широта, E — восточная долгота):

$$M_1 = (N55^\circ.36874, E59^\circ.90833), \quad M_2 = (N55^\circ 22.124460', E59^\circ 54.499978'),$$

$$M_3 = (N55^\circ 22' 7.4676'', E59^\circ 54' 29.9987'').$$

4.4. Многоугольные фигуры и их площадь

Договоримся в этом параграфе рассматривать только подмножества некоторой плоскости α . Напомним, что для любой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$ через $\text{Int } \Phi$ или $\overset{\circ}{\Phi}$ обозначают множество всех внутренних точек этой фигуры (см. третий параграф первой главы). Через $\text{Vnd } \Phi$ мы обозначаем множество всех граничных точек фигуры Φ , а через $[\Phi] = \Phi \cup \text{Vnd } \Phi$ — замыкание фигуры Φ . Начнем с обобщения понятия многоугольника.

Определение. Многоугольной фигурой называется такое множество M , которое можно представить в виде объединения конечного числа треуголь-



ников без общих внутренних точек и конечного числа отрезков. Через M будем обозначать множество всех многоугольных фигур.

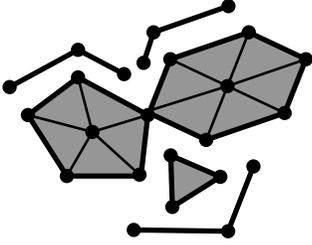


Рис. 149

На рис. 149 изображена несвязная и нескучная многоугольная фигура, которая не является многоугольником. Конечное множество может быть пустым, поэтому \emptyset также является многоугольной фигурой. Чтобы сократить количество случаев в доказательствах утверждений в этом параграфе будем считать точку вырожденным отрезком, а любой отрезок — вырожденным треугольником (конечно же с пустым множеством внутренних точек), поэтому под многоугольной фигурой понимаем конечное объединение треугольников без общих внутренних точек. Введем специальное обозначение.

Определение. Если множество X является объединением множеств X_i , где $i \in I$ и I — произвольное множество индексов, причем $\overset{\circ}{X}_i \cap \overset{\circ}{X}_j = \emptyset$ при всех различных $i, j \in I$, то будем использовать обозначение $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$.

Например, любую многоугольную фигуру M можно представить в виде $M = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_i$, где I — конечное множество (возможно, пустое) и Δ_i — треугольник (возможно, вырожденный) для любого $i \in I$.

Определение. Семейство множеств $\mathcal{T} = \{F_i : i \in I\}$ будем называть почти разбиением множества F , если $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ и для различных множеств F_i и F_j выполняется $\overset{\circ}{F}_i \cap \overset{\circ}{F}_j = \emptyset$, т.е. $F = \bigsqcup_{i \in I} F_i$.

Напомним, что в разбиении различные множества не пересекаются, а в почти разбиении требование менее строгое: у различных множеств не должно быть общих внутренних точек. По определению любая многоугольная фигура обладает конечным почти разбиением, состоящим из треугольников (возможно, вырожденных).

Теорема 4.1. Любой многоугольник является многоугольной фигурой.

Доказательство⁴. Пусть многоугольник M является объединением простой замкнутой ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ и ее внутренней области V . Через $s_i = [A_i A_{i+1}]$ обозначим сторону M для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ (как обычно, считаем $A_{n+1} = A_1$). Под $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ будем понимать внутренний угол

⁴Этот вариант доказательства предложил Максим Ляпустин — выпускник СУНЦ УрФУ 2024 года.



многоугольника M при вершине A_i , его можно определить, например, следующим образом. Сначала найдем $d_i = \min\{d(A_i, s_j) : A_i \notin s_j\} > 0$ и выберем произвольное положительное $\varepsilon_i < d_i$. Из определения d_i и выбора ε_i следует, что $O_{\varepsilon_i}(A_i)$ не содержит точек сторон s_j при $s_j \neq s_i$ и $s_j \neq s_{i-1}$. Поэтому лучи $[A_i A_{i-1})$ и $[A_i A_{i+1})$ разбивают $O_{\varepsilon_i}(A_i)$ на два сектора Φ_1 и Φ_2 , причем любые две внутренние точки одного сектора можно соединить ломаной, не пересекающей z . По лемме 5.7 предыдущей главы внутренность ровно одного из этих секторов содержится в V . Тогда этот сектор и определяет внутренний угол $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ многоугольника M . На рис. 150 приведены примеры обычного и супертупого углов, которые являются внутренними углами четырехугольника. Заметим, что для любой внутренней точки X сектора, который определяет $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$, выполняется $[X A_i] \subseteq V$ и $[X A_i] \subseteq M$.

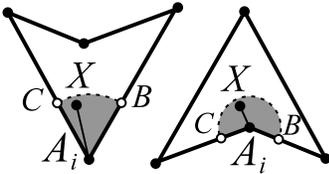


Рис. 150

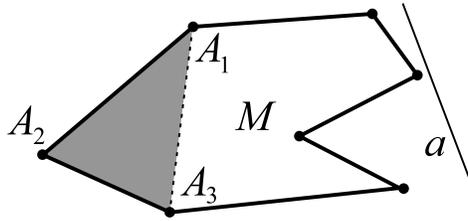


Рис. 151

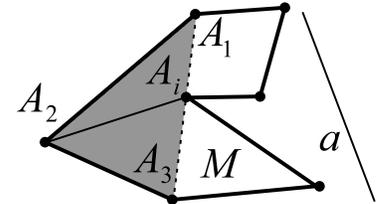


Рис. 152

Диагональю многоугольника M называется нетривиальный отрезок, соединяющий две его несмежные вершины. Диагональ $[A_i A_j]$ называется *разбивающей*, если $[A_i A_j] \subseteq M$ и на ней нет других вершин многоугольника M , кроме A_i и A_j (т.е. $]A_i A_j[\subseteq V$). Теперь индукцией по $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, докажем, что M можно представить в виде $M = \bigsqcup_{k=1}^m \Delta_k$.

Б.И. Случаи $n = 3$ и $n = 4$ очевидны.

Ш.И. Предположим, что если в многоугольнике число сторон меньше n , то его можно представить в виде объединения треугольников без общих внутренних точек. Рассмотрим произвольный n -угольник M . Учитывая ограниченность M , можно выбрать прямую a таким образом, чтобы она не пересекала M и $a \nparallel (A_i A_j)$ при всех различных A_i и A_j . Тогда числа $d(A_i, a)$ будут положительными и попарно различными, что позволяет найти единственную вершину M , которая наиболее удалена от прямой a . Б.о.о. считаем, что такой вершиной является A_2 . Через A_2 можно провести прямую a^* так, чтобы $a^* \parallel a$, тогда все вершины M находятся в полосе между a и a^* , поэтому $\angle A_1 A_2 A_3$, внутренний угол многоугольника M , будет обычным



углом (т.е. $\widehat{A_1A_2A_3} < 180^\circ$). Для доказательства шага индукции достаточно найти в M разбивающую диагональ, поскольку она разделит M на два многоугольника с меньшим числом сторон и останется к этим многоугольникам применить предположение индукции. Проведем диагональ $[A_1A_3]$ и рассмотрим несколько случаев, начиная с самых простых.

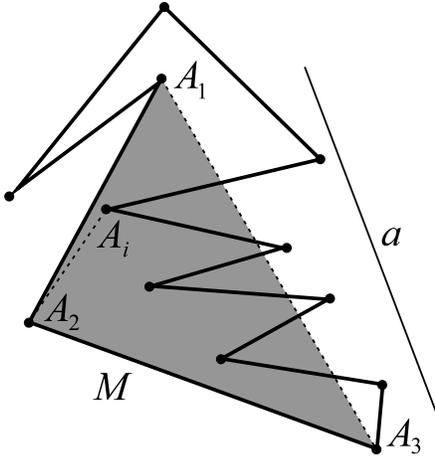


Рис. 153

1-й случай: $\triangle A_1A_2A_3$ не содержит других вершин M , кроме A_1 , A_2 и A_3 (рис. 151). Тогда $[A_1A_3]$ является разбивающей диагональю и шаг доказан.

2-й случай: $\text{Int } \triangle A_1A_2A_3$ не содержит вершин M , но на отрезке $[A_1A_3]$ есть другие вершины M , кроме A_1 и A_3 (рис. 152). Обозначим через A_i одну из таких вершин и рассмотрим диагональ $[A_2A_i]$. На этой диагонали нет других вершин M , интервал $]A_2A_i[$ не пересекается с z и содержится в $\angle A_1A_2A_3$, поэтому $[A_2A_i]$ — разбивающая диагональ и доказательство шага завершено.

3-й случай: $\text{Int } \triangle A_1A_2A_3$ содержит вершины M (рис. 153). Пусть A_i является такой вершиной M , которая попала в $\text{Int } \triangle A_1A_2A_3$ и наиболее удалена от прямой a . По выбору A_i отрезок $[A_2A_i]$ не содержит других вершин многоугольника M и интервал $]A_2A_i[$ не пересекается с z (иначе нашлась бы вершина многоугольника M , лежащая в $\text{Int } \triangle A_1A_2A_3$ и удаленная от прямой a дальше A_i). Учитывая, что $]A_2A_i[\subseteq \angle A_1A_2A_3$, получим $]A_2A_i[\subseteq V$, поэтому $[A_2A_i]$ — разбивающая диагональ и шаг индукции доказан. ■

Множество \mathcal{M} всех многоугольных фигур обладает (см. упражнения к этому параграфу) некоторыми свойствами. Если $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, то $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $[M_1 \setminus M_2] \in \mathcal{M}$. Напомним, что фигуры $F_1, F_2 \subseteq \alpha$ называются равными (или конгруэнтными), если существует движение f этой плоскости, при котором $F_2 = f(F_1)$ (используем обозначение $F_1 = F_2$).

Определение. Площадью на \mathcal{M} называется функция $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $s(M) \geq 0$ для всех $M \in \mathcal{M}$;
- 2) если $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ и $M_1 = M_2$, то $s(M_1) = s(M_2)$;



- 3) если $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ и $\overset{\circ}{M}_1 \cap \overset{\circ}{M}_2 = \emptyset$, то $s(M_1 \cup M_2) = s(M_1) + s(M_2)$;
- 4) $s(K_1) = 1$, где $K_1 = OEFG$ — единичный квадрат (т.е. $|OE| = 1$).

Первое свойство называется *неотрицательностью площади*, третье — *аддитивностью площади*, последнее — *нормировкой*. В следующем утверждении докажем, что площадь обладает свойством *монотонности*.

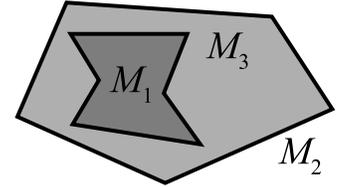


Рис. 154

Лемма 4.2. Если $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ и $M_1 \subseteq M_2$, то $s(M_1) \leq s(M_2)$.

Доказательство. Обозначим через $M_3 = [M_2 \setminus M_1]$ (рис. 154). Тогда $M_3 \in \mathcal{M}$, а также $\overset{\circ}{M}_1 \cap \overset{\circ}{M}_3 = \emptyset$, поэтому из аддитивности и неотрицательности площади получим, что $s(M_2) = s(M_1) + s(M_3) \geq s(M_1)$. ■

Лемма 4.3. Если $K = ABCD$ — квадрат, причем $|AB| = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $s(K) = 1/n^2$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому считаем $n \geq 2$. Рассмотрим $K_1 = OEFG$ — единичный квадрат. Пусть точки $X_0 = O, X_1, \dots, X_n = E$ разбивают $[OE]$ на n равных частей (эти точки можно найти с помощью теоремы Фалеса), а также точки $Y_0 = O, Y_1, \dots, Y_n = G$ разбивают сторону $[OG]$ на n равных частей (рис. 155). Для любого $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ через точку X_i проведем прямую $a_i \parallel (OG)$, а через точку Y_i проведем прямую $b_i \parallel (OE)$. Построенные прямые делят K_1 на n^2 «малых» квадратов, у каждого из которых длина стороны равна $1/n$. Обозначим полученные квадраты через M_j , где $j \in \{1, 2, \dots, n^2\}$. Заметим, что $\overset{\circ}{M}_{j_1} \cap \overset{\circ}{M}_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \neq j_2$. Кроме того, квадрат M_{j_2} может быть получен из квадрата M_{j_1} с помощью параллельного переноса, или из квадрата K с помощью некоторого движения f . Пользуясь свойствами (4), (3) и (2)

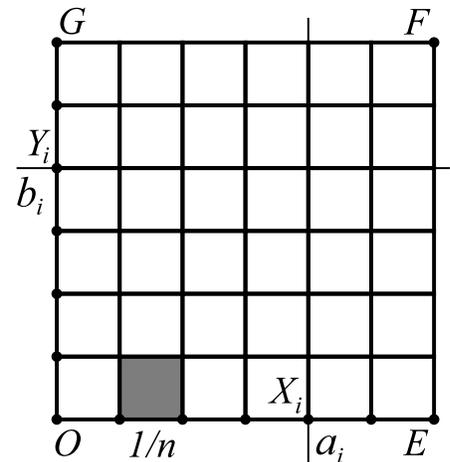


Рис. 155



функции площади, получим

$$1 = s(K_1) = \sum_{j=1}^{n^2} s(M_j) = n^2 \cdot s(M_j) = n^2 \cdot s(K),$$

откуда $s(K) = 1/n^2$.

■

Напомним, что через $\mathbb{Q}|_{>0}$ обозначают множество всех положительных рациональных чисел. Следующее утверждение скорее относится к математическому анализу, но оно будет иметь полезное приложение в теории площади.

Лемма 4.4. *Для любой тройки положительных чисел $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно найти такие $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}|_{>0}$, что $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$ и $a_2 b_2 - a_1 b_1 < \varepsilon$.*

Доказательство. При изучении показательной функции (см. девятый параграф третьей главы Математического анализа 11) для любого действительного числа a мы научились находить строго возрастающую последовательность $\{r_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a$. Также найдем $\{s_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, для которой выполняется $\{s_n\} \nearrow$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b$. Учитывая, что $(0; \infty)$ является открытым множеством, содержащим одновременно a и b по определению предела последовательности найдем такой номер N_1 , что для всех натуральных $n > N_1$ верно $r_n, s_n \in (0; \infty)$, т.е. $r_n > 0$ и $s_n > 0$. Арифметические свойства пределов последовательностей (см. четвертый параграф второй главы Математического анализа 11) дают, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n \cdot s_n) = ab$, поэтому для положительного $\varepsilon/2$ найдется такой номер N_2 , что при всех натуральных $n > N_2$ выполнено $|ab - r_n s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$ и выберем любой номер $n_0 > N$, тогда $r_{n_0}, s_{n_0} > 0$ и $ab - r_{n_0} s_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Определим a_1 и b_1 так: $a_1 \stackrel{df}{=} r_{n_0}$ и $b_1 \stackrel{df}{=} s_{n_0}$. Аналогично строим последовательности $\{\tilde{r}_n\}, \{\tilde{s}_n\} \subseteq \mathbb{Q}$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{r}_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n = b$ и $\{\tilde{r}_n\} \searrow, \{\tilde{s}_n\} \searrow$. С помощью этих последовательностей находим такие $a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, что $a < a_2$, $b < b_2$ и $a_2 b_2 - ab < \frac{\varepsilon}{2}$. Откуда $a_2 b_2 - a_1 b_1 < \varepsilon$ и четверка рациональных чисел $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ — искомая.

■

Теорема 4.5. *Пусть $F = ABCD$ — прямоугольник и $|AB| = a$, $|AD| = b$. Тогда $s(F) = ab$.*

Доказательство. 1-й случай: $a, b \in \mathbb{Q}|_{>0}$. Сразу приведем эти числа к общему знаменателю, т.е. найдем такую тройку $k, l, n \in \mathbb{N}$, что $a = \frac{k}{n}$



и $b = \frac{l}{n}$. Пусть точки $X_0 = A, X_1, \dots, X_k = B$ разбивают $[AB]$ на k равных частей, а также точки $Y_0 = A, Y_1, \dots, Y_l = D$ разбивают сторону $[AD]$ на l равных частей (рис. 156). Для любого $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ через точку X_i проведем прямую $a_i \parallel (AD)$, а через точку Y_j при всех $j \in \{0, 1, \dots, l\}$ проведем прямую $b_j \parallel (AB)$. Построенные прямые делят F на $k \cdot l$ «малых» квадратов, у каждого из которых длина стороны равна $1/n$. Обозначим полученные квадраты через M_t , где $t \in \{1, 2, \dots, k \cdot l\}$. Заметим, что $M_{t_1} \cap M_{t_2} = \emptyset$ при $t_1 \neq t_2$. Пользуясь свойствами (3), (2) функции площади и результатом леммы 4.3, получим

$$s(F) = \sum_{t=1}^{k \cdot l} s(M_t) = k \cdot l \cdot s(M_t) = k \cdot l \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{n} = ab.$$

2-й случай: $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такую четверку $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$, что $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$ и $a_2 b_2 - a_1 b_1 < \varepsilon$. По этим числам найдем такую четверку точек $K_1, K_2 \in [AB)$, $L_1, L_2 \in [AD)$, что $|AK_1| = a_1$, $|AK_2| = a_2$, $|AL_1| = b_1$ и $|AL_2| = b_2$. Свойство (и) функции длины из теоремы 1.1 дает включения $[AK_1] \subseteq [AB] \subseteq [AK_2]$ и $[AL_1] \subseteq [AD] \subseteq [AL_2]$. Рассмотрим два прямоугольника $F_1 = AK_1 N_1 L_1$ и $F_2 = AK_2 N_2 L_2$ (рис. 157). Предыдущие включения дают $F_1 \subseteq F \subseteq F_2$. Длины сторон прямоугольников F_1 и F_2 рациональны, применив первый случай, имеем $s(F_1) = a_1 b_1$ и $s(F_2) = a_2 b_2$. Монотонность функции площади (лемма 4.2) дает $s(F_1) \leq s(F) \leq s(F_2)$, откуда $a_1 b_1 \leq s(F) \leq a_2 b_2$ (*). Перемножая неравенства $0 < a_1 < a < a_2$, $0 < b_1 < b < b_2$, приходим к $a_1 b_1 < ab < a_2 b_2$ (**). Из (*) и (**) имеем следующую оценку для модуля разности $|s(F) - ab| \leq a_2 b_2 - a_1 b_1 < \varepsilon$. В силу того, что $|s(F) - ab|$ является неотрицательной константой, а ε — произвольное положительное число, получим $|s(F) - ab| = 0$ или $s(F) = ab$. ■

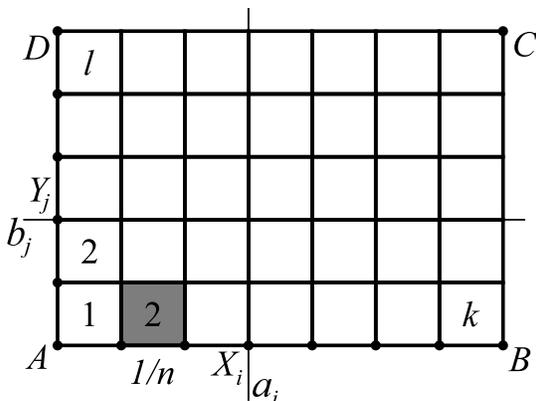


Рис. 156

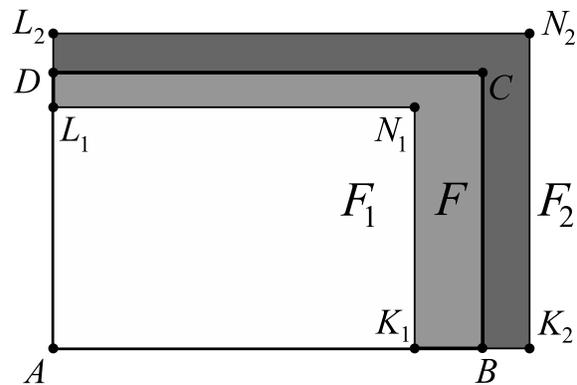


Рис. 157



Следствие 1. Если $F = ABCD$ — квадрат и $|AB| = a$, то $s(F) = a^2$.

Доказательство. Сразу следует из предыдущей теоремы. ■

Напомним, что фигуры $M, M^* \in \mathcal{M}$ называются: *равновеликими*, если $s(M) = s(M^*)$; *равносоставленными*, если их так можно представить в виде объединений многоугольных фигур $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$ и $M^* = \bigsqcup_{i=1}^n M_i^*$, что $M_i = M_i^*$ (т.е. переводятся друг в друга некоторым движением) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$; *равнодополняемыми*, если найдутся такие две равноставленные фигуры $M_1, M_1^* \in \mathcal{M}$, что $M \sqcup M_1 = M^* \sqcup M_1^*$.

Следствие 2. 1) если $M, M^* \in \mathcal{M}$ равноставлены, то они равновелики.
2) если $M, M^* \in \mathcal{M}$ равнодополняемы, то они равновелики.

Доказательство. 1) последовательно используем свойства (3), (2) и снова (3) из определения функции площади:

$$s(M) = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n M_i\right) = \sum_{i=1}^n s(M_i) = \sum_{i=1}^n s(M_i^*) = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n M_i^*\right) = s(M^*).$$

2) опять используем связку свойств (3), (2) и снова (3) из определения функции площади:

$$s(M) + s(M_1) = s(M \sqcup M_1) = s(M^* \sqcup M_1^*) = s(M^*) + s(M_1^*).$$

Учитывая равенство $s(M_1) = s(M_1^*)$, получим $s(M) = s(M^*)$. ■

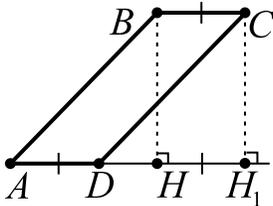


Рис. 158

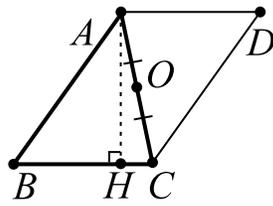


Рис. 159

Следствие 3. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и $[BH]$ — его высота, опущенная на (AD) (т.е. $H = \text{Пр}_{(AD)}(B)$). Тогда $s(ABCD) = |AD| \cdot |BH|$.

Доказательство. Обозначим через $H_1 = \text{Пр}_{(AD)}(C)$ (рис. 158). Тогда с помощью треугольника DCH_1 параллелограмм $ABCD$ дополняется до $ABCH_1$,

до этой же фигуры дополняется прямоугольник BHH_1C с помощью $\triangle ABH$. Учитывая равенство $\triangle ABH = \triangle DCH_1$ (при параллельном переносе на \overline{AD} первый треугольник отображается на второй), по (2) из предыдущего следствия получим, что $s(ABCD) = s(BHH_1C) = |AD| \cdot |BH|$. ■



Следствие 4. Пусть $[AH]$ — высота $\triangle ABC$ (т.е. $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$). Тогда $s(\triangle ABC) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2}$.

Доказательство. Пусть O — середина $[AC]$ и $D = Z_O(B)$ (рис. 159). Тогда $(AD) \parallel (BC)$, $(CD) \parallel (AB)$, т.е. $ABCD$ — параллелограмм. Учитывая равенства $\triangle ABC = \triangle CDA$ (так как $Z_O(\triangle ABC) = \triangle CDA$) и $ABCD = \triangle ABC \sqcup \triangle CDA$, из предыдущего следствия и аддитивности площади получим

$$|BC| \cdot |AH| = s(ABCD) = s(\triangle ABC) + s(\triangle CDA) = 2 \cdot s(\triangle ABC),$$

откуда получаем необходимую формулу. ■

Теорема 4.6. Если $M \in \mathcal{M}$ и $\overset{\circ}{M} = \emptyset$, то $s(M) = 0$.

Доказательство. Пусть $F \stackrel{df}{=} M$ (т.е. одно и то же множество мы обозначим разными буквами), тогда $\overset{\circ}{M} \cap \overset{\circ}{F} = \emptyset$ (поскольку каждое из этих множеств является пустым) и из свойств площади (2) и (3) получим, что $s(M) = s(M \sqcup F) = s(M) + s(F) = 2s(M)$, откуда $s(M) = 0$. ■

Определение. Почти разбиение $\tilde{\mathcal{T}} = \{G_j : j \in J\}$ называется измельчением почти разбиения $\mathcal{T} = \{F_i : i \in I\}$, если для любого $j \in J$ найдется такой индекс $i \in I$, что $G_j \subseteq F_i$.

Теорема 4.7. Функция $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами 1–4 существует, причем только одна.

Доказательство. I. Существование. Последовательно определим функцию s на всех элементах \mathcal{M} .

а) если $K_1 = OEFG$ — единичный квадрат, считаем $s(K_1) \stackrel{df}{=} 1$. Также будем считать $s(\emptyset) \stackrel{df}{=} 0$.

б) для любого треугольника ABC обозначим через $a = |BC|$ и $h = |AH|$, где $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$. Положим $s(\triangle ABC) \stackrel{df}{=} \frac{ah}{2}$. Теперь покажем, что это определение не зависит от выбора пары «сторона и проведенная к ней высота». Обозначим через $b = |AC|$ и $h_1 = |BH_1|$, где $H_1 = \text{Пр}_{(AC)}(B)$. Если $\widehat{C} = 90^\circ$, то справедливо $h = b$ и $h_1 = a$, поэтому выполнение равенства $\frac{ah}{2} = \frac{bh_1}{2}$ очевидно. При $\widehat{C} \neq 90^\circ$ прямоугольные треугольники CAH и CBH_1 (рис. 160) подобны по

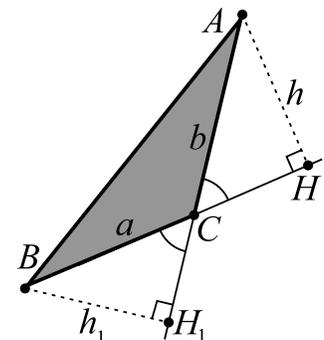


Рис. 160



двум углам, поэтому $h/h_1 = b/a$, откуда $ah = bh_1$ и $\frac{ah}{2} = \frac{bh_1}{2}$. Аналогично доказывается, что $\frac{ah}{2} = \frac{ch_2}{2}$ (где $c = |AB|$, $h_2 = |CH_2|$, $H_2 = \text{Пр}_{(AB)}(C)$).

Рассмотрим теперь $\mathcal{T} = \{\Delta_i : 1 \leq i \leq n\}$ — непустое конечное почти разбиение треугольника ABC , состоящее из треугольников, и докажем, что выполняется (\heartsuit): $s(\Delta ABC) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i)$. Начнем с очень простых случаев.

1-й случай: одна из вершин ΔABC , б.о.о. точка A (рис. 161), является общей для всех Δ_i и сторона $[BC]$ содержит стороны треугольников Δ_i , которым не принадлежит точка A . Договоримся такое почти разбиение \mathcal{T} называть *простейшим*. Обозначим через $h = |AH|$, где $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$, тогда $[AH]$ является высотой Δ_i при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть также $a = |BC|$ и a_i — длина той стороны треугольника Δ_i , которая лежит на $[BC]$, тогда $a = \sum_{i=1}^n a_i$ и $\sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{ha}{2} = s(\Delta ABC)$. Сделаем одно полезное замечание ($*$): если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провести диагонали $[AC]$ и $[BD]$ (рис. 162), то $s(\Delta ABC) + s(\Delta ACD) = s(\Delta ABD) + s(\Delta BCD)$. Действительно, обозначив точку пересечения диагоналей через O , а также площади получившихся треугольников — через $x = s(\Delta ABO)$, $y = s(\Delta BCO)$, $z = s(\Delta CDO)$, $t = s(\Delta ADO)$, четырежды применим свойство простейших почти разбиений:

$$s(ABC) + s(ADC) = (x + y) + (z + t) = (x + t) + (y + z) = s(ABD) + s(BCD).$$

В случае выпуклого четырехугольника $ABCD$ договоримся через $s(ABCD)$ обозначать каждую из сумм в левой и правой частях предыдущего равенства, это число будем называть площадью выпуклого четырехугольника $ABCD$.

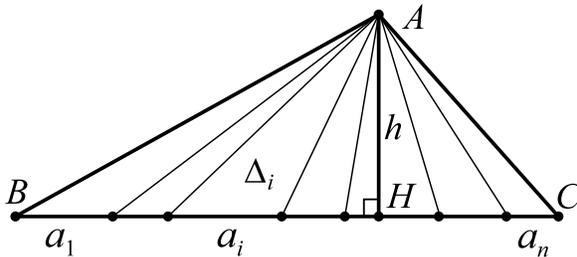


Рис. 161

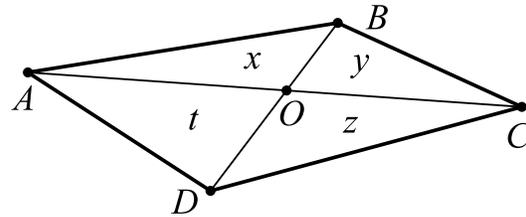


Рис. 162

2-й случай: все вершины треугольников Δ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) лежат только на двух сторонах ΔABC (б.о.о. на $[AB]$ и $[AC]$ — см. рис. 163) и внутри треугольника ABC , а также в интервале $]BC[$ нет ни одной вершины Δ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Договоримся такое почти разбиение \mathcal{T} называть *простым*. Равенство (\heartsuit) будем доказывать индукцией по k — чис-



ду всех вершин треугольников Δ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), которые попали в $]AB[\cup]AC[$, такие вершины будем называть *отмеченными*.

Б.И. При $k = 0$ почти разбиение \mathcal{T} состоит только из ΔABC и доказывать нечего. Пусть $k = 1$ и б.о.о. единственная вершина X попала в интервал $]AB[$, тогда $\mathcal{T} = \{\Delta ACX, \Delta BCX\}$ является простейшим почти разбиением и равенство (\heartsuit) следует из первого случая.

Ш.И. Пусть теперь $k + 1$ вершина треугольников из \mathcal{T} принадлежит $]AB[\cup]AC[$ и $k + 1 \geq 2$. Если в $]AB[$ или $]AC[$ отмеченных вершин нет, то \mathcal{T} является простейшим разбиением и достаточно применить первый случай. Далее считаем, что найдутся ближайшие к A отмеченные вершины $X \in]AB[$ и $Y \in]AC[$ (рис. 163). Выберем среди вершин треугольников из \mathcal{T} точку $Z \in]AB[$ так, чтобы интервал $]AZ[$ содержал только одну отмеченную вершину — точку X (при этом вершина Z может совпасть с B). По первому случаю $s(\Delta AYZ) = s(\Delta AXY) + s(\Delta XYZ)$, поэтому в почти разбиении \mathcal{T} можно заменить два треугольника ΔAXY , ΔXYZ на один треугольник ΔAYZ , уменьшить количество отмеченных вершин на одну (мы исключили точку X) и воспользоваться предположением индукции.

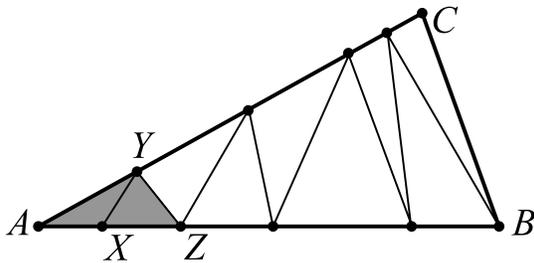


Рис. 163

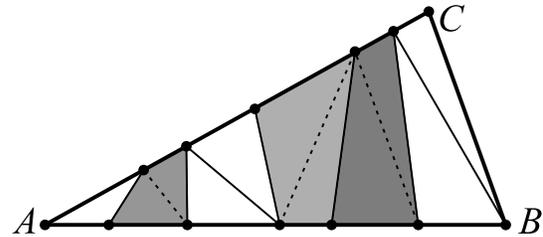


Рис. 164

3-й случай: треугольник ABC почти разбит отрезками s_i ($1 \leq i \leq n$), концы которых принадлежат только двум выбранным сторонам ΔABC (на рис. 164 — $[AB]$ и $[AC]$), и которые не пересекаются внутри треугольника ABC . Договоримся последним отрезком считать $s_n = [BC]$ и обозначим полученное почти разбиение через $\mathcal{T} = \{F_i : 1 \leq i \leq n\}$. Заметим, что \mathcal{T} состоит из треугольников и (возможно) выпуклых четырехугольников (на рис. 164 четырехугольники выделены темным). Проводя в четырехугольниках, входящих в \mathcal{T} , любую из диагоналей (на рисунке — штриховые линии), из разбиения \mathcal{T} получим простое разбиение $\tilde{\mathcal{T}}$, для которого равенство (\heartsuit) проверено в предыдущем случае. Теперь замечание $(*)$ приводит к $s(\Delta ABC) = \sum_{i=1}^n s(F_i)$. Почти разбиение \mathcal{T} , описанное в этом случае, будем называть *несложным*.



4-й случай: $\mathcal{T} = \{\Delta_i : 1 \leq i \leq n\}$ — произвольное почти разбиение треугольника ABC . Введем на прямой (BC) порядок \leq с помощью вектора \overrightarrow{BC} . Затем с началом в точке A проведем лучи через все вершины треугольников Δ_i ($1 \leq i \leq n$), которые не совпадают с вершиной A (рис. 165). Точки пересечения этих лучей с $[BC]$ обозначим через A_1, A_2, \dots, A_k и будем считать, что $B = A_1 < A_2 < \dots < A_k = C$. Простейшим является почти разбиение $\mathcal{T}_1 = \{\Delta A_j A A_{j+1} : 1 \leq j \leq k-1\}$, поэтому по первому случаю имеем $s(\Delta ABC) = \sum_{j=1}^{k-1} s(\Delta A_j A A_{j+1})$. Внутри треугольника $\Delta A_j A A_{j+1}$ нет вершин треугольников Δ_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), поэтому стороны треугольников из \mathcal{T} дают несложное почти разбиение $\Delta A_j A A_{j+1}$ и по третьему случаю площадь этого треугольника равна сумме площадей составляющих его треугольников и четырехугольников. Отсюда площадь ΔABC также равна сумме площадей получившихся треугольников и четырехугольников.

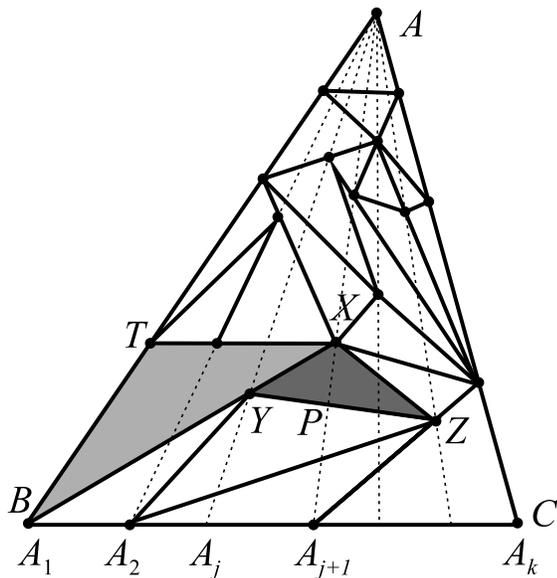


Рис. 165

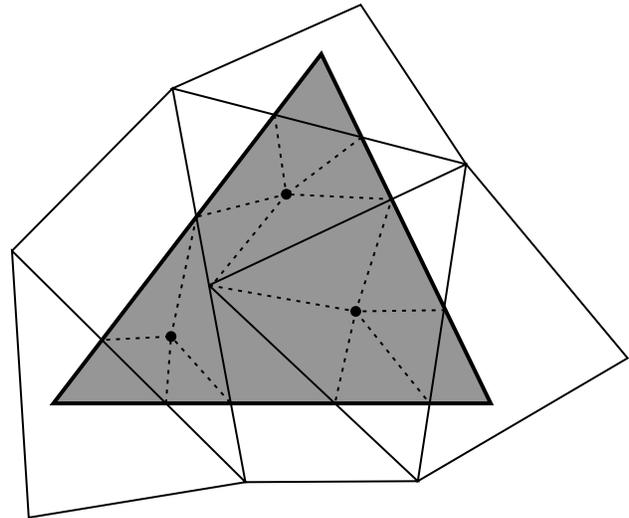


Рис. 166

Теперь рассмотрим произвольный $\Delta_i \in \mathcal{T}$. Лучи, которые мы проводили из вершины A , или сразу дают несложное почти разбиение треугольника Δ_i (например, в случае треугольника BTX на рис. 165), либо простейшим образом почти разбивают треугольник Δ_i на два треугольника с несложными почти разбиениями (на рис. 165 треугольник ΔXYZ разделен на два треугольника — ΔPXY и ΔPXZ — в каждом из которых получилось несложное почти разбиение, при этом $\{\Delta PXY, \Delta PXZ\}$ — простейшее почти разбиение треугольника XYZ). Таким образом, площадь треугольника



Δ_i равна сумме площадей составляющих его треугольников и (возможно) четырехугольников. В результате, равенство (\heartsuit) доказано.

в) по определению любую непустую многоугольную фигуру M можно представить в виде $M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$, тогда положим $s(M) \stackrel{df}{=} \sum_{i=1}^n s(\Delta_i)$. Фигуру M можно несколькими способами представить в виде объединения треугольников без общих внутренних точек, поэтому необходимо доказать, что $s(M)$ не зависит от конкретного представления. Докажем, что у многоугольной фигуры M для любых двух ее почти разбиений $\mathcal{T} = \{\Delta_i : 1 \leq i \leq n\}$ и $\mathcal{T}^* = \{\Delta_j^* : 1 \leq j \leq m\}$ найдется общее для них измельчение $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{\Delta}_k : 1 \leq k \leq p\}$. Рассмотрим Δ_1^* — первый треугольник почти разбиения \mathcal{T}^* (на рис. 166 он закрашен). Этот треугольник содержится в объединении треугольников из \mathcal{T} (поскольку $\Delta_1^* \subseteq M$) и с каждым треугольником из \mathcal{T} он пересекается по выпуклому множеству (возможно, пустому). Если $F = \Delta_1^* \cap \Delta_i$ имеет более трех сторон, выберем произвольную внутреннюю точку $O \in F$ и соединим ее с каждой вершиной F (на рис. 166 эти отрезки изображены штриховыми). В результате Δ_1^* мы почти разобьем на треугольники, повторим эту процедуру для всех остальных треугольников из \mathcal{T}^* и получим $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{\Delta}_k : 1 \leq k \leq p\}$ — измельчение почти разбиения \mathcal{T}^* . Но каждый треугольник $\Delta_i \in \mathcal{T}$ также содержится в объединении треугольников из \mathcal{T}^* , поэтому после сделанных выше шагов, он также будет почти разбит на треугольники из $\tilde{\mathcal{T}}$. В результате $\tilde{\mathcal{T}}$ — общее измельчение для \mathcal{T} и \mathcal{T}^* . Теперь найдем суммы по каждому из почти измельчений:

$$S_1 = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i), \quad S_2 = \sum_{j=1}^m s(\Delta_j^*) \quad \text{и} \quad S_3 = \sum_{k=1}^p s(\tilde{\Delta}_k).$$

Заметим, что каждое число $s(\Delta_i)$ из первой суммы является суммой некоторого набора чисел из третьей суммы, а именно, площадей треугольников из $\tilde{\mathcal{T}}$, которые почти разбивают треугольник Δ_i (то, что $s(\Delta_i)$ не зависит от почти разбиения Δ_i на треугольники, было доказано в (б)). Из коммутативности и ассоциативности сложения на \mathbb{R} теперь следует, что $S_1 = S_3$. Аналогично доказывается, что $S_2 = S_3$ и определение (в) не зависит от конкретного почти разбиения фигуры M .

Свойства (1) и (4) функции s выполняются из-за определений (а)–(в). Аддитивность функции s следует из определения (в). Проверим выполнение свойства (2). Если $M = M_1$, то найдется $f \in D_2$, для которого $f(M) = M_1$. Пусть $M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$, тогда обозначим через $\Delta_i^* = f(\Delta_i)$. При движении



сохраняется длина отрезков и перпендикулярность прямых (поэтому высота переходит в высоту), откуда $s(\Delta_i) = s(\Delta_i^*)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, при движении внутренние точки фигуры F переходят во внутренние точки $F^* = f(F)$, поэтому из $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j = \emptyset$ следует, что $\overset{\circ}{\Delta}_i^* \cap \overset{\circ}{\Delta}_j^* = \emptyset$. Отсюда $s(M) = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i\right) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i^*) = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^*\right) = s(M_1)$.

II. Единственность. Пусть функция $s_1 : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ также удовлетворяет свойствам (1)–(4). Определим, на каких элементах из \mathcal{M} функции s и s_1 совпадают.

а) если $K_1 = OEF G$ — единичный квадрат, то из свойства (4) следует $s_1(K_1) = 1 = s(K_1)$.

б) рассмотрим произвольный треугольник ABC , обозначим в нем через $a = |BC|$ и $h = |AH|$, где $H = \text{Pr}_{(BC)}(A)$. По следствию 4, примененному к функции s_1 (поскольку предыдущие утверждения в этом параграфе были доказаны для любой функции со свойствами (1)–(4)), мы получим $s_1(\Delta ABC) = \frac{ah}{2} = s(\Delta ABC)$ (по определению (б) для функции s).

в) для любой фигуры $M \in \mathcal{M}$ найдется представление $M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$, тогда из предыдущего пункта и аддитивности функций s и s_1 следует, что

$$s_1(M) = s_1\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i\right) = \sum_{i=1}^n s_1(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i\right) = s(M).$$

Таким образом, на всех элементах из \mathcal{M} функции s и s_1 совпадают. ■

На плоскости α введем декартову систему координат с помощью репера O, \vec{i}, \vec{j} . Напомним, что в этой системе координат точка $M \in \alpha$ называется *узлом целочисленной решетки*, если $M(k, l)$ и $k, l \in \mathbb{Z}$. Договоримся далее в этом параграфе узлы целочисленной решетки кратко называть *узлами*. В следующем утверждении доказывається формула Пика⁵ (1899) для вычисления площади многоугольника, удачно расположенного относительно целочисленной решетки.

Теорема 4.8. Пусть M — многоугольник, все вершины которого являются узлами, b — количество узлов, принадлежащих $\text{Vnd } M$ и i —

⁵Георг Александр Пик (1859–1942) — австрийский математик, профессор Немецкого университета в Праге (с 1888г); был инициатором назначения Альберта Эйнштейна профессором этого университета в 1910г; Пик и Эйнштейн не только имели общие научные интересы, но и страстно увлекались музыкой; Пиком были написаны работы в области функционального и комплексного анализа, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии; в июле 1942 года был депортирован в созданный нацистами в северной Чехии концентрационный лагерь Терезиенштадт.



количество узлов, которые принадлежат $\text{Int } M$. Тогда $s(M) = \frac{b}{2} + i - 1$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}$ множество всех многоугольников, все вершины которых расположены в узлах, и для любого $M \in \tilde{\mathcal{M}}$ определим $s^*(M) = \frac{b}{2} + i - 1$. Установим некоторые свойства функции $s^* : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$.

I. Проверим, что если $M, M_1, M_2 \in \tilde{\mathcal{M}}$ и $M = M_1 \sqcup M_2$, то верно равенство $s^*(M) = s^*(M_1) + s^*(M_2)$ (*). Обозначим через $x = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ простую замкнутую ломаную, которая является границей многоугольника M . На x найдутся два различных узла, A и B , которые одновременно будут вершинами многоугольников M_1 и M_2 (рис. 167). Случай совпадения узлов A и B (рис. 168) невозможен, поскольку одна из фигур, составляющих M , не будет многоугольником (на рис. 168 граница M_2 не является простой замкнутой ломаной). Узлы A и B назовем *особыми*. Общей частью границ M_1 и M_2 является простая ломаная $y = \bigcup_{i=1}^k [B_j B_{j+1}]$, которая соединяет два особых узла. Б.о.о. будем считать, что $B_1 = A$ и $B_{k+1} = B$.

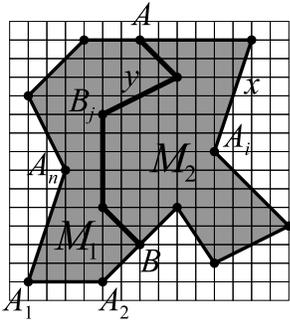


Рис. 167

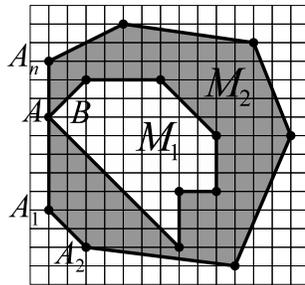


Рис. 168

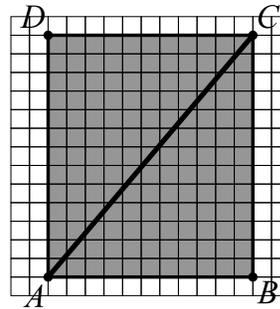


Рис. 169

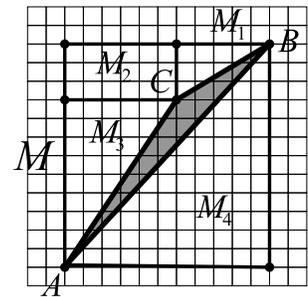


Рис. 170

Расположение произвольного узла $X \in M$ заставляет нас рассмотреть следующие четыре случая. Во-первый, если $X \in \text{Bnd } M$ и X не является особым, то узел X «вносит» по $\frac{1}{2}$ в левую и правую части равенства (*). Во-вторых, если $X \in \text{Int } M$ и X не попал на ломаную y , то узел X принадлежит внутренности точно одного из множеств M_1 и M_2 (поскольку у них нет общих внутренних точек) и поэтому «вносит» по единице в левую и правую части равенства (*). В-третьих, если $X \in y$ и не является особым узлом, тогда X является внутренней точкой M и одновременно граничной точкой многоугольников M_1 и M_2 , поэтому узел X «вносит» единицу в левую часть и дважды по $\frac{1}{2}$ в правую часть равенства (*). Наконец, в четвертых, $X = A$ или $X = B$, тогда X , будучи общей вершиной M_1 и M_2 ,



учитывается дважды и дает лишнюю $\frac{1}{2}$ по сравнению с левой частью, поэтому два особых узла дают лишнюю единицу справа, которая сокращается с одной из двух минус единиц в правой части. Все случаи рассмотрены и утверждение (*) доказано.

II. Докажем, что для прямоугольника $M = ABCD \in \tilde{\mathcal{M}}$, стороны которого параллельны координатным осям (рис. 169), справедливо равенство $s(M) = s^*(M)$. Пусть $|AB| = a$ и $|AD| = c$, тогда количество узлов, попавших в $\text{Int } M$, равно $i = (a - 1)(c - 1)$, а число узлов, попавших на границу M , считается по формуле $b = 2(a + 1) + 2(c - 1) = 2a + 2c$, откуда

$$s^*(M) = a + c + (a - 1)(c - 1) - 1 = ac = s(M).$$

III. Установим, что для прямоугольного треугольника $T = \triangle ABC \in \tilde{\mathcal{M}}$, катеты которого параллельны координатным осям (рис. 169), выполняется $s(T) = s^*(T)$. Пусть $O_1(x^*, y^*)$ — середина гипотенузы $[AC]$, тогда $2x^*, 2y^* \in \mathbb{Z}$ и множество $\tilde{\mathbb{Z}}^2$ всех узлов симметрично относительно O_1 , поэтому одинаково количество «внутренних» узлов треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CDA = Z_{O_1}(\triangle ABC)$, также совпадает число их «граничных» узлов, т.е. $s^*(\triangle ABC) = s^*(\triangle CDA)$. Теперь из II и I получим

$$\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \cdot s(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot s^*(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot (2s^*(\triangle ABC)) = s^*(\triangle ABC).$$

IV. Для произвольного треугольника $T = \triangle ABC \in \tilde{\mathcal{M}}$ докажем, что $s(T) = s^*(T)$. Через каждую вершину T можно провести прямые параллельно координатным осям и получить прямоугольник $M \in \tilde{\mathcal{M}}$ (рис. 170), который почти разбит на T , конечное число прямоугольных треугольников, у которых катеты параллельны координатным осям, и, возможно, на прямоугольник, стороны которого также параллельны координатным осям. Аддитивность функции площади, пункты II и III, а также утверждение (*) дают (используем обозначения рис. 170) цепочку равенств:

$$\begin{aligned} s(T) &= s(M) - s(M_1) - s(M_2) - s(M_3) - s(M_4) = \\ &= s^*(M) - s^*(M_1) - s^*(M_2) - s^*(M_3) - s^*(M_4) = s^*(T). \end{aligned}$$

V. По теореме 4.1 произвольный многоугольник $M \in \tilde{\mathcal{M}}$ диагоналями можно почти разбить на треугольники: $M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$. Способ разбиения гарантирует включение $\Delta_i \in \tilde{\mathcal{M}}$, поэтому из предыдущего пункта имеем



$s(\Delta_i) = s^*(\Delta_i)$. Аддитивность площади и утверждение (*) дают

$$s(M) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n s^*(\Delta_i) = s^*(M).$$

■

Упражнения

1. Для любых двух треугольников Δ_1 и Δ_2 докажите, что $\Delta_1 \cap \Delta_2 \in \mathcal{M}$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \in \mathcal{M}$, $[\Delta_1 \setminus \Delta_2] \in \mathcal{M}$.
2. Докажите, что для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ выполнено, что $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M}$, $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{M}$, $[M_1 \setminus M_2] \in \mathcal{M}$.
3. Докажите, что любая многоугольная фигура является замкнутым множеством.
4. Докажите, что любых $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ из включения $M_1 \subseteq M_2$ следует, что верно $\text{Int } M_1 \cap \text{Int } ([M_2 \setminus M_1]) = \emptyset$. Можно ли опустить требование $M_1 \subseteq M_2$?
5. Можно ли обобщить утверждение предыдущего упражнения на любые два замкнутых множества $F_1, F_2 \subseteq \alpha$?
6. Верно ли, что в классе многоугольных фигур свойства быть равновеликими, равносоставленными и равнодополняемыми эквивалентны?
7. Докажите, что если все вершины ΔABC являются узлами и больше в ΔABC узлов нет, то $s(\Delta ABC) = \frac{1}{2}$.
8. Пусть все вершины ΔABC являются узлами и на его сторонах больше узлов нет. Докажите, что если внутри ΔABC есть единственный узел M^* , то M^* — точка пересечения медиан этого треугольника.

4.5. Площадь на множестве квадратуемых фигур

В этом параграфе мы продолжим исследование подмножеств плоскости α , но наложим дополнительное требование: *будем рассматривать только ограниченные подмножества плоскости α .*

Определение. Фигура F называется *кватуемой* (или *имеющей площадь*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такую пару множеств $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$, что $M_1 \subseteq F \subseteq M_2$ и $s(M_2) - s(M_1) < \varepsilon$. Множество всех *кватуемых* фигур будем обозначать⁶ через Sq .

⁶От square (англ.) — площадь.



Определение. Нижней (соответственно верхней) площадью фигуры F называется число $s_*(F) = \sup\{s(M_1) : M_1 \in \mathcal{M} \ \& \ M_1 \subseteq F\}$ ($s^*(F) = \inf\{s(M_2) : M_2 \in \mathcal{M} \ \& \ F \subseteq M_2\}$).

Обозначим через $X = \{s(M_1) : M_1 \in \mathcal{M} \ \& \ M_1 \subseteq F\}$ и $Y = \{s(M_2) : M_2 \in \mathcal{M} \ \& \ F \subseteq M_2\}$. Так как $\emptyset \subseteq F$ и $\emptyset \in \mathcal{M}$, то $0 \in X$ и X — непустое подмножество \mathbb{R} . Ограниченность F дает существование $O_\varepsilon(A)$ и некоторого квадрата $K^* = ABCD$, для которых $F \subseteq O_\varepsilon(A) \subseteq K^*$. Но тогда для любого $M_1 \in \mathcal{M} \ \& \ M_1 \subseteq F$ выполняется $M_1 \subseteq K^*$ и $s(M_1) \leq s(K^*)$ (по свойству монотонности площади). Последнее означает, что X — ограниченное сверху числовое множество, тем самым мы проверили корректность введения нижней площади для любой ограниченной фигуры. Мы уже показали, что $s(K^*) \in Y$, кроме того Y снизу ограничено нулем, поэтому у этого множества существует инфимум и мы также доказали корректность введения верхней площади для любой ограниченной фигуры. Монотонность функции площади позволяет из двойного включения $M_1 \subseteq F \subseteq M_2$ получить, что $s(M_1) \leq s(M_2)$. Это означает, что $s(M_2)$ — одна из верхних границ множества X , откуда $s_*(F) = \sup X \leq s(M_2)$. Неравенство $s_*(F) \leq s(M_2)$, которое выполняется для всех $M_2 \in \mathcal{M} \ \& \ F \subseteq M_2$, говорит о том, что $s_*(F)$ — одна из нижних границ для числового множества Y , поэтому неравенство $s_*(F) \leq s^*(F)$ выполняется для любой ограниченной фигуры $F \subseteq \alpha$. Мы стремительно подошли к первому критерию квадратуемости.

Теорема 5.1. *Фигура F квадратуема тогда и только тогда, когда $s_*(F) = s^*(F)$.*

Доказательство. \Rightarrow) для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такие две многоугольные фигуры M_1 и M_2 , что $M_1 \subseteq F \subseteq M_2$ и $s(M_2) - s(M_1) < \varepsilon$, тогда из неравенств $s(M_1) \leq s_*(F) \leq s^*(F) \leq s(M_2)$ выводим оценку $0 \leq |s^*(F) - s_*(F)| < \varepsilon$. Поскольку $|s^*(F) - s_*(F)|$ является неотрицательной константой, а ε — произвольное положительное число, получим $|s^*(F) - s_*(F)| = 0$ или $s_*(F) = s^*(F)$.

\Leftarrow) пусть $x_0 = s_*(F) = s^*(F)$. Используя простую характеристику супремума и инфимума (см. третий параграф второй главы Математического анализа 11), для любого $\varepsilon > 0$ найдем $s(M_1) \in X$ и $s(M_2) \in Y$, для которых $x_0 - \frac{\varepsilon}{2} < s(M_1) \leq x_0$ и $x_0 \leq s(M_2) < x_0 + \frac{\varepsilon}{2}$. Учитывая определения множеств X и Y , получим $M_1 \subseteq F \subseteq M_2$, а последние двойные неравенства дают $s(M_2) - s(M_1) < \varepsilon$. Мы доказали, что $F \in \text{Sq}$. ■



Определение. Для каждой фигуры $F \in \text{Sq}$ ее площадью называется число $s(F) = s_*(F) = s^*(F)$.

Пример 1. Ясно, что любая многоугольная фигура M квадратуема, поскольку в качестве M_1 и M_2 можно взять саму фигуру M и получить $s(M_2) - s(M_1) = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Причем число $s(M)$, определенное в предыдущем параграфе, будет одновременно максимальным во множестве X и минимальным в Y , поэтому $s_*(M)$ и $s^*(M)$ равны хорошо знакомому нам значению $s(M)$.

Пример 2. Для построения неквадратуемой фигуры введем на плоскости α декартову систему координат Oxy и рассмотрим единичный квадрат $K = [0; 1] \times [0; 1]$. Выбросим из K все точки, у которых обе координаты являются рациональными числами, и получим «достаточно дырявое» множество F . Покажем, что $F \notin \text{Sq}$. Для любой многоугольной фигуры M_1 , которая содержится в F , выполняется $\overset{\circ}{M}_1 = \emptyset$. О/п, если существует $A \in \overset{\circ}{M}_1$, то $A \in \overset{\circ}{F}$ и найдется $O_\varepsilon(A) \subseteq F$. Проекцией этой окрестности на координатные оси будут непустые интервалы, которые содержат рациональные числа (см. пятый параграф первой главы Математического анализа 11): r_1 — на оси (Ox) , r_2 — на оси (Oy) . Поэтому точка $B(r_1, r_2) \in F$, что противоречит определению этого множества. Из результатов предыдущего параграфа мы знаем, что из $\overset{\circ}{M}_1 = \emptyset$ следует, что $s(M_1) = 0$ и множество X состоит только из одного нуля, поэтому $s_*(F) = 0$. Теперь рассмотрим произвольную многоугольную фигуру M_2 , для которой $F \subseteq M_2$. Фигура M_2 замкнута (как объединение конечного числа замкнутых множеств), поэтому $K = [F] \subseteq M_2$, откуда $1 = s(K) \leq s(M_2)$. Учитывая, что $s(K)$ также принадлежит множеству Y , получим, что $1 = s(K) = \min Y = \inf Y = s^*(F)$. В результате строгое неравенство $s_*(F) < s^*(F)$ и предыдущая теорема дают $F \notin \text{Sq}$.

Следующее утверждение, которое мы будем называть *вторым критерием квадратуемости*, часто будет использоваться в доказательствах и при вычислении площади, в ссылках на него будем использовать обозначение \diamond_2 (индекс 2 указывает на размерность плоскости).

Теорема 5.2. 1) фигура F квадратуема тогда и только тогда, когда найдутся две такие последовательности $\{\overline{M}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{M}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, что $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(\overline{\overline{M}}_n) - s(\overline{M}_n)) = 0$.

2) если последовательности $\{\overline{M}_n\}$, $\{\overline{\overline{M}}_n\}$ удовлетворяют условиям утвер-



ждения (1), то $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M_n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M_n})$.

Доказательство. 1) \Rightarrow) для каждого $n \in \mathbb{N}$ применим определение квадратуемой фигуры для $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ и найдем такие фигуры $\overline{M_n}, \overline{\overline{M_n}} \in \mathcal{M}$, что $\overline{M_n} \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M_n}}$ и $0 \leq s(\overline{\overline{M_n}}) - s(\overline{M_n}) < \frac{1}{n}$. Применив П2П, получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(\overline{\overline{M_n}}) - s(\overline{M_n})) = 0$ и последовательности $\{\overline{M_n}\}, \{\overline{\overline{M_n}}\}$ — искомые.

\Leftarrow) для этих последовательностей будет выполняться цепочка неравенств

$$s(\overline{M_n}) \leq s_*(F) \leq s^*(F) \leq s(\overline{\overline{M_n}}) \Rightarrow 0 \leq s^*(F) - s_*(F) \leq s(\overline{\overline{M_n}}) - s(\overline{M_n}),$$

откуда по П2П получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (s^*(F) - s_*(F)) = 0$. Но $s^*(F) - s_*(F)$ является константой, поэтому нулевой предел возможен только при $s^*(F) - s_*(F) = 0$ или $s^*(F) = s_*(F)$, что дает квадратуемость фигуры F .

2) существование последовательностей, удовлетворяющих (1), гарантирует $F \in \text{Sq}$, т.е. $s(F) = s_*(F) = s^*(F)$ и из неравенств $s(\overline{M_n}) \leq s(F) \leq s(\overline{\overline{M_n}})$ мы можем получить $0 \leq s(F) - s(\overline{M_n}) \leq s(\overline{\overline{M_n}}) - s(\overline{M_n})$, что по П2П дает $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(F) - s(\overline{M_n})) = 0$ или $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M_n})$. Аналогично из двойного неравенства $0 \leq s(\overline{\overline{M_n}}) - s(F) \leq s(\overline{\overline{M_n}}) - s(\overline{M_n})$, по П2П получим $\lim_{n \rightarrow \infty} (s(\overline{\overline{M_n}}) - s(F)) = 0$ или $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M_n}})$. ■

Теорема 5.3. Пусть $F = \sphericalangle AOB$ — сектор⁷ круга $K(O, r)$ и величина $\sphericalangle AOB$ равна φ радиан, тогда $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = \frac{1}{2}\varphi r^2$.

Доказательство. Поскольку биссектрису любого угла можно легко построить циркулем и линейкой, будем рассматривать $n = 2^k$ при $k \in \mathbb{N}$. Из свойств показательной функции (см. девятый параграф третьей главы Математического анализа 11) следует, что $n \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Пусть точки $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ делят дугу \overline{AB} на n равных частей (рис. 171), тогда для многоугольника $\overline{M_n} = OA_0 \dots A_n$ выполняется: $\overline{M_n} \subseteq F$ и $s(\overline{M_n}) = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{\varphi}{n}$. Воспользуемся 13П⁸ при вычислении

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M_n}) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\varphi}{n} \right) = \frac{1}{2}r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{n}}{\varphi/n} \cdot \varphi \right) = \frac{1}{2}\varphi r^2. \quad (*)$$

⁷По определению $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOB \cap K(O, r)$, где $K(O, r) = \{X \in \alpha : |OX| \leq r\}$.

⁸13П — первый замечательный предел, т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, его доказательство приведено в третьем параграфе третьей главы Математического анализа 11.

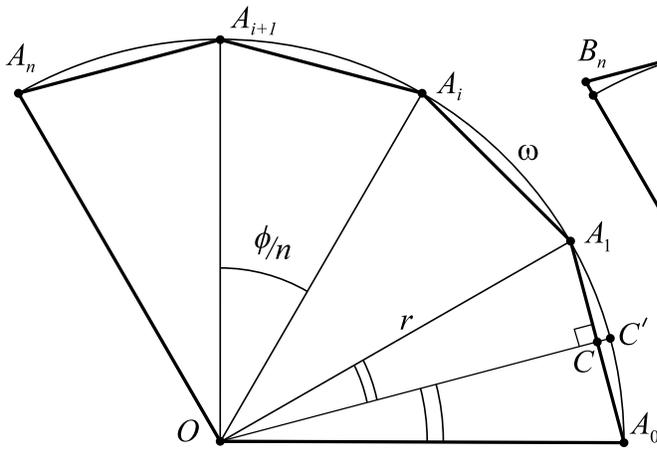


Рис. 171

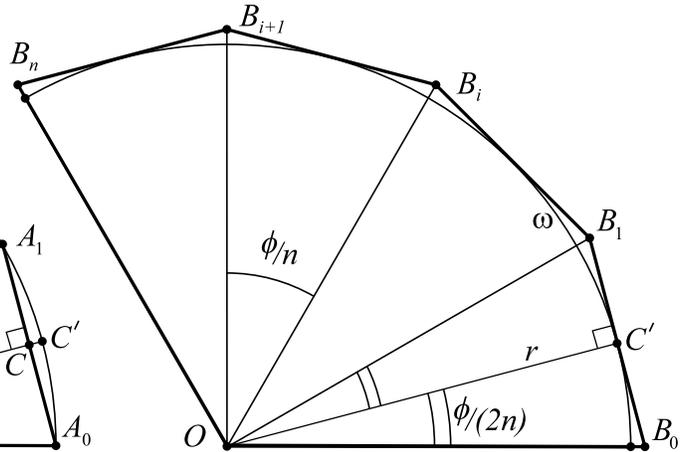


Рис. 172

Теперь зададим последовательность многоугольников, каждый из которых будет содержать сектор F . Для этого в многоугольнике \overline{M}_n отметим точку C — середину стороны $[A_0A_1]$ (рис. 171) и определим $k_n = r/|OC| > 1$. Рассмотрим $f = H_O^{k_n}$ — гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k_n , положим $\overline{\overline{M}}_n \stackrel{df}{=} f(\overline{M}_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Обозначим также через $B_i = f(A_i)$ при всех $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ (рис. 172), тогда из $(OC) \perp (A_0A_1)$ (поскольку $\triangle OA_0A_1$ — равнобедренный) получим, что $(OC') \perp (B_0B_1)$, где $C' = f(C)$ — середина стороны $[B_0B_1]$ многоугольника $\overline{\overline{M}}_n$. Из определения k_n следует, что $C' \in \omega = \omega(O, r)$, поэтому (B_0B_1) — касательная к окружности ω и треугольник $\triangle OB_0B_1$ содержит сектор $\sphericalangle A_0OA_1$. Аналогично проверяется включение $\sphericalangle A_iOA_{i+1} \subseteq \sphericalangle B_iOB_{i+1}$ при каждом индексе $i \in \{0, \dots, n-1\}$, откуда следует $F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Площадь $\overline{\overline{M}}_n$ найдем как сумму площадей n равных треугольников: $s(\overline{\overline{M}}_n) = n \cdot |OC'| \cdot \frac{|B_0B_1|}{2} = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2n}$. Снова воспользуемся 13П при вычислении предела и непрерывностью косинуса в нуле (т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{\sin \frac{\varphi}{2n}}{\cos \frac{\varphi}{2n}} \right) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2n}}{\varphi/(2n)} \cdot \frac{\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2n}} \right) = \frac{1}{2} \varphi r^2. \quad (**)$$

Из (*), (**) и критерия \diamond_2 получаем, что $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = \frac{1}{2} \varphi r^2$. ■

Следствие. Пусть $F = K(O, r)$ — круг, тогда $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = \pi r^2$.

Доказательство. Сразу следует из предыдущей теоремы для $\varphi = 2\pi$. ■



Теорема 5.4. Пусть F — квадратуемая фигура, g — подобие плоскости и k — коэффициент g . Тогда $F' = g(F) \in \text{Sq}$ и $s(F') = k^2 \cdot s(F)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько вариантов плоской фигуры F .

1-й случай: $F = \triangle ABC$. Обозначим через $a = |BC|$ и $h = |AH|$, где $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$, $A' = g(A)$, $B' = g(B)$ и $C' = g(C)$. Тогда из $g \in \text{Sim}_2$ следует, что $|B'C'| = ka$, $|A'H'| = kh$ и $(A'H') \perp (B'C')$. Откуда $s(F') = \frac{1}{2}|B'C'| \cdot |A'H'| = k^2 \cdot \frac{1}{2}ah = k^2 s(F)$.

2-й случай: $F \in \mathcal{M}$. По определению многоугольной фигуры существует представление $F = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$. Обозначим через $\Delta_i^* = g(\Delta_i)$, тогда из предыдущего случая имеем $s(\Delta_i^*) = k^2 \cdot s(\Delta_i)$. Заметим, что если $\overset{\circ}{F}_1 \cap \overset{\circ}{F}_2 = \emptyset$, то $\overset{\circ}{F}'_1 \cap \overset{\circ}{F}'_2 = \emptyset$, где $F'_1 = g(F_1)$ и $F'_2 = g(F_2)$. Действительно, если бы существовала точка $B \in \overset{\circ}{F}'_1 \cap \overset{\circ}{F}'_2$, то нашлась и окрестность $O_\varepsilon(B) \subseteq F'_1 \cap F'_2$, откуда $O_\delta(A) \subseteq F_1 \cap F_2$, где $A = g^{-1}(B)$ и $\delta = \varepsilon/k$. $\nearrow \times$. Таким образом, $F' = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^*$ и по свойству аддитивности площади на множестве \mathcal{M} получим

$$s(F') = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^*\right) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i^*) = k^2 \sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = k^2 \cdot s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i\right) = k^2 s(F).$$

3-й случай: $F \in \text{Sq}$. По критерию \diamond_2 найдутся две такие последовательности $\{\overline{M}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{M}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, что $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n)$. Обозначим образы через $\overline{K}_n = g(\overline{M}_n)$ и $\overline{\overline{K}}_n = g(\overline{\overline{M}}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Из предыдущего случая следует, что $\overline{K}_n, \overline{\overline{K}}_n \in \mathcal{M}$ и $s(\overline{K}_n) = k^2 \cdot s(\overline{M}_n)$, $s(\overline{\overline{K}}_n) = k^2 \cdot s(\overline{\overline{M}}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Включения $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ очевидно дают $\overline{K}_n \subseteq F' \subseteq \overline{\overline{K}}_n$, поэтому остается посчитать пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{K}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k^2 \cdot s(\overline{M}_n)\right) = k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n) = k^2 \cdot s(F), \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{K}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(k^2 \cdot s(\overline{\overline{M}}_n)\right) = k^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = k^2 \cdot s(F). \quad (**)$$

Теперь из равенств $(*)$, $(**)$ и критерия \diamond_2 следует, что $F' = g(F) \in \text{Sq}$ и $s(F') = k^2 \cdot s(F)$. ■



Лемма 5.5. Если $F \in \text{Sq}$ и $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, то $s(F) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим любую фигуру $M_1 \in \mathcal{M}$, для которой $M_1 \subseteq F$. Последнее включение дает $\overset{\circ}{M_1} \subseteq \overset{\circ}{F} = \emptyset$ и по теореме 4.6 получим $s(M_1) = 0$. Отсюда $s_*(F) = 0$ и по теореме 5.1 приходим к нужному равенству $s(F) = s_*(F) = 0$. ■

Следующее утверждение называется теоремой об изменении площади при ортогональном проектировании.

Теорема 5.6. Пусть $F \subseteq \alpha$, $\widehat{\alpha, \beta} = \varphi$, $F' = \text{Пр}_\beta(F)$. Если $F \in \text{Sq}$, то $F' \in \text{Sq}$ и $s(F') = s(F) \cdot \cos \varphi$.

Доказательство. Рассмотрим, начиная с самых простых, несколько случаев фигуры F и расположения плоскостей α и β . Если $\alpha \parallel \beta$, то $F' = F$ (поскольку они получаются друг из друга параллельным переносом), откуда $F' \in \text{Sq}$ и $s(F') = s(F) = s(F) \cdot \cos 0$. Далее считаем, что $\alpha \nparallel \beta$ и $l = \alpha \cap \beta$. При $\alpha \perp \beta$ выполняется $F' \subseteq a$, а из ограниченности F и F' даже следует, что $F' \subseteq [KL] \subseteq a$. Отсюда $s^*(F') \leq s([KL]) = 0$, поэтому $s_*(F') = s^*(F') = 0$ и $0 = s(F') = s(F) \cdot \cos \frac{\pi}{2}$. Далее считаем, что $\varphi \in (0; \pi/2)$.

1-й случай: $F = \triangle ABC$ и одна из сторон F параллельна прямой l . Б.о.о. пусть $(AB) \parallel l$ (рис. 173), тогда $(AB) \parallel \beta$ и $(AB) \parallel (A'B')$, где $A' = \text{Пр}_\beta(A)$, $B' = \text{Пр}_\beta(B)$ (так как (AB) и $(A'B')$ находятся в одной плоскости и не пересекаются или совпадают). Пусть $[CH]$ — высота в $\triangle ABC$ (т.е. $H = \text{Пр}_{(AB)}(C)$), $C' = \text{Пр}_\beta(C)$ и $H' = \text{Пр}_\beta(H)$. По теореме о трех перпендикулярах (см. четвертый параграф третьей главы Геометрии 10) из $(CH) \perp l$ (поскольку $(AB) \parallel l$) следует, что $(C'H') \perp l$. Но $l \parallel (A'B')$ (используем транзитивность параллельности прямых), поэтому $(C'H') \perp (A'B')$ и $[C'H']$ является высотой $\triangle A'B'C'$. Поскольку $(CH), (C'H') \perp l$ и l — ребро двугранного угла, выполняется $\widehat{(CH), (C'H')} = \widehat{\alpha, \beta} = \varphi$, поэтому из $\triangle CHC_1$ (где $C_1 = \text{Пр}_{(CC')} (H)$) получим, что $|C'H'| = |C_1H| = |CH| \cdot \cos \varphi$. В прямоугольнике $ABB'A'$ выполняется $|A'B'| = |AB|$, поэтому $s(F') = \frac{1}{2}|A'B'| \cdot |C'H'| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CH| \cos \varphi = s(F) \cdot \cos \varphi$.

2-й случай: $F = \triangle ABC$ и ни одна из сторон F не параллельна прямой l . Тогда расстояния от вершин $\triangle ABC$ до l попарно различны и б.о.о. можно считать, что $d(A, l) < d(B, l) < d(C, l)$. В этом случае проведем отрезок $[BD]$ так, чтобы $(BD) \parallel l$ и $D \in [AC]$ (рис. 174). Это отрезок разделит $\triangle ABC$ на два треугольника \triangle_1 и \triangle_2 без общих внутренних точек, у кото-



рых общей стороной будет $[BD]$ и $(BD) \parallel l$. Применяя предыдущий случай к этим треугольникам, получим $s(\Delta_i^*) = s(\Delta_i) \cos \varphi$, где $\Delta_i^* = \text{Пр}_\beta(\Delta_i)$ при $i \in \{1, 2\}$. Очевидно, что треугольники Δ_1^* и Δ_2^* не имеют общих внутренних точек (иначе общая внутренняя точка при обратном отображении к проекции переходила бы во внутреннюю точку треугольников Δ_1 и Δ_2). Поэтому можно воспользоваться аддитивностью площади, чтобы получить

$$s(F') = s(\Delta_1^*) + s(\Delta_2^*) = \left(s(\Delta_1) + s(\Delta_2) \right) \cos \varphi = s(F) \cos \varphi.$$

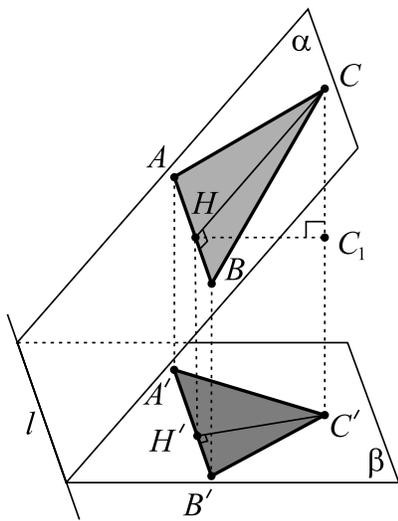


Рис. 173

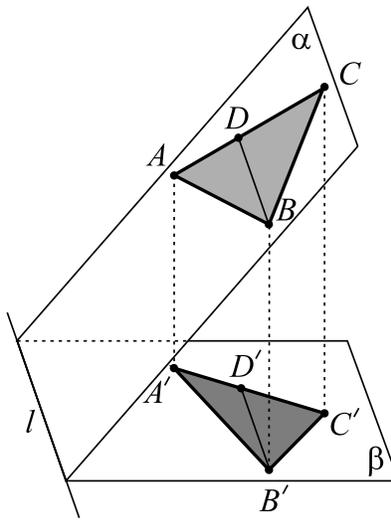


Рис. 174

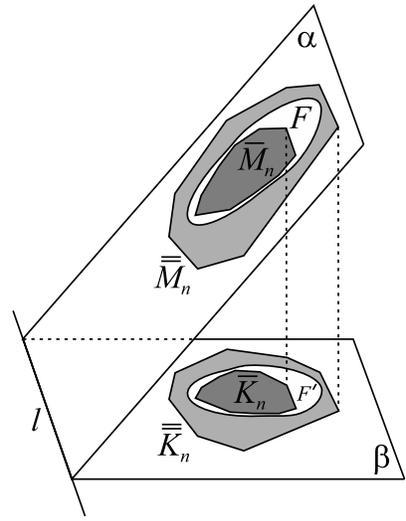


Рис. 175

3-й случай: $F \in \mathcal{M}$. Тогда F можно представить в виде $F = \sqcup_{i=1}^n \Delta_i$. Обозначим через $\Delta_i^* = \text{Пр}_\beta(\Delta_i)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Выше было показано, что треугольники Δ_i^* и Δ_j^* не имеют общих внутренних точек при $i \neq j$, кроме того, по предыдущему случаю $s(\Delta_i^*) = s(\Delta_i) \cos \varphi$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Теперь аддитивность площади дает

$$s(F') = s\left(\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i^*\right) = \sum_{i=1}^n s(\Delta_i^*) = \cos \varphi \cdot \sum_{i=1}^n s(\Delta_i) = s(F) \cos \varphi.$$

4-й случай: $F \in \text{Sq}$. По критерию \diamond_2 найдутся две такие последовательности $\{\overline{M}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{M}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, что $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n)$. Обозначим образы через $\overline{K}_n = \text{Пр}_\beta(\overline{M}_n)$ и $\overline{\overline{K}}_n = \text{Пр}_\beta(\overline{\overline{M}}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (рис. 175). Из предыдущего случая следует, что $\overline{K}_n, \overline{\overline{K}}_n \in \mathcal{M}$ и $s(\overline{K}_n) = s(\overline{M}_n) \cos \varphi$, $s(\overline{\overline{K}}_n) = s(\overline{\overline{M}}_n) \cos \varphi$ при



всех $n \in \mathbb{N}$. Включения $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$ очевидно дают $\overline{K}_n \subseteq F' \subseteq \overline{\overline{K}}_n$, поэтому остается посчитать пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{K}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s(\overline{M}_n) \cos \varphi \right) = \cos \varphi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n) = s(F) \cos \varphi, \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{K}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s(\overline{\overline{M}}_n) \cos \varphi \right) = \cos \varphi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = s(F) \cos \varphi. \quad (**)$$

Теперь из равенств (*), (**) и критерия \diamond_2 следует, что $F' \in \text{Sq}$ и выполняется формула $s(F') = s(F) \cos \varphi$.

■

Следствие. Пусть $F \subseteq \alpha$, $\widehat{\alpha, \beta} = \varphi \in [0; \pi/2)$, $F' = \text{Pr}_\beta(F)$. Если $F' \in \text{Sq}$, то $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = s(F') / \cos \varphi$.

Доказательство. Если $F' \in \mathcal{M}$, то это следует из (1)–(3) случаев предыдущей теоремы, поскольку Pr_β^{-1} является биекцией, которая многоугольные фигуры переводит в многоугольные фигуры. Если $F' \in \text{Sq}$, то по критерию \diamond_2 найдутся две такие последовательности $\{\overline{K}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{K}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, что $\overline{K}_n \subseteq F' \subseteq \overline{\overline{K}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $s(F') = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{K}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{K}_n)$. Обозначим прообразы при проекции через $\overline{M}_n = \text{Pr}_\beta^{-1}(\overline{K}_n)$ и $\overline{\overline{M}}_n = \text{Pr}_\beta^{-1}(\overline{\overline{K}}_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Из предыдущего случая следует, что $\overline{M}_n, \overline{\overline{M}}_n \in \mathcal{M}$ и $s(\overline{M}_n) = s(\overline{K}_n) / \cos \varphi$, $s(\overline{\overline{M}}_n) = s(\overline{\overline{K}}_n) / \cos \varphi$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Включения $\overline{K}_n \subseteq F' \subseteq \overline{\overline{K}}_n$ очевидно дают $\overline{M}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{M}}_n$, поэтому остается посчитать пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s(\overline{K}_n) / \cos \varphi \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{K}_n) = \frac{s(F')}{\cos \varphi}, \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s(\overline{\overline{K}}_n) / \cos \varphi \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{K}}_n) = \frac{s(F')}{\cos \varphi}. \quad (**)$$

Теперь из равенств (*), (**) и критерия \diamond_2 следует, что $F \in \text{Sq}$ и выполняется формула $s(F) = s(F') / \cos \varphi$.

■

Теорема 5.7. Функция $s : \text{Sq} \rightarrow \mathbb{R}$ является продолжением функции $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ и также удовлетворяет свойствам (1)–(4).

Доказательство. Договоримся в доказательстве этой теоремы функцию $s : \text{Sq} \rightarrow \mathbb{R}$ обозначать через $\tilde{s} : \text{Sq} \rightarrow \mathbb{R}$.



В первом примере этого параграфа было доказано, что для любой фигуры $M \in \mathcal{M}$ выполняется $s(M) = \tilde{s}(M)$, поэтому функция $\tilde{s} : \text{Sq} \rightarrow \mathbb{R}$ является продолжением функции $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Отсюда сразу следует, что для единичного квадрата K_1 верно равенство $\tilde{s}(K_1) = s(K_1) = 1$ и свойство (4) для \tilde{s} справедливо. Проверим, что на множестве Sq функция \tilde{s} также удовлетворяет свойствам (1)–(3).

Для любой ограниченной фигуры $F \subseteq \alpha$ по определению $s_*(F) \geq 0$. Поэтому, если $F \in \text{Sq}$, то по теореме 5.1 получим $\tilde{s}(F) = s_*(F) \geq 0$ и свойство (1) для \tilde{s} выполняется.

Для любого движения f и любой фигуры $F \in \text{Sq}$ по теореме 5.4 справедливо $F_1 = f(F) \in \text{Sq}$ и $\tilde{s}(F_1) = \tilde{s}(F)$, поэтому свойство (2) для \tilde{s} также верно.

Проверим выполнение аддитивности для \tilde{s} , для этого рассмотрим произвольную пару $F_1, F_2 \in \text{Sq}$, для которой $\overset{\circ}{F}_1 \cap \overset{\circ}{F}_2 = \emptyset$ и положим $F = F_1 \sqcup F_2$. Для F_1 и F_2 применим критерий \diamond_2 и найдем такие последовательности $\{\overline{M}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{M}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{K}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, $\{\overline{\overline{K}}_n\} \subseteq \mathcal{M}$, что $\overline{M}_n \subseteq F_1 \subseteq \overline{\overline{M}}_n$, $\overline{K}_n \subseteq F_2 \subseteq \overline{\overline{K}}_n$, при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tilde{s}(F_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{M}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{M}}_n)$, $\tilde{s}(F_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{K}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{K}}_n)$. Определим $\overline{L}_n \stackrel{df}{=} \overline{M}_n \cup \overline{K}_n$ и $\overline{\overline{L}}_n = \overline{\overline{M}}_n \cup \overline{\overline{K}}_n$. Ясно, что $\overline{L}_n \subseteq F \subseteq \overline{\overline{L}}_n$ и $s(\overline{L}_n) = s(\overline{M}_n) + s(\overline{K}_n)$ (поскольку у множеств \overline{M}_n и \overline{K}_n нет общих внутренних точек) при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако множества $\overline{\overline{M}}_n$ и $\overline{\overline{K}}_n$ уже могут иметь общие внутренние точки. При любом расположении двух многоугольных фигур P и Q можно обозначить через $M = P \cap Q$, $P_1 = [P \setminus M]$, $Q_1 = [Q \setminus M]$ и получить формулу

$$s(P \cup Q) = s(P_1 \sqcup M \sqcup Q_1) = s(P_1) + s(M) + s(Q_1) = s(P) + s(Q) - s(M),$$

откуда $s(P \cup Q) \leq s(P) + s(Q)$, применив это неравенство для $s(\overline{\overline{L}}_n)$, получим, что $s(\overline{\overline{L}}_n) \leq s(\overline{\overline{M}}_n) + s(\overline{\overline{K}}_n)$. В результате, дважды используя П2П к неравенствам

$$s(\overline{M}_n) + s(\overline{K}_n) = s(\overline{L}_n) \leq s_*(F) \leq s^*(F) \leq s(\overline{\overline{L}}_n) \leq s(\overline{\overline{M}}_n) + s(\overline{\overline{K}}_n),$$

мы находим, что $\tilde{s}(F_1) + \tilde{s}(F_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{L}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(\overline{\overline{L}}_n)$, откуда (по \diamond_2) следует $F \in \text{Sq}$, $\tilde{s}(F) = \tilde{s}(F_1) + \tilde{s}(F_2)$ и аддитивность функции \tilde{s} доказана. ■



4.6. Многогранные тела. Объем призмы

Определение. Многогранным телом (сокращенно полиэдром) называется фигура, которую можно представить в виде объединения конечного числа тетраэдров без общих внутренних точек и (возможно) многоугольной фигуры. Множество всех полиэдров будем обозначать через \mathcal{P} .

В этом параграфе нам удобно будет считать любой треугольник (в том числе, вырожденный треугольник) вырожденным тетраэдром, поэтому любой полиэдр P допускает представление в виде $P = \sqcup_{i \in I} T_i$, где T_i — тетраэдр (в том числе, вырожденный), где I — конечное множество индексов (возможно, пустое).

Теорема 6.1. Пусть $P \subseteq \mathbb{P}_3$ и $P \neq \emptyset$, тогда P является полиэдром в том и только в том случае, если его можно представить в виде $P = \sqcup_{i=1}^n P_i$, где P_i — пирамида для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. \Rightarrow) очевидно, поскольку тетраэдр (в том числе, вырожденный) является частным случаем пирамиды (соответственно вырожденной).

\Leftarrow) пусть $P = \sqcup_{i=1}^n P_i$, где P_i — пирамида для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через M_i — основание пирамиды P_i и S_i — ее вершина. Поскольку M_i является многоугольником (значит, по теореме 4.1 и многоугольной фигурой), существует представление $M_i = \sqcup_{j \in I(i)} \Delta_j^i$, где $I(i)$ — конечное

множество индексов. Обозначим через T_j^i тетраэдр с вершиной в точке S_i и основанием Δ_j^i для каждого $j \in I(i)$ и любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Поскольку треугольники Δ_j^i и Δ_k^i не имеют общих внутренних точек в плоскости многоугольника M_i при различных $j, k \in I(i)$, тетраэдры T_j^i и T_k^i также не имеют общих внутренних точек в пространстве (иначе центральная проекция из вершины S_i общей внутренней точки тетраэдров T_j^i и T_k^i перешла бы во внутреннюю точку треугольников Δ_j^i и Δ_k^i), поэтому пирамида P_i допускает представление $P_i = \sqcup_{j \in I(i)} T_j^i$. Остается заметить, что из того, что нет

общих внутренних точек у пирамид P_{i_1} и P_{i_2} при различных индексах i_1 и i_2 , также не будет общих внутренних точек у составляющих их тетраэдров.

Таким образом, P удалось почти разбить на тетраэдры, т.е. $P = \sqcup_{1 \leq i \leq n} \sqcup_{j \in I(i)} T_j^i$, откуда P — полиэдр. ■

Следствие. Любой выпуклый многогранник \mathcal{F} является полиэдром.



Доказательство. Обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ — все грани \mathcal{F} и O — любая его внутренняя точка. Рассмотрим в качестве P_i пирамиду с основанием Γ_i и вершиной в точке O . Заметим, что для любой точки $X \in \mathbb{P}_3 \setminus \{O\}$ луч $[OX)$ пересекает поверхность \mathcal{F} только в одной точке. По теореме Жордана для многогранных поверхностей (теорема 5.8 предыдущей главы) количество таких точек пересечения нечетно, и если их было бы не меньше трех, то взяв две соседние точки из этого пересечения мы получили бы противоречие с выпуклостью \mathcal{F} . Единственность такой точки пересечения с одной стороны гарантирует $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n P_i$, а с другой — различные пирамиды не имеют общих внутренних точек (поскольку различные грани Γ_i и Γ_j общей могут иметь только одну сторону, например $[AB]$, пирамиды P_i и P_j пересекаются только по грани OAB). В результате $\mathcal{F} = \bigsqcup_{i=1}^n P_i$ и по предыдущей теореме \mathcal{F} — полиэдр. ■

Множество \mathcal{P} всех полиэдров обладает (см. упражнения к этому параграфу) некоторыми свойствами. Если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, то $P_1 \cap P_2, P_1 \cup P_2, [P_1 \setminus P_2] \in \mathcal{P}$. Напомним, что фигуры $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{P}_3$ называются равными (или конгруэнтными), если существует движение f пространства, при котором $F_2 = f(F_1)$ (используем обозначение $F_1 = F_2$).

Определение. Объемом на \mathcal{P} называется функция $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $v(P) \geq 0$ для всех $P \in \mathcal{P}$;
- 2) если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ и $P_1 = P_2$, то $v(P_1) = v(P_2)$;
- 3) если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ и $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$, то $v(P_1 \cup P_2) = v(P_1) + v(P_2)$;
- 4) $v(K^*) = 1$, где $K^* = OEFGO_1E_1F_1G_1$ — куб с $|OE| = 1$.

Первое свойство называется *неотрицательностью объема*, третье — *аддитивностью объема*, последнее — *нормировкой*. В следующем утверждении приведено еще одно свойство — *монотонность объема*.

Лемма 6.2. Если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ и $P_1 \subseteq P_2$, то $v(P_1) \leq v(P_2)$.

Доказательство. Аналогично лемме 4.2. ■

Лемма 6.3. Если $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, причем $|AB| = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то $s(K) = 1/n^3$.

Доказательство. Аналогично лемме 4.3. ■



Лемма 6.4. Для любых положительных чисел $a, b, c, \varepsilon \in \mathbb{R}$ можно найти такие $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}_{>0}$, что $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$, $c_1 < c < c_2$ и $a_2 b_2 c_2 - a_1 b_1 c_1 < \varepsilon$.

Доказательство. Аналогично лемме 4.4. ■

Теорема 6.5. Пусть $P = ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед и $|AB| = a$, $|AD| = b$, $|AA_1| = c$. Тогда $v(P) = abc$.

Доказательство. Аналогично теореме 4.5. ■

Напомним, что призмой $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ называется многогранник P , у которого многогранная поверхность состоит из двух равных n -угольников $A_1 \dots A_n$, $B_1 \dots B_n$ (они называются *основаниями* P), расположенных в различных параллельных плоскостях и n параллелограммов $A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ (которые называются *боковыми гранями* P). Каждый из отрезков $[A_i B_i]$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) называется *боковым ребром* призмы P . Если прямая $(A_i B_i)$ перпендикулярна плоскости основания, то P называется *прямой призмой*. Пусть $\alpha = (A_1 \dots A_n)$, $\beta = (B_1 \dots B_n)$ — плоскости оснований призмы P , тогда ее высотой называется отрезок $[H_1 H_2]$, для которого выполняются условия: $H_1 \in \alpha$, $H_2 \in \beta$ и $(H_1 H_2) \perp \alpha$. Например, у прямой призмы любое ее боковое ребро является высотой.

Теорема 6.6. Пусть $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — призма, $h = |H_1 H_2|$ — длина ее высоты $[H_1 H_2]$ и $S_{\text{осн}} = s(A_1 A_2 \dots A_n)$ — площадь ее основания. Тогда $v(P) = h \cdot S_{\text{осн}}$.

Доказательство. Рассмотрим несколько вариантов призмы P .

1-й случай: $P = A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3$ — прямая треугольная призма и треугольник $A_1 A_2 A_3$ является прямоугольным. Б.о.о. считаем, что прямым углом является $\angle A_1 A_2 A_3$, тогда отметим точки O_1 и O_2 — середины отрезков $[A_1 A_3]$ и $[B_1 B_3]$ соответственно (рис. 176). Пусть $P_1 = R_{(O_1 O_2)}^{180^\circ}(P)$, тогда $P^* = P \cup P_1$ является прямоугольным параллелепипедом, поскольку основание $A_1 A_2 A_3 A_4$ (где A_4 — образ точки A_2 при рассматриваемом повороте) является прямоугольником (параллелограмм, в котором есть прямой угол) и P^* — прямая призма. Призмы P и P_1 пересекаются только по грани $A_1 A_3 B_3 B_1$, поэтому не имеют в \mathbb{P}_3 общих внутренних точек, что дает $P^* = P \sqcup P_1$ и по (3) и (2) свойствам объема получим $v(P^*) = v(P) + v(P_1) =$



$= 2v(P)$. Используя предыдущую теорему, получим

$$2v(P) = |A_1A_2| \cdot |A_2A_3| \cdot |A_1B_1| \Rightarrow v(P) = \left(\frac{1}{2} |A_1A_2| \cdot |A_2A_3| \right) |A_1B_1| = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

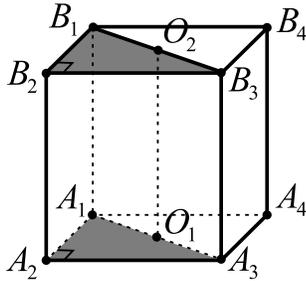


Рис. 176

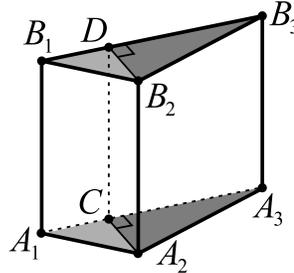


Рис. 177

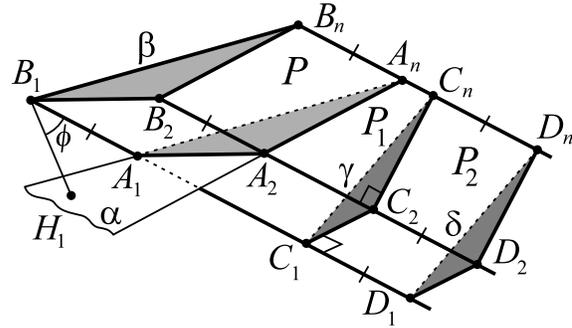


Рис. 178

2-й случай: $P = A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ — прямая треугольная призма. Б.о.о. считаем, что $\angle A_1A_2A_3$ — максимальный угол в треугольнике $A_1A_2A_3$, тогда остальные углы в этом треугольнике — острые. Пусть $[A_2C]$ — высота в $\triangle A_1A_2A_3$, тогда из сделанного выше замечания следует, что $C \in]A_1A_3[$ (рис. 177). Обозначим через $\Delta_1 = \triangle A_1A_2C$, $\Delta_2 = \triangle A_3A_2C$, $D = T_{\vec{A_1B_1}}(C)$, $P_1 = A_1A_2CB_1B_2D$ и $P_2 = A_3A_2CB_3B_2D$. Тогда прямые призмы P_1 и P_2 пересекаются только по общей грани A_2CDB_2 , поэтому не имеют общих внутренних точек, в их основаниях лежат прямоугольные треугольники, что позволяет применить предыдущий случай и аддитивность функции объема, чтобы получить

$$\begin{aligned} v(P) &= v(P_1 \sqcup P_2) = v(P_1) + v(P_2) = |A_2B_2| \cdot s(\Delta_1) + |A_2B_2| \cdot s(\Delta_2) = \\ &= |A_2B_2| \left(s(\Delta_1) + s(\Delta_2) \right) = h \cdot S_{\text{осн}}. \end{aligned}$$

3-й случай: $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — прямая n -угольная призма. Основание $M_1 = A_1A_2 \dots A_n$ почти разобьем на треугольники, представив в виде $M_1 = \bigsqcup_{i=1}^k \Delta_i$ и обозначим через $\Delta_i^* = T_{\vec{A_1B_1}}(\Delta_i)$. В качестве P_i будем рассматривать прямую треугольную призму с основаниями Δ_i и Δ_i^* ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$). Для каждой из таких призм применим предыдущий случай, поэтому $v(P_i) = h \cdot s(\Delta_i)$. Заметим, что при разных индексах i и j призмы P_i и P_j не имеют общих внутренних точек (иначе ортогональная проекция этой общей внутренней точки на плоскость основания M_1 дало бы



общую внутреннюю точку треугольников Δ_i и Δ_j), поэтому $P = \sqcup_{i=1}^k P_i$ и по аддитивности объема получим

$$v(P) = v\left(\sqcup_{i=1}^k P_i\right) = \sum_{i=1}^k v(P_i) = \sum_{i=1}^k \left(h \cdot s(\Delta_i)\right) = h \sum_{i=1}^k s(\Delta_i) = h \cdot S_{\text{осн}}.$$

4-й случай: $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — наклонная n -угольная призма. Обозначим через $\alpha = (A_1 \dots A_n)$, $\beta = (B_1 \dots B_n)$ — плоскости оснований призмы P (рис. 178). Проведем плоскости $\gamma, \delta \perp (A_1 B_1)$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $\gamma \cap P = \emptyset$ (это можно сделать из-за ограниченности P); $d(\gamma, \delta) = |A_1 B_1|$; плоскость δ и призма P находятся по разные стороны относительно плоскости γ . Обозначим через $\{C_i\} = \gamma \cap (A_i B_i)$, $\{D_i\} = \delta \cap (A_i B_i)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и рассмотрим два многогранника: $P_1 = C_1 \dots C_n A_1 \dots A_n$ и $P_2 = C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n$. Из-за выбора плоскостей γ и δ многогранники P , P_1 и P_2 попарно общих внутренних точек не имеют и при параллельном переносе на вектор $\vec{v} = \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{D_1 C_1}$ справедливы равенства: $T_{\vec{v}}(A_i) = B_i$, $T_{\vec{v}}(D_i) = C_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Это означает, что

$$\begin{aligned} T_{\vec{v}}\left(P_2 \sqcup P_1\right) &= P_1 \sqcup P \Rightarrow v(P_2 \sqcup P_1) = v(P_1 \sqcup P) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(P_2) + v(P_1) = v(P_1) + v(P) \Rightarrow v(P) = v(P_2) = |C_1 D_1| \cdot s(C_1 C_2 \dots C_n). \end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались предыдущим случаем для вычисления объема прямой призмы P_2 . Обозначим через $\varphi = \widehat{\alpha, \gamma}$ и заметим, что выполняются следующие два свойства.

1) поскольку $(A_1 B_1) \perp \gamma$, многоугольник $C_1 C_2 \dots C_n$ является ортогональной проекцией n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$ на плоскость γ и по теореме о площади ортогональной проекции (теорема 5.6) мы получим соотношение $s(C_1 C_2 \dots C_n) = s(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot \cos \varphi = S_{\text{осн}} \cdot \cos \varphi$.

2) обозначим через $H_1 = \text{Пр}_{\alpha}(B_1)$, тогда $h = |B_1 H_1|$ и поскольку справедливо $(A_1 B_1) \perp \gamma$ и $(B_1 H_1) \perp \alpha$, мы получим $(A_1 B_1), (B_1 H_1) = \widehat{\alpha, \gamma} = \varphi$. Теперь из прямоугольного треугольника $A_1 B_1 H_1$ находим длину гипотенузы $|A_1 B_1| = h / \cos \varphi$.

Равенство $|A_1 B_1| = |C_1 D_1|$ дано нам по выбору плоскостей γ и δ , поэтому, применив свойства (1) и (2), получим

$$v(P) = |C_1 D_1| \cdot s(C_1 C_2 \dots C_n) = \frac{h}{\cos \varphi} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \cos \varphi = h \cdot S_{\text{осн}}.$$





Определение. Пусть $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — призма и $\gamma \perp (A_1 B_1)$. Обозначим через $\{C_i\} = \gamma \cap (A_i B_i)$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда n -угольник $C_1 C_2 \dots C_n$ называется ортогональным сечением призмы P , а числа $S_{\perp} = s(C_1 C_2 \dots C_n)$ и $P_{\perp} = \sum_{i=1}^n |C_i C_{i+1}|$ называются соответственно площадью и периметром ортогонального сечения призмы P .

Следствие. Пусть $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — призма, S_{\perp} и P_{\perp} — площадь и периметр ее ортогонального сечения, тогда:

- 1) $v(P) = |A_1 B_1| \cdot S_{\perp}$;
- 2) $S_{\text{бок}}(P) = |A_1 B_1| \cdot P_{\perp}$.

Доказательство. 1) в четвертом случае доказательства предыдущей теоремы мы получили формулу $v(P) = |C_1 D_1| \cdot s(C_1 C_2 \dots C_n) = |A_1 B_1| \cdot S_{\perp}$.

2) пусть $\Gamma_i = A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ — боковая грань призмы P . Из условия $\gamma \perp (A_i B_i)$ следует, что $(C_i C_{i+1}) \perp (A_i B_i)$, т.е. отрезок $[C_i C_{i+1}]$ является высотой в параллелограмме Γ_i , отсюда

$$S_{\text{бок}}(P) = \sum_{i=1}^n s(\Gamma_i) = \sum_{i=1}^n |A_i B_i| \cdot |C_i C_{i+1}| = |A_1 B_1| \cdot \sum_{i=1}^n |C_i C_{i+1}| = |A_1 B_1| \cdot P_{\perp}.$$

■

Упражнения

1. Для любых двух тетраэдров T_1 и T_2 докажите, что $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{P}$, $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{P}$, $[T_1 \setminus T_2] \in \mathcal{P}$.
2. Докажите, что для любых $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ выполнено, что $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$, $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}$, $[P_1 \setminus P_2] \in \mathcal{P}$.
3. Докажите, что любой многогранник является полиэдром.

4.7. Объем пирамиды

Начнем с вспомогательного утверждения о свойствах суммы квадратов первых натуральных чисел.

Лемма 7.1. 1) для любого натурального числа n выполняется равенство $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ выполняется $1^2 + \dots + (n-1)^2 \leq \frac{n^3}{3}$;

3) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \geq \frac{n^3}{3}$.

Доказательство. 1) индукцией по n . Б.И. очевидна, поскольку $1 = 1$.



Ш.И. предположив, что для n утверждение верно, для $n + 1$ получим

$$\begin{aligned} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n + 1)^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \\ &= \frac{(n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} \end{aligned}$$

и шаг индукции доказан.

2) воспользовавшись равенством (1), получим оценку сверху для

$$1^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{(n - 1)n(2n - 1)}{6} \leq \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{n^3}{3}.$$

3) воспользовавшись равенством (1), получим оценку снизу для

$$1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \geq \frac{n \cdot n \cdot 2n}{6} = \frac{n^3}{3}.$$

■

Теорема 7.2. Пусть $\Phi = DT_1 \dots T_k$ является k -угольной пирамидой, причем $h = |DD'|$ — длина ее высоты ($D' = \text{Пр}_\alpha(D)$, где $\alpha = (T_1 \dots T_k)$ — плоскость основания) и $S_{\text{осн}} = s(T_1 T_2 \dots T_k)$ — площадь ее основания. Тогда $v(\Phi) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}}$.

Доказательство. 1-й случай: $\Phi = DABC$ — треугольная пирамида. Пусть точки $A_0 = D$, $A_1, \dots, A_n = A$ делят ребро DA на n равных частей ($n \in \mathbb{N}$). Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ через точку A_i проведем прямые $b_i \parallel (AB)$ и $c_i \parallel (AC)$ и получим точки $\{B_i\} = b_i \cap [DB]$ и $\{C_i\} = c_i \cap [DC]$ (существование этих точек гарантируется аксиомой П.4 — см. второй параграф первой главы Геометрии 10). По критерию параллельности двух плоскостей получим, что $\alpha_i = (A_i B_i C_i) \parallel \alpha = (ABC)$ (см. второй параграф третьей главы Геометрии 10) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ обозначим через $\Delta_i = \alpha_i \cap \Phi$ и $\Delta^* = \Delta_n = \Delta ABC$, тогда выполняются следующие свойства:

- 1) $H_D^{i/n}(\Delta^*) = \Delta_i$;
- 2) $s(\Delta_i) = S_{\text{осн}} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$;
- 3) все плоскости α_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) делят высоту $[DD']$ на n равных частей.

Выбор коэффициента i/n гомотетии гарантирует $H_D^{i/n}(A_n) = A_i$ (напомним, что $A_n = A$) и плоскость α , проходящая через A , будет отображаться на параллельную ей плоскость, проходящую через точку A_i , т.е.



$H_D^{i/n}(\alpha) = \alpha_i$. Очевидно, что $H_D^{i/n}((DB)) = (DB)$, а пересечение фигур при любом преобразовании переходит в пересечение образов (теорема 1.2 из второй главы), поэтому $\{B\} = (DH) \cap \alpha$ переходит в $\{B_i\} = (DH) \cap \alpha_i$. Аналогично доказывается, что $C_i = H_D^{i/n}(C)$ и свойство (1) доказано.

Свойство (2) следует из (1) и теоремы 5.4.

Мы уже знаем, что $\alpha_i \parallel \alpha$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, поэтому в плоскости (ADD') (если $D' \neq A$) они высекут параллельные прямые (A_iD_i) , где $\{D_i\} = \alpha_i \cap [DD']$. Применяя теорему Фалеса, получим равенство отрезков $[DD_1], [D_1D_2], \dots, [D_{n-1}D']$ и свойство (3) также доказано. Если же $D' = A$, то точка D_i совпадет с A_i при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и свойство (3) очевидно выполняется.

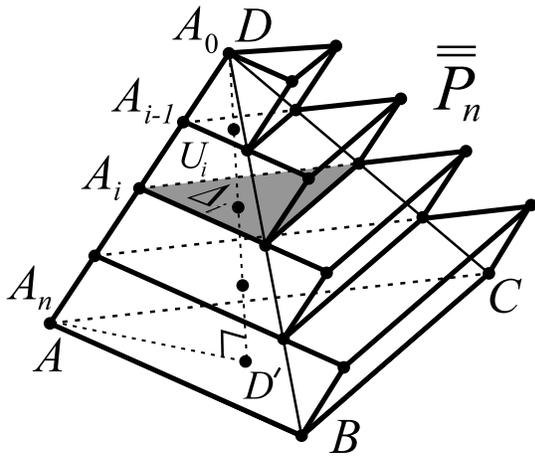


Рис. 179

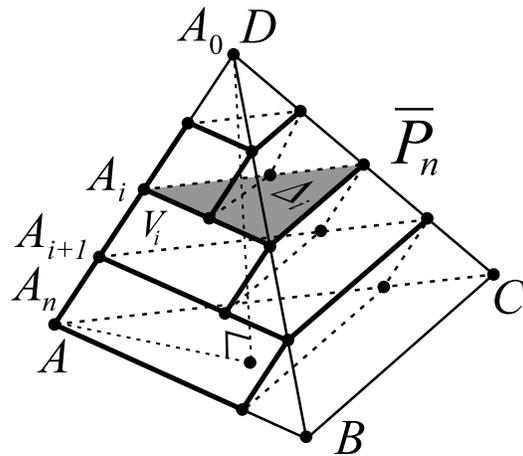


Рис. 180

Теперь при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ на каждом Δ_i , как на основании, построим «внешнюю» призму U_i с боковым ребром $[A_{i-1}A_i]$. Объединив «внешние» призмы, мы получим фигуру $\overline{P}_n = \bigsqcup_{i=1}^n U_i$, которую будем называть «внешней лестницей» (рис. 179). Заметим, что часть пирамиды Φ , лежащая между плоскостями α_i и α_{i-1} , содержится в U_i при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, поэтому $\Phi \subseteq \bigsqcup_{i=1}^n U_i$, т.е. «внешняя лестница» \overline{P}_n содержит Φ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Повторим процесс и для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ на Δ_i , как на основании, построим «внутреннюю» призму V_i , но уже с боковым ребром $[A_iA_{i+1}]$. Объединив «внутренние» призмы, мы получим фигуру $\overline{P}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} V_i$, которую будем называть «внутренней лестницей» (рис. 180). Заметим, что часть пирамиды Φ , лежащая между плоскостями α_i и α_{i+1} , содержит призму V_i при всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$, поэтому $\bigsqcup_{i=1}^{n-1} V_i \subseteq \Phi$, т.е. «внутренняя лестница»



\overline{P}_n целиком содержится в пирамиде Φ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что призмы U_i и V_i равны между собой (поскольку переходят друг в друга при параллельном переносе), имеют общее основание Δ_i и длина их высоты по свойству (3) равна h/n , поэтому из теоремы 6.6 получим $v(U_i) = v(V_i) = \frac{h}{n} \cdot s(\Delta_i) = \frac{h}{n^3} \cdot s(\Delta^*) \cdot i^2$. В последнем переходе мы использовали свойство (2). Подставим $s(\Delta^*) = S_{\text{осн}}$ в последнее равенство и, используя аддитивность функции $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, посчитаем объемы двух «лестниц»:

$$v(\overline{P}_n) = \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \quad \text{и} \quad v(\overline{\overline{P}}_n) = \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^n i^2.$$

Используя двойное включение $\overline{P}_n \subseteq \Phi \subseteq \overline{\overline{P}}_n$ и монотонность функции объема, придем к двойному неравенству

$$\frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \leq v(\Phi) \leq \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^n i^2. \quad (*)$$

Также воспользуемся неравенствами (2) и (3) предыдущей леммы, чтобы получить

$$\frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \leq \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} \leq \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \sum_{i=1}^n i^2. \quad (**)$$

Из (*) и (**) получаем оценку

$$0 \leq \left| v(\Phi) - \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} \right| \leq \frac{h}{n^3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) = \frac{h}{n} \cdot S_{\text{осн}}.$$

Применяя П2П, приходим к $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| v(\Phi) - \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} \right| = 0$. Учитывая, что под модулем стоят числа, не зависящие от n , получим $\left| v(\Phi) - \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} \right| = 0$ или $v(\Phi) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}}$.

2-й случай: $\Phi = DT_1 \dots T_k$ — произвольная пирамида. Представим ее основание в виде $T_1 \dots T_k = \bigsqcup_{j=1}^l \tilde{\Delta}_j$. Пусть F_j — тетраэдр с основанием $\tilde{\Delta}_j$ и вершиной D . Длина высоты у каждого из этих тетраэдров равна $h = |DD'|$. Кроме того, при различных индексах j_1 и j_2 тетраэдры F_{j_1} и F_{j_2} не имеют общих внутренних точек (иначе их общая внутренняя точка при центральной проекции из точки D перешла бы во внутреннюю точку треугольников $\tilde{\Delta}_{j_1}$



и $\tilde{\Delta}_{j_2}$), поэтому $\Phi = \bigsqcup_{j=1}^l F_j$ и из аддитивности объема получим

$$v(\Phi) = v\left(\bigsqcup_{j=1}^l F_j\right) = \sum_{j=1}^l \frac{1}{3} \cdot h \cdot s(\tilde{\Delta}_j) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \sum_{j=1}^l s(\tilde{\Delta}_j) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн.}}$$

■

Следствие 1. Пусть $\Phi = ABCD$ — тетраэдр и $D' = \text{Пр}_{(ABC)}(D)$, $A' = \text{Пр}_{(BCD)}(A)$, $B' = \text{Пр}_{(ACD)}(B)$ и $C' = \text{Пр}_{ABD}(C)$. Тогда

$$\begin{aligned} v(\Phi) &= \frac{1}{3} \cdot |DD'| \cdot s(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \cdot |AA'| \cdot s(\triangle BCD) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot |BB'| \cdot s(\triangle ACD) = \frac{1}{3} \cdot |CC'| \cdot s(\triangle ABD). \end{aligned}$$

Доказательство. Первый случай предыдущей теоремы надо повторить для каждой пары «основание и проведенная к нему высота».

■

Следствие 2. Функция $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами (1)–(4) существует и единственна.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.7. Корректность определения объема тетраэдра доказана в предыдущем следствии.

■

Упражнения

1. Докажите, что любой треугольник равносоставлен с параллелограммом, сторона у которого совпадает со стороной треугольника, а высота в два раза меньше. Верно ли, что любой тетраэдр равносоставлен с параллелепипедом?
2. Пусть T^* — правильный тетраэдр, у которого $v(T^*) = 1$ и K^* — единичный куб. Верно ли, что T^* и K^* равносоставлены?

4.8. Кубируемые тела. Цилиндр

Функцию объема с множества всех полиэдров можно продолжить на некоторое семейство ограниченных подмножеств \mathbb{P}_3 и сделать это можно точно так же, как мы определяли площадь квадратурных плоских фигур. Уверенно пройдемся по уже известной нам дороге, опуская доказательства некоторых утверждений.



Определение. Ограниченная фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ называется кубируемой (или имеющей объем), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такую пару полиэдров $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, что $P_1 \subseteq \Phi \subseteq P_2$ и $v(P_2) - v(P_1) < \varepsilon$. Множество всех кубируемых фигур будем обозначать⁹ через Vol .

Определение. Нижним (соответственно верхним) объемом ограниченной фигуры $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ называется число $v_*(\Phi) = \sup\{v(P_1) : P_1 \in \mathcal{P} \& P_1 \subseteq \Phi\}$ ($v^*(\Phi) = \inf\{v(P_2) : P_2 \in \mathcal{P} \& \Phi \subseteq P_2\}$).

Определим для любой ограниченной фигуры $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ два множества: $X = \{v(P_1) : P_1 \in \mathcal{P} \& P_1 \subseteq \Phi\}$ и $Y = \{v(P_2) : P_2 \in \mathcal{P} \& \Phi \subseteq P_2\}$. Так как $\emptyset \subseteq \Phi$ и $\emptyset \in \mathcal{P}$, то $0 \in X$ и X — непустое подмножество \mathbb{R} . Ограниченность тела Φ дает существование $O_\varepsilon(A)$ и некоторого куба $K = ABCDA_1B_1C_1D_1$, для которых $\Phi \subseteq O_\varepsilon(A) \subseteq K$. Но тогда для любого $P_1 \in \mathcal{P} \& P_1 \subseteq \Phi$ выполняется $P_1 \subseteq K$ и $v(P_1) \leq v(K)$ (по свойству монотонности объема). Последнее означает, что X — ограниченное сверху числовое множество, тем самым мы проверили корректность введения нижнего объема для любой ограниченной фигуры. Мы уже показали, что $v(K) \in Y$, кроме того Y снизу ограничено нулем, поэтому у этого множества существует инфимум и мы также доказали корректность введения верхнего объема для любой ограниченной фигуры. Монотонность функции объема на множестве полиэдров позволяет из двойного включения $P_1 \subseteq \Phi \subseteq P_2$ получить, что $v(P_1) \leq v(P_2)$. Это означает, что $v(P_2)$ — одна из верхних границ множества X , откуда $v_*(\Phi) = \sup X \leq v(P_2)$. Неравенство $v_*(\Phi) \leq v(P_2)$, которое выполняется для всех $P_2 \in \mathcal{P} \& \Phi \subseteq P_2$, говорит о том, что $v_*(\Phi)$ — одна из нижних границ для числового множества Y , поэтому неравенство $v_*(\Phi) \leq v^*(\Phi)$ выполняется для любого ограниченного тела $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$. Мы уже готовы сформулировать *первый критерий кубируемости*.

Теорема 8.1. Ограниченная фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ кубируема тогда и только тогда, когда $v_*(\Phi) = v^*(\Phi)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.1. ■

Определение. Для каждой фигуры $\Phi \in \text{Vol}$ ее объемом называется число $v(\Phi) = v_*(\Phi) = v^*(\Phi)$.

Пример 1. Ясно, что любой полиэдр P кубируем, поскольку в качестве P_1 и P_2 можно взять саму фигуру P и получить $v(P_2) - v(P_1) = 0 < \varepsilon$ для

⁹От volume (англ.) — объем.



любого $\varepsilon > 0$. Причем число $v(P)$, определенное в предыдущем параграфе, будет одновременно максимальным во множестве X и минимальным в Y , поэтому $v_*(P)$ и $v^*(P)$ равны хорошо знакомому нам значению $v(P)$.

Пример 2. Для построения некубируемого тела введем в \mathbb{P}_3 декартову систему координат $Oxyz$ и рассмотрим единичный куб $K^* = [0; 1]^3$. Выбросим из K^* все точки, у которых все три координаты являются рациональными числами, и получим «достаточно дырявое» множество Φ . Покажем, что $\Phi \notin \text{Vol}$. Так же, как и во втором примере на стр. 183 доказывается, что $v_*(\Phi) = 0 < 1 = v^*(\Phi)$, поэтому предыдущая теорема дает $\Phi \notin \text{Vol}$.

Следующее утверждение, которое мы будем называть *вторым критерием кубируемости*, часто будет использоваться в доказательствах и при вычислении объема, в ссылках на него будем использовать обозначение \diamond_3 (индекс 3 указывает на размерность пространства).

Теорема 8.2. 1) *ограниченная фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ кубируема тогда и только тогда, когда найдутся две такие последовательности $\{\bar{P}_n\} \subseteq \mathcal{P}$, $\{\overline{\bar{P}}_n\} \subseteq \mathcal{P}$, что $\bar{P}_n \subseteq \Phi \subseteq \overline{\bar{P}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (v(\overline{\bar{P}}_n) - v(\bar{P}_n)) = 0$.*
2) *если последовательности $\{\bar{P}_n\}$, $\{\overline{\bar{P}}_n\}$ удовлетворяют условиям утверждения (1), то $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\bar{P}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\bar{P}_n)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.2. ■

Тела вращения, которые получаются из простых плоских фигур, дают примеры кубируемых тел, которые не являются полиэдрами. Начнем с определений.

Определение. Пусть $F, a \subseteq \alpha$. Тело Φ получено вращением фигуры F вокруг прямой a , если $\Phi = \bigcup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} R_a^\varphi(F)$, при этом прямая a называется осью вращения, F — порождающей фигурой. Также будем использовать сокращение $\Phi = R_a(F)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Пусть $A \notin a$ и $O = \text{Пр}_a(A)$, тогда $R_a(A) = \omega$, где ω является окружностью $\omega(O, |OA|)$, расположенной в плоскости β , для которой выполняются два условия: $A \in \beta$ и $\beta \perp a$. Это сразу следует из определения поворота R_a^φ и диапазона изменения величины угла поворота — φ принимает все значения из отрезка $[0; 2\pi]$. Окружность ω — самый простой пример (после пустого множества) тела вращения, поскольку оно



порождается одноточечным множеством $\{A\}$ (т.е. *синглетоном*).

С помощью первого примера можно описать произвольное тело вращения $\Phi = R_a(F)$ как объединение всех окружностей, которые порождаются точками фигуры F .

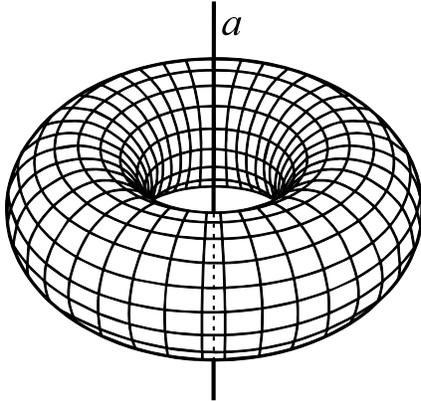


Рис. 181

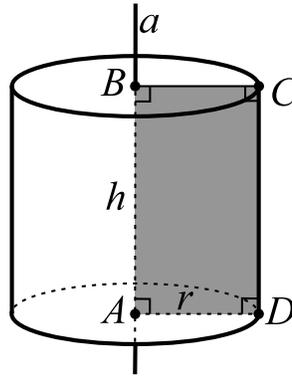


Рис. 182

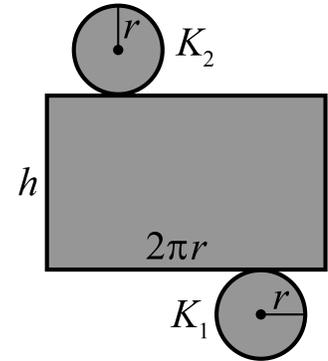


Рис. 183

Пример 4. Пусть $\omega = \omega(O, r)$, $a \subseteq \alpha$ и $\omega \cap a = \emptyset$, тогда $\Phi = R_a(\omega)$ — *тор* (рис. 181). Если мы будем вращать круг $F = K(O, r)$ вокруг прямой a (сохраняя такие же условия $F, a \subseteq \alpha$ и $F \cap a = \emptyset$), то получится тело вращения $\tilde{\Phi} = R_a(F)$, которое называется *полноторием*. Нетрудно понять, что тор является границей полнотория, объем тора нулевой, а объем полнотория положителен. Поэтому известного бога в германо-скандинавской мифологии правильнее было бы называть не Тором, а Полноторием.

Пример 5. Пусть $\omega = \omega(O, r)$, $a \subseteq \alpha$ и $O \in a$, тогда $R_a(\omega)$ — это сфера $Sph(O, r)$. Если мы будем вращать круг $F = K(O, r)$ вокруг a (сохраняя условия $F, a \subseteq \alpha$ и $O \in a$), то получится шар $B(O, r) = R_a(F)$.

Определение. Пусть $F = ABCD$ — прямоугольник и $a = (AB)$, тогда тело вращения $\Phi = R_a(F)$ называется *цилиндром*¹⁰ (рис. 182).

Элементы цилиндра. Прямая $a = (AB)$ называется *осью* цилиндра Φ . Круги $K_1 = R_a([AD])$ и $K_2 = R_a([BC])$ называются *основаниями* Φ , а число $r = |AD|$ — радиусом основания. Отрезок $[AB]$ называется *высотой* цилиндра Φ , и $h = |AB|$ — длина высоты. Образ отрезка $[CD]$ при повороте R_a^φ для любого $\varphi \in [0; 2\pi]$ называется *образующей* цилиндра, объединение всех образующих, т.е. $R_a([CD])$, называется *боковой поверхностью* Φ . *Разверткой цилиндра* называется объединение (без общих внутренних точек)

¹⁰Эту фигуру также называют *прямым круговым цилиндром*.



прямоугольника с длинами сторон h и $2\pi r$ с двумя кругами радиуса r , которые касаются противоположных сторон этого прямоугольника с длинами $2\pi r$ (рис. 183).

Определение. Призма $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ вписана в цилиндр Φ с основаниями K_1 и K_2 , если n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в K_1 , а $B_1 \dots B_n$ — в K_2 . Призма $\overline{\overline{P}}_n = C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n$ называется описанной около цилиндра Φ с основаниями K_1 и K_2 , если круг K_1 вписан в многоугольник $C_1 \dots C_n$, а K_2 — в $D_1 \dots D_n$. Площадью боковой поверхности цилиндра Φ называется $S_{\text{бок}}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\overline{P}_n)$, где $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — правильная n -угольная призма, вписанная в цилиндр Φ . Площадью полной поверхности цилиндра Φ называется $S_{\text{полн}}(\Phi) = S_{\text{бок}}(\Phi) + s(K_1) + s(K_2)$.

Определение. Периметром многоугольника $M = A_1 \dots A_n$ называется число $p(M) = \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$.

Лемма 8.3. Пусть n -угольники $\overline{M}_n = A_1 \dots A_n$, $\overline{\overline{M}}_n = C_1 \dots C_n$ являются правильными, причем \overline{M}_n вписан в окружность $\omega = \omega(O, r)$, а $\overline{\overline{M}}_n$ описан около ω , тогда выполняются равенства:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_1 \dots A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(C_1 \dots C_n) = 2\pi r$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} s(A_1 \dots A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(C_1 \dots C_n) = \pi r^2$.

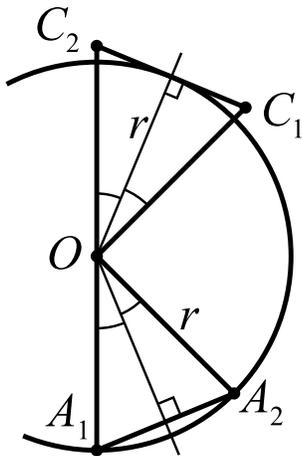


Рис. 184

Доказательство. 1) из $\triangle O A_1 A_2$ (рис. 184) находим длину одной из сторон вписанного многоугольника

$|A_1 A_2| = 2r \sin \frac{2\pi}{2n} = 2r \sin \frac{\pi}{n}$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_1 \dots A_n) = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \pi \right) = 2\pi r.$$

Теперь из треугольника $O C_1 C_2$ (рис. 184) находим длину одной из сторон описанного многоугольника $|C_1 C_2| = 2r \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2n} = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(C_1 \dots C_n) = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}} \cdot \pi \right) = 2\pi r.$$

В последнем переходе, кроме 13П, мы воспользовались непрерывностью косинуса в нуле, т.е. равенством $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

2) следует из теоремы 5.3 о площади сектора.





Теорема 8.4. Пусть Φ — цилиндр, причем r — радиус его основания и h — длина его высоты, тогда:

- 1) $S_{\text{бок}}(\Phi) = 2\pi r h$;
- 2) $S_{\text{полн}}(\Phi) = 2\pi r(h + r)$;
- 3) $\Phi \in \text{Vol}$;
- 4) $v(\Phi) = \pi r^2 h$.

Доказательство. 1) пусть $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — правильная n -угольная призма, вписанная в цилиндр Φ . Воспользуемся определением площади боковой поверхности Φ и первым утверждением предыдущей леммы:

$$S_{\text{бок}}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\overline{P}_n) = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_1 \dots A_n) = h \cdot 2\pi r.$$

2) пусть K_1, K_2 — основания цилиндра Φ , тогда из следствия теоремы 5.3 получим, что $s(K_1) = s(K_2) = \pi r^2$. Теперь только что доказанная формула (1) и определение площади полной поверхности дают равенство $S_{\text{полн}}(\Phi) = S_{\text{бок}}(\Phi) + 2s(K_1) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$.

3) и 4) будем доказывать одновременно. Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ рассмотрим правильные n -угольные призмы $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ и $\overline{\overline{P}}_n = C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n$, причем \overline{P}_n вписана в цилиндр Φ , а $\overline{\overline{P}}_n$ описана около него. Тогда из (2) предыдущей леммы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(h \cdot s(A_1 \dots A_n) \right) = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(A_1 \dots A_n) = h \cdot \pi r^2, \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{P}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(h \cdot s(C_1 \dots C_n) \right) = h \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(C_1 \dots C_n) = h \cdot \pi r^2. \quad (**)$$

Из (*), (**) и критерия \diamond_3 (теорема 8.2) получим, что одновременно выполняются два утверждения: $\Phi \in \text{Vol}$ и $v(\Phi) = \pi r^2 h$. ■

Цилиндрическая поверхность нетривиально связана с эллипсом k_3 , который был определен на стр. 106. Напомним, что для каждой точки $M \in k_3$ выполняется $|MF_1| + |MF_2| = l$, где F_1, F_2 — фокусы эллипса и по определению $l > 2c = |F_1 F_2|$. Для большой и малой полуосей (соответственно с длинами a и b) эллипса выполняются равенства: $b = \sqrt{(l/2)^2 - c^2}$ (из прямоугольного треугольника OPF_2 на рис. 185) и $l = (a - c) + (a + c)$, т.е. $a = l/2$ (из двузвенной ломаной $[F_1 Q] \cup [Q F_2]$). Поэтому по числам l и c длины полуосей эллипса определяются однозначно. Обратно, если заданы числа a и b ($a \geq b > 0$), то $l = 2a$ и $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ также однозначно находятся. В следующем определении поменяем обозначения для прямых чтобы не было совпадений с длинами полуосей эллипса.



Определение. Пусть $a^* \parallel b^*$ и $a^* \neq b^*$, тогда фигура вращения $\Phi = R_{a^*}(b^*)$ называется цилиндрической поверхностью (рис. 186). Прямая $b' = R_{a^*}^\varphi(b^*)$ называется образующей Φ при каждом $\varphi \in [0; 2\pi]$. Если $\beta \nparallel b^*$, то $\beta \cap \Phi$ называется собственным сечением цилиндрической поверхности Φ (рис. 186).

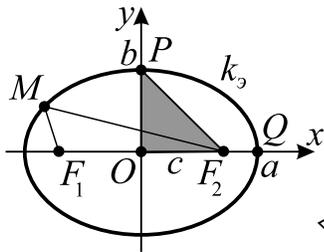


Рис. 185

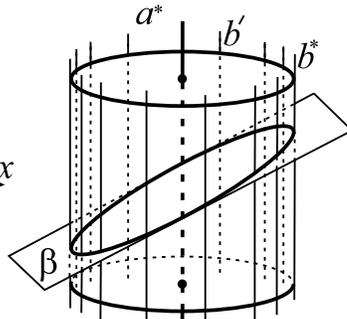


Рис. 186

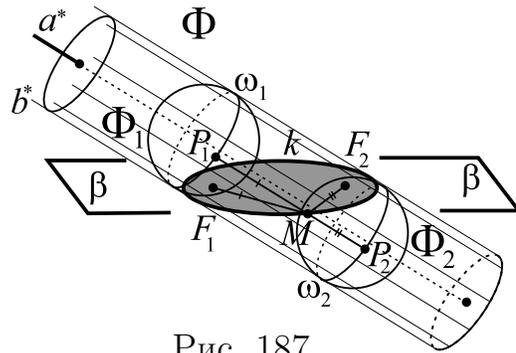


Рис. 187

Теорема 8.5. 1) каждое собственное сечение любой цилиндрической поверхности является эллипсом.

2) для любого эллипса k_3 можно найти такую цилиндрическую поверхность $\Phi = R_{a^*}(b^*)$ и плоскость $\beta \nparallel b^*$, что $\beta \cap \Phi = k_3$.

Доказательство. 1) пусть $\Phi = R_{a^*}(b^*)$ — цилиндрическая поверхность, $\beta \nparallel b^*$ и $k = \beta \cap \Phi$ (рис. 187). Учитывая, что любая образующая b' поверхности Φ параллельна прямой b^* , плоскость β пересечет b' и точка пересечения принадлежит k . Обозначим через $r = d(a^*, b^*)$ и для любой точки $O^* \in a^*$ рассмотрим сферу $\Phi^* = Sph(O^*, r)$. Центр этой сферы удален от каждой образующей b' на расстояние r , поэтому Φ^* и b' касаются друг друга, причем точка касания лежит в плоскости γ , которая перпендикулярна a^* (так как $b' \parallel a^*$) и проходит через точку O^* . В результате точки касания сферы Φ^* с цилиндрической поверхностью Φ образуют окружность $\omega^* = \gamma \cap \Phi$, которую будем называть ортогональным сечением поверхности Φ , а сферу Φ^* будем называть вписанной в Φ . Теперь найдем две сферы $\Phi_1 = Sph(O_1, r)$ и $\Phi_2 = Sph(O_2, r)$, вписанные в цилиндрическую поверхность Φ , которые касаются плоскости β , но расположены по разные стороны от β . Сделать это несложно: достаточно провести две различные плоскости $\beta_1, \beta_2 \parallel \beta$, для которых $d(\beta, \beta_1) = d(\beta, \beta_2) = r$. Тогда $\{O_1\} = \beta_1 \cap a^*$ и $\{O_2\} = \beta_2 \cap a^*$ дают центры искоемых сфер. Обозначим через F_1 и F_2 соответственно точки касания с плоскостью β сфер Φ_1 и Φ_2 . Пусть также $\omega_1 = \Phi_1 \cap \Phi$ и $\omega_2 = \Phi_2 \cap \Phi$. Мы уже знаем, что ω_1 и ω_2 являются ортогональными сечениями поверхности Φ , поэтому они расположены в параллельных плоскостях и расстояния между точками этих окружностей,



которые лежат на одной образующей, всегда равно одному и тому же числу, которое обозначим через l (поскольку эти окружности являются границами оснований цилиндра и каждый из этих отрезков равен образующей этого цилиндра, причем $l = d(\omega_1, \omega_2)$). Теперь возьмем произвольную точку $M \in k$ и проведем через нее отрезок $[P_1P_2]$ так, чтобы $(P_1P_2) \parallel b^*$, $P_1 \in \omega_1$, $P_2 \in \omega_2$, тогда $|P_1P_2| = l$. Отрезки $[MF_1]$ и $[MP_1]$ равны между собой, поскольку являются отрезками касательных из точки M к сфере Φ_1 , аналогично с помощью сферы Φ_2 доказывается равенство $[MF_2] = [MP_2]$. В результате $|MF_1| + |MF_2| = l$ и точка M принадлежит эллипсу с фокусами F_1 и F_2 . Мы доказали, что $k \subseteq k_\beta$, где k_β — эллипс в плоскости β , построенный по фокусам F_1 , F_2 и числу l . Обратно, для любой точки $N \in k_\beta$ луч $[ON)$ (где O — центр эллипса, т.е. середина $[F_1F_2]$) пересекает k_β в единственной точке N , а также пересекает Φ в единственной точке M . Мы уже доказали, что $M \in k_\beta$, поэтому $N = M \in k$ и обратное включение доказано.

2) пусть k_β эллипс, длины полуосей которого равны b и a ($b \leq a$). При $a = b$ утверждение очевидно, поскольку k_β является окружностью и его можно реализовать как ортогональное сечение цилиндрической поверхности $\Phi = R_{a^*}(b^*)$ с $d(a^*, b^*) = a$. Далее считаем, что $b < a$ и β — это плоскость эллипса k_β . Обозначим через e прямую, которая содержит малую ось эллипса и проведем через эту прямую плоскость α так, чтобы $\cos \widehat{\alpha, \beta} = b/a$. Пусть $a^* \perp \alpha$ и $O \in a^*$, где O — центр эллипса. Далее проведем прямую $b^* \parallel a^*$ так, чтобы $d(a^*, b^*) = b$ и рассмотрим цилиндрическую поверхность $\Phi = R_{a^*}(b^*)$. Из (1) мы знаем, что $\beta \cap \Phi = k$ — эллипс, причем у k и k_β совпали малые оси. Кроме того, по выбору угла между α и β длина большой полуоси у k равна числу a . Поскольку параметрами b и a эллипс задается однозначно, эллипсы k_β и k совпадают. ■

Данделен¹¹ в своей работе 1822 года стал использовать сферы для определения фокусов конических сечений и сечений цилиндрической поверхности, поэтому этот метод называется *методом сфер (или шаров) Данделена*.

Если плоскость β пересекает каждую образующую цилиндра $\Phi = R_a(F)$, где $F = ABCD$ — прямоугольник и $a = (AB)$, то $\beta \cap \Phi$ называется *соб-*

¹¹Жерминаль Пьер Данделен (1794–1847) — бельгийский математик французского происхождения, окончил Политехническую школу в Париже (1813); во время занятий в Политехнической школе участвовал в шестидневной войне на стороне Наполеона, после окончания школы работал в министерстве внутренних дел под началом известного французского математика Лазара Карно; в 20–30х годах преподает в бельгийских университетах, член Бельгийской академии наук с 1825 года; математические работы посвящены геометрии и алгебре, разработал метод стереографической проекции; инженер-полковник бельгийской армии.



ственным сечением Φ .

Следствие 1. *Граница собственного сечения цилиндра является эллипсом.*

Доказательство. Сразу следует из (1) предыдущей теоремы. ■

Следствие 2. *Пусть границей ограниченной фигуры F является эллипс k_3 , причем a и b — длины его полуосей ($0 < b \leq a$). Тогда $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = \pi ab$.*

Доказательство. Будем следовать доказательству (2) предыдущей теоремы, чтобы найти круг K с диаметром длины $2b$, и диаметр совпадает с малой осью эллипса k_3 . Пусть также α и β — плоскости круга и эллипса соответственно, по построению угол между этими плоскостями равен $\varphi = \arccos(b/a)$. Учитывая, что любая образующая цилиндрической поверхности, построенной в (2) предыдущей теоремы, перпендикулярна плоскости α , получим, что $K = \text{Pr}_\alpha(F)$. Теперь из $K \in \text{Sq}$, $s(K) = \pi b^2$ и следствия теоремы 5.6 получим, что $F \in \text{Sq}$ и $s(F) = s(K)/\cos \varphi = \pi ab$. ■

Теорема 8.6. *Функция $v : \text{Vol} \rightarrow \mathbb{R}$ является продолжением функции $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ и также удовлетворяет свойствам (1)–(4).*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.7. ■

Упражнения

1. Для эллипса с фокальным расстоянием $|F_1F_2| = 8$ и $l = 10$ найдите длины его большой и малой полуосей.
2. Для эллипса с длинами полуосей 13 и 12 найдите l и фокальное расстояние.
3. Для эллипсов из предыдущих двух упражнений найдите цилиндрические поверхности, сечениями которых будут эти эллипсы; определите радиусы ортогональных сечений этих поверхностей и угол между плоскостями α и β в утверждении (2) теоремы 8.5.

4.9. Конус, его объем и площадь поверхности

Определение. Пусть $F = \triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, причем $\widehat{ACB} = 90^\circ$ и $a = (AC)$, тогда тело вращения $\Phi = R_a(F)$ называется конусом¹² (рис. 188).

¹²Эту фигуру также называют прямым круговым конусом.



Элементы конуса. Точка A называется *вершиной* конуса Φ . Прямая $a = (AC)$ называется *осью* Φ . Круг $K = R_a([CB])$ называется *основанием* Φ , а число $r = |BC|$ — радиусом основания. Отрезок $[AC]$ называется *высотой* конуса Φ , и $h = |AC|$ — длина высоты. Образ отрезка $[AB]$ при повороте R_a^φ для любого $\varphi \in [0; 2\pi]$ называется *образующей* конуса, объединение всех образующих, т.е. $R_a([AB])$, называется *боковой поверхностью* Φ . Через l обозначают длину любой образующей. *Разверткой конуса* называется объединение (без общих внутренних точек) сектора круга радиуса l с центральным углом $\varphi = 2\pi r/l$ (поскольку $\varphi = \frac{2\pi r}{2\pi l} \cdot 2\pi$) и круга радиуса r (рис. 189).

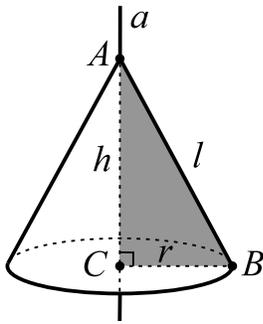


Рис. 188

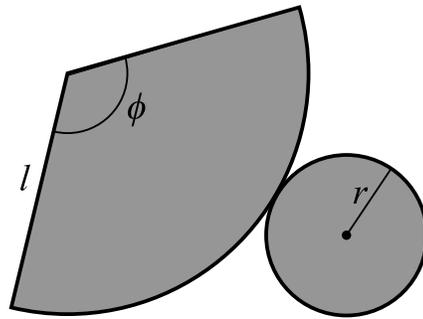


Рис. 189

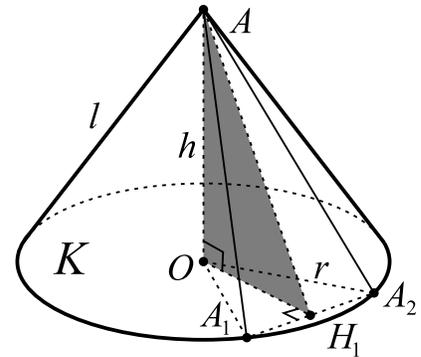


Рис. 190

Определение. Пирамида $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n A$ с вершиной в точке A и основанием $A_1 \dots A_n$ вписана в конус Φ с основанием K и вершиной в точке A , если n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в K . Пирамида $\overline{\overline{P}}_n = C_1 \dots C_n A$ с вершиной в точке A и основанием $C_1 \dots C_n$ описана около конуса Φ с основанием K и вершиной в точке A , если n -угольник $C_1 \dots C_n$ описан около круга K . Площадью боковой поверхности конуса Φ называется число $S_{\text{бок}}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\overline{P}_n)$, где $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n A$ — правильная n -угольная пирамида, вписанная в конус Φ . Площадью полной поверхности конуса Φ называется $S_{\text{полн}}(\Phi) = S_{\text{бок}}(\Phi) + s(K)$.

Теорема 9.1. Пусть Φ — конус, r — радиус его основания, h — длина высоты и l — длина его образующей, тогда:

- 1) $S_{\text{бок}}(\Phi) = \pi r l$;
- 2) $S_{\text{полн}}(\Phi) = \pi r(l + r)$;
- 3) $\Phi \in \text{Vol}$;
- 4) $v(\Phi) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$.

Доказательство. 1) пусть $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n A$ — правильная n -угольная пирамида, вписанная в конус Φ с основанием K и вершиной A . Обозна-



чим через O — центр основания K и H_1 — середину отрезка $[A_1A_2]$, тогда $[AH_1]$ — апофема (т.е. высота в боковой грани) пирамиды \overline{P}_n и выполняются соотношения $|OH_1| = r \cos \frac{\pi}{n}$ и $|AH_1| = \sqrt{h^2 + r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}$ (рис. 190). Непрерывность косинуса в нуле дает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} = r^2$. Воспользуемся теперь определением площади боковой поверхности Φ , равенством $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ и первым утверждением леммы 8.3:

$$S_{\text{бок}}(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\overline{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_1 \dots A_n) \cdot \frac{\sqrt{h^2 + r^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{2} = 2\pi r \cdot \frac{l}{2} = \pi r l.$$

2) только что доказанная формула (1) и определение площади полной поверхности дают равенство $S_{\text{полн}}(\Phi) = S_{\text{бок}}(\Phi) + s(K) = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$.

3) и 4) будем доказывать одновременно. Для любого натурального $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ рассмотрим правильные n -угольные пирамиды $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n A$ и $\overline{\overline{P}}_n = C_1 \dots C_n A$, причем \overline{P}_n вписана в конус Φ , а $\overline{\overline{P}}_n$ описана около него. Тогда из (2) леммы 8.3 получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} h \cdot s(A_1 \dots A_n) \right) = \frac{h}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(A_1 \dots A_n) = \frac{h}{3} \cdot \pi r^2, \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{P}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} h \cdot s(C_1 \dots C_n) \right) = \frac{h}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s(C_1 \dots C_n) = \frac{h}{3} \cdot \pi r^2. \quad (**)$$

Из (*), (**) и критерия \diamond_3 (теорема 8.2) получим, что одновременно выполняются два утверждения: $\Phi \in \text{Vol}$ и $v(\Phi) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. ■

Определение. Пусть $P = XA_1 \dots A_n$ — n -угольная пирамида с вершиной X и основанием $A_1 \dots A_n$, $\alpha = (A_1 \dots A_n)$ — плоскость основания, $B_1 \in]XA_1[$ и плоскость β выбрана так, что $\beta \parallel \alpha$ и $B_1 \in \beta$. Тогда часть пирамиды P , которая находится между плоскостями α и β , называется усеченной пирамидой P_1 (рис. 191).

Элементы усеченной пирамиды. Определим через $\{B_i\} = \beta \cap [XA_i]$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, тогда усеченная пирамида P_1 обозначается через $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$. Многоугольники $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_n$ называются основаниями P_1 , а трапеции $\Gamma_i = A_i A_{i+1} B_{i+1} B_i$ — ее боковыми гранями при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Площадью боковой поверхности P_1 называется число

$$S_{\text{бок}}(P_1) = \sum_{i=1}^n s(\Gamma_i),$$

а площадью ее полной поверхности — сумма $S_{\text{бок}}(P_1)$ с площадями ее оснований. Отрезки $[A_i B_i]$ называются боковыми ребрами



P_1 при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. *Высотой* усеченной пирамиды P_1 называется произвольный отрезок $[YZ]$, для которого $Z \in \alpha$, $Y \in \beta$ и $(YZ) \perp \alpha$; через H традиционно обозначают длину высоты P_1 (т.е. $H = |YZ|$).

Лемма 9.2. Пусть $\Phi \in \text{Vol}$, $g \in \text{Sim}_3$ и k — коэффициент g . Тогда $\Phi_1 = f(\Phi)$ также кубируемо и $v(\Phi_1) = k^3 \cdot v(\Phi)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5.4. ■

Теорема 9.3. В усеченной пирамиде $P_1 = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ пусть H — длина ее высоты, $S_1 = s(A_1 \dots A_n)$, $S_2 = s(B_1 \dots B_n)$ — площади оснований P_1 . Тогда $v(P_1) = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$.

Доказательство. Обозначим через $P = XA_1 \dots A_n$ — исходную пирамиду, из которой получена усеченная пирамида $P_1 = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$, $P_2 = XB_1 \dots B_n$, $Y = \text{Пр}_\beta(X)$, $Z = \text{Пр}_\alpha(X)$ и $h = |XY|$ (рис. 191), тогда $[XY]$, $[XZ]$ и $[YZ]$ являются соответственно высотами пирамид P_2 , P и P_1 . Обозначим через $k = |XB_1|/|XA_1|$, тогда выполняется равенство $H_X^k(\alpha) = \beta$ (так как при гомотетии плоскость отображается в параллельную плоскость и коэффициент подобран так, что вершина A_1 переходит в B_1), откуда $H_X^k(A_i) = B_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $H_X^k(P) = P_2$. Предыдущая лемма сразу дает $v(P_2) = k^3 \cdot v(P)$. Заметим, что из подобия треугольников $\triangle A_1 X Z$ и $\triangle B_1 X Y$ следует, что $k = h/(h + H)$ и поэтому $1 - k = H/(h + H)$. Кроме того, пирамиды P_1 и P_2 не имеют общих внутренних точек (поскольку расположены по разные стороны от β), поэтому можно использовать аддитивность объема и получить

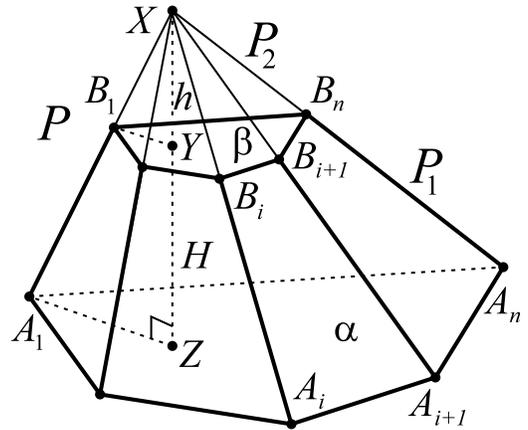


Рис. 191

$$\begin{aligned}
 v(P_1) &= v(P) - v(P_2) = v(P) - k^3 v(P) = \frac{1}{3}(1 - k)(h + H) \cdot S_1 (1 + k + k^2) = \\
 &= \frac{H(h + H)}{3(h + H)} \cdot (S_1 + kS_1 + k^2 S_1) = \frac{H}{3} \left(S_1 + \sqrt{S_1 \cdot (k^2 S_1)} + k^2 S_1 \right) = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot H \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2 \right).
 \end{aligned}$$



В последнем переходе мы использовали теорему 5.4 для того чтобы из равенства $H_X^k(A_1 \dots A_n) = B_1 \dots B_n$ вывести $S_2 = k^2 S_1$.

Определение. Пусть $F = ABCD$ — прямоугольная трапеция в которой $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$ и $(CD) \parallel (AB)$. Тело вращения $\Phi_1 = R_a(F)$, где $a = (AB)$, называется усеченным конусом (рис. 192).

Элементы усеченного конуса. Прямая $a = (AB)$ называется *осью* усеченного конуса Φ_1 . Круги $K_1 = R_a([AD])$ и $K_2 = R_a([BC])$ называются *основаниями* Φ_1 , а числа $R = |AD|$ и $r = |BC|$ — радиусами оснований. Отрезок $[AB]$ называется *высотой* Φ_1 , и $H = |AB|$ — длина высоты. Образ отрезка $[CD]$ при повороте R_a^φ для любого $\varphi \in [0; 2\pi]$ называется *образующей* усеченного конуса, объединение всех образующих, т.е. $R_a([CD])$, называется *боковой поверхностью* Φ_1 . Через L обозначают длину любой образующей. *Разверткой усеченного конуса* называется объединение (без общих внутренних точек) кругов K_1 , K_2 с разностью двух секторов с общим центральным углом (рис. 193).

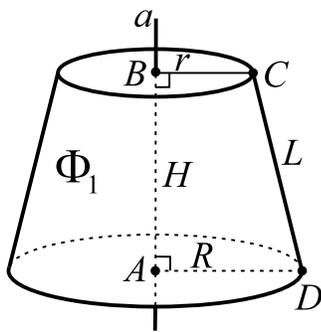


Рис. 192

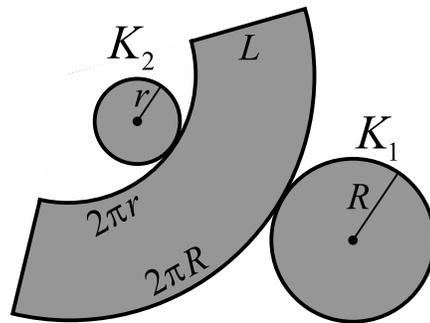


Рис. 193

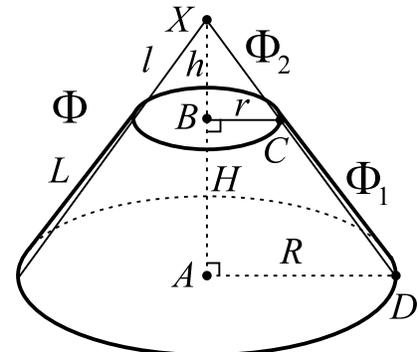


Рис. 194

Определение. Усеченная пирамида $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ вписана в усеченный конус Φ_1 с основаниями K_1 и K_2 , если n -угольник $A_1 \dots A_n$ вписан в K_1 , а многоугольник $B_1 \dots B_n$ вписан в K_2 . Усеченная пирамида $\overline{P}_n = C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n$ описана около усеченного конуса Φ_1 с основаниями K_1 и K_2 , если n -угольник $C_1 \dots C_n$ описан около круга K_1 , а n -угольник $D_1 \dots D_n$ описан около круга K_2 . Площадь боковой поверхности усеченного конуса Φ_1 называется число $S_{\text{бок}}(\Phi_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\overline{P}_n)$, где $\overline{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — правильная усеченная n -угольная пирамида, вписанная в Φ_1 . Площадь полной поверхности усеченного конуса Φ_1 называется $S_{\text{полн}}(\Phi_1) = S_{\text{бок}}(\Phi_1) + s(K_1) + s(K_2)$.



Теорема 9.4. Пусть Φ_1 — усеченный конус, R и r — радиусы его оснований, H — длина высоты и L — длина его образующей, тогда:

- 1) $S_{\text{бок}}(\Phi_1) = \pi L(R + r)$;
- 2) $S_{\text{полн}}(\Phi_1) = \pi \left(R(L + R) + r(L + r) \right)$;
- 3) $\Phi_1 \in \text{Vol}$;
- 4) $v(\Phi_1) = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \pi (R^2 + Rr + r^2)$.

Доказательство. Найдем точку $\{X\} = (AB) \cap (CD)$ и обозначим через $\Phi = R_a(\triangle ADX)$ и $\Phi_2 = R_a(\triangle BCX)$ — обычные конусы с вершиной в точке X (рис. 194). Тогда $|XB| = h$, $|XA| = h + H$ длины высот и $|XC| = l$, $|XD| = l + L$ — длины образующих конусов Φ_2 и Φ соответственно. Пусть $k = |XB|/|XA|$ и $f = H_X^k$, тогда при этой гомотетии выполняется $f(A) = B$, $f(D) = C$, $f(K_1) = K_2$ (где K_1 и K_2 — основания Φ_1) и $f(\Phi) = \Phi_2$. Сразу заметим, что $k = r/R = l/(l + L) = h/(h + H)$, поэтому $1 - k = L/(l + L) = H/(h + H)$.

1) рассмотрим $\bar{T}_n = A_1 \dots A_n X$ — правильную n -угольную пирамиду, вписанную в конус Φ , тогда $f(\bar{T}_n) = \bar{V}_n = B_1 \dots B_n X$ — правильная n -угольная пирамида, вписанная в конус Φ_2 и $\bar{P}_n = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ — правильная усеченная пирамида, вписанная в усеченный конус Φ_1 . Из теоремы 5.4 мы получим, что $S_{\text{бок}}(\bar{V}_n) = k^2 S_{\text{бок}}(\bar{T}_n)$, поэтому

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}}(\Phi_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\bar{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{\text{бок}}(\bar{T}_n) - S_{\text{бок}}(\bar{V}_n) \right) = \\ &= (1 - k^2) \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(\bar{T}_n) = (1 - k^2) S_{\text{бок}}(\Phi) = (1 - k^2) \pi (l + L) \cdot R = \\ &= \pi \left((1 - k)(l + L) \right) \cdot \left((1 + k)R \right) = \pi \frac{L(l + L)}{l + L} \cdot (R + kR) = \pi L(R + r). \end{aligned}$$

2) сразу следует из (1), определения $S_{\text{полн}}(\Phi_1)$ и формул $s(K_1) = \pi R^2$, $s(K_2) = \pi r^2$.

Утверждения (3) и (4) будем доказывать одновременно. Внимательно рассмотрим $\bar{\bar{T}}_n = C_1 \dots C_n X$ — правильную n -угольную пирамиду, описанную около конуса Φ , тогда $f(\bar{\bar{T}}_n) = \bar{\bar{V}}_n = D_1 \dots D_n X$ — правильная n -угольная пирамида, описанная около конуса Φ_2 и $\bar{\bar{P}}_n = C_1 \dots C_n D_1 \dots D_n$ — правильная n -угольная усеченная пирамида, описанная около усеченного конуса Φ_1 . Из леммы 9.2 следует, что $v(\Phi_2) = k^3 v(\Phi)$, а по теореме 9.1 получим

$$v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\bar{T}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\bar{\bar{T}}_n), \quad v(\Phi_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\bar{V}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\bar{\bar{V}}_n),$$



поэтому из-за аддитивности объема полиэдров следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{T}_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{V}_n) = v(\Phi) - v(\Phi_2) = (1 - k^3)v(\Phi), \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{P}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{T}}_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{V}}_n) = v(\Phi) - v(\Phi_2) = (1 - k^3)v(\Phi). \quad (**)$$

Теперь (*), (**) и критерий \diamond_3 дают $\Phi_1 \in \text{Vol}$ и

$$\begin{aligned} v(\Phi_2) &= (1 - k^3)v(\Phi) = \frac{\pi}{3} \left((1 - k)(h + H) \right) \cdot \left(R^2(1 + k + k^2) \right) = \\ &= \frac{\pi H(h + H)}{3(h + H)} \cdot \left(R^2 + R \cdot (kR) + k^2 R^2 \right) = \frac{1}{3} \cdot H \cdot \pi (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$



Определение. Пусть $\{O\} = a \cap b$ и прямые a и b не перпендикулярны, тогда фигура вращения $\Phi = R_a(b)$ называется конической поверхностью. Прямая a называется осью Φ , b — ее образующей и точка O называется вершиной Φ . Точкой O прямая b делится на два луча, l_1 и l_2 , множества $\Phi_1 = R_a(l_1)$ и $\Phi_2 = R_a(l_2)$ называются половинами конической поверхности Φ . Обозначим через $\varphi = \widehat{a, b}$, тогда 2φ будем называть угловой величиной Φ и обозначать через $\widehat{\Phi} = 2\varphi$.

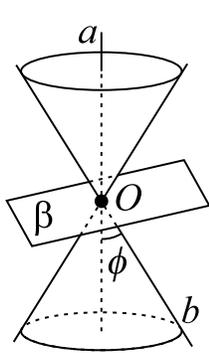


Рис. 195

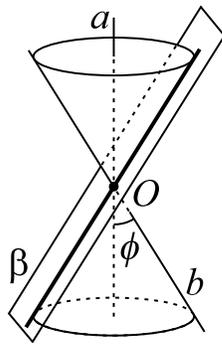


Рис. 196

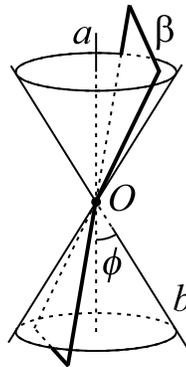


Рис. 197

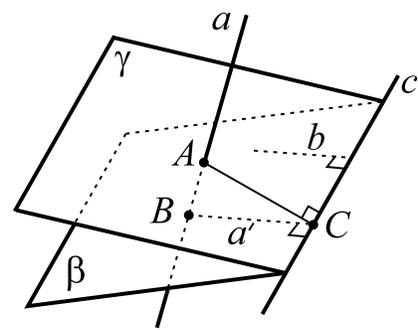


Рис. 198

Если плоскость β проходит через вершину поверхности $\Phi = R_a(b)$, то $\beta \cap \Phi$ называется *несобственным или вырожденным* коническим сечением. Обозначим через $\psi = \widehat{\beta, a}$, тогда нетрудно описать все вырожденные конические сечения: точка (при $\psi > \varphi$, рис. 195), прямая (если $\psi = \varphi$, рис. 196) или пара прямых (при $\psi < \varphi$, рис. 197). Если же $O \notin \beta$, то множество $\beta \cap \Phi$ называется *собственным или невырожденным* коническим сечением.



Определение. Квадрикой на плоскости β называется или окружность этой плоскости, или множество $\Psi \subseteq \beta$, для которого найдутся прямая $c \subseteq \beta$, точка $F \in \beta \setminus c$ и $\varepsilon > 0$, что $\Psi = \{X \in \beta : \varepsilon = |XF|/d(X, c)\}$. Прямая c называется директрисой Ψ , точка F — фокусом Ψ , а число ε — эксцентриситетом квадрики Ψ .

Прежде чем мы установим связь между квадриками и коническими сечениями, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 9.5. Пусть $a \perp \gamma$, $\psi = \widehat{\beta, a} \in (0; \pi/2)$ и $c = \beta \cap \gamma$ (рис. 198). Тогда для любой прямой $b \subseteq \beta$ из условия $b \perp c$ следует, что $\widehat{b, a} = \psi$.

Доказательство. Поскольку $a \perp \gamma$ и $c \subseteq \gamma$ сразу получим $a \perp c$. Ограничение $\psi \in (0; \pi/2)$ дает, что a — наклонная к плоскости β и можно найти $a' = \text{Пр}_{\beta}(a)$. Условия $a \perp c$, $c \subseteq \beta$ и теорема о трех перпендикулярах дают, что $a' \perp c$. Поэтому из $b \perp c$ получим $b \parallel a'$, откуда следует цепочка равенств $\widehat{b, a} = \widehat{a', a} = \widehat{\beta, a} = \psi$. ■

Следующее утверждение называется *директориальным* свойством конических сечений.

Теорема 9.6. 1) собственное коническое сечение является квадрикой. 2) для любой квадрики $\Psi \subseteq \beta$ можно найти такую коническую поверхность $\Phi = R_a(b)$, что $\Phi \cap \beta = \Psi$.

Доказательство. 1) пусть $\Phi = R_a(b)$ — коническая поверхность с вершиной в точке O , рассмотрим произвольную плоскость β , не проходящую через O и обозначим через $\varphi = \widehat{a, b}$ и $\psi = \widehat{\beta, a}$. При $\psi = \pi/2$ пересечение $\Psi = \beta \cap \Phi$ является окружностью, т.е. квадрикой и далее считаем, что $\psi \in [0; \pi/2)$. Ясно, что β пересекает по крайней мере одну полу поверхности Φ , обозначим эту полу через $\Phi_1 = R_a(l_1)$ (рис. 199).

Впишем в Φ_1 сферу $Sph(O_1, r)$, которая будет касаться плоскости β , так, что точки O и O_1 расположены по одну сторону от плоскости β . Для этого можно провести плоскость $\alpha \perp \beta$ так, чтобы $a \subseteq \alpha$, и в этой плоскости построить окружность $\omega_1 = \omega(O_1, r)$, вписанную в угол $\alpha \cap \Phi_1$ и касающуюся прямой $\alpha \cap \beta$. Так будет найден центр сферы и ее радиус. Обозначим точку касания β и $Sph(O_1, r)$ через F . Эта точка будет фокусом Ψ .

Точки касания $Sph(O_1, r)$ с конической поверхностью образуют окружность $\omega^* = \omega(O^*, r^*)$, которая расположена в некоторой плоскости γ , причем $\gamma \perp a$ (поскольку Φ и сфера имеют общую ось вращения). Условие



$\psi < \pi/2$ гарантирует, что $\beta \not\parallel \gamma$, поэтому найдется прямая c , для которой $c = \beta \cap \gamma$. Эта прямая будет директрисой Ψ .

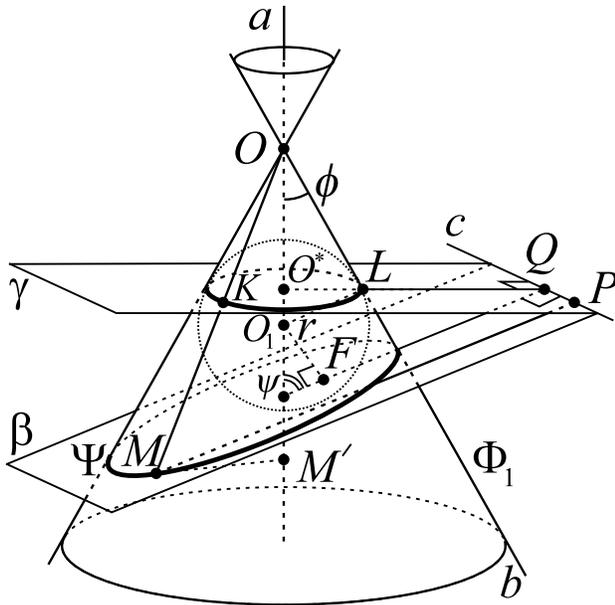


Рис. 199

окружностью ω^* и получим точку K . Поскольку $[MF]$ и $[MK]$ — отрезки касательных из точки M к $Sph(O_1, r)$, получим $|MF| = |MK|$. Точка K также лежит в плоскости γ , поэтому $\text{Pr}_a(K) = O^*$, откуда следует, что $|M'O^*| = |\text{Pr}_a([MK])| = |MK| \cos \varphi = |MF| \cos \varphi$ (**). Из (*) и (**) получим $|MP| \cos \psi = |MF| \cos \varphi$ или $|MF|/|MP| = \cos \psi / \cos \varphi = \varepsilon$.

Нетрудно также показать, что если точка $M \in \beta$, но M не лежит на конической поверхности Φ , то для нее $|MF|/|MP| \neq \cos \psi / \cos \varphi$. Для этого проведем через точку M прямую $c_1 \parallel c$ и рассмотрим два случая. Первый случай: $c_1 \cap \Phi \neq \emptyset$ (рис. 200). Тогда выберем точку $M_1 \in c_1 \cap \Phi$, для нее $|M_1F|/d(M_1, c) = \varepsilon$. Если точка $M \in \beta$ лежит внутри Φ , то $|MF| < |M_1F|$, но при этом $d(M_1, c) = d(M, c)$, откуда $|MF|/d(M, c) < \varepsilon$. Для точек $M \in \beta$, лежащих вне Φ , выполнено $|MF| > |M_1F|$, откуда $|MF|/d(M, c) > \varepsilon$. Второй случай: $c_1 \cap \Phi = \emptyset$. Пусть $D = \text{Pr}_{c_1}(F)$, $Q = \text{Pr}_c(F)$ и $\{T\} = [\overline{DF}] \cap \Phi$. Если $D \in]FQ[$ (рис. 201), то верно неравенство $|DF|/|DQ| > |TF|/|TQ| = \varepsilon$ (мы увеличили числитель дроби и уменьшили знаменатель), для остальных точек M прямой c_1 это отношение будет еще больше (мы увеличиваем числитель и сохраняем знаменатель). Чуть сложнее ситуация, когда $F \in]DQ[$ (рис. 202). Обозначим через $y = |TF|$, $z = |FQ|$ и $x = |DT|$, тогда $\frac{y}{y+z} = \varepsilon$. Но с учетом положительности ве-

Рассмотрим теперь любую точку $M \in \Psi$ и найдем две ее проекции: $P = \text{Pr}_c(M)$, $M' = \text{Pr}_a(M)$. Поскольку $c \subseteq \gamma$ и $\gamma \perp a$, проекция любой точки прямой c на прямую a будет равна точке O^* — центру окружности ω^* . Из предыдущей леммы следует, что $(\overline{MP}), a = \psi$, поэтому по формуле длины ортогональной проекции (см. первый параграф пятой главы Геометрии 10) вычислим длину $|\text{Pr}_a([MP])| = |M'O^*| = |MP| \cos \psi$ (*).

Отрезок $[MO]$, который является частью образующей поверхности Φ (откуда $(\overline{MO}), a = \varphi$), пересечем с



денной тройки чисел верно $\frac{x+y}{x+y+z} > \frac{y}{y+z}$, поскольку $xz > 0$. И снова, для остальных точек M прямой c_1 это отношение будет еще больше (мы увеличиваем числитель и не меняем знаменатель). Схожим образом получается противоречие, если $Q \in]DF[$ (т.е. фокус F и прямая c_1 лежат по разные стороны от директрисы). Таким образом, мы показали, что Ψ является квадрикой с фокусом F , директрисой c и эксцентриситетом $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi$.

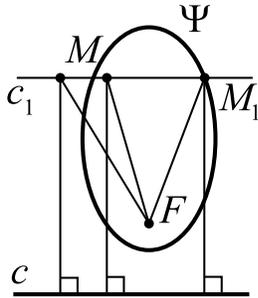


Рис. 200

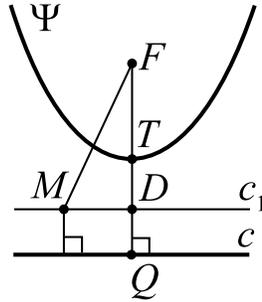


Рис. 201

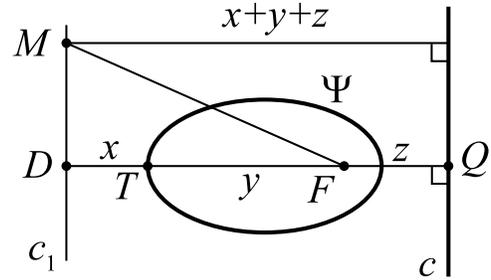


Рис. 202

Прежде чем мы перейдем к доказательству (2), найдем расстояние $|FQ|$ — между фокусом и директрисой. Для этого перейдем в плоскость $\alpha \perp \beta$, в которой лежит ось a . Ясно, что точки O_1, O^*, F и Q лежат в этой плоскости. Обозначим через $F' = \text{Пр}_a(F)$, тогда из $\widehat{FO_1F'} = \frac{\pi}{2} - \psi$ и формулы длины проекции следует, что $|F'O_1| = r \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = r \sin \psi$. Обозначив через L точку пересечения $[QO^*]$ с образующей конической поверхности Φ (рис. 199), из прямоугольного треугольника O_1LO^* находим $|O_1O^*| = r \sin \varphi$ (мы использовали перпендикулярность радиуса $[O_1L]$ образующей поверхности Φ). С учетом выбора сферы мы имеем $O_1 \in [F'O^*]$, поэтому $|F'O^*| = r(\sin \varphi + \sin \psi)$. Осталось заметить, что отрезок $[F'O^*]$ является ортогональной проекцией отрезка $[FQ]$ на прямую a , поэтому $|FQ| = |F'O^*| / \cos \psi = \frac{r(\sin \varphi + \sin \psi)}{\cos \psi}$ (***) .

2) для окружности доказательство очевидно, поскольку ее можно получить подходящим сечением любой конической поверхности, поэтому далее рассмотрим произвольную квадрику $\Psi \subseteq \beta$ с фокусом F , директрисой c и эксцентриситетом ε . Сначала найдем такие два острых угла величины φ и ψ , что $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi$. Учитывая, что $\varepsilon < [\varepsilon] + 2$ и $[\varepsilon] + 2 > 1$ (напомним, что $[\varepsilon]$ — целая часть числа ε , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее ε) можно выбрать ψ и φ так, что $\cos \varphi \stackrel{df}{=} \frac{1}{[\varepsilon] + 2}$ и $\cos \psi \stackrel{df}{=} \varepsilon \cos \varphi$.

Точки F и $Q = \text{Пр}_c(F)$ нам даны, применим формулу (***) и найдем $r = |FQ| \cdot \frac{\cos \psi}{\sin \varphi + \sin \psi}$. Построим сферу $Sph(O_1, r)$, которая касается плоскости β в точке F' , и перейдем в плоскость $\alpha = (FQO_1)$. Сразу заметим, что из



условия $(O_1F) \perp \beta$ следует, что $\alpha \perp \beta$. В плоскости α от $[O_1F)$ отложим угол $\angle FO_1G$ так, чтобы $\widehat{FO_1G} = \frac{\pi}{2} - \psi$ и точки G и Q лежат по разные стороны от прямой (O_1F) , в результате получим ось $a = (O_1G)$ будущей конической поверхности. По построению $\widehat{\beta, a} = \psi$. Осталось на оси a найти такую точку O , касательная b из которой к окружности $\alpha \cap Sph(O_1, r)$ составляет с осью a угол величины φ . Коническая поверхность $\Phi = R_a(b)$ — искомая, поскольку из (1) следует, что $\Phi \cap \beta$ является квадрикой с фокусом F , директрисой c и эксцентриситетом ε , т.е. $\Psi = \Phi \cap \beta$.

Мы по-прежнему считаем, что секущая плоскость β не проходит через вершину O конической поверхности $\Phi = R_a(b)$. Вид собственного конического сечения $\Psi = \beta \cap \Phi$ зависит от соотношения между величинами углов $\varphi = \widehat{a, b}$ и $\psi = \widehat{a, \beta}$. Учитывая, что $\varphi \in (0, \pi/2)$, $\psi \in [0; \pi/2]$ и косинус строго убывает на отрезке $[0; \pi/2]$, получим, что при $\psi > \varphi$ выполняется $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi < 1$, плоскость β пересекает только одну полу конической поверхности и Ψ является ограниченной линией (рис. 203). Если $\psi = \varphi$, то $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi = 1$, плоскость β пересекает только одну полу конической поверхности, но Ψ является уже неограниченной линией (рис. 204). Наконец, при $\psi < \varphi$ получим $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi > 1$ и плоскость β пересечет обе полу конической поверхности, а фигура Ψ является несвязным множеством, состоящим из двух неограниченных линий (рис. 205).

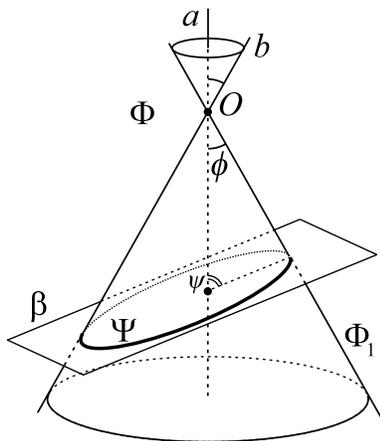


Рис. 203

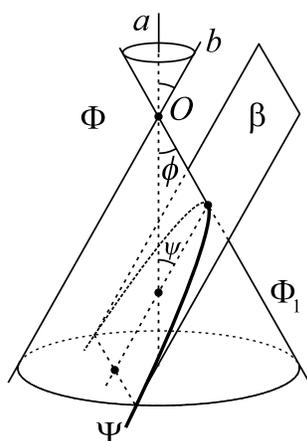


Рис. 204

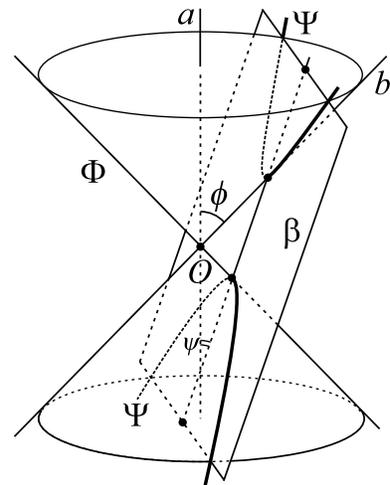


Рис. 205

Все квадрики с эксцентриситетом $\varepsilon \neq 1$ обладают *фокальным* свойством, о котором пойдет речь в следующем утверждении.

Теорема 9.7. 1) если у квадрики $\Psi \subseteq \beta$ эксцентриситет ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon < 1$, то найдутся такие две точки $F_1, F_2 \in \beta$



(которые называются фокусами квадрики), и число $l \in \mathbb{R}$ что для любой точки $M \in \Psi$ выполнено равенство $|MF_1| + |MF_2| = l$;

2) если у квадрики $\Psi \subseteq \beta$ эксцентриситет ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon > 1$, то найдутся такие две точки $F_1, F_2 \in \beta$ (которые называются фокусами квадрики), и число $l \in \mathbb{R}$ что для любой точки $M \in \Psi$ выполнено равенство $||MF_1| - |MF_2|| = l$.

Доказательство. 1) из второй части предыдущей теоремы следует, что квадрику Ψ можно реализовать как пересечение плоскости β с конической поверхностью $\Phi = R_a(b)$, для которой $\widehat{a, b} = \varphi$, $\widehat{a, \beta} = \psi$ и эксцентриситет квадрики Ψ равен $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi$. Мы уже знаем, что β пересекает только одну полу конической поверхности Φ , которую обозначим через Φ_1 (рис. 206). Впишем в Φ_1 сферы $Sph(O_1, r_1)$ и $Sph(O_2, r_2)$ так, чтобы они касались плоскости β и были расположены по разные стороны от β . Б.о.о. считаем, что $O_1 \in \mathbb{P}_3(\beta, O)$. Обозначим окружности касания этих сфер с конической поверхностью через $\omega_1 = \Phi \cap Sph(O_1, r_1)$ и $\omega_2 = \Phi \cap Sph(O_2, r_2)$, а точки касания сфер с плоскостью β — через $\{F_1\} = \beta \cap Sph(O_1, r_1)$ и $\{F_2\} = \beta \cap Sph(O_2, r_2)$. Рассмотрим произвольную точку $M \in \Psi$ и проведем через нее образующую (MO) , обозначим через $\{K_1\} = (MO) \cap \omega_1$ и $\{K_2\} = (MO) \cap \omega_2$. Положим $l \stackrel{df}{=} |K_1K_2|$ и заметим, что это длина образующей усеченного конуса с основаниями, ограниченными окружностями ω_1 и ω_2 , поэтому она не зависит от выбора точки M . Используя равенство отрезков касательных из точки M к двум построенным сферам, получим $|MF_1| = |MK_1|$ и $|MF_2| = |MK_2|$, откуда $|MF_1| + |MF_2| = |MK_1| + |MK_2| = |K_1K_2| = l$.

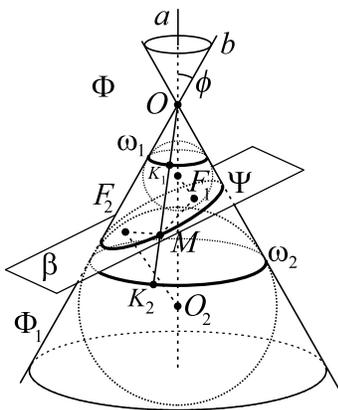


Рис. 206

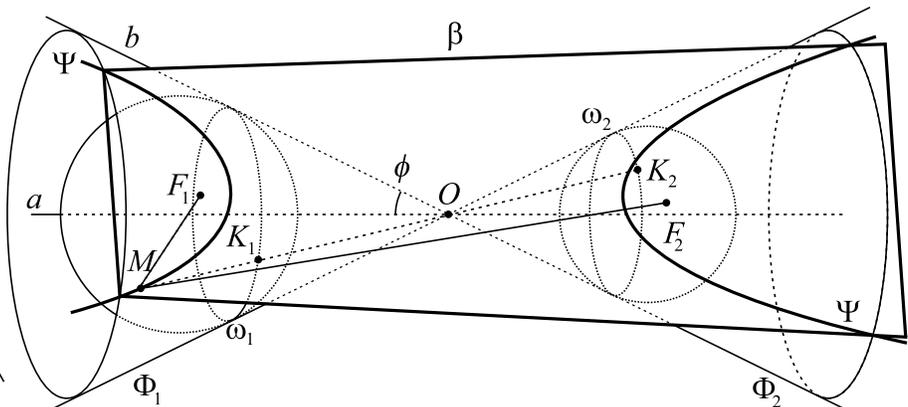


Рис. 207

2) аналогично (1), квадрику Ψ реализуем как пересечение плоскости β с



конической поверхностью $\Phi = R_a(b)$, для которой $\widehat{a, b} = \varphi$, $\widehat{a, \beta} = \psi$ и эксцентриситет квадрики Ψ равен $\varepsilon = \cos \psi / \cos \varphi$. Но теперь уже $\varphi > \psi$ и плоскость β пересекает обе половины конической поверхности Φ , которые обозначим через Φ_1 и Φ_2 (рис. 207). Впишем в Φ_1 сферу $Sph(O_1, r_1)$, а в Φ_2 — сферу $Sph(O_2, r_2)$ так, чтобы они касались плоскости β . Обозначим окружности касания построенных сфер с конической поверхностью через $\omega_1 = \Phi_1 \cap Sph(O_1, r_1)$ и $\omega_2 = \Phi_2 \cap Sph(O_2, r_2)$, а точки касания сфер с плоскостью β — через $\{F_1\} = \beta \cap Sph(O_1, r_1)$ и $\{F_2\} = \beta \cap Sph(O_2, r_2)$. Рассмотрим произвольную точку $M \in \Psi \cap \Phi_1$ и проведем через нее образующую (MO) , обозначим через $\{K_1\} = (MO) \cap \omega_1$ и $\{K_2\} = (MO) \cap \omega_2$. Положим $l \stackrel{df}{=} |K_1 K_2|$ и заметим, что это число является суммой длин образующих двух конусов с общей вершиной O и основаниями, ограниченными окружностями ω_1 и ω_2 , поэтому l не зависит от выбора точки M . Используя равенство отрезков касательных из точки M к двум построенным сферам, получим $|MF_1| = |MK_1|$ и $|MF_2| = |MK_2|$, откуда можно посчитать разность $|MF_2| - |MF_1| = |MK_2| - |MK_1| = |K_2 K_1| = l$. Для точки $M \in \Psi \cap \Phi_2$ получим $|MF_1| - |MF_2| = l$, поэтому $\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = l$ для любой точки $M \in \Psi$.

■

В результате квадрики с эксцентриситетом $\varepsilon < 1$ оказались хорошо знакомыми нам эллипсами. Квадрики с $\varepsilon = 1$ называются *параболами*, они по определению являются геометрическим местом точек плоскости β , равноудаленных от данной точки $F \in \beta$ (фокуса) и фиксированной прямой $c \subseteq \beta$ (директрисы). Наконец, квадрики с $\varepsilon > 1$ называются *гиперболами*, их можно описать как Ψ — геометрическое место точек M плоскости β , что найдутся две точки $F_1, F_2 \in \beta$ (фокусы) и число $l > 0$, что $M \in \Psi$ тогда и только тогда, когда $\left| |MF_1| - |MF_2| \right| = l$.

Следствие. Любое собственное сечение конической поверхности является эллипсом, параболой или гиперболой.

Доказательство. Следует из предыдущих определений и двух теорем.

■

Дальнейшие свойства квадрик можно обнаружить, решив упражнения к этому параграфу.

Следующее определение одновременно обобщает понятия призмы и усеченной пирамиды.



Определение. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ — конечные множества точек в пространстве, которые будем называть противоположными друг другу. Призматойдом $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_k$ называется выпуклый многогранник, основания $A_1 \dots A_n$ и $B_1 \dots B_k$ (n - и k -угольники соответственно) которого расположены в различных параллельных плоскостях, а остальными (боковыми) гранями P являются треугольники, одна вершина которого лежит в одном из множеств \mathcal{A} или \mathcal{B} , а две остальные вершины — в противоположном множестве; или являются параллелограммами или трапециями, вершины которых поровну распределены между противоположными множествами.

Ясно, что призма $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ или, например, усеченная пирамида $A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n$ являются призматоидами с противоположными множествами $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$. Если не требовать, что оба основания призматоида должны быть многоугольниками, то пирамида $A_1 \dots A_n X$ тоже будет призматойдом с противоположными множествами $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ и $\{X\}$. *Боковым ребром* призматоида P , называется любое его ребро $[KL]$, концы которого принадлежат противоположным множествам (например, $K \in \mathcal{A}$ и $L \in \mathcal{B}$). Пусть $\alpha = (A_1 \dots A_n)$ и $\beta = (B_1 \dots B_k)$ — плоскости оснований призматоида и плоскость $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$ выбрана так, что $d(\gamma, \alpha) = d(\gamma, \beta)$, тогда многоугольник $C_1 \dots C_m = \gamma \cap P$ называется *серединным сечением* призматоида. Ясно, что плоскость γ проходит через середину каждого бокового ребра P и $C_1 \dots C_m$ является выпуклым многоугольником (как пересечение двух выпуклых множеств). *Высотой* призматоида P называется произвольный отрезок $[XY]$, для которого $X \in \alpha$, $Y \in \beta$ и $(XY) \perp \alpha$. Длина высоты традиционно обозначается через $H = |XY|$. На рис. 208 изображен призматойд, который не является ни призмой, ни усеченной пирамидой.

Следующий результат называется *теоремой Симпсона*¹³.

Теорема 9.8. Пусть $P = A_1 \dots A_n B_1 \dots B_k$ — призматойд с основаниями $A_1 A_2 \dots A_n$, $B_1 B_2 \dots B_k$ и серединным сечением $C_1 C_2 \dots C_m$. Если $S_1 = s(A_1 \dots A_n)$, $S_2 = s(B_1 \dots B_k)$, $S_{\text{ср}} = s(C_1 \dots C_m)$ и $H = |XY|$ — длина высоты P , то $v(P) = \frac{1}{6}H(S_1 + 4S_{\text{ср}} + S_2)$.

Доказательство. Обозначим через α , β , γ плоскости оснований и се-

¹³Томас Симпсон (1710–1761) — английский математик и ткач шелковых тканей; работы относятся к математическому анализу, геометрии, теории вероятностей, тригонометрии (считается, что он первым в Европе открыл метод вспомогательного угла); популярная формула в численном интегрировании называется формулой Ньютона-Симпсона; один из основоположников теории ошибок.



рединного сечения соответственно. Можно считать, что боковыми гранями P являются только лишь треугольники, поскольку в параллелограмме или трапеции достаточно провести одну из диагоналей, которая разделит эту четырехугольную боковую грань на две треугольные грани, и при этом $S_{\text{ср}}$ не изменится. Тогда количество боковых граней призматоида равно числу сторон срединного сечения, поскольку каждая сторона срединного сечения является средней линией в боковой грани призматоида.

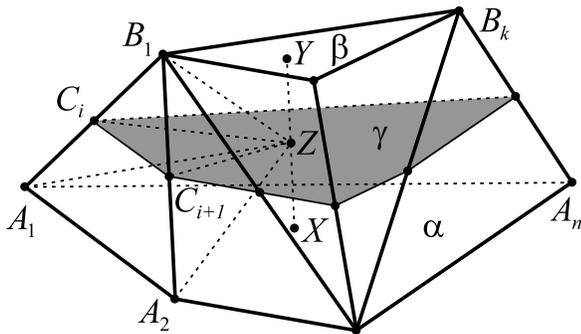


Рис. 208

Теперь в качестве точки Z выберем произвольную внутреннюю точку срединного сечения $C_1 \dots C_m$ и обозначим через $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ все боковые грани призматоида P (рис. 208). Поскольку любой призматоеид является выпуклым многогранником, многогранник P можно разделить на две пирамиды с общей вершиной $P_1 = ZA_1 \dots A_n$, $P_2 = ZB_1 \dots B_k$ и тетраэдры T_i с верши-

ной в точке Z и основанием Γ_i , где $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Будем считать, что $X = \text{Пр}_\alpha(Z)$, $Y = \text{Пр}_\beta(Z)$, тогда $[XY]$ — высота призматоида P , $|XZ| = |YZ| = H/2$. Отсюда $v(P_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot S_1 = HS_1/6$ и $v(P_2) = HS_2/6$. Осталось найти $v(T_i)$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Рассмотрим T_1 . Б.о.о. считаем, что его основанием является $\Delta A_1 A_2 B_1$ и средней линией в этом треугольнике является отрезок $[C_i C_{i+1}]$ (одна из сторон срединного сечения). Треугольником $ZC_i C_{i+1}$ тетраэдр T_1 делится на треугольную пирамиду $ZB_1 C_i C_{i+1}$ и четырехугольную пирамиду $ZA_1 A_2 C_{i+1} C_i$. Заметим, что высота, проведенная из точки Z к плоскости $(A_1 A_2 B_1)$ у этих пирамид общая, поэтому их объемы относятся как площади оснований, т.е. $s(\Delta B_1 C_i C_{i+1}) : s(A_1 A_2 C_{i+1} C_i) = 1 : 3$ (свойство средней линии в треугольнике), отсюда $v(T_1) = 4v(B_1 Z C_i C_{i+1}) = 4 \cdot \frac{H/2}{3} s(\Delta Z C_i C_{i+1}) = 4 \cdot \frac{H}{6} s(\Delta Z C_i C_{i+1})$ (длина высоты, опущенной из точки B_1 на плоскость γ , равна $H/2$). В силу выпуклости срединного сечения и аддитивности площади, получим, что $S_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^m s(\Delta_i)$, где $\Delta_i = \Delta Z C_i C_{i+1}$ при всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Окончательно

$$\text{имеем } v(P) = \frac{H}{6} S_1 + \frac{H}{6} S_2 + 4 \cdot \frac{H}{6} \sum_{i=1}^m s(\Delta_i) = \frac{1}{6} \cdot H \cdot (S_1 + 4S_{\text{ср}} + S_2).$$

■



Упражнения

1. Для параболы, которая задается уравнением $y = x^2$, найдите координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
2. Для параболы, которая задается уравнением $y = ax^2$ ($a \neq 0$), найдите координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
3. Стандартным уравнением параболы в декартовой системе координат считают уравнение $y^2 = px$. Для этой параболы найдите координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
4. Для эллипса, который задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, найдите координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
5. Для гиперболы, которая задается уравнением $y = 1/x$, найдите эксцентриситет, координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
6. Для гиперболы, которая задается уравнением $y = k/x$ ($k \neq 0$), найдите эксцентриситет, координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
7. Стандартным уравнением гиперболы в декартовой системе координат считают уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для этой гиперболы найдите эксцентриситет, координаты фокуса и координатное уравнение директрисы.
8. Для любой точки M эллипса с фокусами в точках F_1 и F_2 отрезки $[F_1M]$ и $[F_2M]$ называются фокальными радиусами. Докажите, что фокальные радиусы $[F_1M]$ и $[F_2M]$ составляют одинаковый угол с касательной к эллипсу, проведенной в точке M . Выведите отсюда оптическое свойство эллипса: луч света, выходящий из одного фокуса, отразившись от эллипса, попадает в другой его фокус.
9. Для любой точки M параболы с фокусом в точке F и директрисой s отрезок $[FM]$ называется фокальным радиусом. Докажите, что: а) прямая a^* , проходящая через фокус и перпендикулярная директрисе, является осью симметрии параболы; б) середины параллельных хорд параболы расположены на прямой, параллельной оси симметрии параболы; в) фокальный радиус $[FM]$ составляет с касательной к параболе, проведенной в точке M , такой же угол, как и прямая a^* с этой касательной. Выведите отсюда оптическое свойство параболы: луч света, выходящий из фокуса, отразившись от параболы, далее будет двигаться по прямой, параллельной оси симметрии параболы. Объясните, почему спутниковые антенны и автомобильные фары изготавливают параболической формы.
10. Пусть Ψ — гипербола с фокусами в точках F_1 и F_2 . Для любой точки $M \in \Psi$ отрезки $[F_1M]$ и $[F_2M]$ называются фокальными радиусами. Докажите, что: а) у Ψ есть центр симметрии и две оси симметрии; б) касательная к гиперболе Ψ , проведенная в точке $M \in \Psi$ делит пополам угол между фокальными радиусами $[F_1M]$ и $[F_2M]$.



11. На координатной плоскости изобразили график функции $y = x^2$, а затем стерли координатные оси. Только с помощью циркуля и линейки восстановите координатные оси и масштаб изображения.

4.10. Объем шара и его частей. Площадь поверхности сферы

С помощью последовательности полиэдров трудно посчитать объем шара, гораздо проще работать с лестницами из цилиндров, поэтому начнем с обобщения хорошо освоенного нами критерия кубирюемости \diamond_3 . Следующее утверждение будем называть критерием кубирюемости \diamond_3^+ .

Лемма 10.1. 1) ограниченная фигура $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$ кубирюема тогда и только тогда, когда найдутся две такие последовательности $\{\overline{\Phi}_n\} \subseteq \text{Vol}$, $\{\overline{\overline{\Phi}}_n\} \subseteq \text{Vol}$, что $\overline{\Phi}_n \subseteq \Phi \subseteq \overline{\overline{\Phi}}_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (v(\overline{\overline{\Phi}}_n) - v(\overline{\Phi}_n)) = 0$.
2) если последовательности $\{\overline{\Phi}_n\}$, $\{\overline{\overline{\Phi}}_n\}$ удовлетворяют условиям утверждения (1), то $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{\Phi}}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\Phi}_n)$.

Доказательство. 1) \Rightarrow) очевидно, поскольку равенства $\overline{\Phi}_n = \overline{\overline{\Phi}}_n = \Phi$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ определяют последовательности с нужным свойством.

\Leftarrow) для произвольного $\varepsilon > 0$ по определению предела найдем такой номер N , что при всех $n > N$ выполняется $0 \leq v(\overline{\overline{\Phi}}_n) - v(\overline{\Phi}_n) < \varepsilon/3$. Выберем $n^* > N$ и воспользуемся тем, что $\overline{\Phi}_{n^*}, \overline{\overline{\Phi}}_{n^*} \in \text{Vol}$, что по свойству супремума и инфимума для $\varepsilon/3$ дает существование двух полиэдров P_1 и P_2 , для которых $P_1 \subseteq \overline{\Phi}_{n^*}$ и $v(\overline{\Phi}_{n^*}) - v(P_1) < \varepsilon/3$, а также $\overline{\overline{\Phi}}_{n^*} \subseteq P_2$ и $v(P_2) - v(\overline{\overline{\Phi}}_{n^*}) < \varepsilon/3$. Но тогда $P_1 \subseteq \Phi \subseteq P_2$ и

$$v(P_2) - v(P_1) = v(P_2) - v(\overline{\overline{\Phi}}_{n^*}) + v(\overline{\overline{\Phi}}_{n^*}) - v(\overline{\Phi}_{n^*}) + v(\overline{\Phi}_{n^*}) - v(P_1) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Мы проверили, что $\Phi \in \text{Vol}$.

2) монотонность функции $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ (см. лемму 6.2) дает монотонность нижних объемов для любой пары ограниченных множеств $\Phi_1 \subseteq \Phi_2$ в пространстве, что в случае кубирюемых тел дает монотонность функции $v : \text{Vol} \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому из двойного включения $\overline{\Phi}_n \subseteq \Phi \subseteq \overline{\overline{\Phi}}_n$ получим $v(\overline{\Phi}_n) \leq v(\Phi) \leq v(\overline{\overline{\Phi}}_n)$, откуда

$$0 \leq v(\Phi) - v(\overline{\Phi}_n) \leq v(\overline{\overline{\Phi}}_n) - v(\overline{\Phi}_n),$$



что по П2П приводит к $\lim_{n \rightarrow \infty} (v(\Phi) - v(\overline{\Phi}_n)) = 0$ или $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\Phi}_n)$.

Аналогично доказывается, что $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\overline{\Phi}}_n)$.

Теорема 10.2. Пусть фигура Φ является шаром $B(O, R)$, тогда

- 1) $\Phi \in \text{Vol}$;
- 2) $v(\Phi) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство. Через точку O проведем плоскость α и прямую a так, что $a \perp \alpha$. Обозначим через $\{N, S\} = a \cap \text{Sph}(O, R)$ (два полюса на сфере) и рассмотрим одно из полушарий — $\Phi_1 = \Phi \cap \mathbb{P}_3(\alpha, N)$ (точнее, «северное» полушарие). Докажем, что $\Phi_1 \in \text{Vol}$ и $v(\Phi_1) = \frac{2}{3}\pi R^3$.

Пусть точки $A_0 = O, A_1, \dots, A_n = N$ разбивают отрезок $[ON]$ на n равных частей, где $n \in \mathbb{N}$. Через A_i (при $0 \leq i \leq n-1$) проведем плоскость $\alpha_i \parallel \alpha$ и обозначим через $K_i = \alpha_i \cap \Phi_1$ и r_i — радиус круга K_i . По теореме Пифагора быстро находим, что $r_i^2 = R^2 - R^2 \cdot \frac{i^2}{n^2}$ при всех $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

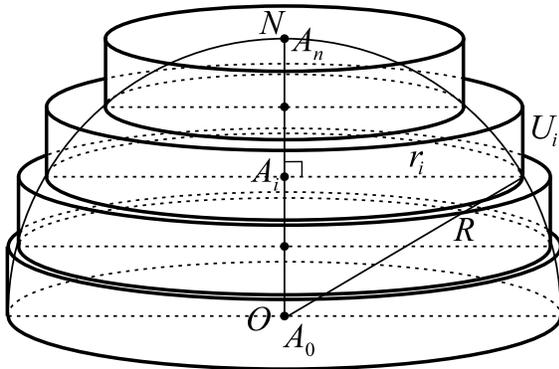


Рис. 209

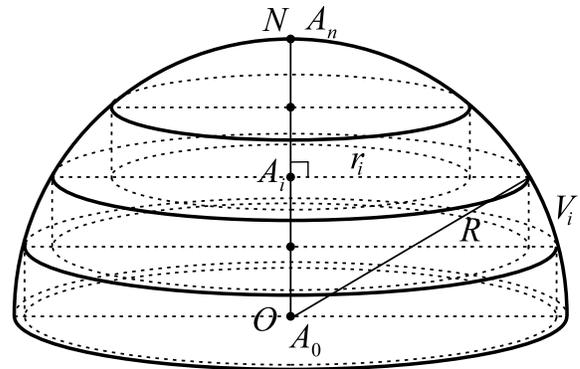


Рис. 210

Теперь на каждом K_i , как на основании, построим «внешний» цилиндр U_i с высотой $[A_i A_{i+1}]$ при всех $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ (рис. 209). Заметим, что часть полушария, расположенная между плоскостями α_i и α_{i+1} содержится во внешнем цилиндре U_i , поэтому «северное» полушарие Φ_1 содержится в фигуре $\overline{\overline{\Phi}}_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} U_i$, которую будем называть «внешней лестницей».

Внутренний цилиндр V_i мы будем строить только при натуральных индексах $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, его основанием будет также круг K_i , но высотой — отрезок $[A_{i-1} A_i]$ (рис. 210). Теперь часть полушария Φ_1 между плоскостями α_{i-1} и α_i сама содержит внутренний цилиндр, поэтому «внутренняя лестница» $\overline{\overline{\Phi}}_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$ содержится в полушарии Φ_1 .



Ясно, что цилиндры V_i и U_i переводятся друг в друга параллельным переносом и $v(V_i) = v(U_i) = \frac{R}{n} \cdot \pi R^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$. Из теоремы 8.6 следует аддитивность функции $v : \text{Vol} \rightarrow \mathbb{R}$, поэтому разность объемов внешней и внутренней лестниц легко находится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(v(\overline{\Phi}_n) - v(\Phi_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(U_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi R^2 \cdot \frac{R}{n} = 0.$$

Теперь из (1) критерия \diamond_3^+ (лемма 10.1) следует, что $\Phi_1 \in \text{Vol}$. Тогда можно применить (2) того же критерия, формулу из леммы 7.1 и найти

$$\begin{aligned} v(\Phi_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\Phi}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \pi \left(R^2 - \frac{i^2}{n^2} R^2 \right) \frac{R}{n} = \\ &= \pi R^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2} \right) = \pi R^3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) = \\ &= \pi R^3 \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \right) = \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Для «южного» полушария $\Phi_2 = \Phi \cap \mathbb{P}_3(\alpha, S)$ из равенства $S_\alpha(\Phi_1) = \Phi_2$ мы сразу получим, что $\Phi_2 \in \text{Vol}$ и $v(\Phi_2) = \frac{2}{3} \pi R^3$. Фигуры Φ_1 и Φ_2 пересекаются только по кругу K_0 , поэтому общих внутренних точек в \mathbb{P}_3 не имеют, и из теоремы 8.6 и представления $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ получим, что $\Phi \in \text{Vol}$ и $v(\Phi) = v(\Phi_1) + v(\Phi_2) = 2v(\Phi_1) = \frac{4}{3} \pi R^3$. ■

Лемма 10.3. 1) если Φ_1, Φ_2 замкнутые подмножества плоскости α , $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ (т.е. Φ_1 и Φ_2 не имеют общих внутренних точек в α) и $\Phi, \Phi_1 \in \text{Sq}$, то Φ_2 также квадратуема и $s(\Phi_2) = s(\Phi) - s(\Phi_1)$;
2) если Φ_1, Φ_2 замкнутые подмножества пространства \mathbb{P}_3 , $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ (т.е. Φ_1 и Φ_2 не имеют общих внутренних точек в \mathbb{P}_3) и $\Phi, \Phi_1 \in \text{Vol}$, то Φ_2 также кубируема и $v(\Phi_2) = v(\Phi) - v(\Phi_1)$.

Доказательство. 1) сначала докажем квадратуемость фигуры Φ_2 . Для произвольного $\varepsilon > 0$ из условия $\Phi, \Phi_1 \in \text{Sq}$ найдем такие две пары многоугольных фигур M_1, M_2, K_1, K_2 , для которых верно $M_1 \subseteq \Phi_1 \subseteq M_2$, $K_1 \subseteq \Phi \subseteq K_2$, $s(M_2) - s(M_1) < \varepsilon/3$ и $s(K_2) - s(K_1) < \varepsilon/3$. Можно считать, что $M_1 \subseteq K_1$ (иначе определим $K'_1 = M_1 \cup K_1$, тогда $K_1 \subseteq K'_1 \subseteq \Phi$ и по-прежнему $s(K_2) - s(K'_1) < \varepsilon/3$), а также $M_2 \subseteq K_2$ (иначе уменьшим его до $M'_2 = M_2 \cap K_2$, тогда $\Phi_1 \subseteq M'_2 \subseteq M_2$ и будет верно неравенство



$s(M'_2) - s(M_1) < \varepsilon/3$). Так как $K_1 \setminus M_2 \subseteq \Phi_2 \subseteq K_2 \setminus M_1$ и Φ_2 замкнутое множество, для многоугольных фигур $P_1 = [K_1 \setminus M_2]$ и $P_2 = [K_2 \setminus M_1]$ также выполняется $P_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq P_2$ и остается оценить разность $s(P_2) - s(P_1)$. В доказательстве монотонности площади (лемма 4.2) мы заметили, что для многоугольных фигур включение $T_1 \subseteq T_2$ дает $s(T_2) = s(T_1) + s([T_2 \setminus T_1])$, т.е. $s([T_2 \setminus T_1]) = s(T_2) - s(T_1)$ (*). Из включений $M_1 \subseteq K_1$ и $M_2 \subseteq K_2$ получим, что $P_2 \setminus P_1 \subseteq [K_2 \setminus K_1] \cup [M_2 \setminus M_1]$. Учитывая, что объединение двух замкнутых множеств замкнуто, будет выполняться и более сильное включение $[P_2 \setminus P_1] \subseteq [K_2 \setminus K_1] \cup [M_2 \setminus M_1]$. Трижды применив (*), получим, что

$$s(P_2) - s(P_1) = s([P_2 \setminus P_1]) \leq (s(K_2) - s(K_1)) + (s(M_2) - s(M_1)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

и мы проверили квадрируемость фигуры Φ_2 . Теперь можно применить теорему 5.7 и получить $s(\Phi) = s(\Phi_1) + s(\Phi_2)$, откуда $s(\Phi_2) = s(\Phi) - s(\Phi_1)$.

2) доказывается аналогично (1). ■

Определение. Для сферы $F = Sph(O, R)$ ее поверхностным слоем высоты $\varepsilon > 0$ называется фигура Ψ_ε , ограниченная сферами $Sph(O, R)$ и $Sph(O, R + \varepsilon)$ (т.е. $\Psi_\varepsilon = \{X \in \mathbb{P}_3 : R \leq |OX| \leq R + \varepsilon\}$). Площадью поверхности сферы F называется число $S_{\text{пов}}(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Psi_\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Теорема 10.4. Пусть $F = Sph(O, R)$, тогда $S_{\text{пов}}(F) = 4\pi R^2$.

Доказательство. Обозначим через $\Phi = B(O, R)$ и $\Phi_\varepsilon = B(O, R + \varepsilon)$ два шара, тогда $\Phi_\varepsilon = \Phi \sqcup \Psi_\varepsilon$ и из предыдущей леммы следует, что $\Psi_\varepsilon \in \text{Vol}$ и $v(\Psi_\varepsilon) = v(\Phi_\varepsilon) - v(\Phi)$. Теперь по определению площади поверхности сферы и применяя формулу теоремы 10.2, получим

$$S_{\text{пов}}(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(R + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon} = \frac{4}{3}\pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3R^2\varepsilon + 3R\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} = 4\pi R^2. \quad \blacksquare$$

Внимательный читатель в предыдущих пределах увидит отношение приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю и сразу догадается, что $S_{\text{пов}}(F) = \left(v(B(O, R)) \right)'_R = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)'_R = 4\pi R^2$.

Определение. Пусть $F = K(O, R)$ — круг и $F \subseteq \alpha$. Фигура S называется сегментом круга F , если S является пересечением этого круга с полуплоскостью $\alpha((AB))$, где A и B — различные точки окружности $\omega = \omega(O, R)$.



Хорда $[AB]$ называется основанием сегмента, а величина дуги $\overset{\frown}{AB}$ окружности ω , которая содержится в S , называется угловой величиной сегмента S и обозначается \widehat{S} (градусов или радиан), а сама дуга $\overset{\frown}{AB}$ называется дугой сегмента.

Следствие. Пусть S — сегмент круга $F = K(O, R)$ и $\widehat{S} = \varphi$ (радиан). Тогда $S \in \text{Sq}$ и $s(S) = \frac{1}{2}R^2(\varphi - \sin \varphi)$.

Доказательство. При $\varphi = \pi$ сегмент S круга F станет его сектором и утверждение следует из теоремы 5.3. При всех остальных $\varphi \in (0; 2\pi)$ обозначим через $\Phi = \sphericalangle AOB$ — сектор, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга сегмента S и $F_1 = \triangle AOB$. Рассмотрим два случая.

1-й случай: $\varphi \in (0; \pi)$. Тогда $\Phi = F_1 \sqcup S$. Применяв теорему 5.3 и лемму 10.3, получим, что $S \in \text{Sq}$ и $s(S) = \frac{1}{2}R^2\varphi - \frac{1}{2}R^2 \sin \varphi = \frac{1}{2}R^2(\varphi - \sin \varphi)$.

2-й случай: $\varphi \in (\pi; 2\pi)$. Тогда $S = \Phi \sqcup F_1$. По теореме 5.7 получим, что $S \in \text{Sq}$ и $s(S) = \frac{1}{2}R^2\varphi + \frac{1}{2}R^2 \sin(2\pi - \varphi) = \frac{1}{2}R^2(\varphi - \sin \varphi)$. ■

Определение. Пусть S — сегмент круга $F = K(O, R) \subseteq \alpha$, $[AB]$ — основание S , $a = (OC)$ — серединный перпендикуляр к $[AB]$, причем $C \in \omega = \omega(O, R)$ и $C \in S$, тогда тело вращения $\Phi = R_a(S)$ (рис. 211) называется шаровым сегментом в шаре $B(O, R)$.

Элементы шарового сегмента. Прямая a называется осью шарового сегмента $\Phi = R_a(S)$, круг $K = R_a([AB])$ — его основанием. Пусть L — середина отрезка $[AB]$, тогда $r = |LA|$ называется радиусом основания Φ . Отрезок $[CL]$ называется высотой Φ и через $H = |CL|$ традиционно обозначают длину высоты шарового сегмента Φ (рис. 211). Боковой поверхностью Φ называется $R_a(\overset{\frown}{AB})$, где $\overset{\frown}{AB}$ — дуга кругового сегмента S .

Теорема 10.5. Пусть $\Phi = R_a(S)$ — шаровой сегмент в шаре $B(O, R)$ и H — длина высоты сегмента Φ . Тогда

- 1) $\Phi \in \text{Vol}$;
- 2) $v(\Phi) = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$.

Доказательство. При $H = R$ шаровой сегмент становится полушарием и утверждения (1) и (2) следуют из теоремы 10.2. Далее рассмотрим два случая, но при этом (1) и (2) будем доказывать одновременно.

1-й случай: $0 < H < R$. Используя введенные выше обозначения, разделим отрезок $[CL]$ на n равных частей точками $A_0 = C$, $A_1, \dots, A_n = L$ (где $n \in \mathbb{N}$). Пусть плоскость β проходит через центр шара $B(O, R)$ и



$\beta \perp a$, где $a = (OC)$ — ось шарового сегмента Φ . Для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ через точку A_i проведем плоскость $\beta_i \parallel \beta$ и обозначим через $K_i = \beta_i \cap \Phi$ — круг, а его радиус — через R_i . По теореме Пифагора быстро находим, что $R_i^2 = R^2 - (R - H \cdot \frac{i}{n})^2 = 2RH \frac{i}{n} - H^2 \cdot \frac{i^2}{n^2}$ (рис. 212).

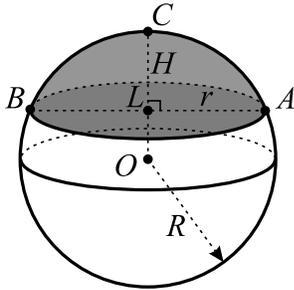


Рис. 211

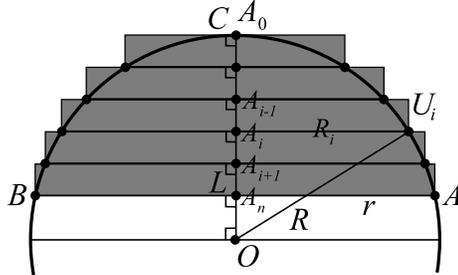


Рис. 212

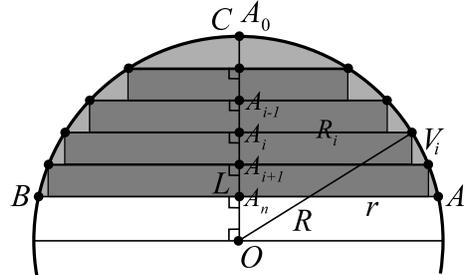


Рис. 213

Теперь для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ на K_i , как на основании, построим «внешний» цилиндр U_i с высотой $[A_i A_{i-1}]$. Объединение всех «внешних» цилиндров обозначим через $\overline{\Phi}_n = \bigsqcup_{i=1}^n U_i$ и будем называть «внешней лестницей». Заметим, что часть кругового сегмента Φ , которая расположена между плоскостями β_i и β_{i-1} , содержится во «внешнем» цилиндре U_i при всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, поэтому $\Phi \subseteq \overline{\Phi}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. На рис. 212 изображено пересечение шара, шарового сегмента и «внешней» лестницы с плоскостью α , которая содержит круговой сегмент S .

Для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ на K_i , как на основании, построим «внутренний» цилиндр V_i с высотой $[A_i A_{i+1}]$. Объединение всех «внутренних» цилиндров обозначим через $\overline{\Phi}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} V_i$ и будем называть «внутренней лестницей». Заметим, что часть кругового сегмента Φ , которая расположена между плоскостями β_i и β_{i+1} , содержит «внутренний» цилиндр V_i при всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, поэтому $\overline{\Phi}_n \subseteq \Phi$ для любого $n \in \mathbb{N}$. На рис. 213 изображено пересечение шара, шарового сегмента и «внутренней» лестницы с плоскостью α , которая содержит круговой сегмент S .

Ясно, что цилиндры U_i и V_i переводятся друг в друга параллельным переносом и имеют одинаковый объем (при всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$), поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(v(\overline{\Phi}_n) - v(\overline{\Phi}_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n} \cdot \pi r^2 = \pi H r^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

что по критерию \diamond_3^+ дает кубичность Φ (включение $\overline{\Phi}_n \subseteq \Phi \subseteq \overline{\overline{\Phi}}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ было доказано выше).



По утверждению (2) критерия \diamond_3^+ достаточно посчитать предел объемов «внешних лесниц», чтобы найти $v(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(\overline{\Phi}_n) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\pi H}{n} \left(2RH \frac{i}{n} - H^2 \cdot \frac{i^2}{n^2} \right) = \pi H^2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2R}{n^2} \sum_{i=1}^n i - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \right) = \\ &= \pi H^2 \left(2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} - H \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right) = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right). \end{aligned}$$

2-й случай: $R < H < 2R$. Обозначим через $\Phi_1 = [B(O, R) \setminus \Phi]$. Тогда Φ_1 также является сегментом шара $B(O, R)$, но его высота равна $h = 2R - H$ и $h \in (0; R)$. К Φ_1 можно применить первый случай и получить, что $\Phi_1 \in \text{Vol}$ и $v(\Phi_1) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{1}{3}\pi(2R - H)^2(R + H)$. Используя лемму 10.3, приходим к $\Phi \in \text{Vol}$ и

$$\begin{aligned} v(\Phi) &= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(2R - H)^2(R + H) = \frac{1}{3}\pi \left(4R^3 - (4R^2 - 4RH + H^2)(R + H) \right) = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left(-4R^2H + 4R^2H + 4RH^2 - H^2R - H^3 \right) = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H). \end{aligned}$$

■

Определение. Пусть $\Phi = R_a(S)$ — сегмент в шаре $B(O, R)$, γ — плоскость основания Φ и $\mathbb{P}_3(\gamma)$ — полупространство, в котором расположен сегмент Φ . Для каждого $\varepsilon > 0$ поверхностным слоем шарового сегмента Φ высоты ε называется множество Φ_ε всех точек $\mathbb{P}_3(\gamma)$, расположенных между сферами $Sph(O, R)$ и $Sph(O, R + \varepsilon)$. Площадью боковой поверхности шарового сегмента Φ называется $S_{\text{бок}}(\Phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Phi_\varepsilon)}{\varepsilon}$, площадью полной поверхности Φ называется $S_{\text{полн}}(\Phi) = S_{\text{бок}}(\Phi) + s(K)$, где K — основание Φ .

Теорема 10.6. Пусть $\Phi = R_a(S)$ — сегмент в шаре $B(O, R)$, H — длина высоты Φ , r — радиус основания Φ , тогда

- 1) $S_{\text{бок}}(\Phi) = 2\pi RH$;
- 2) $S_{\text{полн}}(\Phi) = \pi H(4R - H)$.

Доказательство. 1) для нахождения $v(\Phi_\varepsilon)$ используем лемму 10.3 и формулу предыдущей теоремы. По определению площади боковой поверхности получим

$$S_{\text{бок}}(\Phi) = \frac{\pi}{3} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(H + \varepsilon)^2(3R - H + 2\varepsilon) - H^2(3R - H)}{\varepsilon} =$$



$$= \frac{\pi}{3} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon H^2 + 6RH\varepsilon - 2\varepsilon H^2 + 4\varepsilon^2 H + 3R\varepsilon^2 - H\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{\varepsilon} = 2\pi RH.$$

2) следует из определения $S_{\text{полн}}(\Phi)$, из (1) и формулы для площади круга, квадрат радиуса которого равен $r^2 = R^2 - (|R - H|)^2 = 2HR - H^2$. ■

4.11. Определение Минковского площади поверхности

Во втором параграфе мы определили длину $l(k)$ спрямляемой кривой $k = f([a; b])$ как супремум длин вписанных в нее ломаных. Напомним, что $\delta(T)$ — диаметр разбиения $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$, т.е. максимальная длина отрезка этого разбиения. Для кривой $k \in \mathcal{K}_0$ число $l(k)$ мы также можем получить как $\lim_{\delta(T) \rightarrow 0} l(z(T))$, где $z(T)$ — ломаная, построенная по разбиению T (см. пятый параграф пятой главы Математического анализа 11). Диаметром треугольника $\triangle ABC$ называется длина его наибольшей стороны, а если многогранная поверхность P состоит только из треугольных граней, то ее диаметром называется $\delta(P)$ — максимальный диаметр входящего в нее треугольников. Произвольную поверхность (в качестве которой можно взять график непрерывной функции двух переменных или фигуру, полученное при вращении спрямляемой кривой) Φ мы можем «триангулировать», вписав в нее многогранную поверхность P , состоящую только из треугольников. Наконец, площадь поверхности Φ можно попытаться по аналогии с длиной спрямляемых кривых определить как $\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} s(P)$, где $s(P)$ — площадь поверхности P , т.е. сумма площадей всех ее граней. Такой подход к определению площади поверхности даже в случае очень простых поверхностей обречен на неудачу. В 1890 году Герман Шварц¹⁴ построил пример вписанных в цилиндр многогранников, площади боковых поверхностей которых стремятся к бесконечности!

Пример 1. Рассмотрим цилиндр $\Phi = R_a(F)$, где $F = ABCD$ — прямоугольник, $a = (AB)$, $h = |AB|$ — длина высоты, $r = |AD|$ — радиус

¹⁴Карл Герман Амантус Шварц (1843–1921) — немецкий математик, учился в Берлинском университете у Вейерштасса, Куммера (на дочери которого Шварц впоследствии женился) и Кронекера, профессор (1867), преподавал в Геттингенском и Берлинском университетах; основные работы посвящены математическому анализу и его приложениям к геометрии, построил строгую теорию интеграла Пуассона; ему принадлежит полное доказательство изопериметрического свойства шара и много работ по теории минимальных поверхностей; среди его учеников была русский математик и популяризатор науки Елизавета Федоровна Литвинова (1845–1919).



основания. Пусть точки $A_0 = A, A_1, \dots, A_k = B$ делят высоту $[AB]$ на k равных частей ($k \in \mathbb{N}$). Для каждого $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ проведем через A_i плоскость $\alpha_i \perp (AB)$ и обозначим через ω_i пересечение плоскости α_i с боковой поверхностью цилиндра Φ . В окружность ω_0 впишем правильный n -угольник $F_0 = E_1^0 \dots E_n^0$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$). Пусть f — винтовой поворот с осью (AB) , углом поворота величины π/n и сдвигом на вектор $\overrightarrow{A_0A_1}$, тогда для любого $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ обозначим через $F_{i+1} = f(F_i)$ — правильный n -угольник, вписанный в окружность ω_{i+1} . Заметим, что из-за выбора угла поворота каждая вершина многоугольника F_{i+1} находится над серединой дуги, которую стягивает сторона многоугольника F_i .

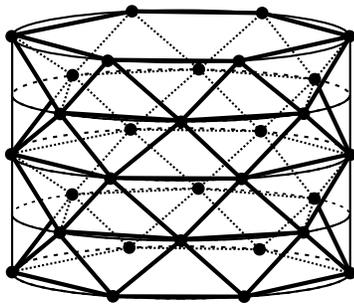


Рис. 214

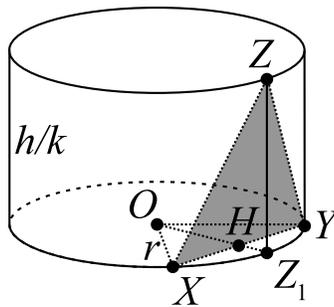


Рис. 215

Теперь опишем поверхность многогранника $T_{k,n}$ (он называется (k, n) -сапогом Шварца), вписанного в цилиндр Φ . Основаниями $T_{k,n}$ являются многоугольники F_0 и F_k , а его боковыми гранями будут всевозможные равнобедренные треугольники, которые строятся по следующему правилу: сто-

рона $[E_j^i E_{j+1}^i]$ многоугольника F_i является основанием этого треугольника, а его вершиной — точка $f(E_j^i)$ или $f^{-1}(E_{j+1}^i)$ (т.е. одна из середин двух дуг, расположенных над или под дугой $E_j^i E_{j+1}^i$). Ясно, что вершины F_0 мы соединяем только с точками окружности ω_1 , а вершины F_k — только с точками на ω_{k-1} . На рис. 214 изображен $(4, 6)$ -сапог Шварца. Под $S_{\text{бок}}(T_{k,n})$ будем понимать сумму площадей всех боковых граней многогранника $T_{k,n}$. Нетрудно понять, что в слое между окружностями ω_i и ω_{i+1} расположены $2n$ одинаковых треугольников, которые являются боковыми гранями $T_{k,n}$, поэтому $S_{\text{бок}}(T_{k,n}) = 2nk \cdot s(\Delta^*)$, где $\Delta^* = \triangle XYZ$ — одна из боковых граней $S_{\text{бок}}(T_{k,n})$. Найдем $s(\Delta^*)$, используя обозначения рис. 215. Учитывая, что $\widehat{XOY} = 2\pi/n$ и H — середина $[XY]$, получим $|XH| = r \sin \frac{\pi}{n}$ и $|HZ_1| = r(1 - \cos \frac{\pi}{n})$, поэтому

$$s(\Delta^*) = r \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{r^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \frac{h^2}{k^2}} = \frac{rh}{k} \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{r^2 k^2}{h^2} \cdot 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n} + 1} \Rightarrow$$

$$S_{\text{бок}}(T_{k,n}) = 2nk \cdot \frac{rh}{k} \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\frac{r^2 k^2}{h^2} \cdot 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n} + 1} =$$



$$= 2\pi rh \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi^4 r^2}{4h^2} \cdot \frac{k^2}{n^4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4 + 1}. \quad (*)$$

Заметим, что если k и n стремятся к бесконечности, то диаметр треугольника Δ^* стремится к нулю, поэтому к нулю стремится и диаметр боковой поверхности $T_{k,n}$ (поскольку она состоит из одинаковых треугольников). Самое время подумать о пределе $S_{\text{бок}}(T_{k,n})$ при $k, n \rightarrow \infty$. При его подсчете будем использовать 13П (т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), чтобы получить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/2n)}{(\pi/2n)} = 1$. Вспомним, что значения k и n выбирались независимо друг от друга, поэтому мы можем рассмотреть несколько случаев.

1-й случай: $k = n$. Тогда дробь k^2/n^4 стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, поэтому подкоренное выражение в (*) стремится к единице, откуда получим $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(T_{n,n}) = 2\pi rh$, что совпадает со значением $S_{\text{бок}}(\Phi)$, полученном в восьмом параграфе этой главы.

2-й случай: $k = n^2$. Тогда дробь k^2/n^4 всегда равна единице, поэтому подкоренное выражение в (*) стремится к $\frac{\pi^4 r^2}{4h^2} + 1$, откуда получим $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(T_{n^2,n}) > 2\pi rh = S_{\text{бок}}(\Phi)$, что немного удивляет.

3-й случай: $k = n^3$. Тогда дробь k^2/n^4 резко уходит в бесконечность при $n \rightarrow \infty$, поэтому подкоренное выражение в (*) стремится к ∞ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(T_{n^3,n}) = \infty$, что окончательно ставит крест на попытке определить $S_{\text{бок}}(\Phi)$ через $\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} s(P)$.

В предыдущем примере бесконечный предел у $S_{\text{бок}}(T_{n^3,n})$ получился из-за того, что плоскости боковых граней вписанного многогранника $T_{n^3,n}$ при увеличении n становятся почти перпендикулярными образующей цилиндра и такие «складки» на «голенище» сапога Шварца обеспечивают неограниченность сверху последовательности $\{S_{\text{бок}}(T_{n^3,n})\}$. Ситуацию можно было бы исправить, расположив каждую грань вписанной многогранной поверхности «почти» параллельно касательным плоскостям к поверхности, проведенным «близко» от данной грани. Однако формализация такого подхода требует методов дифференциальной геометрии, что сразу выведет нас за рамки школьной математики. Вместо этого мы воспользуемся «методом окрашивания», с помощью которого мы нашли в предыдущем параграфе площадь сферы и площадь поверхности шарового сегмента.

Определение. Для любого положительного $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и непустой фигуры $F \subseteq \mathbb{P}_3$ ее ε -шаром называется множество $B_\varepsilon(F) = \{X \in \mathbb{P}_3 : d(X, F) \leq \varepsilon\}$.



Определение. Площадью непустой фигуры $F \subseteq \mathbb{P}_3$ по Минковскому называется число $s_M(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_\varepsilon(F))}{2\varepsilon}$.

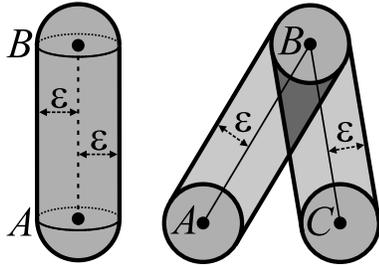


Рис. 216

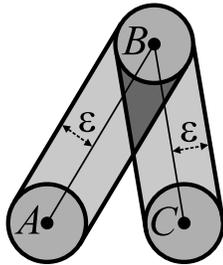


Рис. 217

Пример 2. Если $F = [AB]$, то $s_M(F) = 0$. Действительно, $B_\varepsilon(F)$ является объединением цилиндра с высотой $[AB]$, радиусом основания ε и двух полушарий того же радиуса с центрами в концах отрезка (рис. 216), поэтому выполняется равенство $v(B_\varepsilon(F)) = \pi|AB| \cdot \varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, откуда

$$s_M(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi|AB|}{2} \cdot \varepsilon + \frac{2}{3}\pi\varepsilon^2 \right) = 0.$$

Можно усилить результат предыдущего примера, получив нулевую площадь у любой ломаной и произвольной спрямляемой кривой.

Лемма 11.1. 1) для любой ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ следует, что $v(B_\varepsilon(z)) \leq v(B_\varepsilon([XY]))$, где $|XY| \geq \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$.

2) для произвольной ломаной $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ следует, что $s_M(z) = 0$.

3) для любой спрямляемой кривой k выполняется, что $s_M(k) = 0$.

Доказательство. 1) Это утверждение достаточно проверить для отрезка $[XY]$, у которого $|XY| = \sum_{i=1}^n |A_i A_{i+1}|$. Доказательство ведем индукцией по n . Б.И. Случай $n = 1$ очевиден, поэтому рассмотрим двузвенную ломаную $z = [AB] \cup [BC]$. Если $B \in [AC]$, то $B_\varepsilon(z) = B_\varepsilon([AC])$ и равенство объемов очевидно. Обозначим через \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 и \mathcal{B}_3 соответственно шары $B_\varepsilon(A)$, $B_\varepsilon(B)$ и $B_\varepsilon(C)$. Пусть также $\mathcal{C}_1 = B_\varepsilon([AB]) \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ и $\mathcal{C}_2 = B_\varepsilon([BC]) \setminus (\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)$ — цилиндры с высотами $[AB]$ и $[BC]$ и радиусом основания ε , из которых выброшены ε -шары концевых точек. При $B \in [AC]$ множества \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 не пересекаются. Если $B \notin [AC]$, то \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 имеют общие внутренние точки, поэтому объем $B_\varepsilon(z)$ будет меньше объема $B_\varepsilon([AD])$, где $|AD| = |AB| + |BC|$ и $B \in [AD]$. На рис. 217 изображено пересечение $B_\varepsilon(z)$ с плоскостью $\alpha = (ABC)$, причем множество $\alpha \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ выделено темным цветом. При $B \in (AC) \setminus [AC]$ утверждение очевидно. База индукции доказана. Шаг индукции сразу следует из предположения индукции и базы для случая двух звеньев.

2) обозначим через $l^* = l(z)$ и $[XY]$ — произвольный отрезок, у которого



$|XY| = l^*$, тогда из предыдущего примера и (1) получим оценку

$$0 \leq s_M(z) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_\varepsilon([XY]))}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi l^*}{2} \cdot \varepsilon + \frac{2}{3} \pi \varepsilon^2 \right) = 0.$$

3) рассмотрим произвольную спрямляемую кривую k , где $k = f([a; b])$, $a \leq b$, $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{P}_3$ — непрерывное отображение и $l^* = l(k)$ — длина кривой. Координатные функции $x(t) = \text{Пр}_{(Ox)} \circ f$, $y(t) = \text{Пр}_{(Oy)} \circ f$, $z(t) = \text{Пр}_{(Oz)} \circ f$ непрерывны (см. второй параграф третьей главы), и по теореме Кантора (см. второй параграф пятой главы Математического анализа 11) они будут равномерно непрерывны на отрезке $[a; b]$. Это позволит для произвольного $\varepsilon > 0$ найти такие δ_1 , δ_2 и δ_3 , что

$$\text{при всех } t, t' \in [a; b], \text{ для которых } |t - t'| < \delta_1 \Rightarrow \left| x(t) - x(t') \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad (*)$$

$$\text{при всех } t, t' \in [a; b], \text{ для которых } |t - t'| < \delta_2 \Rightarrow \left| y(t) - y(t') \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad (**)$$

$$\text{при всех } t, t' \in [a; b], \text{ для которых } |t - t'| < \delta_3 \Rightarrow \left| z(t) - z(t') \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \quad (***)$$

Выбрав в качестве $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, мы обеспечим выполнение условий (*), (**) и (***). Теперь рассмотрим такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ отрезка $[a; b]$, диаметр (т.е. максимальная длина отрезка разбиения) которого $\delta(T) < \delta$, обозначим через $A_i = f(t_i)$, $z(T) = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ — ломаная, построенная по разбиению T . Тогда для любого $t \in [a; b]$ можно найти такое число $t_i \in T$, что $|t - t_i| < \delta$ и положим $C = f(t)$. Оценим расстояние между точками C и A_i :

$$|CA_i| = \sqrt{\left(x(t) - x(t_i)\right)^2 + \left(y(t) - y(t_i)\right)^2 + \left(z(t) - z(t_i)\right)^2} < \sqrt{3 \cdot \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon.$$

Последнее означает, что $k \subseteq B_\varepsilon(z(T))$, откуда $B_\varepsilon(k) \subseteq B_{2\varepsilon}(z(T))$. Пусть отрезок $[XY]$ имеет длину l^* , тогда из (1) имеем оценку:

$$\begin{aligned} 0 \leq s_M(k) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_{2\varepsilon}(z(T)))}{2\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_{2\varepsilon}([XY]))}{2\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi l^* \cdot \varepsilon^2 + \frac{4}{3} \cdot 8\pi \varepsilon^3}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\pi l^* \cdot \varepsilon + \frac{16}{3} \cdot \pi \varepsilon^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку для спрямляемой кривой k мы получили $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_\varepsilon(k))}{2\varepsilon} = 0$, вместо вычисления $v(B_\varepsilon(F))$ для произвольной фигуры F (при нахождении ее площади по Минковскому) мы можем считать объем удобного для



нас множества, которое получено из $B_\varepsilon(F)$ добавлением или выбрасыванием любой части $B_\varepsilon(k)$. Чаще всего это будет происходить когда кривая k является границей фигуры F . Прием, который позволяет при вычислении $s_M(F)$ изменить $B_\varepsilon(F)$ с помощью любого фрагмента $B_\varepsilon(k)$, будем называть ε -модификацией.

Теорема 11.2. Пусть $F \subseteq \alpha$, $F \in \text{Sq}$, $\text{Bnd}(F) = k$, причем k является спрямляемой кривой, тогда $s_M(F) = s(F)$.

Доказательство. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим такой вектор $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$, что $|\overrightarrow{AB}| = \varepsilon$. Для любой точки $X \in F$ обозначим через $Y = T_{-\overrightarrow{AB}}(X)$, $Z = T_{\overrightarrow{AB}}(X)$ и $t_X = [YZ]$. Тело $\Phi_\varepsilon = \bigcup_{X \in F} t_X$ будем называть обобщенным цилиндром с основаниями $F_1 = T_{-\overrightarrow{AB}}(F)$ и $F_2 = T_{\overrightarrow{AB}}(F)$ (рис. 218). Используя критерий кубирумости \diamond_3 , из $F \in \text{Sq}$ придем к $\Phi_\varepsilon \in \text{Vol}$ и $v(\Phi_\varepsilon) = s(F) \cdot 2\varepsilon$. Теперь заметим, что фигура Φ_ε получена из $B_\varepsilon(F)$ с помощью ε -модификации границы k , поэтому из предыдущей леммы следует, что $s_M(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Phi_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s(F) \cdot 2\varepsilon}{2\varepsilon} = s(F)$. ■

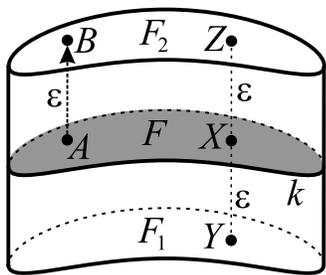


Рис. 218

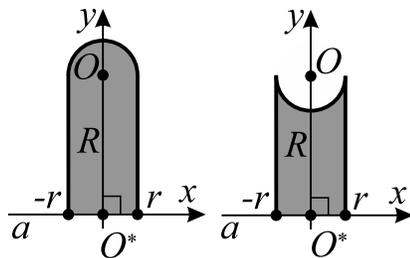


Рис. 219

Рис. 220

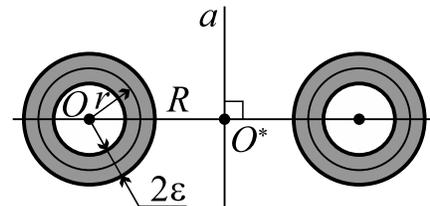


Рис. 221

Для плоских фигур результат предыдущей теоремы был вполне ожидаем, посмотрим теперь как вычисляется площадь по Минковскому у некоторых поверхностей в пространстве.

Теорема 11.3. Пусть $a, \omega \subseteq \alpha$, где $\omega = \omega(O, r)$, $d(O, a) = R > r$. Обозначим через $\Phi = R_a(K(O, r))$ полноторие и через $F = R_a(\omega)$ — тор, который является поверхностью Φ . Тогда

- 1) $\Phi \in \text{Vol}$ и $v(\Phi) = 2Rr^2\pi^2$;
- 2) $s_M(F) = 4Rr\pi^2$.

Доказательство. 1) в пятом параграфе пятой главы Математического анализа 11 было доказано, что если тело Φ получено вращением вокруг оси (Ox) криволинейной трапеции для неотрицательной и непрерывной функции



$f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, то Φ кубуемо и $v(\Phi) = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$. В качестве оси (Ox) выберем прямую a , точка $O^* = \text{Pr}_a(O)$ будет началом координат, а прямую (O^*O) превратим в ось (Oy) , введя на ней порядок с помощью $\overrightarrow{O^*O}$. На рис. 219 и 220 изображены криволинейные трапеции соответственно для функций $f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ и $f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны и неотрицательны на отрезке $[-r; r]$. Используя упомянутый результат, аддитивность объема на множестве кубуемых тел и аддитивность определенного интеграла, получим, что Φ кубуемо и

$$v(\Phi) = \pi \int_{-r}^r (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx = 4\pi R \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4\pi R \cdot \frac{\pi r^2}{2} = 2Rr^2\pi^2.$$

При нахождении последнего интеграла мы воспользовались его геометрическим смыслом, заменив интеграл на половину площади круга радиуса r .

2) на рис. 221 изображено сечение плоскостью α множества $B_\varepsilon(F)$. Объем фигуры $B_\varepsilon(F)$ можно посчитать как разность объемов двух полноторий $\Phi_1 = R_a(K(O, r + \varepsilon))$ и $\Phi_2 = R_a(K(O, r - \varepsilon))$, поэтому

$$s_M(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi^2 R(r + \varepsilon)^2 - 2\pi^2 R(r - \varepsilon)^2}{2\varepsilon} = 2\pi^2 R \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4r\varepsilon}{2\varepsilon} = 4Rr\pi^2. \quad \blacksquare$$

Пример 3. Рассмотрим цилиндр $\Phi = R_a(ABCD)$ с высотой $[AB]$, осью $a = (AB)$, $h = |AB|$, $r = |AD|$. Пусть $F = R_a([CD])$ — боковая поверхность Φ , определим у F площадь по Минковскому. Обе окружности $\omega_1 = \omega(A, r)$ и $\omega_2 = \omega(B, r)$, которые являются границами оснований Φ , спрямляемы. Применяя метод ε -модификации края, вместо $B_\varepsilon(F)$ будем рассматривать более удобную для вычисления объема фигуру Ψ_ε . На рис. 222 и 223 изображены соответственно пересечения с плоскостью $\alpha = (ABC)$ фигур $B_\varepsilon(F)$ и Ψ_ε . Осталось вычислить предел

$$s_M(F) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Psi_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi h(r + \varepsilon)^2 - \pi h(r - \varepsilon)^2}{2\varepsilon} = \pi h \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4r\varepsilon}{2\varepsilon} = 2\pi r h,$$

что совпадает с результатом, полученным в восьмом параграфе этой главы.

Пример 4. Рассмотрим конус $\Phi = R_a(\triangle ABC)$ с высотой $[CB]$, осью $a = (CB)$, $h = |CB|$, $r = |CA|$, $l = |AB|$, $\varphi = \hat{A}$ (рис. 224). Пусть $F = R_a([AB])$ — боковая поверхность Φ , определим у F площадь по Минковскому. Окружность $\omega = \omega(C, r)$, которая является границей основания конуса, спрямляема. Положим $\varepsilon_1 \stackrel{df}{=} \varepsilon / \sin \varphi$ и рассмотрим полноторие



$\Omega_{\varepsilon_1} = R_a(K(A, \varepsilon_1))$, тогда по формуле объема полнотория получим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Omega_{\varepsilon_1})}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi^2 r \varepsilon_1^2}{2\varepsilon} = \frac{2\pi^2 r}{\sin^2 \varphi} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{2\varepsilon} = 0.$$

Кроме того, если рассмотреть шар $B_{\varepsilon_2}(B)$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon / \cos \varphi$, также придем к нулевому пределу в случае

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(B_{\varepsilon_2}(B))}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi \varepsilon_2^3 / 3}{2\varepsilon} = \frac{2\pi}{3 \cos^2 \varphi} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon} = 0.$$

Эти два нулевых предела позволяют применить ε_1 -модификацию к окружности ω и ε_2 -модификацию к точке B , чтобы вместо $B_\varepsilon(F)$ рассматривать более удобную для вычисления объема фигуру Ψ_ε . На рис. 224 и 225 изображены соответственно пересечения с плоскостью $\alpha = (ABC)$ фигур $B_\varepsilon(F)$ и Ψ_ε .

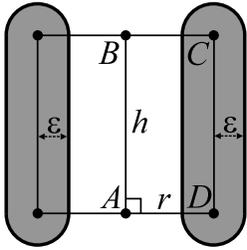


Рис. 222

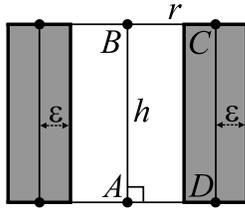


Рис. 223

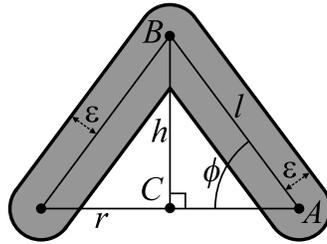


Рис. 224

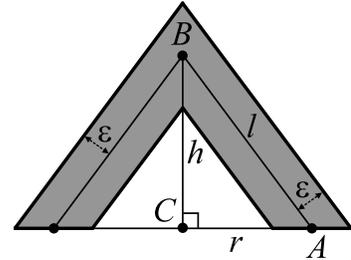


Рис. 225

Осталось вычислить предел

$$\begin{aligned} s_M(F) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(\Psi_\varepsilon)}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(h + \varepsilon_2)(r + \varepsilon_1)^2 - \pi(h - \varepsilon_2)(r - \varepsilon_1)^2}{6\varepsilon} = \\ &= \pi \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4hr\varepsilon_1 + 2r^2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{6\varepsilon} = \frac{\pi}{3} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2hr}{\sin \varphi} + \frac{r^2}{\cos \varphi} + \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \right) = \\ &= \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{2hr}{\sin \varphi} + \frac{r^2}{\cos \varphi} + 0 \right) = \frac{\pi}{3} \cdot (2rl + rl) = \pi rl. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали очевидные равенства $h/\sin \varphi = l$ и $r/\cos \varphi = l$. Снова замечаем, что значение $s_M(F)$ совпало с формулой площади боковой поверхности конуса, которая была получена в девятом параграфе этой главы.



Упражнения

1. Найдите $s_M(Sph(O, r))$, сравните результат со значением, полученным с помощью одностороннего окрашивания в десятом параграфе.
2. Пусть S — сегмент круга $K(O, R)$, $\overset{\sim}{AB}$ — дуга сегмента S , a — ось симметрии S , $\Phi = R_a(S)$ — сегмент в шаре $B(O, R) = R_a(K(O, R))$, H — длина высоты Φ . Обозначим через $F = R_a(\overset{\sim}{AB})$ боковую поверхность Φ . Найдите $s_M(F)$ и сравните полученный результат с формулой из десятого параграфа этой главы.
3. Найдите площадь по Минковскому у боковой поверхности усеченного конуса и сравните полученный результат с формулой из теоремы 9.4.
4. Приведите пример кривой $k = f([a; b])$, у которой $s_M(k) > 0$.
5. Верно ли, что для любой квадратуемой фигуры F выполняется $s(F) = s_M(F)$?
6. Верно ли, что для любого $x^* \in [2\pi rh; \infty)$ найдется последовательность многогранников $\{M_n\}$, вписанных в цилиндр $\Phi = R_a(ABCD)$ ($h = |AB|$, $a = (AB)$, $r = |AD|$), для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\text{бок}}(M_n) = x^*$?

4.12. Равносоставленность многоугольников

В четвертом параграфе этой главы мы договорились семейство множеств $\mathcal{T} = \{F_i : i \in I\}$ называть *почти разбиением* множества F , если $F = \bigcup_{i \in I} F_i$ и для различных множеств F_i и F_j выполняется $\overset{\circ}{F}_i \cap \overset{\circ}{F}_j = \emptyset$, а также использовать в случае почти разбиения равенство $F = \bigsqcup_{i \in I} F_i$ вместо $F = \bigcup_{i \in I} F_i$. Напомним, что в обычном разбиении различные множества не пересекаются, а в почти разбиении у различных множеств не должно быть общих внутренних точек. Почти разбиение $\tilde{\mathcal{T}} = \{G_j : j \in J\}$ называется *измельчением* почти разбиения $\mathcal{T} = \{F_i : i \in I\}$, если для любого $j \in J$ найдется такой индекс $i \in I$, что $G_j \subseteq F_i$. Для любой многоугольной фигуры $M \in \mathcal{M}$ по определению найдется конечное почти разбиение, состоящее из треугольников, т.е. $M = \bigsqcup_{i \in I} \Delta_i$, где I — конечное множество (возможно, пустое) и Δ_i — треугольник (возможно, вырожденный) для любого $i \in I$. В этом параграфе мы будем рассматривать только такие непустые $M \in \mathcal{M}$, в почти разбиении которых **нет вырожденных треугольников**. Множество всех таких многоугольных фигур обозначим через \mathcal{M}^* . Из теоремы 4.1 следует, что \mathcal{M}^* содержит все многоугольники. Напомним, что для любой фигуры Φ через $\text{Int } \Phi$ мы обозначали множество всех внутренних точек этой фигуры,



а замыканием фигуры Φ называли множество $[\Phi] = \Phi \cup \text{Bnd } \Phi$ (см. третий параграф первой главы). Определим теперь для произвольного множества $\Phi \subseteq \alpha$ через $\text{CI}(\Phi) \stackrel{\text{df}}{=} [\text{Int } \Phi]$ и замкнутую фигуру F будем называть *канонически замкнутой*, если $\text{CI}(F) = F$.

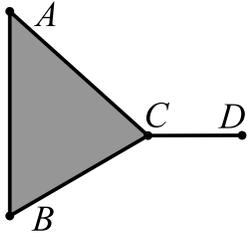


Рис. 226

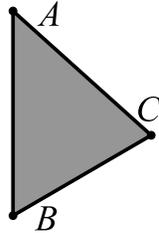


Рис. 227

Например, верно $\text{CI}(\triangle ABC) = \triangle ABC$, поэтому треугольник канонически замкнут, а фигура $F = \triangle ABC \cup [CD]$ на рис. 226 — нет, поскольку $F_1 = \text{CI}(F) = \triangle ABC \neq F$ (рис. 227). С помощью оператора CI , который множествам ставит в соответствие канонически замкнутые множества, можно из любой многоугольной фигуры M получить фигуру $M^* = \text{CI}(M) \in \mathcal{M}^*$.

В следующем утверждении перечислим простые свойства канонически замкнутых множеств.

Лемма 12.1. 1) F канонически замкнуто тогда и только тогда, когда F замкнуто и для любой точки $A^* \in F$ найдется такая последовательность точек $\{A_n\} \subseteq \text{Int } F$, что $\lim A_n = A^*$.
2) объединение конечного числа канонически замкнутых множеств канонически замкнуто.

Доказательство. 1) \Rightarrow) пусть F канонически замкнуто, т.е. справедливо равенство $F = \text{CI}(F) = \text{Int } F \cup \text{Bnd}(\text{Int } F)$. Если $A^* \in \text{Int } F$, то утверждение очевидно, поскольку можно положить $A_n = A^*$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Осталось рассмотреть случай $A^* \in \text{Bnd}(\text{Int } F)$. По определению граничной точки множества для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ выполнено $O_{1/n}(A^*) \cap \text{Int } F \neq \emptyset$, что позволяет выбрать точку $A_n \in O_{1/n}(A^*) \cap \text{Int } F$. Из двойного неравенства $0 \leq d(A^*, A_n) < \frac{1}{n}$ по П2П получим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A^*, A_n) = 0$ или $\lim A_n = A^*$, поэтому $\{A_n\}$ — искомая последовательность.

\Leftarrow) положим $F_1 \stackrel{\text{df}}{=} \text{Int } F \cup \text{Bnd}(\text{Int } F)$ и докажем, что $F = F_1$. Поскольку $\text{Int } F \subseteq F$ и F — замкнутое множество, выполняются включения $\text{Bnd}(\text{Int } F) \subseteq F$ и $F_1 \subseteq F$. Осталось проверить, что $F \subseteq F_1$. Предположим противное, существует точка $A^* \in F \setminus F_1$. Множество F_1 замкнуто и $A^* \notin F_1$, поэтому найдется такая окрестность $O_\varepsilon(A^*)$, что $O_\varepsilon(A^*) \cap F_1 = \emptyset$, откуда $O_\varepsilon(A^*) \cap \text{Int } F = \emptyset$. Поэтому последовательности $\{A_n\} \subseteq \text{Int } F$ со свойством $\lim A_n = A^*$ не существует. \nexists .



2) пусть $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ и F_i — канонически замкнутое множество при всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Если $F_i = \emptyset$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то утверждение очевидно, поэтому далее считаем, что $F \neq \emptyset$. Множество F замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств (см. третий параграф первой главы), поэтому рассмотрим произвольную точку $A^* \in F$ и найдем индекс $i \leq n$, для которого $A^* \in F_i$. Применяя (1) к A^* и канонически замкнутому множеству F_i , найдем последовательность $\{A_n\} \subseteq \text{Int } F_i \subseteq \text{Int } F$ со свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A^*$. Теперь из (1) следует, что F — канонически замкнутое множество. ■

Следствие. Любая фигура $M \in \mathcal{M}^*$ является канонически замкнутой.

Доказательство. Сразу следует из канонической замкнутости любого невырожденного треугольника и утверждения (2) предыдущей леммы. ■

Лемма 12.2. Пусть $\mathcal{T}_1 = \{F_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\mathcal{T}_2 = \{H_j : 1 \leq j \leq k\}$ являются почти разбиениями многоугольной фигуры $M \in \mathcal{M}^*$, причем $F_i, H_j \in \mathcal{M}^*$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$. Тогда существует почти разбиение $\tilde{\mathcal{T}}$ фигуры M , которое состоит из непустых канонически замкнутых множеств и одновременно измельчает \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 .

Доказательство. Обозначим через $G_{ij} = \text{CI}(F_i \cap H_j)$ при всех индексах $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$, тогда G_{ij} замкнуто и семейство множеств

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{G_{ij} : G_{ij} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

одновременно измельчает \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 , поскольку $G_{ij} \subseteq F_i$ и $G_{ij} \subseteq H_j$. Осталось проверить, что $M = \sqcup \tilde{\mathcal{T}}$. Рассмотрим две различные пары индексов (i, j) , (i_1, j_1) и б.о.о. будем считать, что $i \neq i_1$, тогда $\text{Int } F_i \cap \text{Int } F_{i_1} = \emptyset$, откуда $\text{Int } G_{ij} \cap \text{Int } G_{i_1 j_1} = \emptyset$. Докажем, что $M \subseteq \cup \tilde{\mathcal{T}}$, для чего выберем произвольную точку $A^* \in M$ и воспользуемся канонической замкнутостью M и утверждением (1) предыдущей леммы. Учитывая, что стороны фигур F_i и H_j при всех допустимых значений индексов задают только конечное число направлений на плоскости α , последовательность $\{A_m\} \subseteq \text{Int } M$ из предыдущей леммы можно выбрать так, что ни одна из точек этой последовательности не попадает на стороны F_i и H_j при всех индексах $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$. Из конечности семейства $\{F_i \cap H_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ следует, что найдутся такие индексы $i_0 \leq n$ и $j_0 \leq k$, что $F_{i_0} \cap H_{j_0}$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{A_m\}$, обозначим по-



лученную подпоследовательность через $\{A_{m_p}\}$. По выбору последовательности ни одна из точек $\{A_{m_p}\}$ не лежит на сторонах $F_{i_0} \cap H_{j_0}$, откуда $\{A_{m_p}\} \subseteq \text{Int}(F_{i_0} \cap H_{j_0}) \subseteq G_{i_0 j_0}$. В силу замкнутости $G_{i_0 j_0}$ получим, что $A^* = \lim_{p \rightarrow \infty} A_{m_p} \in G_{i_0 j_0}$. Обратное включение $\cup \tilde{\mathcal{T}} \subseteq M$ очевидно, поэтому $M = \sqcup \tilde{\mathcal{T}}$. ■

Напомним, что фигуры $M, K \in \mathcal{M}^*$ называются: *равновеликими*, если $s(M) = s(K)$; *равносоставленными*, если их так можно представить в виде объединений многоугольных фигур $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$ и $K = \bigsqcup_{i=1}^n K_i$, что верны равенства $M_i = K_i \in \mathcal{M}^*$ (т.е. фигуры M_i и K_i переводятся друг в друга некоторым движением $f_i \in D_2$) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$; *равнодополняемыми*, если найдутся такие две равноставленные фигуры $M_1, K_1 \in \mathcal{M}^*$, что $M \sqcup M_1 = K \sqcup K_1$. На пути к центральному результату докажем несколько простых вспомогательных утверждений.

Лемма 12.3. Пусть $K, M, L \in \mathcal{M}^*$. Если фигура K равноставлена с M , а M — с L , то фигуры K и L также равноставлены.

Доказательство. По определению существуют такие представления фигур $K = \bigsqcup_{i=1}^n K_i$, $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$ и движения f_i , что $M_i = f_i(K_i) \in \mathcal{M}^*$.

Также найдутся такие представления $M = \bigsqcup_{j=1}^k H_j$, $L = \bigsqcup_{j=1}^k L_j$, и движения g_j , что $L_j = g_j(H_j) \in \mathcal{M}^*$. По предыдущей лемме найдем почти разбиение $\tilde{\mathcal{T}} = \{G_{ij} : G_{ij} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ фигуры M , которое одновременно измельчает семейства $\{M_i : 1 \leq i \leq n\}$, $\{H_j : 1 \leq j \leq k\}$ и состоит из канонически замкнутых множеств. Теперь для любого $G_{ij} \in \tilde{\mathcal{T}}$ обозначим через $G_{ij}^* = f_i^{-1}(G_{ij})$ и $G_{ij}^{**} = g_j(G_{ij})$, тогда $G_{ij}^* = G_{ij}^{**}$, поскольку $G_{ij}^{**} = g_j \circ f_i(G_{ij}^*)$. Существование почти разбиений

$$\tilde{\mathcal{T}}^* = \{G_{ij}^* : G_{ij}^* \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\},$$

$$\tilde{\mathcal{T}}^{**} = \{G_{ij}^{**} : G_{ij}^{**} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

дают равноставленность фигур K и L . ■

Лемма 12.4. Любой невырожденный треугольник равноставлен с некоторым прямоугольником.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и б.о.о. считаем, что $[AB]$ — его наибольшая сторона. Тогда углы $\angle CAB$ и $\angle CBA$ — острые,



поэтому точка $H = \text{Пр}_{(AB)}(C)$ лежит между A и B (рис. 228). Обозначим через P , M и L соответственно середины отрезков $[AC]$, $[CH]$ и $[BC]$, пусть также $E = \text{Пр}_{(PL)}(A)$ и $F = \text{Пр}_{(PL)}(B)$. Тогда верны равенства $Z_P(\triangle PMC) = \triangle PEA$ и $Z_L(\triangle LMC) = \triangle LFB$, поэтому треугольник ABC равноставлен с прямоугольником $AEFB$.

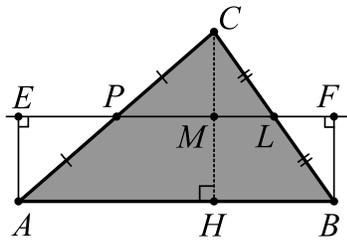


Рис. 228

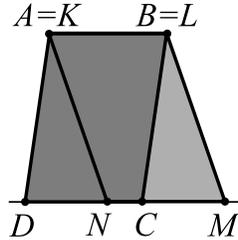


Рис. 229

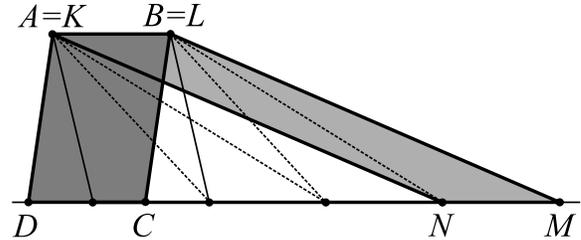


Рис. 230

Лемма 12.5. Пусть $\Phi = ABCD$ и $\Phi_1 = KLMN$ — параллелограммы с равными основаниями и равными высотами, проведенными к равным основаниям. Тогда Φ и Φ_1 равноставлены.

Доказательство. Пусть $[AB] = [KL]$ и равны высоты, проведенные к этим основаниям, тогда найдется такое движение f , что $f([KL]) = [AB]$ и $f([MN]) = [CD]$. Поэтому б.о.о. можно считать, что отрезки $[AB]$, $[KL]$ совпадают и $(MN) = (CD)$ (рис. 229). Рассмотрим два случая расположения параллелограммов Φ и Φ_1 .

1-й случай: отрезки $[CD]$ и $[MN]$ имеют непустое пересечение. Б.о.о. считаем, что $N \in [CD]$ и $C \in [MN]$ (рис. 229). Тогда верно равенство $T_{\vec{AB}}(\triangle DAN) = \triangle CBM$ и параллелограммы Φ и Φ_1 равноставлены.

2-й случай: отрезки $[CD]$ и $[MN]$ не пересекаются. Б.о.о. считаем, что $N, M \in [DC)$ (рис. 230). Пусть точка N_i выбрана на луче $[MN)$ так, что $[MN_i] = i[MN]$ и Φ_i — параллелограмм с основаниями $[KL]$ и $[N_{i-1}N_i]$ (считаем, что $N_0 = M$ и $N_1 = N$). По аксиоме Архимеда найдется такое минимальное натуральное число $k \in \mathbb{N}$, что $k[MN] \geq [MC]$ (на рис. 230 $k = 4$), что дает непустоту пересечения отрезков $[CD]$ и $[N_{k-1}N_k]$. Применяя первый случай, получим, что параллелограмм Φ_i равноставлен с параллелограммом Φ_{i+1} , а также Φ_k равноставлен с Φ . По лемме 12.3 приходим к равноставленности параллелограммов Φ и Φ_1 .

Лемма 12.6. Пусть $\Phi = ABCD$ и $\Phi_1 = KLMN$ — прямоугольники, для которых выполняется $s(\Phi) = s(\Phi_1)$. Тогда Φ и Φ_1 равноставлены.



Доказательство. Б.о.о. будем считать, что $[AB]$ — максимальный по длине отрезок из четверки $[AB]$, $[AD]$, $[KL]$ и $[KN]$ (рис. 231).

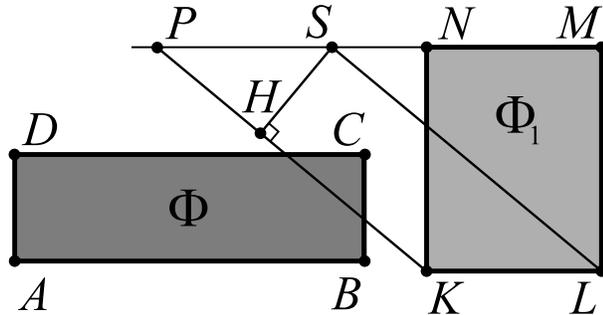


Рис. 231

Если $[AB] = [LM]$, доказательство очевидно, поскольку прямоугольники Φ и Φ_1 равны между собой. Далее считаем, что $[LM] < [AB]$. На луче $[MN)$ найдем такие точки S и P , что $[LS] = [KP] = [AB]$ и $P \notin [MN]$ (рис. 231), тогда прямоугольные треугольники $\triangle LMS$ и $\triangle KNP$ равны по катету и гипотенузе, откуда следует, что $(LS) \parallel (KP)$

и $\Phi^* = LSPK$ — параллелограмм. Параллелограммы Φ_1 и Φ^* равноставлены по лемме 12.5. Пусть $[SH]$ — высота в Φ^* , тогда из равенств $s(\Phi) = s(\Phi_1) = s(\Phi^*)$ и $[AB] = [KP]$ следует, что $[SH] = [AD]$. Применяя лемму 12.5, получим равноставленность Φ и Φ^* . Теперь из леммы 12.3 следует равноставленность Φ и Φ_1 .

■

Лемма 12.7. Любая многоугольная фигура $M \in \mathcal{M}^*$ равноставлена с некоторым прямоугольником.

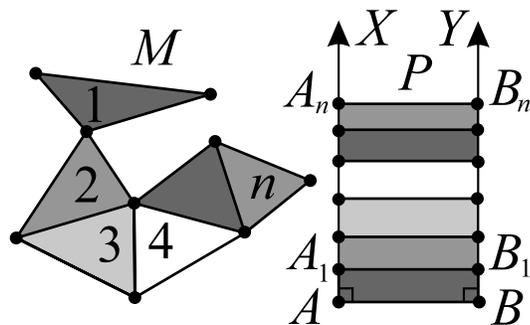


Рис. 232

Доказательство. Пусть $M \subseteq \alpha$,

$M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$ и Δ_i — невырожденный треугольник для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Выберем произвольный отрезок $[AB] \subseteq \alpha$, удовлетворяющий условию $A \neq B$, и проведем лучи $[AX)$ и $[BY)$ так, что $(AX), (BY) \perp (AB)$ и точки X и Y лежат по одну сторону от (AB) (рис. 232). Отметим точки $A_1 \in [AX)$ и $B_1 \in [BY)$ так, чтобы $P_1 = AA_1B_1B$ был прямоугольником и $s(P_1) = s(\Delta_1)$.

По лемме 12.4 найдем прямоугольник P_1^* , который равноставлен с Δ_1 , тогда $s(P_1^*) = s(\Delta_1) = s(P_1)$ и прямоугольники P_1 и P_1^* равноставлены по предыдущей лемме. Тогда треугольник Δ_1 равноставлен с прямоугольником P_1 по лемме 12.3.

Продолжим уверенное движение вдоль лучей $[AX)$ и $[BY)$ и найдем такие точки $A_2 \in [AX)$ и $B_2 \in [BY)$, что $A_1 \in [AA_2]$, $P_2 = A_1A_2B_2B_1$ —



прямоугольник, для которого выполняется равенство $s(P_2) = s(\Delta_2)$. С помощью лемм 12.4, 12.6 и 12.3 получим равносоставленность Δ_2 и P_2 . В конце этого процесса получим равносоставленность треугольника Δ_n с прямоугольником $P_n = A_{n-1}A_nB_nB_{n-1}$. Точки A_1, A_2, \dots, A_n выбирались на луче $[AX)$ так, чтобы прямоугольники P_i и P_j не имели общих внутренних точек при разных индексах i и j , поэтому фигура M равносоставлена с прямоугольником $P = AA_nB_nB = \bigsqcup_{i=1}^n P_i$.

Считают, что следующий результат был независимо получен Уоллесом¹⁵ (1807), Бояи¹⁶ (1832) и Гервином¹⁷ (1833), его называют теоремой *Уоллеса-Бояи-Гервина*.

Теорема 12.8. Пусть $M, K \in \mathcal{M}^*$. Многоугольные фигуры M и K равносоставлены тогда и только тогда, когда они равновелики.

Доказательство. Из равносоставленности M и K , а также из аддитивности функции площади и сохранение площади при движении следует, что $s(M) = s(K)$, поэтому остается только доказать обратное утверждение.

Пусть $s(M) = s(K)$, $M = \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$, $K = \bigsqcup_{j=1}^k \Delta_j^*$ и Δ_i, Δ_j^* — невырожденные треугольники для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, k\}$. По предыдущей лемме M равносоставлен с некоторым прямоугольником $\Phi = ABCD$, а K — с прямоугольником $\Phi_1 = PQRS$. Из $s(\Phi) = s(M) = s(K) = s(\Phi_1)$ и леммы 12.6 следует равносоставленность прямоугольников Φ и Φ_1 , что позволяет применить лемму 12.3 и окончательно получить, что M и K равносоставлены.

Теорема 12.9. Пусть $M, K \in \mathcal{M}^*$. Многоугольные фигуры M и K равнодополняемы тогда и только тогда, когда они равновелики.

Доказательство. Снова, из равнодополняемости M и K и аддитивности функции площади следует равенство $s(M) = s(K)$, поэтому требует

¹⁵Уильям Уоллес (1768–1843) — шотландский математик, астроном, педагог и изобретатель; в 1799 году опубликовал работу о прямой Симсона, названной так ошибочно в честь Роберта Симсона; в 1803 году опубликовал теорему о бабочке; в 1807 году доказал теорему о равносоставленности двух произвольных равновеликих треугольников.

¹⁶Фаркаш Бояи (1775–1856) — венгерский математик и поэт, отец математика Яноша Бояи, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии; окончил Гёттингенский университет, где близко познакомился с Карлом Гауссом; профессор математики, физики и химии; занимался основами геометрии и пытался доказать пятый постулат Евклида.

¹⁷Пол Гервин (1799–1858) — немецкий офицер, математик-любитель; в 1856 году был награжден русским орденом Святого Владимира 4-й степени; генерал прусской армии.



проверки только обратное утверждение.

Ограниченность фигур M и K позволяет найти квадрат Φ , который одновременно содержит множества M и K . Обозначим через $M_1 = \text{CI}(\Phi \setminus M)$ и $K_1 = \text{CI}(\Phi \setminus K)$ — две канонически замкнутые многоугольные фигуры. Тогда из аддитивности площади и равенства $s(M) = s(K)$ следует, что

$$s(M_1) = s(\Phi) - s(M) = s(\Phi) - s(K) = s(K_1).$$

Применяя к фигурам M_1 и $K_1 \in \mathcal{M}^*$ предыдущую теорему, получаем их равноставленность, что дает равнодополняемость фигур M и K . ■

Теория равноставленности активно развивалась до середины двадцатого века. Это развитие было связано со следующим определением.

Определение. Пусть (D_2, \circ) — группа всех движений плоскости, $G_2 \subseteq D_2$ и (G_2, \circ) также является группой. Многоугольные фигуры M и $K \in \mathcal{M}^*$ называются G_2 -равноставленными, если существуют такие почти разбиения этих фигур $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$, $K = \bigsqcup_{i=1}^n K_i$ и движения $f_i \in G_2$, что $K_i = f_i(M_i) \in \mathcal{M}^*$.

Ясно, что обычная равноставленность является D_2 -равноставленностью. Удивительный результат был получен Хадвигером¹⁸ и Глюром в 1951 году, чтобы его сформулировать обозначим через S_2 подгруппу группы D_2 , которая состоит из всех параллельных переносов и центральных симметрий. Следующее утверждение называется *теоремой Хадвигера-Глюра*: для произвольных многоугольных фигур M и $K \in \mathcal{M}^*$ условия $s(M) = s(K)$ и S_2 -равноставленность равносильны. Поскольку все параллельные переносы и центральные симметрии переводят любую прямую в параллельную прямую, из теоремы Хадвигера-Глюра следует, что для равновеликих многоугольных фигур найдутся такие почти разбиения $M = \bigsqcup_{i=1}^n M_i$, $K = \bigsqcup_{i=1}^n K_i$ (конечно же, $M, K, M_i, K_i \in \mathcal{M}^*$), что соответствующие стороны у равных фигур M_i и K_i будут параллельны друг другу! Окончательную точку в этом исследовании поставил Болтянский¹⁹ в 1956 году, доказав, что S_2 является

¹⁸Гуго Хадвигер (1908–1981) — швейцарский математик, известен работами по комбинаторной геометрии; более сорока лет работал профессором математики в Бернском университете; был одним из основных разработчиков Швейцарской шифровальной машины для военной связи, которая использовалась с 1947 по 1992 год.

¹⁹Владимир Григорьевич Болтянский (1925–2019) — советский и российский математик, профессор МГУ (с 1959); основные работы относятся к комбинаторной геометрии, топологии и теории оптимального управления; построил пример двумерного связного компакта, квадрат которого трехмерен — поверхность Болтянского; участник Великой Отечественной войны, воевал на 2-м Белорусском фронте.



минимальной группой с таким свойством, т.е. равновеликость произвольных фигур $M, K \in \mathcal{M}^*$ равносильна их G_2 -равносоставленности тогда и только тогда, когда $S_2 \subseteq G_2$ (теорема Болтянского).

Упражнения

1. Докажите, что (S_2, \circ) (S_2 состоит из всех параллельных переносов и центральных симметрий плоскости α) является подгруппой группы (D_2, \circ) .
2. Проверьте, что при доказательстве лемм 12.4 и 12.5 можно обойтись только движениями из группы (S_2, \circ) .
3. Передокажите лемму 12.6, используя только параллельные переносы и центральные симметрии.
4. Докажите теорему Хадвигера-Глюра.
5. Докажите теорему Болтянского.
6. Пусть T_2 — множество всех параллельных переносов плоскости. Докажите, что (T_2, \circ) является подгруппой группы (D_2, \circ) .
7. Докажите, что $M \in \mathcal{M}^*$ является T_2 -равносоставленным множеством с некоторым квадратом Φ той же площади тогда и только тогда, когда M — центрально симметричная фигура.
8. Докажите, что для произвольных многоугольных фигур M и $K \in \mathcal{M}^*$ условия $s(M) = s(K)$ и T_2 -равносоставленность равносильны в том и только в том случае, когда M и K — центрально симметричные фигуры.

4.13. Третья проблема Гильберта. Теорема Дена

Пятнадцатого апреля 1900 года в Париже открылась Всемирная выставка, в организации которой приняло участие 38 стран и посетили более 50 млн человек (за семь месяцев ее проведения). На этой выставке впервые были представлены озвученные фильмы и эскалаторы, Рудольф Дизель показал свой двигатель, работающий на рапсовом масле, математик Петрович²⁰ был награжден золотой медалью за гидравлический интегратор (прототип аналогового компьютера, предназначенного для решения дифференциальных уравнений). Российская экспозиция была самой большой и получила за время работы выставки более полутора тысяч наград. Инженер Лавр Проскуряков был награжден золотой медалью за Красноярский железнодорожный

²⁰Михаило Пётрович (1868–1943) — сербский математик и изобретатель, писатель, публицист, участник Первой и Второй мировых войн.



мост, художник Константин Коровин — за оформление отдела Сибири, князь Лев Голицин получил гран-при за вина Нового Света, хрустальный гран-при и большую золотую медаль получили каслинские литейщики за чугунный павильон, созданный по проекту архитектора-художника Евгения Баумгартена. На фоне туристического бума шестого августа в неприметном Дворце политической экономии и конгрессов рядом с мостом Альма скромно открылся II Международный конгресс математиков. В его работе приняло участие всего 226 делегатов из 26 стран, девять математиков представляли Россию. В первый день конгресса были сделаны два часовых доклада, а со второго дня заседания были перенесены в Сорбонну и проходили по секциям, которых было шесть (от арифметики, алгебры и анализа до преподавания и методологии). Всего на конгрессе было сделано 46 сообщений, но главным событием конгресса стал доклад Гильберта²¹ «Математические проблемы», который он прочитал 8 августа на совместном заседании пятой и шестой секций. Необыкновенная одаренность и широта его математических интересов позволили Гильберту получить результаты во многих областях математики и сформулировать важнейшие проблемы, во многом определившие развитие математики в двадцатом столетии. К настоящему моменту решены 16 из 23 сформулированных в докладе проблем, причем решение некоторых из них привело к совершенно неожиданным результатам. Так, например, очень долго под натиском математиков «продержалась» первая проблема Гильберта о равенстве кардинальных чисел \aleph_1 и $\mathfrak{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, *континуум-гипотеза*, она окончательно была решена только в 1963 году американским логиком Коэном²², награжденным на XV Международном конгрессе математиков в Москве (в котором участвовало более 4000 делегатов) медалью Филдса за изобретенный им метод форсинга.

Из предыдущего параграфа мы знаем, что для любых двух многоугольников равенство площадей дает их равноставленность. Поэтому в теории площади многоугольных фигур предельный переход (или «метод исчерпывания») необходимо применить только один раз — при доказательстве формулы площади прямоугольника (см. четвертый параграф этой главы). Так, например, треугольник элементарно перестраивается в прямоугольник. При

²¹ Давид Гильберт (1862–1943) — универсальный математик, автор фундаментальных идей и результатов многих областей математики: функционального анализа, теории инвариантов, общей алгебры, математической физики, теории интегральных уравнений и оснований математики; профессор, член многих академий наук, создатель важнейшего математического центра в Гёттингене (среди его учеников был, например, чемпион мира по шахматам Эмануил Ласкер).

²² Пол Коэн (1934–2007) — американский математик, лауреат самой престижной математической награды за изучение логики (1966).



построении объема многогранников мы дважды использовали предельный переход — при доказательстве формул объема прямоугольного параллелепипеда и тетраэдра (см. шестой и седьмой параграфы этой главы). Нельзя ли обойтись без «чертовой лестницы» в шестом параграфе и элементарно перестроить тетраэдр в призму? Хилл²³ в 1896 году нашел тетраэды, которые равноставлены с прямоугольным параллелепипедом, но его рассуждения не переносились на общий случай. Естественно возник вопрос (**третья проблема Гильберта**): *верно ли, что любые два многогранника одинакового объема равноставлены?* Уже в 1901 Ден²⁴ решил эту проблему, но совершенно неэлементарными средствами, а в 1903 году Каган²⁵ значительно сократил и упростил доказательство Дена. Спустя полвека Хадвигер существенно переработал доказательство теоремы Дена, используя остроумные идеи. К изложению подхода Хадвигера мы приступаем и начнем с одного алгебраического понятия.

Определение. *Зависимостью между $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) называется равенство*

$$n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k = 0,$$

где $n_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$. При этом целые числа n_i называются коэффициентами зависимости. Если хотя бы один из коэффициентов зависимости не равен нулю, то такая зависимость называется нетривиальной. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называются зависимыми, если для них существует нетривиальная зависимость, в противном случае они называются независимыми.

Следствие 1. *Если множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}$ содержит подмножество, состоящее из зависимых чисел, то и все числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ являются зависимыми.*

Доказательство. Предположим, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($p \leq k$) зависимы, тогда существует нетривиальная зависимость между этими числами $n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_p \cdot \alpha_p = 0$, которая легко дополняется до нетривиальной

²³Макайя Джон Мюллер Хилл (1856–1929) — английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1894); основные работы посвящены теории дифференциальных уравнений, задаче трех тел и гидродинамике; издал «Начала» Евклида на английском языке.

²⁴Макс Ден (1878–1952) — немецкий математик, ученик Гильберта, в 1939 году эмигрировал в США; основные работы относятся к геометрии, топологии и теории групп.

²⁵Вениамин Федорович Каган (1869–1953) — советский математик, экстерном закончил Киевский университет (1892), с 1923 — профессор Московского университета; основные направления исследования — основания геометрии, дифференциальная геометрия, тензорный анализ; предложил аксиоматику евклидова пространства, основанную на понятии расстояния, лауреат Государственной премии СССР (1943).



ЗАВИСИМОСТИ

$$n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_p \cdot \alpha_p + 0 \cdot \alpha_{p+1} + \dots + 0 \cdot \alpha_k = 0.$$

■

Следствие 2. Если числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) независимы, то и любое их подмножество (без повторяющихся элементов) является набором независимых чисел.

Доказательство. Предположив противное, останется применить предыдущее следствие.

■

Пример 1. Числа $0, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ являются зависимыми. Действительно, $2025 \cdot 0 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_k = 0$ является нетривиальной зависимостью.

Пример 2. Числа $r, s, \alpha_3, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, где $r, s \in \mathbb{Q}$ являются зависимыми. Если $r = 0$ или $s = 0$, это следует из предыдущего примера, поэтому считаем, что $r = a/b, s = c/d$ и $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда

$$(b \cdot c) \cdot r + (a \cdot d) \cdot s + 0 \cdot \alpha_3 + \dots + 0 \cdot \alpha_k = 0$$

является нетривиальной зависимостью.

Пример 3. Пусть $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, тогда r и $\sqrt{2}$ независимы. Предположив противное, найдем нетривиальную зависимость $n_1 \cdot r + n_2 \cdot \sqrt{2} = 0$ для некоторых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. При $n_1 = 0$ получим $n_2 = 0$ (поскольку $\sqrt{2} \neq 0$). Аналогично из $n_2 = 0$ будет следовать, что $n_1 = 0$ (поскольку $r \neq 0$). Оба случая противоречат тому, что зависимость $n_1 \cdot r + n_2 \cdot \sqrt{2} = 0$ нетривиальна. Отсюда $n_1 \neq 0$ и $n_2 \neq 0$ и $\sqrt{2} = -n_1 \cdot r / n_2 \in \mathbb{Q}$, что противоречит иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Лемма 13.1. Пусть $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$, тогда числа π и φ являются независимыми.

Доказательство. Докажем индукцией по $n \in \mathbb{N}$ утверждение, которое обозначим через (*): $\cos n\varphi = \frac{a}{3^n}$, где $a \in \mathbb{Z}$ и a не делится на 3.

Б.И. При $n = 1$ сразу получим $\cos \varphi = 1/3$. Рассмотрим случай $n = 2$. Из формулы $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$ получим $\cos 2\varphi = \frac{2}{9} - 1 = \frac{-7}{9}$ и база проверена.

Ш.И. Складывая между собой соответственно левые и правые части формул

$$\cos(n+1)\varphi = \cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi,$$



$$\cos(n-1)\varphi = \cos n\varphi \cos \varphi + \sin n\varphi \sin \varphi,$$

получим $\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi = 2 \cos n\varphi \cos \varphi$, откуда по предположению индукции (для двух предыдущих значений косинуса) имеем

$$\cos(n+1)\varphi = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{3^n} - \frac{b}{3^{n-1}} = \frac{2a-9b}{3^{n+1}}.$$

По предположению a не делится на 3, поэтому целое число $a_1 = 2a - 9b$ также не кратно трем и шаг индукции доказан.

Теперь легко установить независимость чисел π и φ . Предположив противное, найдем нетривиальную зависимость $n_1 \cdot \pi + n \cdot \varphi = 0$, при этом можно считать коэффициент n натуральным числом (иначе умножим обе части равенства на -1). Тогда $n\varphi = -n_1 \cdot \pi$ и $\cos n\varphi \in \{-1, 0, 1\}$, что противоречит утверждению (*). \nexists .

Определение. Функцию $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, заданную на конечном множестве $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}$ будем называть 0-аддитивной, если для любой зависимости $n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k = 0$ между числами этого множества выполнено

$$n_1 \cdot f(\alpha_1) + n_2 \cdot f(\alpha_2) + \dots + n_k \cdot f(\alpha_k) = 0.$$

Пример 4. Для чисел $r \in \mathbb{Q}$ и $\sqrt{2}$ можно положить $f(r) = x_1$ и $f(\sqrt{2}) = x_2$. Тогда f является 0-аддитивной функцией, поскольку между r и $\sqrt{2}$ существует только тривиальная зависимость и конечно же равенство $0 \cdot f(r) + 0 \cdot f(\sqrt{2}) = 0$ выполняется.

Пример 5. Для любого набора $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}$ функция $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, определенная равенствами $f(\alpha_i) \stackrel{df}{=} \alpha_i$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$, также является 0-аддитивной.

Пример 6. Немного усилим результат предыдущего примера, для произвольного $p \in \mathbb{R}$ положив $f(\alpha_i) = p \cdot \alpha_i$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Получим функцию $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, где $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subseteq \mathbb{R}$, и проверим, что она 0-аддитивна. Для любой зависимости $n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k = 0$ будет выполняться $p(n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k) = 0$, что дает

$$n_1 \cdot f(\alpha_1) + n_2 \cdot f(\alpha_2) + \dots + n_k \cdot f(\alpha_k) = 0.$$

Следующее утверждение будем называть леммой о продолжении 0-аддитивной функции.



Лемма 13.2. Пусть $K = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, $K_1 = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\} \subseteq \mathbb{R}$ являются конечными множествами ($k, l \in \mathbb{N}$) и $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная 0-аддитивная функция. Тогда существует такая функция $\tilde{f} : K \cup K_1 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой справедливы свойства:

- 1) \tilde{f} является 0-аддитивной функцией;
- 2) ограничение \tilde{f} на множестве K совпадает с f (т.е. $\tilde{f}|_K = f$).

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по l . Б.И. $l = 1$. Если $\beta_1 \in K$, то функция $\tilde{f} = f$ будет искомой, поэтому далее считаем, что $\beta_1 \notin K$ и рассмотрим два случая.

1-й случай: для любой зависимости $n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k + n \cdot \beta_1 = 0$ между числами множества $K \cup \{\beta_1\}$ следует, что $n = 0$. Тогда положим $\tilde{f}(\beta_1) \stackrel{df}{=} x^* \in \mathbb{R}$, где x^* — произвольное число, $\tilde{f}(\alpha_i) \stackrel{df}{=} f(\alpha_i)$ для любого индекса $i \in \{1, \dots, k\}$. Свойство (2) следует из определения функции \tilde{f} и условия $\beta_1 \notin K$. Поскольку в любой зависимости между числами $K \cup \{\beta_1\}$ коэффициент при β_1 зануляется, опуская последнее слагаемое, получаем зависимость $n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k = 0$ между числами множества K , теперь из 0-аддитивности функции f и равенства $\tilde{f}|_K = f$ следует, что

$$\begin{aligned} n_1 \cdot f(\alpha_1) + n_2 \cdot f(\alpha_2) + \dots + n_k \cdot f(\alpha_k) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow n_1 \cdot \tilde{f}(\alpha_1) + n_2 \cdot \tilde{f}(\alpha_2) + \dots + n_k \cdot \tilde{f}(\alpha_k) + 0 \cdot \tilde{f}(\beta_1) &= 0, \end{aligned}$$

поэтому \tilde{f} является 0-аддитивной функцией.

2-й случай: существует нетривиальная зависимость

$$n_1^* \cdot \alpha_1 + n_2^* \cdot \alpha_2 + \dots + n_k^* \cdot \alpha_k + n^* \cdot \beta_1 = 0 \quad (1)$$

между числами множества $K \cup \{\beta_1\}$, в которой коэффициент $n^* \neq 0$. Положим $\tilde{f}(\alpha_i) \stackrel{df}{=} f(\alpha_i)$ при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ и

$$\tilde{f}(\beta_1) \stackrel{df}{=} \frac{-n_1^*}{n^*} \cdot f(\alpha_1) + \frac{-n_2^*}{n^*} \cdot f(\alpha_2) + \dots + \frac{-n_k^*}{n^*} \cdot f(\alpha_k),$$

тогда конечно же выполняется равенство

$$n_1^* \cdot \tilde{f}(\alpha_1) + n_2^* \cdot \tilde{f}(\alpha_2) + \dots + n_k^* \cdot \tilde{f}(\alpha_k) + n^* \cdot \tilde{f}(\beta_1) = 0. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим произвольную зависимость

$$n_1 \cdot \alpha_1 + n_2 \cdot \alpha_2 + \dots + n_k \cdot \alpha_k + n\beta_1 = 0. \quad (3)$$



Умножим (1) на n и вычтем (3), умноженное на n^* , и получим зависимость только между числами множества K :

$$(n_1^*n - n_1n^*)\alpha_1 + (n_2^*n - n_2n^*)\alpha_2 + \dots + (n_k^*n - n_kn^*)\alpha_k = 0,$$

откуда из 0-аддитивности функции f и равенства $\tilde{f}|_K = f$ имеем

$$(n_1^*n - n_1n^*)\tilde{f}(\alpha_1) + (n_2^*n - n_2n^*)\tilde{f}(\alpha_2) + \dots + (n_k^*n - n_kn^*)\tilde{f}(\alpha_k) = 0. \quad (4)$$

Теперь из равенства (2), умноженного на n , вычтем равенство (4):

$$n_1n^* \cdot \tilde{f}(\alpha_1) + n_2n^* \cdot \tilde{f}(\alpha_2) + \dots + n_kn^* \cdot \tilde{f}(\alpha_k) + nn^* \cdot \tilde{f}(\beta_1) = 0 \Rightarrow$$

$$n_1 \cdot \tilde{f}(\alpha_1) + n_2 \cdot \tilde{f}(\alpha_2) + \dots + n_k \cdot \tilde{f}(\alpha_k) + n \cdot \tilde{f}(\beta_1) = 0.$$

В последнем переходе мы использовали условие $n^* \neq 0$. В результате мы проверили 0-аддитивность функции \tilde{f} на множестве $K \cup \{\beta_1\}$.

Ш.И. Сразу следует из базы (добавлением к K элемента β_1) и предположения индукции (объединяя $K \cup \{\beta_1\}$ с множеством $\{\beta_2, \dots, \beta_{l+1}\}$, в котором l элементов).

■

Определение. Пусть M — многогранник, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — величины всех его двугранных углов, l_i — длина ребра при угле величины α_i (при всех $i \in \{1, \dots, k\}$), пусть также $f : \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \rightarrow \mathbb{R}$ является 0-аддитивной функцией. Хадвигеровской характеристикой многогранника M будем называть число $f(M) = \sum_{i=1}^k l_i \cdot f(\alpha_i)$.

Лемма 13.3. Пусть $M = \bigsqcup_{j=1}^n M_j$, где M, M_j — многогранники при всех индексах $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — величины всех двугранных углов многогранника M , $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ — величины всех двугранных углов многогранников M_j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$). Пусть также f является 0-аддитивной функцией на множестве $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p, \pi\}$, причем $f(\pi) = 0$, тогда выполняется равенство $f(M) = \sum_{j=1}^n f(M_j)$ (*).

Доказательство. Ребра всех рассматриваемых многогранников M, M_j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) разбивают друг друга на более мелкие отрезки, которые будем называть звеньями. Если l_i — длина ребра при двугранном угле величины α_i в многограннике M , то произведение $l_i \cdot f(\alpha_i)$ будем называть



весом этого ребра в M . Тогда $f(M)$ по определению является суммой весов всех ребер этого многогранника. Аналогично, если m_t — длина звена в некотором M_j и γ_t — величина двугранного угла при этом звене в M_j , то $m_t \cdot f(\gamma_t)$ договоримся называть весом этого звена в M_j . Если, например, ребро длины l_1 почти разбивается на звенья с длинами m_1, m_2, \dots, m_s , то выполняется $m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + \dots + m_s f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1)$, т.е. сумма весов звеньев в M , которые составляют ребро длины l_1 , равно весу всего этого ребра. Благодаря этому замечанию равенство (*) достаточно проверить только на одном звене $[XY]$, которое, например, имеет длину m . Рассмотрим несколько случаев расположения $[XY]$ по отношению к границе многогранника M .

1-й случай: $[XY]$ является частью ребра многогранника M . Б.о.о. считаем, что $[XY]$ — часть ребра длины l_1 и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ — величины всех двугранных углов многогранников M_1, \dots, M_n , которые примыкают к этому звену. На рис. 233 изображено сечение экваториальной плоскостью для отрезка XY , а сам отрезок представлен только своей серединой — точкой O . Из $M = \bigsqcup_{j=1}^n M_j$ следует, что $\alpha_1 = \sum_{i=1}^q \gamma_i$, откуда получаем зависимость $\alpha_1 - \gamma_1 - \dots - \gamma_q = 0$, тогда 0-аддитивность функции f дает $f(\alpha_1) - f(\gamma_1) - \dots - f(\gamma_q) = 0$ или $f(\alpha_1) = \sum_{i=1}^q f(\gamma_i)$, откуда $m \cdot f(\alpha_1) = \sum_{i=1}^q m \cdot f(\gamma_i)$ и равенство (*) на звене длины m проверено.

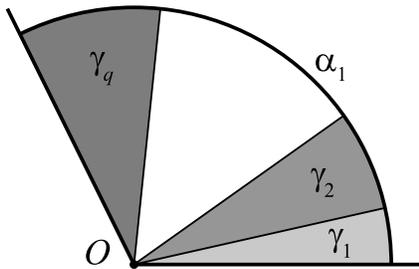


Рис. 233

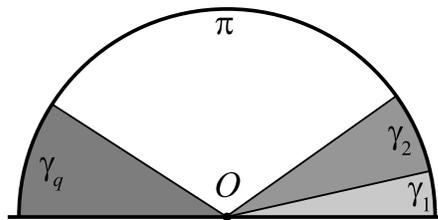


Рис. 234

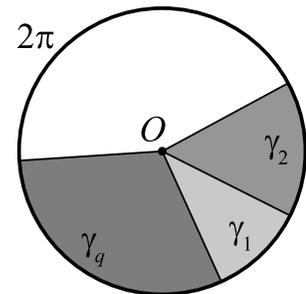


Рис. 235

2-й случай: интервал $]XY[$ лежит внутри некоторой грани многогранника M . Б.о.о. считаем, что $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ — величины всех двугранных углов многогранников M_1, \dots, M_n , которые примыкают к звену $[XY]$ (на рис. 234 изображено сечение экваториальной плоскостью для отрезка XY). Из $M = \bigsqcup_{j=1}^n M_j$ следует, что $\pi = \sum_{i=1}^q \gamma_i$, откуда получаем зависи-



мость $\pi - \gamma_1 - \dots - \gamma_q = 0$, тогда 0-аддитивность функции f дает равенство $f(\pi) - f(\gamma_1) - \dots - f(\gamma_q) = 0$ или $0 = f(\pi) = \sum_{i=1}^q f(\gamma_i)$, откуда

$m \cdot 0 = \sum_{i=1}^q m \cdot f(\gamma_i)$ и равенство (*) на звене длины m выполняется и в этом случае (поскольку звена $[XY]$ в многограннике M нет, мы должны были получить нулевой вес у этого звена в правой части равенства (*)).

3-й случай: интервал $]XY[$ лежит во внутренней области многогранника M . Б.о.о. считаем, что $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ — величины всех двугранных углов многогранников M_1, \dots, M_n , которые примыкают к звену $[XY]$ (на рис. 235 изображено сечение экваториальной плоскостью для отрезка XY). Из $M = \bigsqcup_{j=1}^n M_j$ следует, что $2\pi = \sum_{i=1}^q \gamma_i$, откуда получаем зависимость $2\pi - \gamma_1 - \dots - \gamma_q = 0$, тогда 0-аддитивность функции f дает равенство $2f(\pi) - f(\gamma_1) - \dots - f(\gamma_q) = 0$ или $0 = 2f(\pi) = \sum_{i=1}^q f(\gamma_i)$, откуда

$m \cdot 0 = \sum_{i=1}^q m \cdot f(\gamma_i)$, поэтому равенство (*) на звене длины m проверено и при таком расположении $[XY]$ (снова, $[XY]$ не является звеном в многограннике M , поэтому этот отрезок должен быть нулевого веса в правой части равенства (*)).

■

Следующее утверждение называется *теоремой Хадвигера*.

Теорема 13.4. Пусть M и M^* — два равновеликих многогранника, т.е. $v(M) = v(M^*)$. Пусть также $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — величины всех двугранных углов многогранника M и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — величины всех двугранных углов многогранника M^* . Если f является такой 0-аддитивной функцией на множестве $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \pi\}$, что $f(\pi) = 0$ и $f(M) \neq f(M^*)$, то многогранники M и M^* не равносоставлены.

Доказательство. Предположим противное и найдем такие почти разбиения $M = \bigsqcup_{j=1}^n M_j$ и $M^* = \bigsqcup_{j=1}^n M_j^*$, что многогранники M_j и M_j^* переводятся друг в друга некоторым движением $g_j \in D_3$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ — величины всех двугранных углов многогранников M_j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$), тогда такой же список будет и для многогранников M_j^* ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$). По лемме 13.2 существует \tilde{f} — продолжение функции f с сохранением свойства 0-аддитивности на множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \pi, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p\}$.

Учитывая, что \tilde{f} является продолжением функции f , а также то, что от



равных многогранников хадвигеровские характеристики для одной и той же 0-аддитивной функции дают один и тот же результат, используя лемму 13.3, получим цепочку равенств

$$f(M) = \tilde{f}(M) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}(M_j) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}(M_j^*) = \tilde{f}(M^*) = f(M^*). \quad \bowtie.$$

■

Следующий результат называется *теоремой Дена* и является решением третьей проблемы Гильберта.

Теорема 13.5. Пусть M — правильный тетраэдр, M^* — куб и $v(M) = v(M^*) = 1$. Тогда многогранники M и M^* не равносоставлены.

Доказательство. Заметим, что числа $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$ и $\pi/2$ являются величинами всех двугранных углов многогранников M и N^* . На множестве $K = \{\varphi, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ определим функцию f равенствами $f(\varphi) \stackrel{df}{=} 1$, $f(\pi/2) \stackrel{df}{=} 0$, $f(\pi) \stackrel{df}{=} 0$ и докажем ее 0-аддитивность. Рассмотрим произвольную зависимость $n_1 \cdot \pi + n_2 \cdot \frac{\pi}{2} + n_3 \cdot \varphi = 0$. Умножив обе части последнего равенства на два, получим $(2n_1 + n_2)\pi + 2n_3 \cdot \varphi = 0$. Теперь из леммы 13.1 имеем систему $2n_1 + n_2 = 0$ и $n_3 = 0$, откуда $n_1 \cdot f(\pi) + n_2 \cdot f(\frac{\pi}{2}) + n_3 \cdot f(\varphi) = 0$ и 0-аддитивность функции f доказана.

Для функции f найдем хадвигеровскую характеристику правильного тетраэдра M , считая, что число l является длиной любого его ребра. Получим $f(M) = 6 \cdot l \cdot f(\varphi) = 6 \cdot l \neq 0$. В то же время хадвигеровская характеристика куба очевидно равна $f(M^*) = 12 \cdot 1 \cdot f(\frac{\pi}{2}) = 0$. Из $f(M) \neq f(M^*)$ и теоремы Хадвигера получим, что многогранники M и M^* не равносоставлены.

■

Упражнения

1. Докажите, что две прямые призмы с одинаковой высотой и одинаковыми площадями оснований, к которым проведены эти высоты, равносоставлены.
2. Докажите, что любые две призмы одинакового объема равносоставлены.
3. Приведите пример тетраэдра, который равносоставлен с прямой призмой.
4. Приведите пример двух тетраэдров с одинаковой высотой и одинаковыми площадями оснований, к которым проведены эти высоты, которые не равносоставлены.
5. Докажите, что при выполнении условий теоремы Хадвигера, многогранники M и M^* не являются равнодополняемыми.



6. Докажите *теорему Сидлера*²⁶: два многогранника равнодополняемы тогда и только тогда, когда они равноставлены.

²⁶Георг Джозеф Сидлер (1831–1907) — швейцарский математик, профессор (с 1880) Бернского университета; основные его работы посвящены сферическим гармоническим функциям и теории возмущений.

Учебное издание

Сергей Александрович Ануфриенко

Геометрия 11

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Компьютерный набор и верстка С. А. Ануфриенко

Подписано в печать .12.2025. Формат 60 × 84 1/16 .

Уч.-изд.л. . Бумага офсетная.

Тираж экз. Заказ № .

Издательство

Отпечатано

Тел.:

Факс:

E-mail:

http: