

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

С.А. Ануфриенко

ГЕОМЕТРИЯ 10

Учебное пособие



Екатеринбург
2025

УДК
ББК

Подготовлено на кафедре математики СУНЦ УрФУ

Рецензенты: *А. В. Осипов*, зав. сектором топологии Отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, д.ф.-м.н.,
С. Э. Нохрин, доцент кафедры математического анализа департамента математики, механики и компьютерных наук ИЕНиМ УрФУ, канд.ф.-м.н.

Геометрия 10: учеб. пособие / С. А. Ануфриенко.— : Изд-во, 2025.
292с.

В книгу включены разделы программы по геометрии, которые изучаются в десятых математических классах СУНЦ УрФУ: аксиоматика Гильберта, планиметрия, преобразования плоскости, введение в стереометрию, алгебра векторов и скалярное произведение.

Учебное пособие предназначено для учащихся СУНЦ УрФУ, старшеклассников и учителей математики.

ISBN

© С. А. Ануфриенко, 2025
© Макет С. А. Ануфриенко, 2025

Оглавление

Предисловие и система обозначений	5
1. Аксиоматическое построение геометрии	7
1.1. Аксиомы соединения	7
1.2. Аксиомы порядка	13
1.3. Аксиомы равенства, параллельности и непрерывности	20
1.4. Критерии равенства треугольников	23
1.5. Прямой угол. Середина отрезка. Биссектриса угла	28
1.6. Длина на множестве отрезков	36
1.7. Подобие треугольников	41
1.8. Измерение углов	44
1.9. Окружность. Геометрические места точек	47
1.10. Функция площади. Теоремы синусов и косинусов	58
1.11. Площадь треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты треугольника ..	67
1.12. Теоремы Чевы и Менелая	75
1.13. Четырехугольники	78
2. Преобразования плоскости	87
2.1. Группа преобразований и группа движений	87
2.2. Неподвижные точки. Теорема о представлении	94
2.3. Свойство подвижности. Теорема Шаля-Д'Аламбера	97
2.4. Группы симметрий правильных многоугольников	99
2.5. Ориентация плоскости	105
2.6. Движения первого рода и движения второго рода	116
2.7. Гомотетия. Группа подобий плоскости	119
2.8. Прямая Эйлера и окружность девяти точек	124
2.9. Инверсия и ее свойства	127
2.10. Геометрия Мора-Маскерони	134
2.11. Задачи Аполлония	136
2.12. Построения одной линейкой	137
2.13. Отношение четырех точек. Формула Эйлера	140
2.14. Арбелос. Теорема Паппа	143
2.15. Теорема Фейербаха	147
2.16. Радиальная ось окружностей. Поризм Штейнера	150

3. Элементы стереометрии	154
3.1. Параллельные прямые. Скрещивающиеся прямые	154
3.2. Параллельность прямой и плоскости, параллельность двух плоскостей . .	157
3.3. Перпендикулярность прямой и плоскости	161
3.4. Графы. Теорема Эйлера о графах	164
3.5. Многогранники. Теорема Эйлера о правильных многогранниках	174
4. Алгебра векторов	182
4.1. Направление на плоскости и в пространстве	183
4.2. Направленные отрезки. Векторы	189
4.3. Операции на множестве векторов	195
4.4. Базис плоскости и пространства	201
4.5. Координатная плоскость и координатное пространство	208
4.6. Способы задания прямой и плоскости	213
4.7. Деление отрезка. Центр масс	220
5. Скалярное произведение векторов	228
5.1. Скалярное произведение и его свойства	229
5.2. Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе	235
5.3. Нормаль к плоскости	238
5.4. Координатное уравнение плоскости в ОНБ	243
5.5. Координатное уравнение прямой в плоскости	249
5.6. Нахождение расстояния между фигурами	253
5.7. Двугранный угол. Вычисление углов	261
5.8. Координатные формулы движений плоскости	266
5.9. Скалярное произведение в произвольном базисе	272
5.10. Модель геометрии	283



Предисловие и система обозначений

Эта книга является первой частью курса геометрии для классов с углубленным изучением математики. Материал, собранный в ней, основан на лекциях, прочитанных в десятых специализированных классах СУНЦ УрФУ. Сборник задач для практических занятий по геометрии был опубликован ранее.

Учебный материал разбит на несколько глав, каждая глава — на параграфы. Нумерация утверждений двойная: номер параграфа и номер утверждения в нем. В редких случаях возникают ссылки на утверждения других глав, в этом случае явно указывается еще и номер главы.

Кратко о содержании книги. Геометрия в десятых физико-математических классах СУНЦ УрФУ строится аксиоматически на основании системы аксиом Гильберта. Основная задача первой главы — организовать качественное повторение школьной планиметрии с выводом критериев равенства и подобия треугольников из аксиом. В этой главе закладывается фундамент геометрических понятий, доказываются основные результаты о треугольниках, четырехугольниках и окружностях, теоремы Чевы, Менелая и Птолемея.

Вторая глава посвящена преобразованиям плоскости: движениям, гомотетиям и подобиям. Обсуждаются понятия групп преобразований и неподвижной точки преобразования, доказываются теорема о представлении, свойство подвижности, классификационная теорема Шаля-Д'Аламбера и несколько результатов Эйлера. В этой главе также изучаются свойства инверсии — преобразования расширенной плоскости. С помощью свойств инверсии решаются несколько классических задач Аполлония, выводится формула Эйлера и доказываются теоремы Паппа и Фейербаха.

В третьей главе изучаются основные стереометрические понятия и отношения: параллельность прямых и плоскостей, перпендикулярность прямой и плоскости, многогранная поверхность и многогранник. В этой главе доказываются основные критерии скрещиваемости, параллельности и перпендикулярности. В конце третьей главы вводится понятия графа и с помощью формулы Эйлера для сферических графов классифицируются правильные многогранники.

Четвертая и пятая главы посвящены векторам: определению вектора как класса эквивалентности на множестве направленных отрезков, сложению векторов и умножению вектора на число, скалярному произведению векторов. В этих главах выведем векторные и координатные уравнения прямых и плос-



костей, различные формулы для вычисления углов и расстояний.

Договоримся о некоторых математических обозначениях и сокращениях, которые будут использоваться в тексте:

$\forall$ — квантор всеобщности, читается «для всех» или «для любых», появился из английского выражения for **All**, выделенную букву в котором отразили относительно горизонтальной оси;

$\exists$ — квантор существования, читается «существует», появился от английского слова **Exist**, выделенную букву в котором отразили относительно вертикальной оси;

$\exists!$ — частный случай квантора существования, читается «существует и единственный»;

$\Rightarrow$ — следует;

$\Leftrightarrow$ — тогда и только тогда;

$\&$ — знак конъюнкции, читается как «и»;

$\vee$ — знак дизъюнкции, читается как «или»;

: или | — в записи утверждения является сокращением для «таких, что»;

■ — конец доказательства;

О/п или о/п — сокращение для «От противного» или «от противного», в зависимости от места в предложении;

$\nexists$ — противоречие;

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — соответственно множества всех натуральных, целых, рациональных и вещественных (или действительных) чисел;

$\in$ — знак принадлежности;

$\subseteq$ — знак включения, ставят между множествами в случае, когда множество слева от знака содержится во множестве справа от него, допускаются цепочки, например $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$;

$\{x : P(x)\}$ — множество всех таких элементов x , для которых выполняется свойство $P(x)$;

$\cap$ — пересечение множеств;

$\cup$ — объединение множеств.

В следующем примере использования кванторов внимательный читатель распознает аксиому Евклида: $\forall B \forall a \exists! b : B \in b \& b \parallel a$.

Остальные обозначения будут введены в тексте. Критические замечания и конструктивные предложения просьба отправлять по электронной почте math-lyceum-urfu@mail.ru.

Глава 1

Аксиоматическое построение геометрии

1.1. Аксиомы соединения

Во многих математических теориях существуют первоначальные, или неопределяемые, понятия и отношения. Причина, по которой невозможно определить абсолютно все понятия, которые мы используем, состоит в следующем. Определяя некоторое понятие через другие, необходимо следить за тем, чтобы это понятие не было определено само через себя. Иначе может возникнуть определение, которое в математике называется «порочным кругом» и считается недопустимым. Вот несколько примеров таких «определений»: «ромб — это ромб», «угол имеет величину 90° , если его стороны перпендикулярны; перпендикулярными прямыми называются прямые, угол между которыми 90° » и т.д. Каждое определение в математике — это замаскированная цепочка определений, каждое звено которой является переходом к определению более простого понятия. Поскольку замыкать цепь нельзя, и иметь дело с бесконечной цепочкой определений крайне неудобно, то каждый нижний уровень цепи является неопределяемым понятием. Так, давая строгое определение ромба, можно через определение замкнутой простой ломаной и ее звена дойти до двух не определяемых в геометрии понятий — точки и прямой. От первоначальных понятий требуется очень многое: при небольшом количестве они должны обеспечить всё многообразие понятий данной математической теории. Похожая иерархия возникает среди отношений, которые устанавливают различные связи между понятиями. Так, отношение параллельности на множестве прямых определяется через неопределяемое отношение «принадлежать» или «содержаться». Все необходимые для развития теории свойства неопределяемых понятий и неопределяемых отношений описываются с помощью системы аксиом. Аксиомы — это утверждения о неопределяемых по-



нениях, которые мы заранее (т.е. по определению) считаем истинными. Так, по Гильберту¹, в геометрии существуют три неопределяемых понятия и три неопределяемых отношения, которые описываются двадцатью аксиомами.

Неопределяемые понятия геометрии:

- 1) точки (обозначать будем большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$);
- 2) прямые (обозначают маленькими латинскими буквами $a, b, c, \dots$);
- 3) плоскости (используем для их обозначения маленькие буквы начала греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

Все объекты, которые рассматриваются в геометрии, являются частью пространства. Поэтому нет необходимости относить его к неопределяемым понятиям — оно всеобъемлюще². Обозначать пространство будем через $\mathbb{P}_3$. Между геометрическими объектами существуют многочисленные связи или отношения. Самые простые из них наследованы из теории множеств: принадлежать и содержаться. Смысл обозначений $A \in a$, $A \notin \beta$, $a \subseteq \alpha$, $a \not\subseteq \beta$ вполне понятен: точка A лежит на прямой a (или прямая a проходит через точку A), но A не лежит в плоскости β , прямая a содержится в плоскости α и не лежит в плоскости β . *Фигурой* в геометрии называется произвольное подмножество $\mathbb{P}_3$. Элементами произвольной фигуры являются точки, поэтому между точкой и фигурой ставим значок $\in$ или $\notin$. Между фигурами — $\subseteq$ или $\not\subseteq$. Пересечением множеств является множество, поэтому если прямая и плоскость имеют единственную общую точку, то записывать будем так: $a \cap \alpha = \{A\}$. Если множества не пересекаются, используем значок пустого множества: $a \cap \alpha = \emptyset$.

Неопределяемые отношения в геометрии:

- 1) «принадлежать» («содержаться» или «лежать на»);
- 2) «лежать между»;
- 3) «равенства» (или «конгруэнтности»).

Содержание неопределяемых понятий и неопределяемых отношений описывается пятью группами аксиом. Каждую группу аксиом будем нумеровать римскими цифрами, аксиомы внутри группы — арабскими. Первая группа аксиом самая многочисленная, она называется *группой аксиом соединения* (или *аксиомами принадлежности*, или *аксиомами инцидентности*). Договоримся, что в аксиомах словосочетания «две точки», «три точки» означают

¹Давид Гильберт (1862–1943) — немецкий математик, создатель важнейшего математического центра в Гёттингене; основные исследования относятся к теории инвариантов, интегральному исчислению, функциональному анализу, математической логике; в книге «Основания геометрии» (1899) дал полную систему аксиом евклидовой геометрии.

²В теории множеств такая совокупность называется универсальным множеством.



соответственно «две различные точки» или «три попарно различные точки». Кроме того, в квадратных скобках будем записывать короткую версию аксиомы с помощью кванторов.

Точки, прямые и плоскости находятся друг с другом в отношении «принадлежности» или «лежать на», которое удовлетворяет следующим восьми аксиомам.

I.1. Для любых двух точек A и B найдется прямая a , которой они принадлежат $[\forall A, B(A \neq B) \exists a : A, B \in a]$.

I.2. Через две точки A и B можно провести не более одной прямой $[\forall A, B(A \neq B)$ из условия $A, B \in a \cap b \Rightarrow a = b]$.

Следствие 1. *Через две различные точки можно провести, причем только одну, прямую.*

Доказательство. Существование следует из I.1, единственность — из I.2. ■

Прямая, проходящая через различные точки A и B , обозначается (AB) .

I.3. На любой прямой найдутся по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой $[\forall a \exists A, B \in a(A \neq B); \exists A, B, C : C \notin (AB)]$.

Следствие 2. *Для любой прямой a можно найти такую точку K , которая ей не принадлежит.*

Доказательство. Пусть $A, B, C : C \notin (AB)$ — точки из последней аксиомы. Если $A \notin a$, то $K = A$ — искомая. Аналогично, если $B \notin a$, то искомой будет точка B . В случае, если $A, B \in a$, по предыдущему следствию получим, что $a = (AB)$ и $C \notin a$, поэтому $K = C$ — искомая. ■

I.4. Для любых трех точек A , B и C , не принадлежащих одной прямой, можно найти плоскость α , которой они принадлежат. В любой плоскости можно найти хотя бы одну точку $[\forall A, B, C(A \notin (BC)) \exists \alpha : A, B, C \in \alpha; \forall \alpha \exists E \in \alpha]$.

I.5. Для любых трех точек A , B и C , не принадлежащих одной прямой, может существовать не более одной плоскости, которой они все принадлежат $[\forall A, B, C(A \notin (BC))$ из условия $A, B, C \in \alpha \cap \beta$ следует, что $\alpha = \beta]$.



Следствие 3. *Через три различные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести, причем только одну, плоскость.*

Доказательство. Существование следует из I.4, единственность — из I.5. ■

Плоскость, проходящая через три попарно различные точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, обозначается (ABC) .

I.6. Если прямая a и плоскость α имеют две общие точки, то прямая целиком содержится в плоскости $[\exists A, B(A \neq B) : A, B \in a \cap \alpha \Rightarrow a \subseteq \alpha]$.

I.7. Если две плоскости α и β имеют общую точку, то у них по крайней мере есть еще одна общая точка $[A \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \exists B(B \neq A) : B \in \alpha \cap \beta]$.

I.8. Существуют по крайней мере четыре точки A , B , C и D , которые не лежат в одной плоскости $[\exists A, B, C, D : D \notin (ABC)]$.

Следствие 4. *Для любой плоскости α можно найти такую точку K , которая ей не принадлежит.*

Доказательство. Аналогично второму следствию. ■

Следующая теорема описывает взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Теорема 1.1. *Для любых двух прямых a и b выполняется точно одно из следующих утверждений:*

- 1) $a \cap b = \emptyset$;
- 2) $a = b$;
- 3) найдется такая точка A , что $\{A\} = a \cap b$.

Доказательство. I. Докажем сначала, что выполняется хотя бы одно из этих утверждений. Если $a \cap b = \emptyset$ или $a = b$, то утверждение доказано. Пусть теперь $a \cap b \neq \emptyset$ и $a \neq b$. Из первого условия найдем такую точку A , что $A \in a \cap b$ и докажем, что $\{A\} = a \cap b$. О/п: нашлась такая точка B , что $B \neq A$ и $B \in a \cap b$. По аксиоме I.2 сразу получаем, что $a = b$. ✕.

II. Осталось проверить, что сразу два утверждения выполняться не могут. По аксиоме I.3 на прямой найдутся по крайней мере две различные точки, поэтому (1) и (2), (2) и (3) одновременно не выполняются. Утверждения (1) и (3) очевидно противоречивы. ■



Определение. Прямые a и b , которые содержатся в одной плоскости и не пересекаются или совпадают между собой, называются параллельными (обозначение: $a \parallel b$).

Следующая теорема описывает взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Теорема 1.2. Для любой прямой a и плоскости α выполняется точно одно из следующих утверждений:

- 1) $a \cap \alpha = \emptyset$;
- 2) $a \subseteq \alpha$;
- 3) найдется такая точка A , что $\{A\} = a \cap \alpha$.

Доказательство. I. Докажем сначала, что выполняется хотя бы одно из этих утверждений. Если $a \cap \alpha = \emptyset$ или $a \subseteq \alpha$, то утверждение доказано. Пусть теперь $a \cap \alpha \neq \emptyset$ и $a \not\subseteq \alpha$. Из первого условия найдем такую точку A , что $A \in a \cap \alpha$ и докажем, что $\{A\} = a \cap \alpha$. О/п: нашлась такая точка B , что $B \neq A$ и $B \in a \cap \alpha$. По аксиоме I.6 сразу получаем, что $a \subseteq \alpha$. ✕.

II. Осталось проверить, что сразу два утверждения выполняться не могут. По аксиоме I.3 на прямой найдутся по крайней мере две различные точки, поэтому (1) и (2), (2) и (3) одновременно не выполняются. Утверждения (1) и (3) очевидно противоречивы. ■

Определение. Прямая a и плоскость α называются параллельными, если a содержится в α или ее не пересекает (обозначение: $a \parallel \alpha$).

Следствием из теоремы о взаимном расположении прямой и плоскости является тот факт, что непараллельные прямая и плоскость пересекаются по точке.

Осталось определить взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Теорема 1.3. Для любых двух плоскостей α и β выполняется точно одно из следующих утверждений:

- 1) $\alpha \cap \beta = \emptyset$;
- 2) $\alpha = \beta$;
- 3) найдется такая прямая a , что $a = \alpha \cap \beta$.

Доказательство. I. Докажем сначала, что выполняется хотя бы одно из этих утверждений. Если $\alpha \cap \beta = \emptyset$ или $\alpha = \beta$, то утверждение доказано. Пусть теперь одновременно выполняются: $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ и $\alpha \neq \beta$. Из первого условия найдем $A \in \alpha \cap \beta$, тогда аксиома I.7 дает существование такой точки



B , что $B \neq A$ и $B \in \alpha \cap \beta$. Пусть $a = (AB)$, по аксиоме I.6 получим, что $a \subseteq \alpha \cap \beta$. Остается доказать, что $a = \alpha \cap \beta$. Предположив противное, найдем такую точку $C \notin a$, что $C \in \alpha \cap \beta$. По аксиоме I.5 выполняется равенство $\alpha = \beta$. $\bowtie$.

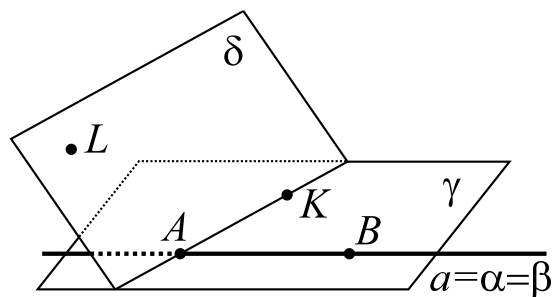


Рис. 1

II. Проверим теперь, что сразу два утверждения выполняться не могут. Поскольку в плоскости есть хотя бы одна точка (по аксиоме I.4), утверждения (1) и (2) одновременно не выполняются. На любой прямой найдутся по крайней мере две точки (по аксиоме I.3), поэтому утверждения (1) и (3) одновременно не выполняются. Предположим, что выполняются (2) и (3), тогда $\alpha = \beta = a$ (рис. 1). Выберем раз-

личные точки $A, B \in a$ и точку $K \notin a$ (используем аксиому I.3 и следствие из нее). Пусть $\gamma = (ABK)$ и точка $L \notin \gamma$ (существование такой точки гарантируется следствием из I.8). Поскольку $L \notin (AK)$, существует плоскость $\delta = (AKL)$ и $\delta \neq (ABK)$. Поэтому $B \notin \delta$ и $\delta \cap a = \{A\}$. Вспомнив наше предположение $a = \alpha$, получим, что $\delta \cap \alpha = \{A\}$, что противоречит аксиоме I.7.

Определение. Плоскости α и β называются параллельными, если они не пересекаются или совпадают (обозначение: $\alpha \parallel \beta$).

Сразу из определения и предыдущей теоремы получаем, что любые две плоскости или параллельны между собой, или пересекаются по прямой.

Часто в планиметрических утверждениях нам необходимо будет выбирать точку плоскости α , которая не лежит на данной прямой a , причем $a \subseteq \alpha$. Это свойство сильнее факта, доказанного в следствии 2 — найденная там точка может не попасть в плоскость α .

Следствие. Пусть $a \subseteq \alpha$. Тогда существует такая точка $M \in \alpha$, что $M \notin a$.

Доказательство. Предположим, что $a = \alpha$. В доказательстве предыдущей теоремы была найдена такая плоскость δ , что $\delta \cap \alpha = \{A\}$, что противоречит аксиоме I.7. Поэтому $a \subseteq \alpha$ и $a \neq \alpha$, следовательно, найдется такая точка $M \in \alpha$, что $M \notin a$.



Различные способы однозначного задания плоскости опишем в следующей теореме.

Теорема 1.4. 1) пусть прямые a и b имеют единственную общую точку, тогда через эти прямые можно провести единственную плоскость α (обозначение: $\alpha = (a, b)$).

2) пусть точка C не лежит на прямой a , тогда найдется единственная плоскость α , для которой $C \in \alpha$ и $a \subseteq \alpha$ (обозначение: $\alpha = (a, C)$).

3) пусть различные прямые a и b параллельны между собой, тогда найдется единственная плоскость α , которая проходит через эти прямые (обозначение: $\alpha = (a, b)$).

Доказательство. 1) пусть $a \cap b = \{A\}$. По аксиоме I.3 найдем отличные от A точки $B \in a$ и $C \in b$. Очевидно, что $C \notin a$, поэтому по следствию 3 найдем $\alpha = (ABC)$. Применив дважды I.6, получим, что $a, b \subseteq \alpha$. Любая плоскость β со свойством $a, b \subseteq \beta$, будет содержать точки A, B, C , поэтому она совпадает с α (по аксиоме I.5).

2) выбрав различные точки $A, B \in a$, из условия $C \notin (AB)$ найдем единственную плоскость α , проходящую через A, B, C . По аксиоме I.6 получим, что $a \subseteq \alpha$.

3) по определению параллельных прямых a и b найдется плоскость α , которая проходит через эти прямые. Осталось доказать ее единственность. Пусть $C \in b$, тогда из условия $a \cap b = \emptyset$ следует, что $C \notin a$. Утверждение (2) теперь гарантирует единственность плоскости, проходящей через a и содержащей точку C .



1.2. Аксиомы порядка

Точки, принадлежащие одной прямой, находятся в отношении «лежать между», которое описывается следующими четырьмя аксиомами.

II.1. Если точка C лежит между A и B , то C также лежит между B и A , и точки A, B, C попарно различны.

II.2. Для любых двух точек A и B найдется такая точка C , что B лежит между A и C .

II.3. Для любых трех точек, принадлежащих одной прямой, ровно одна лежит между двумя другими.



Определение. Пусть $A \neq B$. Множество точек, лежащих между A и B , называется интервалом и обозначается $]AB[$; точки A и B называются его концами. При добавлении к интервалу одного из его концов получается один из двух полуинтервалов: $[AB[$ или $]AB]$. При добавлении к интервалу обоих его концов получается отрезок, он обозначается через $[AB]$. Внутренними точками $[AB]$ называются все точки $]AB[$.

При $A = B$ отрезок $[AB] = \{A\}$ называется вырожденным, а каждое из множеств $]AB[$, $[AB[$, $]AB]$ считается пустым.

Определение. Пусть $C \notin (AB)$. Треугольником ABC называется объединение трех отрезков: $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ (т.е. $\triangle ABC = [AB] \cup [AC] \cup [BC]$). Точки A , B и C называются вершинами треугольника ABC , а отрезки $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$ — его сторонами.

Следующую аксиому впервые сформулировал М. Паш³.

II.4. Если прямая a не проходит через вершины треугольника ABC , но пересекает одну из его сторон, то она пересекает другую его сторону, причем только одну.

С помощью аксиомы Паша можно доказать, что при $A \neq B$ существует бесконечное количество точек между A и B .

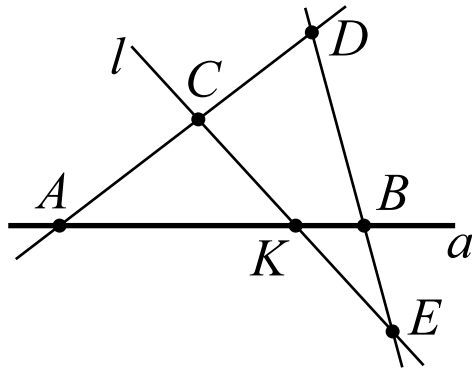


Рис. 2

Теорема 2.1. Пусть $A \neq B$. Тогда найдется точка K , лежащая между A и B .

Доказательство. Пусть $a = (AB)$ и точка $C \notin a$. Применим дважды аксиому II.2 и найдем такие точки $D \in (AC)$ и $E \in (DB)$, что $C \in]AD[$ и $B \in]DE[$ (рис. 2). Обозначим через l прямую CE и докажем, что к этой прямой и треугольнику ABD можно применить аксиому Паша.

1) заметим, что прямая l не пересекает сторону $[BD]$ треугольника ABD . Иначе l и (BD) имели бы две общие точки (так как $B \in]DE[$, то $E \notin [BD]$ — по аксиоме II.3, и точка пересечения l с $[BD]$ будет второй общей точкой прямых l и (BD)) и поэтому совпали бы. Тогда $C \in (BD)$, $(CD) = (BD)$, а из условия $A \in (CD)$ мы бы получили $A \in (BD)$. Поэтому A , C , B лежат на одной прямой (BD) , а это противоречит выбору точки C .

³Мориц Паш (1843–1930) — немецкий математик, один из основоположников аксиоматического метода; предложил (1882) систему аксиом проективной геометрии; докторскую степень получил в 22 года; ряд его работ посвящены математическому анализу и теории функций.



Кстати, мы одновременно доказали, что l не проходит через вершины B и D треугольника ABD .

2) докажем, что l не проходит через точку A . О/п: предположим, что $A \in l$. Тогда $(AC) = (CE) = l$ и $D \in (AC) = l$, поэтому прямая l пройдет через точку D , что противоречит (1).

Итак, прямая l не проходит через вершины треугольника ABC , пересекает сторону AD по внутренней точке C и не пересекает $[BD]$, тогда по аксиоме II.4 получим, что $l \cap]AB[\neq \emptyset$. Точка их пересечения будет искомой. ■

Следствие. Пусть $A \neq B$, тогда $]AB[$ содержит бесконечно много точек.

Доказательство. Обозначим найденную в предыдущей теореме точку $K \in]AB[$ через K_1 и применим предыдущую теорему к отрезку AK_1 . Найдем $K_2 \in]AK_1[$. Ясно, что $K_2 \neq K_1$ и $]AK_2[\subseteq]AK_1[\subseteq]AB[$. Получив таким образом различные точки $K_1, \dots, K_n$, найдем новую точку $K_{n+1} \in]AK_n[$ и т.д. Такое построение даст нам бесконечное множество точек интервала AB . ■

Определение. Пусть $O, A, B \in a$. Точки A и B расположены по одну сторону от точки O , если $O \notin [AB]$. Точки A и B расположены по разные стороны от точки O , если $O \in]AB[$.

Следующая теорема называется *теоремой об открытом луче*.

Теорема 2.2. Пусть $O \in a$. Точка O разбивает прямую a на такие два множества, что точки из одного множества лежат по одну сторону от O , а из разных множеств — по разные стороны от точки O .

Доказательство. Выберем на прямой a точку $A \neq O$ (это можно сделать по аксиоме II.1) и определим два множества (рис. 3):

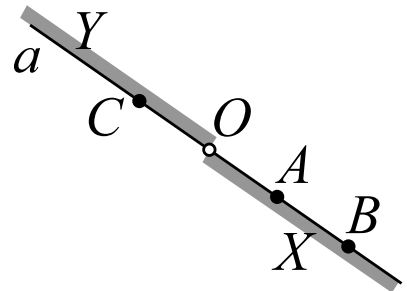


Рис. 3

$$X = \{B \in a : O \notin [AB]\}, \quad Y = \{C \in a : O \in]AC[\}.$$

Докажем, что X и Y — искомые.

1) для любой точки $L \in a$ выполняется хотя бы одно из следующих условий: $L = O$, или $O \in]AL[$, или $O \notin [AL]$. Отсюда $L \in \{O\} \cup Y \cup X$, т.е. $a = \{O\} \cup Y \cup X$.



2) из определения множеств X и Y следует, что $O \notin X$ и $O \notin Y$. Покажем, что $X \cap Y = \emptyset$. О/п: найдется точка $L \in X \cap Y$, тогда одновременно должны выполняться два условия: $O \in]AL[$ и $O \notin [AL]$. $\nearrow \nwarrow$.

В (1) и (2) мы показали, что прямая a разбивается на множества X , Y и $\{O\}$.

3) докажем, что для любых точек $B_1, B_2 \in X$ выполняется: B_1 и B_2 лежат по одну сторону от точки O (рис. 4). Для этого выберем такие точки E и D , что $E \notin a$ и D выбрана на прямой AE так, что E лежит между A и D (применили аксиому II.2). Обозначим через b прямую OE и рассмотрим треугольник ADB_1 . Прямая b не пересекает отрезок AB_1 (поскольку O , точка пересечения прямых b и a , не принадлежит этому отрезку), но пересекает сторону AD по внутренней точке E . Применяя аксиому Паша, получим, что b пересекает интервал DB_1 . Аналогично, применив аксиому II.4 к прямой b и треугольнику ADB_2 получаем, что b пересекает интервал DB_2 . Остается еще раз применить аксиому Паша для треугольника DB_1B_2 и убедиться, что b не пересекает сторону B_1B_2 этого треугольника (поскольку она пересекает две другие его стороны). Таким образом, точка O (точка пересечения прямых b и a) не попадает на отрезок B_1B_2 , поэтому B_1 и B_2 лежат по одну сторону от точки O .

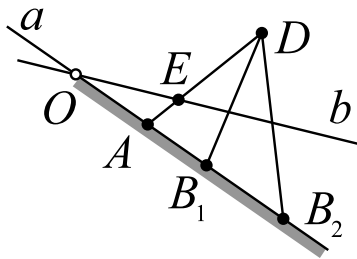


Рис. 4

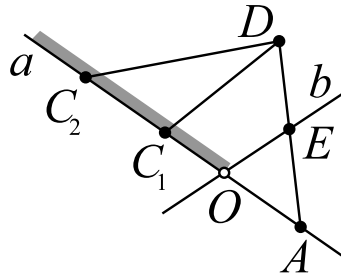


Рис. 5

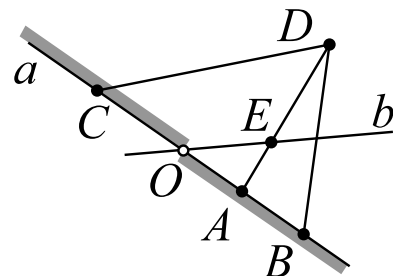


Рис. 6

4) докажем, что для любых точек $C_1, C_2 \in Y$ выполняется: C_1 и C_2 лежат по одну сторону от точки O (рис. 5). Для этого выберем такие точки E и D , что $E \notin a$ и D выбрана на прямой AE так, что E лежит между A и D (применили аксиому II.2). Обозначим через b прямую OE и рассмотрим треугольник ADC_1 . Прямая b пересекает отрезок AC_1 (поскольку $O \in]AC_1[$), а также пересекает сторону AD по внутренней точке E . Применяя аксиому Паша, получим, что b не пересекает интервал DC_1 (поскольку b уже пересекает две стороны треугольника ADC_1). Аналогично, применив аксиому II.4 к прямой b и треугольнику ADC_2 получаем, что b не пересекает интервал DC_2 . Остается еще раз применить аксиому Паша



для треугольника DC_1C_2 и убедиться, что b не пересекает сторону C_1C_2 этого треугольника (поскольку она не пересекает две другие его стороны). Таким образом, точка O (точка пересечения прямых b и a) не попадает на отрезок C_1C_2 , поэтому C_1 и C_2 лежат по одну сторону от точки O .

5) докажем, что для любых точек $B \in X$ и $C \in Y$ выполняется: B и C лежат по разные стороны от точки O (рис. 6). Для этого выберем такие точки E и D , что $E \notin a$ и D выбрана на прямой AE так, что E лежит между A и D (применили аксиому II.2). Обозначим через b прямую OE и рассмотрим треугольники ADB и ADC . В предыдущих двух пунктах было доказано, что прямая b пересекает интервал BD и не пересекает отрезок CD . Применяя аксиому Паша к треугольнику BCD , получим, что b пересекает интервал BC . Таким образом, точка O (точка пересечения прямых b и a) попадает на интервал BC , поэтому B и C лежат по разные стороны от точки O .

■

Определение. Каждое из множеств (X и Y) предыдущей теоремы называется *открытым лучом*. Луч (или замкнутый луч) — это объединение открытого луча с точкой O . Обозначения для луча и открытого луча: $[OA)$ и $]OA)$. Точка O называется *вершиной* этих лучей.

Легко заметить чем отличаются луч и открытый луч: $O \in [OA)$ и $O \notin]OA)$.

Определение. Пусть $a \subseteq \alpha$ и $A, B \in \alpha$. Точки A и B лежат по одну (соответственно по разные стороны) от прямой a , если $a \cap [AB] = \emptyset$ ($a \cap]AB[\neq \emptyset$).

Следующая теорема называется *теоремой об открытой полуплоскости*.

Теорема 2.3. Пусть $a \subseteq \alpha$. Прямая a разбивает плоскость α на такие два множества, что точки из одного множества лежат по одну сторону от a , а из разных множеств — по разные стороны от прямой a .

Доказательство. По следствию из теоремы 1.3 выберем точку $A \in \alpha$, которая не лежит на прямой a и определим два множества (рис. 7):

$$X = \{B \in \alpha : a \cap [AB] = \emptyset\}, \quad Y = \{C \in \alpha : a \cap]AC[\neq \emptyset\}.$$

Докажем, что X и Y — искомые.

1) для любой точки $L \in \alpha$ выполняется хотя бы одно из следующих условий: $L \in a$, или $a \cap [AL] = \emptyset$, или $a \cap]AL[\neq \emptyset$. Отсюда $L \in a \cup X \cup Y$, т.е. $\alpha = a \cup X \cup Y$.



2) из определения множеств X и Y сразу следует, что $a \cap X = \emptyset$ и $a \cap Y = \emptyset$. Покажем, что $X \cap Y = \emptyset$. О/п: найдется точка $L \in X \cap Y$. Тогда выполняются два условия: $a \cap [AL] = \emptyset$ и $a \cap]AL[\neq \emptyset$. $\nabla \times$.

В (1) и (2) мы показали, что плоскость α разбивается на множества X , Y и a .

3) докажем, что для любых точек $B_1, B_2 \in X$ выполняется: B_1 и B_2 лежат по одну сторону от прямой a . Если $B_2 \notin (AB_1)$ (рис. 8), то прямая a не пересекает стороны AB_1 и AB_2 треугольника AB_1B_2 (так как $B_1, B_2 \in X$), тогда по аксиоме П.4 прямая a не пересекает $[B_1B_2]$. Последнее означает, что B_1 и B_2 лежат по одну сторону от прямой a .

Рассмотрим случай, когда $B_2 \in (AB_1) = b$. Если $b \parallel a$, то очевидно $[B_1B_2] \cap a = \emptyset$. Пусть $b \cap a = \{O\}$ (рис. 9). По условию $O \notin [AB_1]$ и $O \notin [AB_2]$. Применяя к прямой b теорему 2.2, получим $B_1, B_2 \in]OA)$, поэтому $O \notin [B_1B_2]$, $a \cap [B_1B_2] = \emptyset$ и B_1 и B_2 лежат по одну сторону от прямой a .

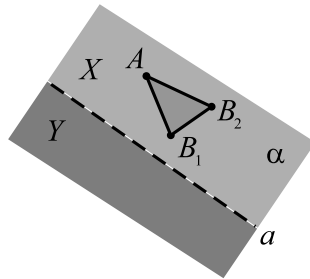


Рис. 8

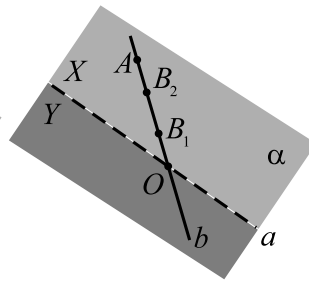


Рис. 9

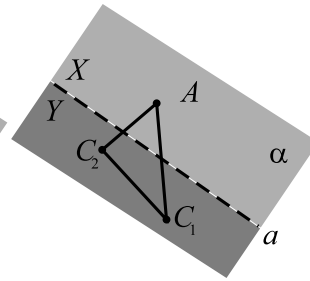


Рис. 10

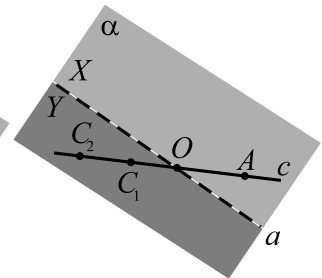


Рис. 11

4) докажем, что для любых точек $C_1, C_2 \in Y$ выполняется: C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой a . Если $C_2 \notin (AC_1)$ (рис. 10), то прямая a пересекает стороны AC_1 и AC_2 треугольника AC_1C_2 (так как $C_1, C_2 \in Y$), тогда по аксиоме П.4 прямая a не пересекает $[C_1C_2]$. Последнее означает, что C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой a .

Рассмотрим теперь случай, когда $C_2 \in (AC_1) = c$ (рис. 11). По условию $O \in]AC_1[$ и $O \in]AC_2[$. Применяя к прямой c теорему 2.2, получим, что точки C_1, C_2 с точкой A лежат по разные стороны от точки O , поэтому $O \notin [C_1C_2]$, $a \cap [C_1C_2] = \emptyset$ и по определению точки C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой a .



5) докажем, что для любых точек $B \in X$ и $C \in Y$ выполняется: B и C лежат по разные стороны от прямой a . Если $C \notin (AB)$ (рис. 12), то прямая a не пересекает сторону AB и пересекает сторону AC треугольника ABC (так как $B \in X$ и $C \in Y$), тогда по аксиоме II.4 прямая a пересекает $]BC[$. Последнее означает, что точки B и C лежат по разные стороны от прямой a .

Рассмотрим теперь случай, когда $C \in (AB) = d$. Обозначим $d \cap a = \{O\}$ (рис. 13). По условию $O \in]AC[$ и $O \notin [AB]$. По теореме 2.2 получим, что точки B и C лежат по разные стороны от точки O на прямой d , поэтому $O \in]BC[$, $a \cap]BC[\neq \emptyset$ и B и C лежат по разные стороны от прямой a .

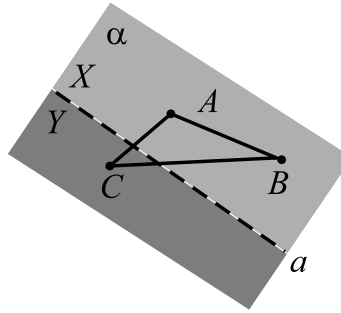


Рис. 12

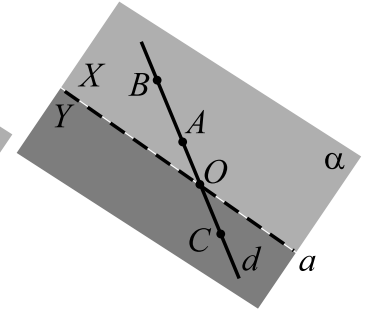


Рис. 13

Определение. Каждое из множеств $(X$ и $Y)$ предыдущей теоремы называется открытой полуплоскостью. Открытые полуплоскости с границей a обозначаются через $\overset{\circ}{\alpha}^1(a)$ и $\overset{\circ}{\alpha}^2(a)$. Если нужно указать конкретную открытую полуплоскость, которая содержит точку A , используют обозначение $\overset{\circ}{\alpha}(a, A)$ (где $A \in \alpha$ и $A \notin a$), при этом точку A называют определяющей. Полуплоскость (или замкнутая полуплоскость) — это объединение открытой полуплоскости с ее границей. Обозначения для полуплоскости: $\alpha^1(a)$, $\alpha^2(a)$ или $\alpha(a, A)$. Прямая a называется границей этих полуплоскостей.

В тех случаях, когда нам не важно, какую из открытых (или замкнутых) полуплоскостей рассматривать, будем использовать обозначение $\overset{\circ}{\alpha}(a)$ ($\alpha(a)$ — соответственно).

Определение. Одномерным углом называется объединение двух лучей с общей вершиной: $[OA) \cup [OB)$. Точка O называется его вершиной, а лучи $[OA)$ и $[OB)$ — его сторонами. Пусть $A, O, B \in \alpha$, $B \notin (OA)$, $O \in]AA_1[$ и $O \in]BB_1[$ (т.е. A и A_1 лежат по разные стороны от прямой BB_1 , а B и B_1 — от прямой AA_1), тогда внутренней областью одномерного угла называется пересечение $\overset{\circ}{\alpha}((OA), B) \cap \overset{\circ}{\alpha}((OB), A)$, а его внешней областью — объединение $\overset{\circ}{\alpha}((OA), B_1) \cup \overset{\circ}{\alpha}((OB), A_1)$. Обычным углом назы-



вается объединение одномерного угла с его внутренней областью (рис. 14). Супертупым углом называется объединение одномерного угла с его внешней областью (рис. 15).

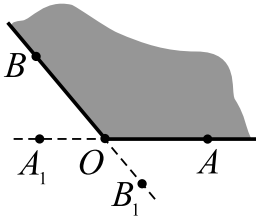


Рис. 14

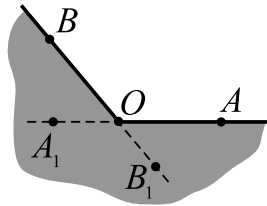


Рис. 15

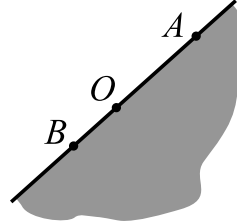


Рис. 16

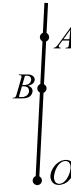


Рис. 17

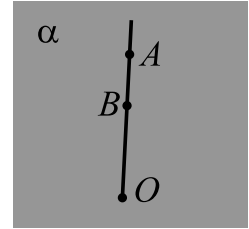


Рис. 18

Определение. Пусть $A, O, B \in \alpha$ и $O \in]AB[$, тогда лучи $[OA)$ и $[OB)$ называются противоположными. Объединение двух противоположных лучей с одной из открытых полуплоскостей $\overset{\circ}{\alpha}((OA))$ называется развернутым углом (рис. 16).

Определение. Пусть $A, O, B \in \alpha$ и $[OA) = [OB)$, тогда одномерный угол $[OA) \cup [OB)$ называется вырожденным (рис. 17). Объединение вырожденного угла с плоскостью α называется полным углом (рис. 18).

Углом называется каждое из следующих множеств: обычный угол, супертупой угол, развернутый угол, вырожденный угол и полный угол (обозначение: $\angle AOB$). Одномерный угол однозначно не определяет угол на плоскости — необходимо указывать для какой части плоскости он является границей. Договоримся, что если такая часть плоскости не указана, то рассматривается обычный угол (при $B \notin (OA)$).

1.3. Аксиомы равенства, параллельности и непрерывности

В теории множеств равные множества состоят из одних и тех же элементов. В геометрии равные треугольники могут даже не пересекаться. Чтобы различить эти понятия «геометрическое равенство» иногда называют «конгруэнтностью». Мы почти не будем использовать этот длинный термин, чтобы не пришлось как Шалтай-Болтаю⁴ каждую субботу платить этому термину сверхурочные. Равные с точки зрения теории множеств геометрические фигуры будем называть «совпадающими» или «одинаковыми».

⁴Шалтай-Болтай — герой сказки Льюиса Кэрролла (литературный псевдоним профессора математики Оксфордского университета Чарльза Лютвиджа Доджсона) «Алиса в Зазеркалье».



Отрезки между собой и углы между собой находятся в отношении «быть равными» (или «быть конгруэнтными»), которое удовлетворяет следующим аксиомам. Обозначать равные отрезки и равные углы будем традиционно: $[AB] = [A_1B_1]$, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Первая из аксиом называется *аксиомой об откладывании отрезка*.

III.1. Для любого отрезка $[AB]$ и луча $[XY)$ найдется такая единственная точка $Z \in [XY)$, что отрезки $[XZ]$ и $[AB]$ равны. Для каждого отрезка $[AB]$ выполняется $[AB] = [BA]$.

Следующая аксиома называется *аксиомой транзитивности*.

III.2. Если $[AB] = [A_1B_1]$ и $[A_1B_1] = [A_2B_2]$, то $[AB] = [A_2B_2]$. Кроме того, $[AB] = [BA]$.

Следующая аксиома называется *аксиомой о сумме отрезков*.

III.3. Пусть $B \in [AC]$ и $B_1 \in [A_1C_1]$. Если одновременно выполняются равенства $[AB] = [A_1B_1]$ и $[BC] = [B_1C_1]$, то $[AC] = [A_1C_1]$.

Следующая аксиома называется *аксиомой об откладывании угла*.

III.4. Рассмотрим произвольный угол $\angle AOB$ и луч $[O_1X)$, $[O_1X) \subseteq \alpha$. Рассмотрим $\alpha \setminus ((O_1X))$ — произвольную полуплоскость с границей (O_1X) , тогда найдется единственный луч $[O_1Y) \subseteq \alpha \setminus ((O_1X))$ такой, что $\angle AOB = \angle XO_1Y$.

III.5. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются три равенства: $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Тогда $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Равенство оставшихся углов в этих треугольниках уже несложно доказать.

Следствие. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются три равенства: $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Тогда $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Доказательство. Переобозначим вершины в треугольниках следующим образом: $C' = B$, $B' = C$, $C_2 = B_1$ и $B_2 = C_1$. Тогда для треугольников $AB'C'$ и $A_1B_2C_2$ выполняются равенства: $[AB'] = [A_1B_2]$, $[AC'] = [A_1C_2]$ и $\angle B'AC' = \angle B_2A_1C_2$. Тогда по аксиоме III.5 выполнено $\angle AB'C' = \angle A_1B_2C_2$ или $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.





Четвертая группа состоит из единственной аксиомы — *аксиомы Евклида*⁵ о параллельных.

IV. Для любой прямой a и точки A существует единственная такая прямая b , что $A \in b$ и $b \parallel a$.

Две последние аксиомы объединены в одну группу, которая называется *аксиомами непрерывности*. Для формулировки первой из них надо научиться сравнивать и складывать отрезки.

Определение. Отрезок AB меньше отрезка CD (используем обозначение $[AB] < [CD]$), если найдется такая точка $E \in [CD[$, что $[AB] = [CE]$. Считаем, что $[AB] \leq [CD]$, если $[AB] < [CD]$ или $[AB] = [CD]$.

Определение. Отрезок XY называется суммой отрезков AB и CD , если найдется такая точка $Z \in [XY]$, что $[XZ] = [AB]$ и $[ZY] = [CD]$. Обозначение: $[XY] = [AB] + [CD]$. Считаем, что $1 \cdot [AB] = [AB]$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $(n + 1)[AB] = n[AB] + [AB]$.

Следующая аксиома называется *аксиомой Архимеда*⁶.

V.1. Пусть $A \neq B$, тогда для любого отрезка CD найдется такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что $[CD] \leq n[AB]$.

Для второй аксиомы группы нам понадобится порядок на прямой и понятие правильно расположенных множеств.

Определение. Пусть $A, B \in a$ и $A \neq B$. Порядок $<$ на прямой a введен с помощью луча $[AB)$, если для любой пары точек $X, Y \in a$ выполняется:

- 1) при $X, Y \in [AB)$ выполняется $X < Y$ только если $X \in [AY[$;
- 2) при $X \notin [AB)$ и $Y \in [AB)$ выполняется $X < Y$;
- 3) при $X, Y \notin [AB)$ выполняется $X < Y$ только если $Y \in]XA]$.

Неравенство $X \leq Y$ выполняется если $X = Y$ или $X < Y$.

Если нужно уточнить, с помощью какого луча введен порядок на прямой a , используют обозначения $<_{[AB)}$ и $\leq_{[AB)}$.

⁵Евклид или Эвклид (около 325 до н.э. – до 265 до н.э.) — древнегреческий математик; его «Начала», состоящие из 13 книг, подвели итог предшествующему развитию математики (планиметрии, алгебры, начал стереометрии) и задали направление движения математики на два тысячелетия; Евклид занимался коническими сечениями, оптикой, элементарной теорией музыки.

⁶Архимед (около 287–212 до н.э.) — древнегреческий математик и механик, военный инженер, руководил обороной Сиракуз, во время штурма его родного города был убит римским солдатом; в математике создал методы вычисления площадей и объемов, был близок к открытию интегрального исчисления; в области механики развивал теорию простых машин, заложил основы статики и гидростатики, изобрел архимедов винт для подачи воды, много различных грузоподъемных и военных машин; в астрономии определил верхнюю границу видимого диаметра Солнца равной $33'$, что близко к истинному значению ($31'59''$).



Определение. Пусть порядок $\leq$ на прямой a введен с помощью луча $[AB)$. Непустые фигуры $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq a$ называются правильно расположенными, если для любых точек $X \in \Phi_1$ и $Y \in \Phi_2$ выполняется $X \leq Y$.

Следующая аксиома называется *аксиомой непрерывности*.

V.2. Пусть порядок $\leq$ на прямой a введен с помощью луча $[AB)$ и непустые фигуры $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq a$ правильно расположены на этой прямой. Тогда существует такая точка $M \in a$, что для любых точек $X \in \Phi_1$ и $Y \in \Phi_2$ выполняется $X \leq M \leq Y$.

Точка M из последней аксиомы называется *разделяющей точкой* для фигур Φ_1, Φ_2 .

1.4. Критерии равенства треугольников

Определение. Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются соотношения:

- 1) $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$, $[BC] = [B_1C_1]$,
- 2) $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$,

то треугольники называются *равными* (обозначение: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$).

Хорошо известно, что некоторые соотношения из предыдущего определения можно опустить, но треугольники останутся равными. Начнем с *первого критерия равенства треугольников* — *1КРТ*.

Теорема 4.1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны тогда и только тогда, когда $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

Доказательство. $\Rightarrow$) следует сразу из определения.

$\Leftarrow$) из аксиомы III.5 и следствия из этой аксиомы получим $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Остается проверить, что $[BC] = [B_1C_1]$. О/п: предположим, что $[BC] \neq [B_1C_1]$. Без ограничения общности⁷ (далее — б.о.о.) будем считать, что $[B_1C_1] < [BC]$. По определению найдется такая точка $E \in [BC[$, что $[BE] = [B_1C_1]$ (рис. 19). Тогда для треугольников BAE и $B_1A_1C_1$ выполняются соотношения: $[BA] = [B_1A_1]$, $[BE] = [B_1C_1]$, $\angle ABE = \angle A_1B_1C_1$. По аксиоме III.5 получим, что $\angle BAE = \angle B_1A_1C_1$. Таким образом, от луча $[AB)$ угол $\angle B_1A_1C_1$ отложен двумя разными способами: $\angle BAE$ и $\angle BAC$. Получили противоречие с аксиомой III.4.

⁷Если необходимо рассмотреть несколько случаев, доказательства которых отличаются только обозначениями или очень похожи, будем приводить доказательство только одного из них.



В следующей теореме доказывается *второй критерий равенства треугольников* — *2КРТ*.

Теорема 4.2. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны тогда и только тогда, когда $[AB] = [A_1B_1]$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.*

Доказательство. $\Rightarrow$) следует сразу из определения.

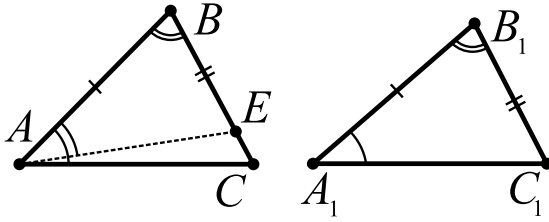


Рис. 19

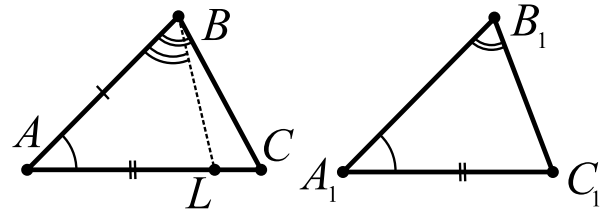


Рис. 20

$\Leftarrow$) сведем к 1КРТ, доказав, что $[AC] = [A_1C_1]$. О/п: $[AC] \neq [A_1C_1]$. Б.о.о. считаем, что $[A_1C_1] < [AC]$, тогда найдется такая точка $L \in [AC]$, что $[AL] = [A_1C_1]$ (рис. 20). Тогда для треугольников ABL и $A_1B_1C_1$ выполняются соотношения: $[AB] = [A_1B_1]$, $[AL] = [A_1C_1]$, $\angle BAL = \angle B_1A_1C_1$. По аксиоме III.5 получим, что $\angle ABL = \angle A_1B_1C_1$. Таким образом, от луча $[BA]$ угол $\angle A_1B_1C_1$ отложен двумя разными способами: $\angle ABL$ и $\angle ABC$. Получили противоречие с аксиомой III.4. Таким образом, $[AC] = [A_1C_1]$ и по 1КРТ получим $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

Следующий результат называется *теоремой о равнобедренном треугольнике*.

Теорема 4.3. *Для треугольника ABC следующие два условия равносильны:*

- 1) $[AB] = [BC]$,
- 2) $\angle BAC = \angle BCA$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) по 1КРТ получим, что $\triangle ABC = \triangle CBA$ (так как $[AB] = [BC]$, $[BC] = [AB]$ и $\angle ABC = \angle CBA$), откуда $\angle BAC = \angle BCA$.

(2) $\Rightarrow$ (1) по 2КРТ получаем, что $\triangle ABC = \triangle CBA$ (поскольку $[AC] = [CA]$, $\angle BAC = \angle BCA$ и $\angle BCA = \angle BAC$), откуда $[AB] = [BC]$. ■

Определение. Пусть $C \notin (AB)$ и лучи $[OA]$ и $[OB]$ — противоположные (т.е. $O \in]AB[$), тогда углы $\angle AOC$ и $\angle BOC$ называются смежными.

Следующий результат называется *теоремой о смежных углах*.



Теорема 4.4. Пусть $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные, а также $\angle A_1O_1C_1$ и $\angle B_1O_1C_1$ — смежные. Если $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$, то $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Доказательство. По аксиоме III.1 можно считать, что

$$[OA] = [OB] = [OC] = [O_1A_1] = [O_1B_1] = [O_1C_1] \quad (\text{рис. 21}).$$

Тогда по 1КРТ получим, что $\triangle OAC = \triangle O_1A_1C_1$, откуда выполняются равенства: $[AC] = [A_1C_1]$, $\angle OAC = \angle O_1A_1C_1$. Применяя к отрезкам $[AB]$ и $[A_1B_1]$ аксиому III.3, получим $[AB] = [A_1B_1]$. Из 1КРТ те-

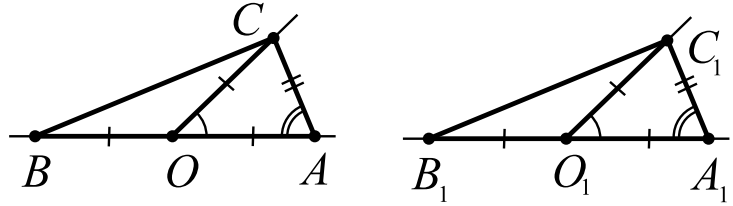


Рис. 21

перь следует, что $\triangle BAC = \triangle B_1A_1C_1$,

откуда $[BC] = [B_1C_1]$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Осталось заметить, что в $\triangle OBC$ и $\triangle O_1B_1C_1$ выполняются равенства: $[BO] = [B_1O_1]$, $[BC] = [B_1C_1]$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. По 1КРТ получаем, что $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$ и $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$. ■

Определение. Пусть точка O лежит между A и B , а также между C и D ($C \notin (AB)$), тогда углы $\angle AOC$ и $\angle BOD$ называются вертикальными.

Следствие. Вертикальные углы между собой равны.

Доказательство. Вертикальные углы $\angle AOC$ и $\angle BOD$ смежны с одним и тем же углом (например, с $\angle AOD$), поэтому, по предыдущей теореме, равны между собой. ■

Следующий результат называется *теоремой о сумме углов*.

Теорема 4.5. Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — обычные углы, во внутренних областях которых (соответственно) нашлись такие точки C и C_1 , что $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ и $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$ (рис. 22). Тогда справедливо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

Доказательство. По аксиоме об откладывании отрезка (аксиома III.1) можно считать, что $[OA] = [OB] = [O_1A_1] = [O_1B_1]$ (рис. 22). Выберем точки $K \in [OC]$ и $L \in [O_1C_1]$ так, что $\{K\} = [OC] \cap [AB]$ и $[O_1L] = [OK]$. Докажем, что точки B_1 , L и A_1 лежат на одной прямой. О/п: $A_1 \notin (B_1L)$



и луч $[LM)$ — противоположный с лучом $[LB_1)$. Дважды применяя 1КРТ, получим: $\triangle AOK = \triangle A_1O_1L$ (*), $\triangle BOK = \triangle B_1O_1L$ (**). Из (*) имеем $\angle OKA = \angle O_1LA_1$. Из (**) получим $\angle OKB = \angle O_1LB_1$ и по теореме о смежных углах $\angle OKA = \angle O_1LM$. Таким образом, от луча $[LO_1)$ отложены два угла ($\angle O_1LA_1$ и $\angle O_1LM$), равные углу $\angle OKA$. Это противоречит аксиоме III.4.

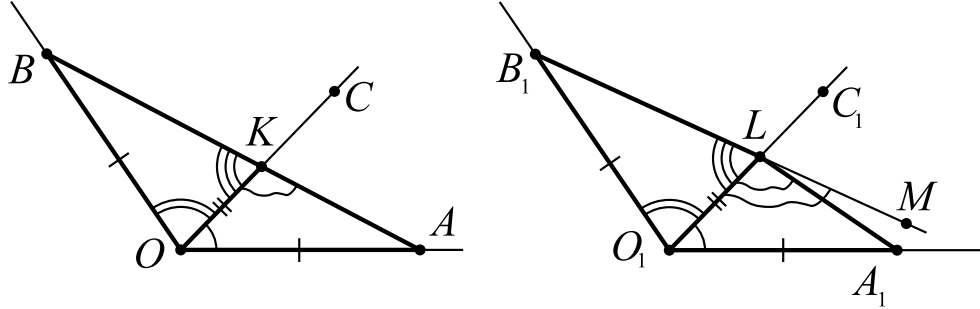


Рис. 22

В результате совпадают лучи $[LM)$ и $[LA_1)$. Из (*) имеем равенство $[AK] = [A_1L]$, а из (**) — $[BK] = [B_1L]$. Применив для отрезков $[AB]$ и $[A_1B_1]$ аксиому III.3, получим $[AB] = [A_1B_1]$. Отсюда, по 1КРТ (поскольку $[OB] = [O_1B_1]$, $[AB] = [A_1B_1]$ и $\angle OBK = \angle O_1B_1L$) приходим к равенству треугольников $\triangle OBA$ и $\triangle O_1B_1A_1$, а также к $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$.

■

В следующей теореме доказывается *третий критерий равенства треугольников — 3КРТ*.

Теорема 4.6. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны тогда и только тогда, когда $[AB] = [A_1B_1]$, $[AC] = [A_1C_1]$ и $[BC] = [B_1C_1]$.*

Доказательство. $\Rightarrow$) следует сразу из определения.

$\Leftarrow$) докажем, что $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. О/п: эти углы не равны. Тогда в каждой полуплоскости с границей (A_1C_1) отложим (используя аксиому III.4) лучи $[A_1B_2)$ и $[A_1B_3)$ так, что: B_1 и B_2 находятся по одну сторону от (A_1C_1) , B_1 и B_3 — по разные стороны от этой прямой, $\angle B_2A_1C_1 = \angle BAC$, $\angle B_3A_1C_1 = \angle BAC$ (рис. 23). Кроме того, по аксиоме III.1 можно считать, что $[A_1B_2] = [AB] = [A_1B_3]$. Дважды применяя 1КРТ, получим два равенства треугольников: $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_3C_1$, откуда $[B_2C_1] = [BC]$ и $[B_3C_1] = [BC]$. По аксиоме транзитивности (аксиома III.3) имеем $[A_1B_2] = [A_1B_3]$ и $[B_2C_1] = [B_3C_1]$. В двух равнобедренных треугольниках $A_1B_2B_3$ и $C_1B_2B_3$ приравниваем углы при основании: $\angle A_1B_2B_3 = \angle A_1B_3B_2$ и $\angle C_1B_2B_3 = \angle C_1B_3B_2$. Теперь по теореме о сумме



углов (теорема 4.5) получим $\angle A_1B_2C_1 = \angle A_1B_3C_1$. Теперь появилась возможность использовать 1КРТ для треугольников $\triangle A_1B_2C_1$, $\triangle A_1B_3C_1$ и получить первое важное равенство: $\angle B_2A_1C_1 = \angle B_3A_1C_1$ (*).

Действуя аналогично, рассматриваем равнобедренные треугольники $A_1B_1B_3$ и $C_1B_1B_3$, приходим сначала к равенству $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_3C_1$, затем — $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1B_3C_1$, откуда получим второе соотношение $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_3A_1C_1$ (**).

Из (*) и (**) замечаем, что от луча $[A_1C_1)$ в одной полуплоскости отложены два разных угла ($\angle B_2A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1$) равные одному и тому же углу $\angle B_3A_1C_1$. Это противоречит аксиоме III.4.

В результате, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и по 1КРТ приходим к равенству треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Конец доказательства теоремы.

Транзитивность равенства отрезков заложена в аксиоме III.3, а о транзитивности равенства углов в аксиомах ничего не говорится, поэтому в предыдущей теореме нельзя было из двух равенств $\angle B_2A_1C_1 = \angle BAC$ и $\angle B_3A_1C_1 = \angle BAC$ сделать поспешный вывод, что $\angle B_2A_1C_1 = \angle B_3A_1C_1$. Но 3КРТ теперь позволит нам доказать и транзитивность равенства углов, и транзитивность равенства треугольников.

Следствие 1. Если $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$, то $\angle BAC = \angle B_2A_2C_2$.

Доказательство. Применяя шесть раз аксиому об откладывании отрезка (аксиома III.1), можно добиться, чтобы

$$[AB] = [AC] = [A_1B_1] = [A_1C_1] = [A_2B_2] = [A_2C_2].$$

По 1КРТ получим $\triangle BAC = \triangle B_1A_1C_1$ и $\triangle B_1A_1C_1 = \triangle B_2A_2C_2$, откуда $[BC] = [B_1C_1]$ и $[B_1C_1] = [B_2C_2]$. По аксиоме III.3 имеем $[BC] = [B_2C_2]$ и к треугольникам BAC и $B_2A_2C_2$ можно применить 3КРТ, что приведет к $\angle BAC = \angle B_2A_2C_2$.

■

Следствие 2. Если $\triangle BAC = \triangle B_1A_1C_1$ и $\triangle B_1A_1C_1 = \triangle B_2A_2C_2$, то $\triangle BAC = \triangle B_2A_2C_2$.

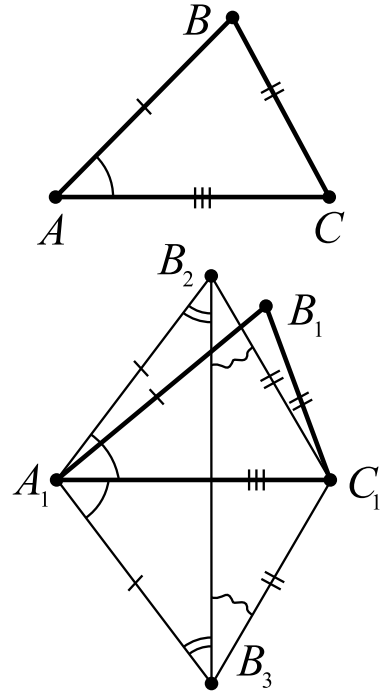


Рис. 23



Доказательство. По аксиоме III.3 получаем равенство соответствующих сторон $\triangle BAC$ и $\triangle B_2A_2C_2$. Предыдущее следствие дает равенство соответствующих углов $\triangle BAC$ и $\triangle B_2A_2C_2$.

■

1.5. Прямой угол. Середина отрезка. Биссектриса угла

Определение. Прямым углом называется угол, который равен своему смежному углу.

Определение. Прямые $a = (OA)$ и $b = (OB)$ называются перпендикулярными (обозначение: $a \perp b$), если угол AOB — прямой.

Теорема 5.1. Пусть $a \subseteq \alpha$, $B \in \alpha$ и $B \notin a$. Тогда найдется единственная прямая $b \subseteq \alpha$, которая проходит через точку B и перпендикулярна прямой a .

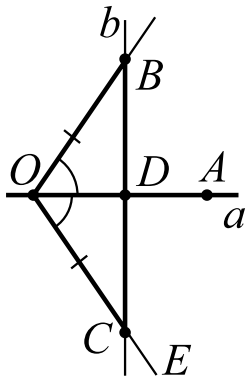


Рис. 24

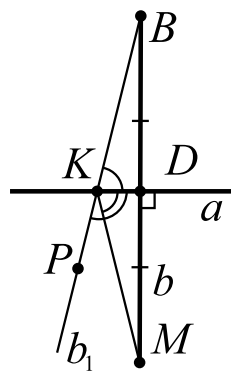


Рис. 25

Доказательство. I. Существование.

Выберем две различные точки $O, A \in a$ и рассмотрим две полуплоскости с границей a : $\alpha^1(a) = \alpha(a, B)$ и $\alpha^2(a)$. Воспользуемся аксиомой III.4 чтобы в полуплоскости $\alpha^2(a)$ найти такой луч $[OE)$, что $\angle AOB = \angle AOE$ (рис. 24). Затем на луче $[OE)$ выберем (по аксиоме III.1) точку C так, что $[OC] = [OB]$ и докажем, что $b = (BC)$ — искомая. Учитывая, что B и C расположены по разные стороны от прямой a , существует точка D , для которой $a \cap [BC] = \{D\}$. Если $O = D$, то из равенства $\angle AOB = \angle AOE$ сразу следует, что $a \perp b$. Пусть теперь $O \neq D$ и рассмотрим два треугольника OBD и OCD . По 1КРТ они равны, поэтому $\angle ODB = \angle ODC$ и $a \perp b$.

Если $O = D$, то из равенства $\angle AOB = \angle AOE$ сразу следует, что $a \perp b$. Пусть теперь $O \neq D$ и рассмотрим два треугольника OBD и OCD . По 1КРТ они равны, поэтому $\angle ODB = \angle ODC$ и $a \perp b$.

II. Единственность. О/п: нашлась прямая $b_1 \neq b$, для которой также выполняется $b_1 \subseteq \alpha$, $B \in b_1$ и $b_1 \perp a$ (рис. 25). Пусть $\{K\} = b_1 \cap a$, $M \in b$, причем $D \in]BM[$, $[BD] = [DM]$ (используем теорему об открытом луче и аксиому III.1), точка P выбрана на прямой b_1 так, что $K \in]BP[$ (используем аксиому II.2). Тогда из условия $b_1 \perp a$ сразу получаем, что выполняется равенство $\angle BKD = \angle PKD$. Кроме того, треугольники BKD



и MKD равны по 1КРТ. Отсюда $\angle BKD = \angle MKD$, что противоречит аксиоме III.4. ■

Определение. Угол, смежный с одним из внутренних углов треугольника ABC , называется его внешним углом.

Определение. Считаем, что $\angle ABC$ больше $\angle XYZ$ (используем обозначение $\angle ABC > \angle XYZ$), если найдется такая точка $D \in \angle ABC$, не лежащая на сторонах этого угла, что $\angle ABD = \angle XYZ$. Пишем $\angle ABC \geq \angle XYZ$, если $\angle ABC > \angle XYZ$ или $\angle ABC = \angle XYZ$.

Следующий результат называется *теоремой о внешнем угле треугольника*.

Теорема 5.2. Внешний угол треугольника ABC больше каждого из двух внутренних углов этого треугольника, которые не смежны с ним.

Доказательство. Пусть лучи $[AD)$ и $[AC)$ — противоположные. Докажем (б.о.о.), что $\angle BAD > \angle ABC$. О/п: предположим, что $\angle BAD \leq \angle ABC$ и рассмотрим два случая.

1-й случай: $\angle BAD = \angle ABC$ (рис. 26). Используя аксиому III.1, найдем такую точку $K \in [AD)$, что $[AK] = [BC]$, тогда по 1КРТ получим $\triangle ABC = \triangle BAK$, что дает $\angle BAC = \angle ABK$. По теореме о смежных углах из равенства

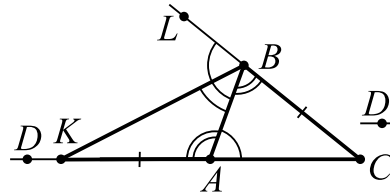


Рис. 26

$\angle BAD = \angle ABC$ получим $\angle BAC = \angle ABL$, где $L \in (BC)$ и $L \notin [BC)$. По аксиоме III.4 имеем $[BK] = [BL]$, $K \in (BC)$, $(BC) = (CK)$, что дает $A \in (BC)$. Получили противоречие с тем, что в любом треугольнике ABC всегда $A \notin (BC)$.

2-й случай: $\angle BAD < \angle ABC$ (рис. 27). Тогда по определению найдется такая точка $M \in [AC[$, что $\angle BAD = \angle ABM$. Но тогда $\angle BAD$ является внешним углом для треугольника ABM и $\angle BAD = \angle ABM$. Для такой ситуации было получено противоречие в первом случае. ■

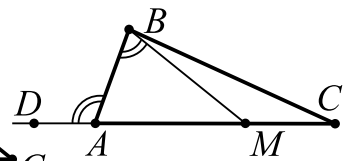


Рис. 27

Теорема 5.3. Пусть $a, b, c \subseteq \alpha$, $\{O\} = a \cap c$, $\{O_1\} = b \cap c$, точки A, A_1, B, C выбраны следующим образом: $A, A_1 \in a$, $O \in]AA_1[$, $B \in b$, A и B лежат по одну сторону от c , $C \in c$, $O \in]CO_1[$ (рис. 28). Тогда следующие условия равносильны:



- 1) $\angle A_1OO_1 = \angle OO_1B$;
- 2) $\angle AOC = \angle BO_1C$;
- 3) $a \parallel b$.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) так как вертикальные углы равны (по следствию из теоремы о смежных углах) и равенство углов транзитивно (по следствию из ЗКРТ) получаем, что первое и второе утверждения теоремы равносильны.

2) $\Rightarrow$ 3) о/п: предположим, что прямые a и b пересекаются, точка K является их пересечением, и рассмотрим два случая.

1-й случай: точки A и K лежат по одну сторону от прямой c (рис. 29). Тогда $\angle AOC$ является внешним для $\triangle OKO_1$ и по теореме о внешнем угле треугольника должно выполняться $\angle AOC > \angle BO_1C$, что противоречит $\angle AOC = \angle BO_1C$.

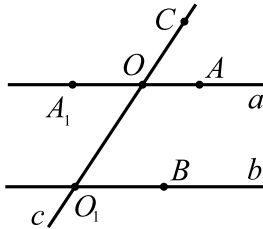


Рис. 28

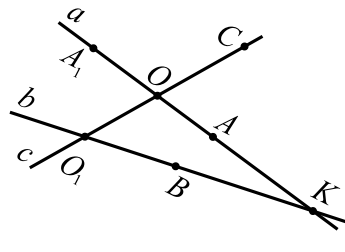


Рис. 29

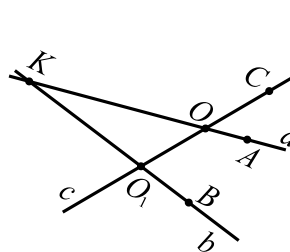


Рис. 30

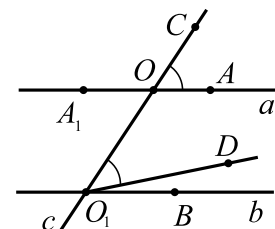


Рис. 31

2-й случай: точки A и K лежат по разные стороны от прямой c (рис. 30). Тогда $\angle BO_1C$ является внешним для $\triangle OKO_1$ и по теореме о внешнем угле треугольника должно выполняться $\angle BO_1C > \angle KOO_1 = \angle AOC$, что противоречит $\angle AOC = \angle BO_1C$.

3) $\Rightarrow$ 2) пусть $a \parallel b$. О/п: предположим, что $\angle AOC \neq \angle BO_1C$. Используя аксиому III.4, найдем такой луч $[O_1D)$, что $\angle AOC = \angle DO_1C$ (рис. 31). По уже доказанной части «(2) $\Rightarrow$ (3)» имеем $(O_1D) \parallel a$. Это условие вместе с $b \parallel a$ и $b \neq (O_1D)$ дает противоречие с аксиомой IV — аксиомой Евклида о параллельных.

■

Определение. Пусть $a \parallel b$. В обозначениях теоремы 5.3 углы $\angle A_1OO_1$ и $\angle OO_1B$ называются *накрест лежащими*, а углы $\angle AOC$ и $\angle BO_1C$ — *соответствующими*.

Следствие 1. *Накрест лежащие углы равны.*

Доказательство. Сразу следует из определения и предыдущей теоремы.

■



Следствие 2. *Соответствующие углы равны.*

Доказательство. Сразу следует из определения и предыдущей теоремы. ■

Следствие 3. *Пусть $a \subseteq \alpha$, $B \in a$. Тогда найдется единственная прямая $b \subseteq \alpha$, которая проходит через точку B и перпендикулярна прямой a .*

Доказательство. Пусть $C \in \alpha$ и $C \notin a$ (рис. 32). По теореме 5.1 найдем единственную прямую $c \subseteq \alpha$, для которой $C \in c$ и $c \perp a$. Аксиома IV гарантирует существование и единственность такой прямой b , что $b \parallel c$ и $B \in b$.

Далее используем обозначения рис. 32. Условие $b \parallel c$ и предыдущая теорема дают нам равенства: $\angle AOC = \angle OBL$ и $\angle BOC = \angle DBL$. Учитывая, что $c \perp a$, имеем $\angle AOC = \angle BOC$, откуда $\angle OBL = \angle DBL$, что дает $b \perp a$. Единственность такой прямой следует из аксиомы IV и теоремы 5.1. ■

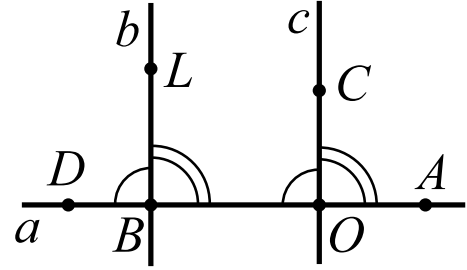


Рис. 32

Определение. Угол, который меньше прямого, называется острым. Тупым углом называется угол, который больше прямого.

Следствие 4. *Если один из углов треугольника тупой или прямой, то два оставшихся — острые.*

Доказательство. 1-й случай: $\angle ACB$ — прямой угол в треугольнике ABC и $\angle ACK$ — внешний угол этого треугольника. Тогда $\angle ACK$ — прямой угол и по теореме 5.2 получим, что выполняется $\angle CAB < \angle ACK$ и $\angle CBA < \angle ACK$, поэтому оставшиеся углы в треугольнике — острые.

2-й случай: $\angle ACB$ — тупой угол в треугольнике ABC и $\angle ACK$ — внешний угол этого треугольника. Пусть $[CL)$ — такой луч в полуплоскости $\alpha((BC), A)$, что $\angle LCB$ — прямой. Тогда из определения тупого угла получим, что $\angle LCB$ содержится в $\angle ACB$, поэтому $\angle ACK$ содержится в прямом угле $\angle LCK$ и не может с ним совпасть. Отсюда $\angle ACK$ — острый угол. Снова применяя теорему 5.2 о внешнем угле треугольника, получим, что оба угла $\angle CAB$ и $\angle CBA$ меньше острого угла $\angle ACK$, поэтому также являются острыми. ■



Определение. Если угол ACB прямой, то треугольник ABC называется прямоугольным треугольником, сторона AB называется гипотенузой, а $[AC]$ и $[BC]$ — его катетами.

Следующий результат называется *критерием равенства прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе*.

Теорема 5.4. Пусть $\angle ACB$ и $\angle A_1C_1B_1$ — прямые углы в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow [AB] = [A_1B_1]$ и $[AC] = [A_1C_1]$.

Доказательство. $\Rightarrow$) сразу следует из определения равенства треугольников.

$\Leftarrow$) прямые углы между собой равны, поэтому для равенства $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ достаточно проверить, что $[CB] = [C_1B_1]$. О/п: $[CB] \neq [C_1B_1]$, тогда найдем такую точку $L \neq B_1$, что $[CB] = [C_1L]$ и $L \in [C_1B_1]$. Рассмотрим два случая.

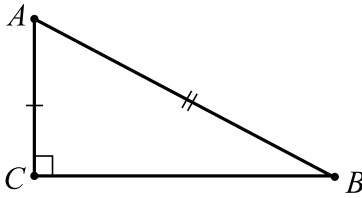


Рис. 33

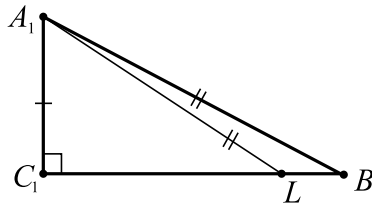


Рис. 34

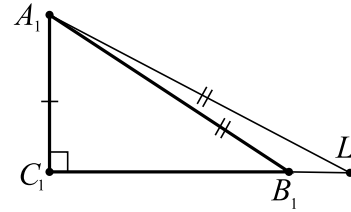


Рис. 35

1-й случай: точка $L \in]C_1B_1[$ (рис. 34). По 1КРТ выполняется равенства $\triangle ABC = \triangle A_1LC_1$, что влечет $[A_1L] = [AB] = [A_1B_1]$. Предыдущее следствие дает, что $\angle A_1B_1C_1$ — острый, поэтому в равнобедренном треугольнике A_1B_1L получим, что $\angle A_1LB_1$ также является острым. Смежный с ним угол, $\angle A_1LC_1$, будет тупым, что противоречит предыдущему следствию: в треугольнике A_1C_1L углы $\angle A_1LC_1$ и $\angle C_1A_1L$ должны быть острыми.

2-й случай: вершина $B_1 \in]C_1L[$ (рис. 35). По 1КРТ выполняется равенство $\triangle ABC = \triangle A_1LC_1$, что влечет $[A_1L] = [AB] = [A_1B_1]$. Предыдущее следствие дает, что $\angle A_1LC_1$ — острый, поэтому в равнобедренном треугольнике A_1B_1L получим, что $\angle A_1B_1L$ также является острым. Смежный с ним угол, $\angle A_1B_1C_1$, будет тупым, что противоречит предыдущему следствию: в треугольнике $A_1B_1C_1$ углы $\angle A_1B_1C_1$ и $\angle C_1A_1B_1$ должны быть острыми. ■

Определение. Серединой отрезка $[AB]$ называется такая точка $O \in [AB]$, что выполнено равенство $[AO] = [OB]$.



Теорема 5.5. Для каждого отрезка найдется единственная точка, которая является его серединой.

Доказательство. I. Существование. При $A = B$ точка $O = A = B$ является серединой вырожденного отрезка $[AB]$. Пусть теперь $A \neq B$ и $[AB] \subseteq \alpha$, тогда по третьему следствию в α найдутся такие прямые a и b , что $a, b \perp (AB)$ и $A \in a$, $B \in b$. Выберем одну из полуплоскостей с границей (AB) (рис. 36) и в ней отложим на прямых a и b равные отрезки $[AL]$ и $[BM]$. Прямоугольные треугольники AMB и BLA равны по 1КРТ, что дает $\angle BAM = \angle ABL$. Обозначим через P общую точку отрезков $[AM]$ и $[BL]$, тогда из последнего равенства следует равнобедренность треугольника APB . По теореме 5.1 через точку P проведем прямую c — перпендикуляр к (AB) . Эта прямая пересекает сторону $[AM]$ треугольника AMB и параллельна (по теореме 5.3) прямой b , поэтому по аксиоме Паша прямая c пересечет отрезок $[AB]$ в некоторой точке O . Докажем, что она искомая. Равнобедренность $\triangle APB$ дает равенство гипотенуз треугольников AOP и BOP , кроме того, у них общий катет. По теореме 5.4 получим $\triangle AOP = \triangle BOP$ и $[AO] = [OB]$.

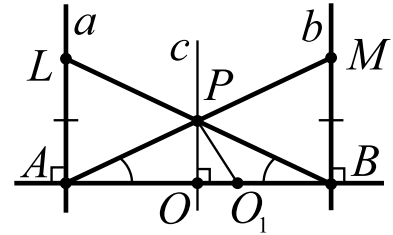


Рис. 36

II. Единственность. О/п: существует точка $O_1 \neq O$, также являющаяся серединой $[AB]$ (рис. 36). Тогда по 3КРТ равны треугольники AP_1O_1 и BPO_1 , откуда $\angle PO_1A = \angle PO_1B$ и $(PO_1) \perp (AB)$. Это противоречит единственности перпендикуляра из точки P к прямой (AB) (теорема 5.1). ■

Определение. Биссектрисой $\angle AOB$ называют такой луч $[OC] \subseteq \angle AOB$, что $\angle AOC = \angle BOC$.

Теорема 5.6. Для любого угла существует и единственна его биссектриса.

Доказательство. Существует пять типов углов, для каждого из них проведем отдельное доказательство.

1-й случай: $\angle AOB$ — обычный угол (рис. 37).

I. Существование. По аксиоме III.1 можно считать, что $[AO] = [BO]$. По предыдущей теореме найдем точку C — середину отрезка $[AB]$. По 3КРТ выполняется $\triangle AOC = \triangle BOC$, поэтому $\angle AOC = \angle BOC$ и $[OC]$ —



биссектриса $\angle AOB$.

II. Единственность. О/п: существует такой луч $[OC_1)$, что $[OC_1)$ также является биссектрисой $\angle AOB$ и $[OC_1) \neq [OC)$. Для обычного угла найдется точка L — пересечения $[OC_1)$ и $[AB]$. По 1КРТ равны треугольники AOL и BOL , откуда L — середина $[AB]$ и $L \neq M$. Получили противоречие с теоремой 5.5.

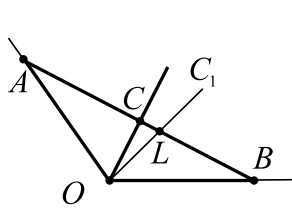


Рис. 37

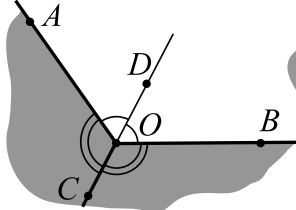


Рис. 38

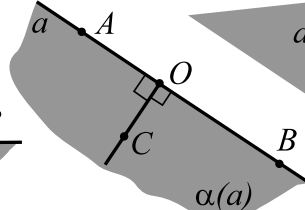


Рис. 39

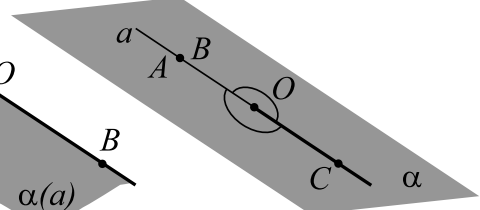


Рис. 40

2-й случай: $\angle AOB$ — супертупой угол (рис. 38). Проведем биссектрису $[OD)$ обычного угла, дополнительного к $\angle AOB$, и рассмотрим $[OC)$ — луч, противоположный к $[OD)$. По теореме 4.4 о смежных углах получим $\angle AOC = \angle BOC$. Из-за того, что C и D лежат по разные стороны от прямых (OA) и (OB) , точка C расположена во внешней области одномерного угла $[OA) \cup [OB)$, поэтому $[OC) \subseteq \angle AOB$ и $[OC)$ — биссектриса $\angle AOB$. Единственность следует из единственности биссектрисы $[OD)$ обычного угла.

3-й случай: $\angle AOB$ — развернутый угол (рис. 39). В полуплоскости $\alpha(a)$ этого угла найдем по следствию 3 такую точку C , что $(OC) \perp (AB)$. Из определения прямого угла сразу следует, что $\angle AOC = \angle BOC$ и $[OC)$ — биссектриса $\angle AOB$. Единственность следует из единственности перпендикуляра в плоскости α из точки O к прямой (AB) (еще раз используем следствие 3).

4-й случай: $\angle AOB$ — полный угол (рис. 40). Противоположный луч к $[OA)$ будет являться искомой биссектрисой. Единственность биссектрисы в этом случае следует из теоремы 2.2 об открытом луче: точка O разбивает прямую a только на два луча.

5-й случай: $\angle AOB$ — вырожденный угол. В этом случае биссектрисой будет $[OC) = [OA) = [OB)$. Единственность луча с таким свойством опять следует из теоремы 2.2.

■

Определение. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \alpha$, тогда $z = \bigcup_{i=1}^n [A_i A_{i+1}]$ называется ломаной, причем точки A_i ($i \in \{1, \dots, n+1\}$) называются ее верши-



нами, а каждый из отрезков $[A_i A_{i+1}]$ — ее звеном ($i \in \{1, \dots, n\}$). Ломаная z называется замкнутой, если $A_1 = A_{n+1}$. Звенья $[A_i A_{i+1}]$ и $[A_{i+1} A_{i+2}]$ называются смежными ($i \in \{1, \dots, n-1\}$). В случае замкнутой ломаной, звенья $[A_n A_1]$ и $[A_1 A_2]$ также называются смежными. Ломаная называется простой, если ее несмежные звенья не пересекаются, а смежные — пересекаются только по общей вершине. Все звенья ломаной предполагаются невырожденными (т.е. $A_i \neq A_{i+1}$ при $i \in \{1, \dots, n\}$).

Замечание. Простая замкнутая ломаная z разбивает плоскость α на две области, одна из которых целиком содержит прямую, эта область называется *внешней областью* ломаной z . Оставшаяся область называется *внутренней областью* ломаной z .

Определение. Простая замкнутая ломаная из n звеньев вместе с внутренней областью называется n -угольником ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

Определение. Четырехугольник $ABCD$ называется параллелограммом, если

- 1) $[AB] = [CD]$, $[AD] = [BC]$;
- 2) $(AB) \parallel (CD)$, $(AD) \parallel (BC)$.

Теорема 5.7. Пусть $ABCD$ — четырехугольник и $\{O\} = [AC] \cap [BD]$. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $ABCD$ — параллелограмм;
- 2) $[AB] = [CD]$, $[AD] = [BC]$;
- 3) $(AB) \parallel (CD)$, $(AD) \parallel (BC)$;
- 4) $[AB] = [CD]$, $(AB) \parallel (CD)$;
- 5) O — середина отрезков $[AC]$ и $[BD]$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует сразу из определения.

2) $\Rightarrow$ 3) по ЗКРТ выполняется $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 41), что дает равенства углов: $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle ACB = \angle CAD$. Дважды применив теорему 5.3, получим $(AB) \parallel (CD)$ и $(AD) \parallel (BC)$.

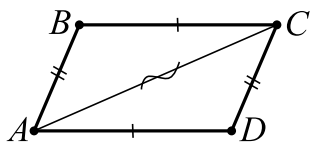


Рис. 41

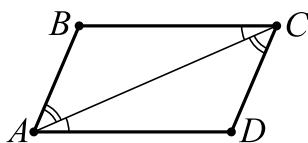


Рис. 42

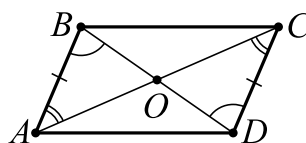


Рис. 43

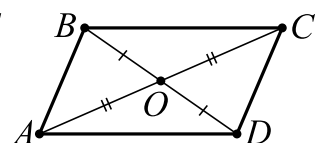


Рис. 44

3) $\Rightarrow$ 4) параллельность прямых обеспечивает (по следствию 1) равенство накрест лежащих углов (рис. 42): $\angle BAC = \angle DCA$ и $\angle ACB = \angle CAD$. По 2КРТ выполнено $\triangle ABC = \triangle CDA$, откуда $[AB] = [CD]$.



4) $\Rightarrow$ 5) дважды используя следствие 1, получим $\angle ABD = \angle CDB$ и $\angle BAC = \angle ACD$ (рис. 43). По 2КРТ выполнено $\triangle ABO = \triangle CDO$, откуда следует $[AO] = [OC]$ и $[BO] = [OD]$.

5) $\Rightarrow$ 1) равенство вертикальных углов $\angle BOA = \angle DOC$ позволяет применить 1КРТ и получить равенства: $\triangle ABO = \triangle CDO$, $[AB] = [CD]$ и $\angle ABD = \angle CDB$ (рис. 44). Последнее равенство и теорема 5.3 дают $(AB) \parallel (CD)$. Аналогично доказывается равенство треугольников AOD и COB , откуда $[AD] = [BC]$, $\angle CAD = \angle ACB$ и $(AD) \parallel (BC)$. ■

Следующий результат называется *теоремой Фалеса*⁸.

Теорема 5.8. Пусть $a, b \subseteq \alpha$, $A_i \in a$, $B_i \in b$, $c_i = (A_i B_i)$ ($i \in \{1, 2, 3\}$), $a \neq b$. Если $c_1 \parallel c_2 \parallel c_3$ и A_2 является серединой отрезка $[A_1 A_3]$, то B_2 является серединой отрезка $[B_1 B_3]$.

Доказательство. Если $a \parallel b$, то по предыдущей теореме заключаем, что $A_1 A_2 B_2 B_1$ и $A_2 A_3 B_3 B_2$ — параллелограммы, поэтому из равенства отрезков $[A_1 A_2] = [A_2 A_3]$ получим $[B_1 B_2] = [B_2 B_3]$.

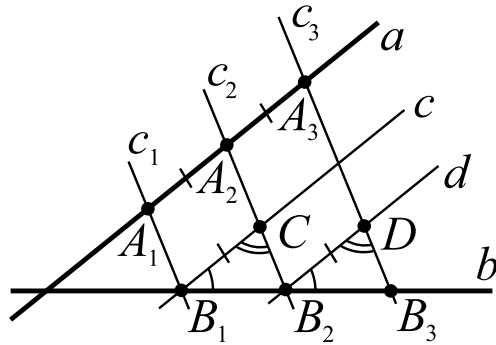


Рис. 45

В случае, если прямые a и b не параллельны, проведем (пользуясь аксиомой IV) прямые $c, d \parallel a$ так, что $B_1 \in c$, $B_2 \in d$. Далее воспользуемся обозначениями рис. 45. По предыдущей теореме четырехугольники $A_1 A_2 C B_1$ и $A_2 A_3 D B_2$ являются параллелограммами, поэтому

$$[B_1 C] = [A_1 A_2] = [A_2 A_3] = [D B_2].$$

Кроме того, второе следствие дает равенство соответствующих углов: $\angle C B_1 B_2 = \angle D B_2 B_3$ и $\angle B_1 C B_2 = \angle B_2 D B_3$. По 2КРТ получим $\triangle C B_1 B_2 = \triangle D B_2 B_3$ и $[B_1 B_2] = [B_2 B_3]$. ■

1.6. Длина на множестве отрезков

Определение. Множеством натуральных чисел называется $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Множеством целых чисел называется $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$. Множеством рациональных чисел называется $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} : k, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

⁸Фалес Милетский (624–548 до н.э.) — древнегреческий математик, философ, купец, политический деятель; кроме названной в его честь теоремы, доказал равенство углов при основании равнобедренного треугольника, 2КРТ; занимался гидротехникой и военной техникой; считал первоосновой всего мира воду.



Определение. Через C_{10} обозначают множество десятичных цифр, т.е. $C_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Определение. Бесконечной десятичной дробью называется $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ или $-0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, где и $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in C_{10}$ (при всех $i \in \mathbb{N}$) и после запятой нет периода из девяток⁹, т.е. не существует такого $k \in \mathbb{N}$, что $a_i = 9$ при всех $i \geq k$.

Определение. Множеством $\mathbb{R}$ всех действительных (или вещественных) чисел называется множество всех бесконечных десятичных дробей.

Нетрудно заметить, что любое число $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ является периодической бесконечной десятичной дробью¹⁰, причем длина наименьшего периода не превосходит $|n|$. Например, $1/7 = 0, (142857)$. Верно и обратное утверждение: любая периодическая дробь является рациональным числом. Числа множества $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называются *иррациональными*. Например, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Определение. Функцией f на множестве X называется правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственное число из $\mathbb{R}$ (обозначение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ или $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$).

Определение. Пусть $\text{Seg} = \{[AB] : A, B \in \mathbb{P}_3\}$ — множество всех отрезков пространства и $O \neq E$. Длиной на множестве Seg с единичным отрезком $[OE]$ называется функция $l : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) $\forall [AB] \in \text{Seg} \Rightarrow l([AB]) \geq 0$;
- 2) (аддитивность) если $C \in [AB]$, то $l([AB]) = l([AC]) + l([CB])$;
- 3) если $[AB] = [CD]$, то $l([AB]) = l([CD])$;
- 4) $l([OE]) = 1$.

Договоримся, что вместо обозначения $l([AB])$ можно использовать $|AB|$ или AB . Существование и единственность функции l со свойствами (1)–(4) будет доказано в 11-м классе после того, как будет построена вещественная прямая — множество $\mathbb{R}$. Кроме того, будет установлено важное свойство рациональных чисел: два числа $x, y \in \mathbb{R}$ равны между собой тогда и только тогда, когда для любой пары рациональных чисел $r, q \in \mathbb{Q}$ со свойством $r < x < q \Rightarrow r < y < q$. Это свойство обозначим через $(*)$.

⁹Период из девяток запрещают по определению для того, чтобы некоторые числа нельзя было представить в виде двух различных бесконечных десятичных дробей, например, $1 = 1,000\dots = 0,999\dots$.

¹⁰Период, т.е. повторяющийся ряд цифр после запятой, обычно заключают в круглые скобки, например, $1/3 = 0, (3)$.



Теорема 6.1. Пусть $l : \text{Seg} \rightarrow \mathbb{R}$ — длина с единичным отрезком $[OE]$, тогда выполняются следующие свойства:

- 1) если $[CD] \subseteq [AB]$, то $l([CD]) \leq l([AB])$;
- 2) если $[KL] \leq [AB]$, то $l([KL]) \leq l([AB])$;
- 3) для любого $k \in \mathbb{N} \Rightarrow l(k[AB]) = k \cdot l([AB])$;
- 4) если $A \neq B$, то $l([AB]) > 0$;
- 5) если $l([AB]) = l([CD])$, то $[AB] = [CD]$;
- 6) для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $C \in [AB]$, для которой $l([AC]) = k \cdot l([AB])$;
- 7) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $D \in [AB]$, для которой $l([AD]) = \frac{1}{n} \cdot l([AB])$;
- 8) для любых $k, n \in \mathbb{N}$ найдется единственная точка $M \in [AB]$, для которой $l([AM]) = \frac{k}{n} \cdot l([AB])$;
- 9) пусть $A \neq B$ и $\leq$ — порядок на прямой (AB) , введенный с помощью луча $[AB)$, $C \in [AB)$, тогда условие $A < C < B$ выполняется в том и только в том случае, когда $0 < l([AC]) < l([AB])$.

Доказательство. 1) б.о.о. будем считать, что $C \in [AD]$ и дважды воспользуемся свойством аддитивности

$$l([AB]) = l([AC]) + l([CB]) = l([AC]) + l([CD]) + l([DB]) \geq l([CD]).$$

В последнем переходе мы использовали $l([AC]), l([DB]) \geq 0$.

2) из условия $[KL] \leq [AB]$ по определению найдем точку $C \in [AB]$, для которой $[AC] = [KL]$. Тогда третье свойство из определения функции длины и предыдущее утверждение дают $l([KL]) = l([AC]) \leq l([AB])$.

3) докажем это свойство индукцией по k . Б.И. $k = 1$ — равенство очевидно выполняется.

Ш.И. Предположим, что для k выполнено $l(k[AB]) = k \cdot l([AB])$, тогда по свойству аддитивности и по предположению индукции получим

$$l((k+1)[AB]) = l([AB] + k[AB]) = l([AB]) + k \cdot l([AB]) = (k+1) \cdot l([AB]).$$

4) по аксиоме Архимеда (аксиома V.1) найдется такое натуральное число k , что $k[AB] \geq [OE]$ (где $[OE]$ — отрезок единичной длины). По (2) и (3) получим

$$k \cdot l([AB]) = l(k[AB]) \geq l([OE]) = 1.$$

Откуда $l([AB]) \geq \frac{1}{k} > 0$.



5) о/п: $[AB] \neq [CD]$. Найдем такую точку $L \in [AB)$, что $[AL] = [CD]$. Условие $[AB] \neq [CD]$ и аксиома II.3 гарантируют, что выполняется включение $L \in [AB[$ или $B \in [AL[$. Б.о.о. пусть $L \in [AB[$, тогда

$$l([AB]) = l([AL]) + l([LB]) = l([CD]) + l([LB]) > l([CD]).$$

В последнем переходе мы воспользовались свойством (4): поскольку $L \neq B$, $l([LB]) > 0$. Получили противоречие с условием $l([AB]) = l([CD])$.

6) докажем существование такой точки индукцией по k . При $A = B$ искомой точкой для любого $k \in \mathbb{N}$ будет $C = A$, поэтому далее считаем, что $A \neq B$.

Б.И. Если $k = 1$, то $C = B$.

Ш.И. Предположим теперь, что нашлась такая точка $K \in [AB)$, что $l([AK]) = k \cdot l([AB])$. На луче $[KP)$, противоположном лучу $[KA)$, найдем такую точку C , что $[KC] = [AB]$, тогда из свойства аддитивности длины получим, что $l([AC]) = (k + 1) \cdot l([AB])$.

Теперь установим единственность. Если точка $D \in [AB)$ также удовлетворяет свойству $l([AD]) = k \cdot l([AB]) = l([AC])$, то из (5) получим $[AD] = [AC]$, что по аксиоме III.1 дает $C = D$.

7) при $A = B$ искомой точкой для любого $n \in \mathbb{N}$ будет $C = A$, поэтому далее считаем, что $A \neq B$. Пусть $D \notin (AB)$, на луче $[AD)$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ найдем такую точку $X_i \in [AD)$, что $[AX_i] = i[OE]$ (рис. 46). Обозначим через $a_n = (BX_n)$ и, пользуясь аксиомой Евклида о параллельных, проведем $a_i \parallel a_n$ так, что $X_i \in a_i$ для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. Из аксиомы

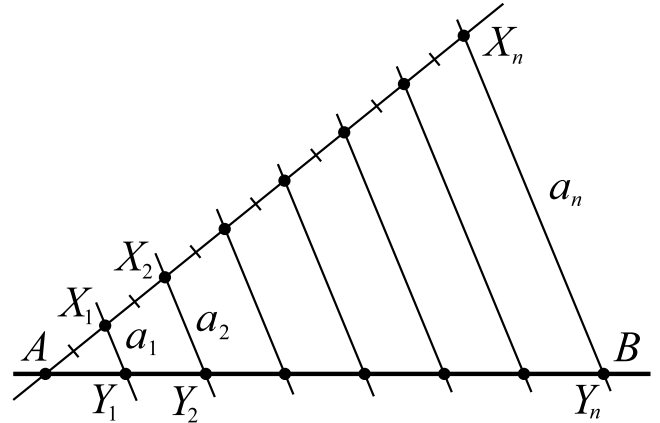


Рис. 46

Паша следует существование точки $Y_i \in [AB]$, для которой $\{Y_i\} = a_i \cap [AB]$, для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Равенство $[X_i X_{i+1}] = [X_{i+1} X_{i+2}]$ и теорема Фалеса дают $[Y_i Y_{i+1}] = [Y_{i+1} Y_{i+2}]$ при всех $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$, откуда $[AB] = n[AY_1]$, $l([AB]) = n \cdot l([AY_1])$ и $l([AY_1]) = \frac{1}{n} \cdot l([AB])$, поэтому $D = Y_1$ — искомая. Единственность такой точки доказывается так же, как и в предыдущем свойстве.

8) следует из (7) и (6).



9) $\Rightarrow$) из $A < C$ следует $A \neq C$ и по (4) имеем $l([AC]) > 0$. Условие $A < C < B$ дает $C \in]AB[$, поэтому $l([AB]) = l([AC]) + l([CB]) > l([AC])$. В последнем переходе мы также использовали (4): при $B \neq C$ выполнено $l([CB]) > 0$.

$\Leftarrow$) учитывая, что $l([AC]) > 0$ и $C \in [AB)$, получим $A < C$. Осталось проверить, что $C < B$. Предположим противное: $B \leq C$. При $B = C$ получим $l([AB]) = l([AC])$, что противоречит $l([AC]) < l([AB])$. Если же $B < C$, то по доказанной уже части получим $l([AB]) < l([AC])$, что также противоречит $l([AC]) < l([AB])$.

■

Следующий результат усиливает теорему Фалеса и обычно называется *обобщенной теоремой Фалеса* или *теоремой о пропорциональных отрезках*.

Теорема 6.2. Пусть $\angle XOY$ — обычный угол, на сторонах которого выбраны точки $A, C \in]OX)$, $B, D \in]OY)$ так, что $(AB) \parallel (CD)$. Тогда $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OD|}{|OB|}$.

Доказательство. Обозначим через $x = |OC|/|OA|$, $y = |OD|/|OB|$ и докажем, что $x = y$.

1-й случай: $x = k \in \mathbb{N}$. По свойству (6) предыдущей теоремы на луче $[OX)$ найдется единственная такая точка C со свойством $l([AC]) = k \cdot l([AB])$. Из доказательства этого свойства следует, что $[OC] = k[OA]$, что позволяет построить на луче $[OX)$ точки C_i ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$), для которых $C_1 = A$, $C_k = C$ и $[OC_i] = i[OA]$. Через каждую точку C_i проведем прямую c_i так, что $c_i \parallel (CD)$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) и обозначим через D_i точку пересечения $c_i \cap [OY)$ (рис. 47). Из свойства (9) предыдущей теоремы и неравенств $|OC_i| < |OC_{i+1}| < |OC_{i+2}|$ получим, что $C_{i+1} \in]C_i C_{i+2}[$ (для каждого $i \in \{1, \dots, k-2\}$). Применив к треугольникам $OC_{i+1}D_{i+1}$, $OC_{i+2}D_{i+2}$ и прямым c_i , c_{i+1} аксиому Паша, получим $D_{i+1} \in]D_i D_{i+2}[$ ($i \in \{1, \dots, k-2\}$). Теперь можно использовать $k-1$ раз теорему Фалеса, чтобы получить $[OB] = [OD_1] = [D_1 D_2] = [D_2 D_3] = \dots = [D_{k-1} D_k] = [D_{k-1} D]$. Отсюда $[OD] = k[OB]$, что по свойству (6) предыдущей теоремы дает $|OD| = k|OB|$ и $y = x$.

2-й случай: $x = \frac{k}{n}$, где $k, n \in \mathbb{N}$. Свойство (7), доказанное в теореме 6.1, дает единственную точку $M \in [OX)$, для которой одновременно выполняются два равенства $n|OM| = |OA|$ и $n[OM] = [OA]$ (первое из них связывает числа, второе — отрезки). Пусть $L \in [OY)$ выбрана так, что $(ML) \parallel (AB)$ (рис. 48), тогда по первому случаю $n[OL] = [OB]$ и $n|OL| = |OB|$. По



условию $|OC| = k \cdot \frac{1}{n}|OA| = k|OM|$, что по первому случаю влечет

$$|OD| = k|OL| = k \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot |OB| \right) = \frac{k}{n} \cdot |OB|,$$

откуда $y = k/n = x$.

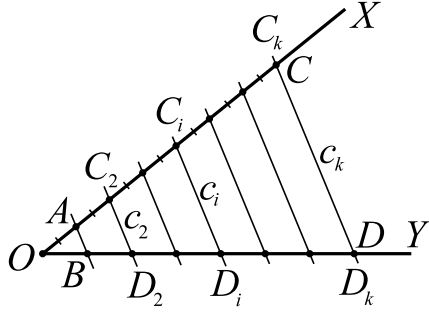


Рис. 47

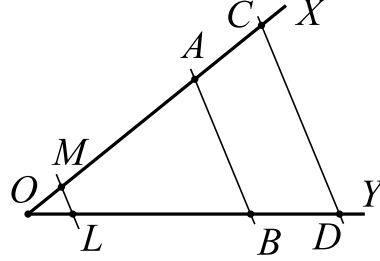


Рис. 48

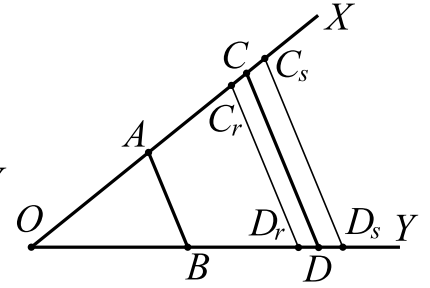


Рис. 49

3-й случай: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Рассмотрим произвольную пару рациональных чисел $r, s \in \mathbb{Q}$, для которой $0 < r < x < s$. Дважды применяя свойство (8) теоремы 6.1, найдем точки $C_r, C_s \in [OX)$, для которых $|OC_r| = r|OA|$ и $|OC_s| = s|OA|$ (рис. 49). Двойное неравенство $r < x < s$ очевидно влечет $r|OA| < x|OA| < s|OA|$ или $|OC_r| < |OC| < |OC_s|$. Пусть $<$ — порядок на (OX) , порожденный лучом $[OX)$, тогда последнее двойное неравенство и свойство (9) теоремы 6.1 дают следующее расположение точек на (OX) : $O < C_r < C < C_s$. Выберем на луче $[OY)$ точки D_r и D_s так, чтобы $(C_rD_r) \parallel (CD) \parallel (C_sD_s)$. Применяя аксиому Паша к треугольнику OCD и прямой (C_rD_r) (эта прямая не пересекает $[CD]$ и пересекает $]OC[$), получим, что $D_r \in]OD[$. Аналогично (рассматривая $\triangle OC_sD_s$ и (CD)) проверяется, что $D \in]OD_s[$. Если рассмотреть теперь $<$ — порядок уже на (OY) , порожденный лучом $[OY)$, то установленное выше расположение точек можно переписать в виде $O < D_r < D < D_s$. Еще раз применим свойство (9) теоремы 6.1 и получим $|OD_r| < |OD| < |OD_s|$. По второму случаю, поскольку $r, s \in \mathbb{Q}$, имеем $|OD_r| = r|OB|$ и $|OD_s| = s|OB|$, тогда последнее неравенство можно переписать в виде $r|OB| < y|OB| < s|OB|$, что дает $r < y < s$. Теперь свойство (*) (см. стр. 37) влечет долгожданное $x = y$. ■

1.7. Подобие треугольников

Определение. Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются соотношения:



$$1) \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = k,$$

$$2) \angle BAC = \angle B_1A_1C_1, \angle ABC = \angle A_1B_1C_1, \angle ACB = \angle A_1C_1B_1,$$

то треугольники называются подобными, а k называют коэффициентом подобия (обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$).

Хорошо известно, что некоторые соотношения из предыдущего определения можно опустить, но треугольники останутся подобными. В следующей теореме докажем основные критерии подобия треугольников — КПТ.

Теорема 7.1. Для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ следующие условия равносильны:

$$1) \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1;$$

$$2) \angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \text{ и } \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} \text{ (1КПТ);}$$

$$3) \angle BAC = \angle B_1A_1C_1 \text{ и } \angle ABC = \angle A_1B_1C_1 \text{ (2КПТ);}$$

$$4) \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = k \text{ (3КПТ).}$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) следует из определения.

2) $\Rightarrow$ 3) выберем точки $B_2 \in [AB)$ и $C_2 \in [AC)$ (рис. 50) так, чтобы $[AB_2] = [A_1B_1]$ и $(BC) \parallel (B_2C_2)$, тогда по теореме 6.2 получим

$$\frac{|AC_2|}{|AC|} = \frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|},$$

откуда $|AC_2| = |A_1C_1|$ и (по теореме 6.1, свойство 5) $[AC_2] = [A_1C_1]$. По 2КРТ выполняется $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$, откуда $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$. Условие $(BC) \parallel (B_2C_2)$ влечет $\angle AB_2C_2 = \angle ABC$, транзитивность равенства углов окончательно дает $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

3) $\Rightarrow$ 4) снова выберем точки $B_2 \in [AB)$ и $C_2 \in [AC)$ (рис. 52) так, чтобы $[AB_2] = [A_1B_1]$ и $(BC) \parallel (B_2C_2)$. Из равенств $\angle AB_2C_2 = \angle ABC$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ получим $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ и по 2КРТ выполняется $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$, откуда $[B_2C_2] = [B_1C_1]$ и $\angle B_2C_2A = \angle B_1C_1A_1$. Условие $(BC) \parallel (B_2C_2)$ и теорема 6.2 дают

$$\frac{|AC_2|}{|AC|} = \frac{|AB_2|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}. \quad (*)$$

Выберем теперь точки $L \in [B_2A)$ и $M \in [B_2C_2)$ так, чтобы $[LB_2] = [AB]$ и $(LM) \parallel (AC)$. Тогда по 2КРТ выполнено $\triangle ABC = \triangle LB_2M$, а условие



$(LM) \parallel (AC)$ и теорема 6.2 дают

$$\frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AB_2|}{|LB_2|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_2M|} = \frac{|B_2C_2|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}. \quad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ получим $\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}$.

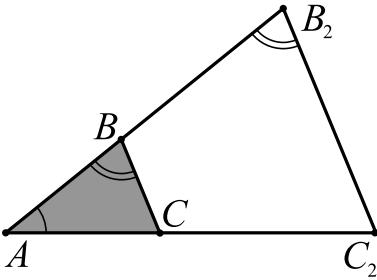


Рис. 50

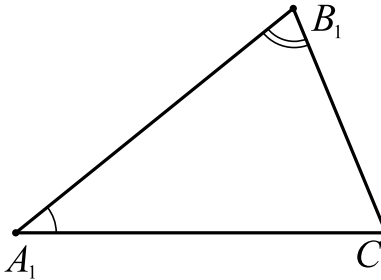


Рис. 51

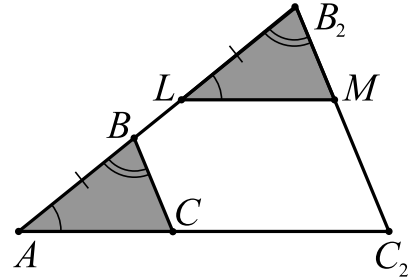


Рис. 52

4) $\Rightarrow$ 1) в очередной раз выберем точки $B_2 \in [AB)$ и $C_2 \in [AC)$ (рис. 52) так, чтобы $[AB_2] = [A_1B_1]$ и $(BC) \parallel (B_2C_2)$. Условие $(BC) \parallel (B_2C_2)$ и теорема 6.2 дают

$$\begin{aligned} \frac{|AC_2|}{|AC|} &= \frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |A_1C_1| = |AC_2| \Rightarrow [A_1C_1] = [AC_2]. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Выберем теперь точки $L \in [B_2A)$ и $M \in [B_2C_2)$ так, чтобы $[LB_2] = [AB]$ и $(LM) \parallel (AC)$. Тогда по 2КРТ выполнено $\triangle ABC = \triangle LB_2M$, а условие $(LM) \parallel (AC)$ и теорема 6.2 дают

$$\begin{aligned} \frac{|B_1C_1|}{|BC|} &= \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AB_2|}{|LB_2|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_2M|} = \frac{|B_2C_2|}{|BC|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |B_1C_1| = |B_2C_2| \Rightarrow [B_1C_1] = [B_2C_2]. \end{aligned} \quad (\diamond)$$

Из $(\heartsuit)$ и $(\diamond)$ по 3КРТ получим $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$, откуда

$$\angle BAC = \angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1,$$

$$\angle ABC = \angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1,$$

$$\angle ACB = \angle AC_2B_2 = \angle A_1C_1B_1.$$





1.8. Измерение углов

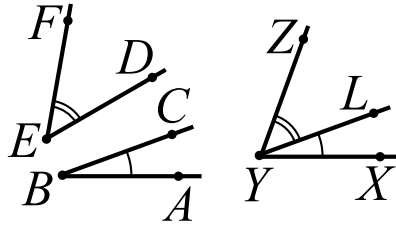


Рис. 53

Определение. Суммой углов $\angle ABC$ и $\angle DEF$ называется такой угол $\angle XYZ$ (рис. 53), для которого найдется луч $[YL) \subseteq \angle XYZ$, что выполняется $\angle XYL = \angle ABC$ и $\angle LYZ = \angle DEF$ (обозначение: $\angle XYZ = \angle ABC + \angle DEF$). Умножение угла на натуральное число $n \in \mathbb{N}$ легко определяется по индукции: $1 \cdot \angle ABC = \angle ABC$,

$$(n+1) \cdot \angle ABC = n \cdot \angle ABC + \angle ABC.$$

В геометрии принято измерять величину угла в градусах, используя шестидесятеричную систему счисления¹¹. Через $C_{60} = \{0, 1, \dots, 59\}$ обозначим множество цифр этой системы, а через $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — множество всех неотрицательных целых чисел.

Определение. 1) величина $\angle AOB$ равна одному градусу, если $180 \cdot \angle AOB$ является развернутым углом (обозначение: $\widehat{AOB} = 1^\circ$).

2) величина $\angle A_1OB_1$ равна одной минуте, если $60 \cdot \angle A_1OB_1 = \angle AOB$ (обозначение: $\widehat{A_1OB_1} = 1'$).

3) величина $\angle A_2OB_2$ равна одной секунде, если $60 \cdot \angle A_2OB_2 = \angle A_1OB_1$ (обозначение: $\widehat{A_2OB_2} = 1''$).

⋮

Далее вместо единицы с k штрихами ($k \geq 4$) пишут $1^{(k)}$.

$k+1$) если уже определен угол $\angle A_{k-1}OB_{k-1}$, имеющий величину $1^{(k-1)}$, то величина $\angle A_kOB_k$ равна $1^{(k)}$, если $60 \cdot \angle A_kOB_k = \angle A_{k-1}OB_{k-1}$ (обозначение: $\widehat{A_kOB_k} = 1^{(k)}$).

В общем случае, $\widehat{XYZ} = n^\circ n'_1 n''_2 \dots n_k^{(k)}$, где $n \in \mathbb{Z}^+$, $n_i \in C_{60}$ (при $i \in \{1, 2, \dots, k\}$), если

$$\angle XYZ = n \cdot \angle AOB + n_1 \cdot \angle A_1OB_1 + n_2 \cdot \angle A_2OB_2 + \dots + n_k \cdot \angle A_kOB_k.$$

Нетрудно заметить, что если сумма двух углов не превосходит полного угла, то градусная величина суммарного угла равна сумме величин этих двух углов. Это утверждение по индукции переносится на любое конечное число

¹¹Шестидесятеричная система счисления — это позиционная система с основанием 60, была изобретена шумерами в третьем тысячелетии до н.э.; существует гипотеза, что она стала результатом наложения двух систем — пятеричной и двенадцатеричной. Сохранилась в измерении времени и углов. В одной минуте 60 секунд, в одной секунде — 60 терций, в одной терции — 60 кварт, в одной кварте — 60 квинт. Начиная с терции, названия считаются устаревшими и при измерении углов запятую ставят после количества секунд и далее используют десятичную систему счисления для обозначения долей секунды.



слагаемых. Также из определения следует, что чем больше угол, тем больше его градусная величина.

Следствие 1. Если $\angle XOY$ — развернутый угол, то $\widehat{XOY} = 180^\circ$.

Доказательство. Из определения. ■

Следствие 2. 1) если $\angle XOZ$ и $\angle ZOY$ — смежные углы, то выполняется равенство $\widehat{XOZ} + \widehat{ZOY} = 180^\circ$.

2) величина прямого угла равна 90° .

3) величина угла между биссектрисами смежных углов равна 90° .

Доказательство. 1) из определения и предыдущего следствия.

2) следует из (1).

3) пусть $[OK)$ и $[OL)$ — биссектрисы двух смежных углов: $\angle AOC$ и $\angle COB$. Тогда $180^\circ = \widehat{AOB} = 2\widehat{KOC} + 2\widehat{COL} = 2\widehat{KOL}$, откуда $\widehat{KOL} = 90^\circ$. ■

Под углом $\angle A$ треугольника ABC мы понимаем обычный угол $\angle BAC$, содержащий этот треугольник. Этот угол также называют *внутренним углом* треугольника ABC .

Теорема 8.1. Для любого треугольника ABC выполняется $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$.

Доказательство. По аксиоме Евклида существует единственная прямая b , для которой $b \parallel (AC)$ и $B \in b$. Воспользуемся обозначениями рис. 54. Из равенства накрест лежащих углов $\angle A = \angle ABD$ и $\angle C = \angle CBE$ получим

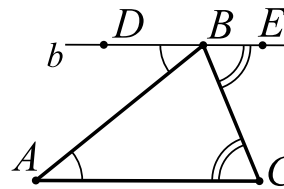


Рис. 54

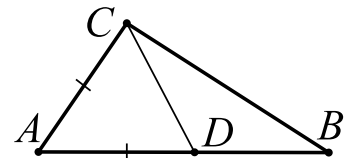


Рис. 55

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{ABD} + \widehat{B} + \widehat{CBE} = \widehat{DBE} = 180^\circ.$$

Следствие 1. Пусть в треугольнике ABC выполняется $[AB] = [BC]$, тогда углы $\angle A$ и $\angle C$ — острые.

Доказательство. Из теоремы 4.3 о равнобедренном треугольнике следует, что $\angle A = \angle C$. Если теперь предположить противное, получим $\widehat{A} \geq 90^\circ$



и $2\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$. $\nrightarrow$.

■

Следствие 2. Для любого треугольника ABC справедливо утверждение: $[AB] > [AC] \Leftrightarrow \angle C > \angle B$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если $[AB] > [AC]$, то найдется такая точка D из интервала $]AB[$, что $[AC] = [AD]$, откуда $\angle ACD = \angle ADC$ (рис. 55). Заметим, что $\angle ADC$ является внешним для треугольника CBD , поэтому (по теореме 5.2 о внешнем угле) имеем $\angle ADC > \angle B$. Из цепочки неравенств $\angle B < \angle ADC = \angle ACD < \angle C$ получим требуемое.

$\Leftarrow$) пусть теперь $\angle C > \angle B$. О/п: $[AB] \leq [AC]$. При $[AB] = [AC]$ получим противоречивое $\angle C = \angle B$. Если же $[AB] < [AC]$, то уже доказанное утверждение дает $\angle C < \angle B$, что также противоречит данному условию.

■

Первое и третье утверждения в приведенном ниже следствии называются соответственно *неравенством треугольника* и *неравенством многоугольника*.

Следствие 3. 1) для любого треугольника ABC длина любой его стороны строго меньше суммы длин двух оставшихся сторон.

2) $C \in [AB] \Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB|$.

3) пусть $n \geq 3$. Тогда $|A_1A_n| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |A_iA_{i+1}|$. Если же существует хотя бы один индекс $i \in \{2, \dots, n-1\}$, что $A_i \notin (A_1A_n)$, то выполняется строгое неравенство $|A_1A_n| < \sum_{i=1}^{n-1} |A_iA_{i+1}|$.

Доказательство. 1) достаточно проверить, что $|AB| < |AC| + |CB|$. Если $[AB] \leq [AC]$, то это неравенство очевидно (поскольку $|CB| > 0$). Пусть теперь $[AC] < [AB]$, тогда найдется такая точка D из интервала $]AB[$, что $[AC] = [AD]$ (рис. 55). Поэтому $\triangle ACD$ — равнобедренный и по первому следствию $\angle ADC$ — острый. Тогда смежный с ним угол, т.е. $\angle BDC$, является тупым, и, уже по второму следствию, $|DB| < |CB|$. В результате, $|AB| = |AD| + |DB| = |AC| + |DB| < |AC| + |CB|$.

2) в одну сторону это сразу следует из аддитивного свойства функции длины. Осталось доказать, что из $|AB| = |AC| + |CB|$ следует, что выполняется $C \in [AB]$. О/п: $C \notin [AB]$. Если $C \notin (AB)$, то из неравенства треугольника имеем $|AB| < |AC| + |CB|$. $\nrightarrow$.

Пусть теперь $C \in (AB)$ и $C \notin [AB]$, тогда по аксиоме II.3 выполняется



одно из двух утверждений: $B \in]AC[$ или $A \in]CB[$. Б.о.о. будем считать, что $B \in]AC[$, тогда $|AC| = |AB| + |BC| > |AB|$ (в теореме 6.1 было доказано, что длина невырожденных отрезков строго больше нуля), откуда следует неравенство $|AB| < |AC| + |CB|$. $\nleftrightarrow$.

3) докажем это свойство индукцией по n . Б.И. При $n = 3$ утверждение следует из (1) и (2).

Ш.И. Предположим, что для $n = k$ утверждение справедливо и проверим его для $k + 1$. Последовательно применив базу и предположение индукции, имеем

$$|A_1 A_{k+1}| \leq |A_1 A_k| + |A_k A_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |A_i A_{i+1}| + |A_k A_{k+1}| = \sum_{i=1}^k |A_i A_{i+1}|.$$

Если $A_k \notin (A_1 A_{k+1})$, то из (1) получим $|A_1 A_{k+1}| < |A_1 A_k| + |A_k A_{k+1}| \leq \sum_{i=1}^k |A_i A_{i+1}|$. Если же существует хотя бы один индекс $i \in \{2, \dots, k-1\}$,

что $A_i \notin (A_1 A_k)$, то по предположению индукции $|A_1 A_k| < \sum_{i=1}^{k-1} |A_i A_{i+1}|$ и снова получим $|A_1 A_{k+1}| < \sum_{i=1}^k |A_i A_{i+1}|$. ■

Теперь можно усилить результат о внешнем угле треугольника, установленный в теореме 5.2.

Следствие 4. *Величина внешнего угла треугольника ABC равна сумме двух внутренних углов этого треугольника, которые не смежны с ним.*

Доказательство. Пусть $\angle BAL$ — внешний угол $\triangle ABC$, который является смежным с $\angle A$, тогда по свойству смежных углов и теореме 8.1 получим $\widehat{BAL} = 180^\circ - \widehat{A} = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$. ■

1.9. Окружность. Геометрические места точек

До конца этой главы будем считать, что точки и геометрические фигуры рассматриваются в некоторой фиксированной плоскости α .

Определение. Окружностью с центром в некоторой точке O и радиусом $r \geq 0$ ($r \in \mathbb{R}$) называется множество $\omega = \omega(O, r) = \{X : |OX| = r\}$. При $r = 0$ получим $\omega(O, r) = \{O\}$, такая окружность называется вырожденной.



Далее рассматриваются (если не оговорено противное) только невырожденные окружности. Если все вершины многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ принадлежат ω , то ω называется окружностью, описанной около многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$.

Точка A находится внутри окружности $\omega(O, r)$ (соответственно вне ее), если $|OA| < r$ ($|OA| > r$).

Определение. Прямая a называется касательной к окружности ω , если они имеют только одну общую точку. Точка $a \cap \omega$ называется точкой касания. Окружность ω касается луча $[AB)$ или отрезка $[AB]$ ($A \neq B$), если точка касания $(AB) \cap \omega$ лежит на этом луче или, соответственно на этом отрезке.

Следующая теорема содержит несколько простых утверждений об окружности.

Теорема 9.1. 1) пусть $A \neq B$ и a — серединный перпендикуляр к $[AB]$. Тогда $X \in a \Leftrightarrow [AX] = [XB]$.

2) для любого треугольника существует единственная описанная около него окружность.

3) пусть $A \in a \cap \omega(O, r)$. Тогда a — касательная к $\omega \Leftrightarrow a \perp (OA)$.

4) пусть точка A расположена вне $\omega(O, r)$ и $(AB), (AC)$ — касательные к $\omega(O, r)$ (причем B, C — точки касания), тогда $[AB] = [AC]$.

Доказательство. 1) пусть M — середина $[AB]$. При $X = M$ доказательство очевидно, далее рассматриваем случай $X \notin (AB)$.

$\Rightarrow$) если $X \in a$, то по 1КРТ выполняется $\triangle XMA = \triangle XMB$, откуда $[AX] = [BX]$.

$\Leftarrow$) если же $[AX] = [BX]$, то по 3КРТ выполняется $\triangle XMA = \triangle XMB$, откуда $\angle AMX = \angle BMX$ и (XM) — серединный перпендикуляр к $[AB]$.

2) I. Существование. Пусть a и b — серединные перпендикуляры к сторонам $[AB]$ и $[BC]$ соответственно. Если бы выполнялось условие $a \parallel b$, то $(AB) = (BC)$ (иначе существовало бы два различных перпендикуляра из точки B к прямой b), тогда треугольник ABC вырожденный, чего не может быть. Поэтому a, b не параллельны, и, поскольку они содержатся в плоскости $\alpha = (ABC)$, найдется такая точка O , что $\{O\} = a \cap b$. По (1) выполняется $[OA] = [OB]$ и $[OB] = [OC]$, откуда $\omega(O, |OA|)$ — искомая.

II. Единственность. Предположим, что $A, B, C \in \omega(O_1, r_1)$. Равенства $|O_1A| = |O_1B| = r_1$, $|O_1B| = |O_1C| = r_1$ и (1) дают $O_1 \in a \cap b = \{O\}$, откуда $O_1 = O$ и $r_1 = |OA|$. Таким образом, $\omega(O_1, r_1) = \omega(O, |OA|)$.



3) $\Rightarrow$) о/п: предположим, что a и (OA) не перпендикулярны. Тогда по теореме 5.1 найдем такую точку $M \in a$, что $(OM) \perp a$ и $M \neq A$ (рис. 56). На луче, противоположном к $[MA)$ выберем такую точку B , что $[AM] = [MB]$. По 1КРТ получим $\triangle OMA = \triangle OMB$, $[OB] = [OA]$, откуда $B \in a \cap \omega(O, r)$. ∇ .

$\Leftarrow$) пусть теперь $a \perp (OA)$. Выберем на прямой a произвольную точку $B \neq A$. В треугольнике OAB угол $\angle OAB$ наибольший, поэтому по второму следствию теоремы 8.1 получим $|OB| > |OA|$ и $B \notin \omega(O, r)$. Отсюда $a \cap \omega(O, r) = \{A\}$ и a — касательная к $\omega(O, r)$.

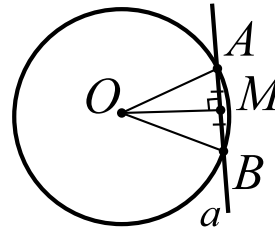


Рис. 56

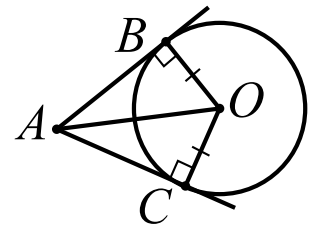


Рис. 57

4) из (3) сразу следует, что $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ — прямоугольные треугольники (рис. 57), равные друг другу по теореме 5.4, откуда $[AB] = [AC]$. ■

Определение. Пусть $\omega = \omega(O, r)$ и $A, B \in \omega$, тогда угол $\angle AOB$ называется *центральный угол* окружности ω . Дугой с концами в точках A и B называют $\overset{\frown}{AB} = \omega \cap \angle AOB$ (это множество также называется дугой, на которую опирается угол $\angle AOB$). Точки A и B называются *концами дуги* $\overset{\frown}{AB}$. Величиной (или градусной величиной) дуги $\overset{\frown}{AB}$ называется величина центрального угла $\angle AOB$, который опирается на эту дугу, это число будем обозначать через $\overset{\frown}{AB}^\circ$.

Определение. Угол $\angle BAC$, который не больше развернутого, называется *вписанным* в $\omega = \omega(O, r)$, если одновременно выполняются два условия:

- 1) $A \in \omega$;
- 2) лучи $[AB)$ и $[AC)$ пересекают ω (т.е. кроме точки A имеют еще одну общую точку с окружностью ω) или касаются ее (луч $[AB)$ касается окружности, если (AB) — касательная к окружности ω).

Если $\angle BAC$ — обычный угол, вписанный в окружность ω , обе стороны которого пересекают ω , то пересечение $\angle BAC \cap \omega$ состоит из вершины A и некоторой дуги. Эта дуга называется *дугой, на которую опирается угол* $\angle BAC$. Если же хотя бы одна сторона $\angle BAC$, вписанного в окружность ω , касается ω , или $\angle BAC$ является развернутым, то $\omega \cap \angle BAC$ называется *дугой, на которую опирается угол* $\angle BAC$.



Теорема 9.2. *Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

Первый случай: центр окружности, точка O , лежит на стороне $[AC]$ вписанного угла BAC (рис. 58). Тогда $\angle BOC$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOB , поэтому $\widehat{BOC} = \widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 2\widehat{BAC}$.

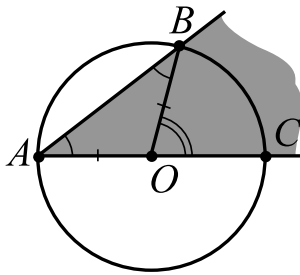


Рис. 58

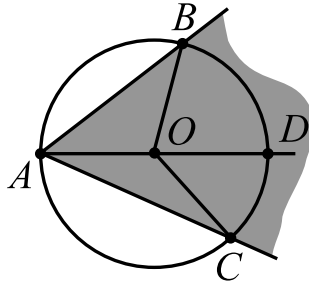


Рис. 59

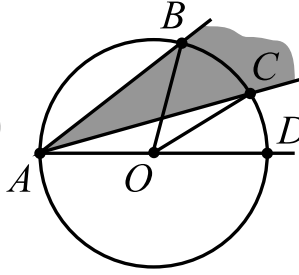


Рис. 60

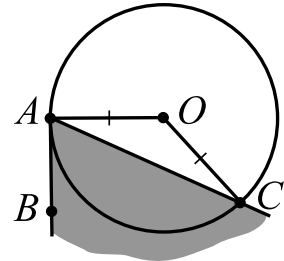


Рис. 61

Второй случай: точка O лежит внутри угла BAC . Проведем луч $[AO]$ (рис. 59) и воспользуемся предыдущим результатом:

$$\widehat{BOC} = \widehat{BOD} + \widehat{COD} = 2\widehat{BAD} + 2\widehat{DAC} = 2\widehat{BAC}.$$

Третий случай: точка O находится вне $\angle BAC$ (рис. 60). Дважды применяем результат первого случая:

$$\widehat{BOD} = \widehat{BOC} + \widehat{COD} = 2\widehat{BAD} = 2(\widehat{BAC} + \widehat{CAD}), \quad \widehat{COD} = 2\widehat{CAD}.$$

Откуда $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$.

Четвертый случай: одна из сторон угла касается окружности (рис. 61). Тогда, учитывая равнобедренность треугольника AOC , из равенств $\widehat{AOC} = 180^\circ - 2\widehat{OAC}$ и $\widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{OAC}$ получаем требуемое $\widehat{AOC} = 2\widehat{BAC}$. ■

Из этой теоремы можно вывести несколько следствий.

Следствие 1. 1) величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую опирается этот угол.

2) величины вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу (или на равные дуги), равны между собой.

Доказательство. 1) является переформулировкой предыдущей теоремы.

2) следует из (1). ■



Следствие 2. Пусть окружность ω описана около $\triangle ABC$ и точки D и C лежат по одну сторону от (AB) . Тогда $D \in \omega \Leftrightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если $D \in \omega$ и $D \in \overset{\circ}{\alpha}((AB), C)$, то вписанные углы $\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на одну дугу, откуда $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$.

$\Leftarrow$) пусть теперь $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. О/п: $D \notin \omega$. Рассмотрим три случая.

Первый случай: D расположена внутри ω (рис. 62). Пусть выполняется $\{E\} =]BD) \cap \omega$, тогда $\angle ADB$ — внешний угол для $\triangle ADE$, откуда следует неравенство $\widehat{ADB} > \widehat{AED} = \widehat{ACB}$. $\nearrow \nwarrow$.

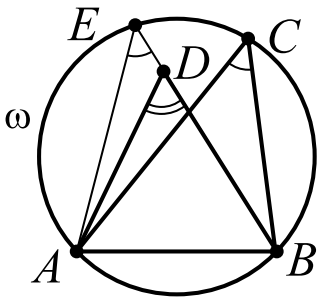


Рис. 62

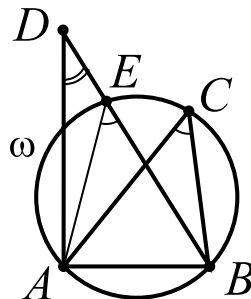


Рис. 63

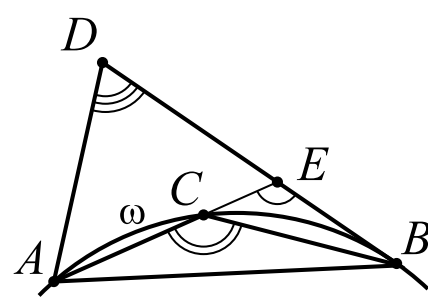


Рис. 64

Второй случай: точка D расположена вне ω и хотя бы один из интервалов — $]AD[$ или $]BD[$ — пересекает ω (рис. 63). Б.о.о. $E \in]BD[\cap \omega$, тогда $\angle BEA$ — внешний угол $\triangle ADE$, откуда $\widehat{ACB} = \widehat{AEB} > \widehat{ADB}$. $\nearrow \nwarrow$.

Третий случай: D расположена вне ω и ни один из интервалов — $]AD[$ и $]BD[$ — не пересекает ω (рис. 64). Пусть $\{E\} = (AC) \cap [BD]$, тогда $\angle ACB$ — внешний угол $\triangle CBE$, и $\angle CEB$ — внешний угол $\triangle ADE$, откуда $\widehat{ACB} > \widehat{AEB} > \widehat{ADB}$. $\nearrow \nwarrow$.

В предыдущем следствии для произвольной точки $D \in \overset{\circ}{\alpha}((AB), C)$, лежащей внутри ω , нам удалось доказать $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$; если же точка D лежит вне ω , то справедливо неравенство $\widehat{ADB} < \widehat{ACB}$.

Всякий ли четырехугольник можно вписать в окружность? Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Следствие 3. Четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в окружность в том и только в том случае, когда сумма величин его противоположных углов равна 180° .

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $ABCD$ вписан в окружность (рис. 65). Тогда $\angle BAD$ и $\angle BCD$ опираются на дуги, объединение которых есть вся



окружность, поэтому $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ/2 = 180^\circ$. Аналогично доказывается и второе равенство $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

$\Leftrightarrow$) пусть теперь $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. На окружности ω , описанной около треугольника $\triangle ABD$ выберем точку C_1 так, чтобы она с точкой C лежала по одну сторону от (BD) (рис. 66). По уже доказанной части утверждения и по условию выполнено равенство

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ = \widehat{BAD} + \widehat{BC_1D}.$$

Откуда $\widehat{BCD} = \widehat{BC_1D}$, и по предыдущему следствию получим $C \in \omega$ — окружности, описанной около $\triangle BC_1D$.

■

Определение. Геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ) называется фигура Φ , состоящая из всех точек, удовлетворяющих некоторому свойству $\mathcal{P}$ (т.е. $\Phi = \{A : \mathcal{P}(A)\}$).

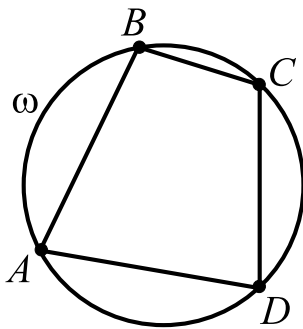


Рис. 65

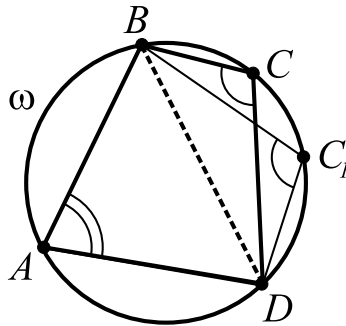


Рис. 66

Решение задачи на ГМТ обычно сводится к тому, что по данному геометрическому свойству $\mathcal{P}$ нам необходимо найти конкретную геометрическую фигуру Φ (например, отрезок или дугу окружности), для которой должны выполняться два условия: а) все точки фигуры Φ удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$; б) все точки плоскости

свойству $\mathcal{P}$, принадлежат фигуре Φ . Вместо условия (б) в некоторых задачах проще проверять условие (б*) — все точки плоскости, не лежащие в фигуре Φ , не удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$. Именно свойство (б*) проверялось во втором следствии.

Если в задаче на ГМТ сформулированы сразу два геометрических свойства — $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, для которых уже найдены фигуры $\Phi_1 = \{A : \mathcal{P}_1(A)\}$ и $\Phi_2 = \{A : \mathcal{P}_2(A)\}$, то ГМТ, одновременно удовлетворяющих и $\mathcal{P}_1$, и $\mathcal{P}_2$, является пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 (т.е. искомая фигура $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$). Поэтому для решения сложных задач на определение ГМТ важно знать следующие простые, но очень важные частные случаи.

ГМТ1. ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка AB ($A \neq B$), является серединный перпендикуляр к этому отрезку.



Проверка выполнения условий (а) и (б) для серединного перпендикуляра к $[AB]$ сделана в доказательстве первого утверждения теоремы 9.1.

ГМТ2. ГМТ, удаленных от данной точки O на расстояние $r > 0$, является окружностью радиуса r с центром в точке O .

Доказательство в данном случае очевидно, поскольку свойство $\mathcal{P}$ является определением окружности.

В пятом параграфе (теорема 5.1 и следствие 3 на стр. 31) было доказано, что для любой прямой $a \subseteq \alpha$ и точки $B \in \alpha$ найдется единственная такая прямая $b \subseteq \alpha$, что $b \perp a$. Точку B' , для которой $\{B'\} = a \cap b$, будем называть *проекцией точки B на прямую a* и обозначать через $\text{Пр}_a(B)$. Расстоянием от точки B до прямой a называют число $d(B, a) = |BB'|$, где $B' = \text{Пр}_a(B)$. Пусть $[CD) \subseteq a$, тогда расстоянием от точки B до луча $[CD)$ называют число $d(B, [CD))$, равное $|BB'|$, если $B' \in [CD)$; и число $|BC|$ в случае, если $B' \in a \setminus [CD)$. Нетрудно заметить, что если $B \neq C$ и $d(B, [CD)) = |BC|$, то $\angle BCD$ не меньше прямого.

ГМТ3. ГМТ, принадлежащих обычному углу $\angle BAC$ и равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.

Как и в случае ГМТ1, выполнение условий (а) и (б) для биссектрисы угла $\angle BAC$ легко сводится к одному из критериев равенства треугольников. Утверждение ГМТ3 останется верным в случае вырожденного и развернутого углов, а для тупого угла множество равноудаленных от его сторон точек составляет угол (на рис. 67 — это $\angle DAL$, выделенный более темным цветом).

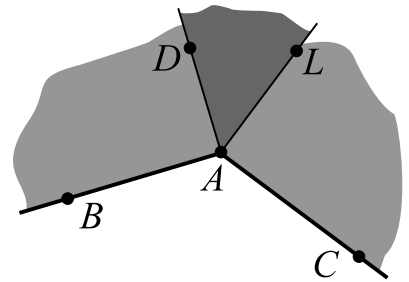


Рис. 67

ГМТ4. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых (AB) и (AC) , является парой взаимно перпендикулярных прямых, которые содержат биссектрисы углов, образованных прямыми (AB) и (AC) .

Последнее утверждение легко следует из ГМТ3 и перпендикулярности биссектрис смежных углов (третье утверждение следствия 2 на стр. 45). Если $a \parallel b$, то множество равноудаленных от них точек составляет прямую $c \parallel a$, проходящую через середину отрезка $[AB]$, где $A \in a$ и $B \in b$.

Договоримся величины углов обозначать греческими буквами φ , ψ , χ . Окружность $\omega(O, r)$ построена на отрезке $[AB]$ как на диаметре, если точка O является серединой $[AB]$ и $r = |AB|/2$.



Определение. Пусть $A \neq B$ и $C \notin (AB)$. Отрезок $[AB]$ виден из точки C под углом φ ($0^\circ < \varphi < 180^\circ$), если $\widehat{ACB} = \varphi$.

ГМТ5. ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под углом 90° , является окружностью ω , построенной на этом отрезке как на диаметре, из которой исключены точки A и B (рис. 68).

Действительно, если $C \in \omega$, то по предыдущей теореме получаем, что $\widehat{ACB} = \widehat{AOB}/2 = 90^\circ$, поэтому (а) выполняется. При доказательстве (б*) воспользуемся вторым следствием: для любой точки C внутри ω получим $\widehat{ACB} > 90^\circ$ (рис. 69), а для любой точки вне ω справедливо неравенство $\widehat{ACB} < 90^\circ$ (рис. 70).

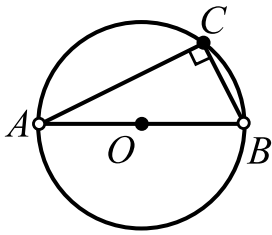


Рис. 68

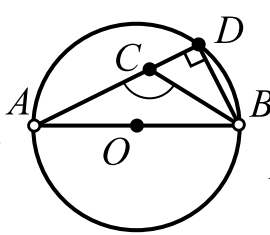


Рис. 69

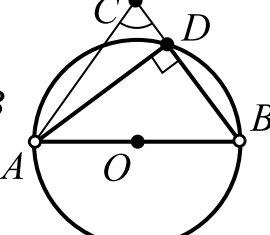


Рис. 70

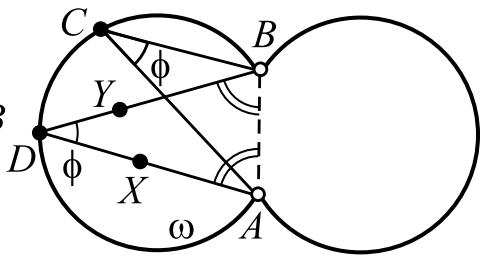


Рис. 71

Применение ГМТ5 к прямоугольным треугольникам дает известное свойство: центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой его гипотенузы.

ГМТ5 является частным случаем следующего важного ГМТ, которое в математическом фольклоре называют «ушами Чебурашки».

ГМТ6. ГМТ, из которых отрезок $[AB]$ виден под данным углом φ ($0^\circ < \varphi < 180^\circ$), является объединением двух равных дуг (рис. 71) с общей хордой AB , причем точки A и B из дуг исключены.

Сначала построим хотя бы одну точку, из которой отрезок $[AB]$ виден под углом φ . По данному углу величины φ легко построить углы величины $\varphi/2$ и $90^\circ - (\varphi/2)$. Затем выбираем одну из полуплоскостей с границей (AB) и откладываем в этой полуплоскости два острых угла $\angle XAB$ и $\angle YBA$ величины $90^\circ - (\varphi/2)$. Пусть $\{D\} = [AX] \cap [BY]$, тогда $\widehat{ADB} = \varphi$. Теперь опишем около $\triangle ADB$ окружность ω и применим второе следствие: для точек открытой полуплоскости $\overset{\circ}{\alpha}((AB), D)$ условие $\widehat{ACB} = \varphi$ равносильно $C \in \omega$. Проделав аналогичные построения и рассуждения с другой открытой полуплоскостью с границей (AB) , получим вторую часть искомого ГМТ.

Позже мы рассмотрим еще два важных ГМТ — радикальную ось двух окружностей и окружность Аполлония.



Отрезок $[AB]$ называется *хордой* окружности ω , если $A, B \in \omega$. Следующее утверждение называется *теоремой о хордах*.

Теорема 9.3. Пусть хорды $[AB]$ и $[CD]$ пересекаются в точке M , тогда $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$.

Доказательство. Сразу заметим, что если $M \in \omega$, то требуемое равенство превращается в $0 = 0$, поэтому далее считаем, что $\{M\} =]AB[\cap]CD[$ (рис. 72). Из первого следствия получаем равенство углов $\angle A = \angle D$ и $\angle C = \angle B$, что по 2КПТ дает $\triangle AMC \sim \triangle DMB$. Откуда $|AM| : |DM| = |MC| : |MB|$ или $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$. ■

Несложно обратить утверждение предыдущей теоремы: если выполняется $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$, то найдется окружность ω , проходящая через точки A, B, C и D . Случай, когда M совпадает с одним из концов отрезков $[AB]$ или $[CD]$ очевиден, поскольку достаточно описать окружность около треугольника. Поэтому далее считаем, что $\{M\} =]AB[\cap]CD[$. Предположив противное, опишем окружность ω около треугольника ABC (рис. 73) и обозначим $\{D_1\} = \omega \cap [MD]$. По предыдущей теореме получим $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD_1|$. С учетом равенства $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$ имеем $|MD| = |MD_1|$ и $[MD] = [MD_1]$. Применяя к лучу $[MD)$ аксиому о единственности откладывания отрезка, получим $D = D_1$. $\bowtie$.

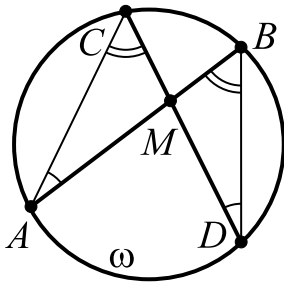


Рис. 72

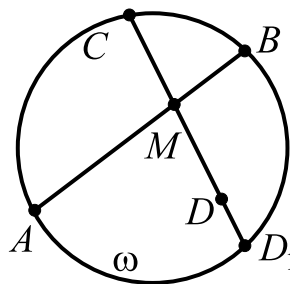


Рис. 73

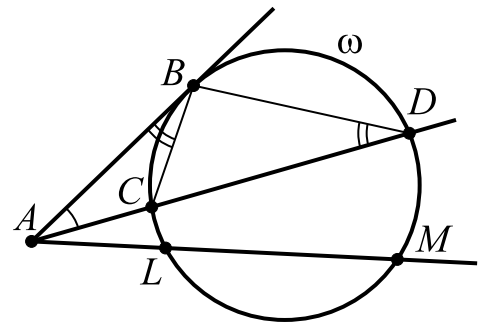


Рис. 74

Прямая, пересекающая окружность ω в двух различных точках, называется *секущей* для ω . Следующее утверждение называется *теоремой о касательной и секущей*.

Теорема 9.4. Пусть точка A расположена вне окружности ω , через эту точку проведена касательная (AB) (B — точка касания) и секущая (AD) ($\omega \cap (AD) = \{C, D\}$). Тогда $|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$.

Доказательство. Б.о.о. будем считать, что $C \in]AD[$ (рис. 74). Заметим, что $\angle ABC$ и $\angle ADB$ вписаны в окружность и опираются на одну дугу



$\widehat{BC}$. Применяя первое следствие, получим $\angle ABC = \angle ADB$ и по 2КПТ выполняется $\triangle ABC \sim \triangle ADB$. Откуда $|AB| : |AD| = |AC| : |AB|$ или $|AB|^2 = |AC| \cdot |AD|$.

■

Следствие. Пусть точка A расположена вне окружности ω , через эту точку проведены две секущие (рис. 74): (AD) ($\omega \cap (AD) = \{C, D\}$) и (AM) ($\omega \cap (AM) = \{L, M\}$). Тогда $|AC| \cdot |AD| = |AL| \cdot |AM|$.

Доказательство. По предыдущей теореме сразу получаем

$$|AC| \cdot |AD| = |AB|^2 = |AL| \cdot |AM|.$$

■

Утверждение из последнего следствия можно обратить: если выполняется равенство $|AC| \cdot |AD| = |AL| \cdot |AM|$, то найдется окружность ω , проходящая через точки C , D , L и M . Аналогично замечанию, сделанному после теоремы о хордах, это утверждение легко доказывается от противного.

Определение. Окружность $\omega = \omega(O, r)$, касающаяся всех сторон $\triangle ABC$, называется вписанной в $\triangle ABC$. Окружность, которая касается только одной стороны $\triangle ABC$ и продолжений двух других его сторон, называется *внеписанной окружностью* для $\triangle ABC$.

Внеписанная окружность для $\triangle ABC$, которая касается стороны $[BC]$, обозначается $\omega_A = \omega(O_A, r_A)$. *Периметром* треугольника ABC называется число $P_{\triangle ABC} = |AB| + |BC| + |CA|$. Число $p_{\triangle ABC} = p = P_{\triangle ABC}/2$ называется *полупериметром* треугольника ABC .

Теорема 9.5. Пусть p — полупериметр треугольника ABC . Выполняются следующие утверждения.

1) существует единственная окружность $\omega = \omega(O, r)$, вписанная в $\triangle ABC$. Точка O — это пересечение биссектрис углов $\triangle ABC$.

2) существуют три внеписанные окружности для $\triangle ABC$. Центр каждой из них лежит на биссектрисе одного из углов $\triangle ABC$ и биссектрисах двух внешних углов $\triangle ABC$.

3) пусть K — точка касания ω со стороной $[AB]$, M — со стороной $[AC]$ тогда $|AK| = p - |BC|$, $|BK| = p - |AC|$, $|CM| = p - |AB|$.

4) пусть N — точка касания $\omega_A = \omega(O_A, r_A)$ с лучом $[AB)$, тогда $|AN| = p$.

5) выполняется равенство $pr = r_A(p - |BC|)$.



б) выполняется равенство $rr_A = (p - |AB|)(p - |AC|)$.

Доказательство. 1) пусть O — точка пересечения биссектрис углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$ (рис. 75). По ГМТЗ точка O равноудалена от всех трех сторон $\triangle ABC$, поэтому лежит также на биссектрисе угла $\angle ACB$ и окружность $\omega = \omega(O, r)$, где $r = |OK|$ ($K = \text{Пр}_{(AB)}(O)$), касается всех трех сторон $\triangle ABC$. Если бы существовала еще одна вписанная окружность $\omega' = \omega(O', r')$, то по ГМТЗ точка O' должна лежать на биссектрисах углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$, поэтому совпадать с O . Кроме того, для радиуса окружности ω' должны выполняться следующие равенства: $r' = d(O', (AB)) = d(O, (AB)) = |OK| = r$. Откуда $\omega' = \omega$.

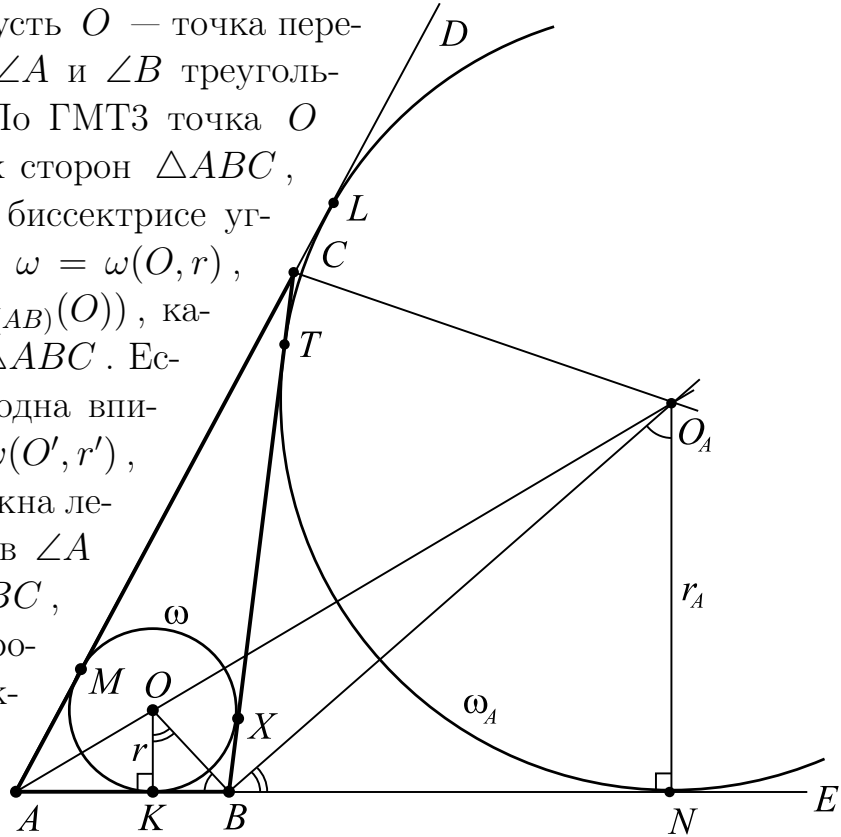


Рис. 75

2) пусть лучи $[CD)$ и $[CA)$ — противоположные, а также $[BE)$ и $[BA)$ — противоположные. Проведем биссектрисы двух внешних углов треугольника ABC : $\angle CBE$ и $\angle BCD$. Обозначим точку пересечения этих биссектрис через O_A , тогда по ГМТЗ точка O_A равноудалена от $[CD)$, $[BC]$ и $[BE)$. Поэтому (снова по ГМТЗ) точка O_A лежит на биссектрисе $\angle A$ и окружность $\omega_A = \omega(O_A, r_A)$ ($r_A = |O_A N|$, $N = \text{Пр}_{(AB)}(O_A)$) касается $[CD)$, $[BC]$, $[BE)$ и является искомой. Единственность внеписанной окружности, касающейся стороны $[BC]$, доказывается аналогично предыдущему пункту. Проводя похожие рассуждения для сторон $[AB]$ и $[AC]$, получим две другие внеписанные окружности $\triangle ABC$.

3) трижды воспользуемся равенством отрезков касательных (теорема 9.1, пункт 4): $2|AK| = |AK| + |AM| = (|AB| - |BK|) + (|AC| - |CM|) = (|AB| - |BX|) + (|AC| - |CX|) = |AB| + |AC| - (|BX| + |CX|) = |AB| + |AC| - |BC| = |AB| + |AC| + |BC| - 2|BC|$. Откуда $|AK| = p - |BC|$. Аналогично доказываются и два оставшихся равенства.



4) и снова три раза воспользуемся равенством отрезков касательных: $2|AN| = |AN| + |AL| = (|AB| + |BN|) + (|AC| + |CL|) = (|AB| + |BT|) + (|AC| + |CT|) = |AB| + |AC| + |BC|$. Откуда $|AN| = p$.

5) заметим, что по 2КПТ выполняется $\triangle AKO \sim \triangle ANO_A$, поэтому $r_A : r = |AN| : |AK| = p : (p - |BC|)$. Откуда следует $pr = r_A(p - |BC|)$.

6) лучи $[BO)$ и $[BO_A)$ являются биссектрисами двух смежных углов, поэтому они перпендикулярны и в прямоугольных треугольниках $\triangle OKB$ и $\triangle BNO_A$ выполняются равенства: $\widehat{KBO} = 90^\circ - \widehat{NBO_A} = \widehat{NO_AB}$ и $\widehat{NBO_A} = \widehat{BOK}$. По 2КПТ получим, что $\triangle OKB \sim \triangle BNO_A$, откуда $r : |BN| = |BK| : r_A$ или $rr_A = |BK| \cdot |BN|$. Осталось заметить, что $|BK| = p - |AC|$ и $|BN| = |AN| - |AB| = p - |AB|$.

■

1.10. Функция площади. Теоремы синусов и косинусов

Сначала обсудим понятия синуса и косинуса. Пусть $a, b \subseteq \alpha$, $a \perp b$ и $\{O\} = a \cap b$ (рис. 76). Выберем точку $X \in a$ так, чтобы $X \neq O$ и введем на прямой a порядок $\leq$ с помощью луча $[OX)$ (см. стр. 22). Прямая a , с введенным на ней порядком, называется *осью*. Будем называть $(a, \leq_{[OX)})$ *первой координатной осью* или *осью абсцисс* и обозначим ее через Ox . Аналогично упорядочим прямую b , ось $(b, \leq_{[OY)})$ называется *второй координатной осью* или *осью ординат* и обозначается через Oy . Договоримся опускать индекс у порядка, поскольку из контекста будет ясно, какой из порядков рассматривается. Точка O называется *началом координат*. Для произвольной точки M найдем ее проекции на координатные оси: $K = \text{Пр}_a(M)$ и $L = \text{Пр}_b(M)$. *Первой координатой* или *абсциссой*¹² точки M называется число x , равное $|OK|$, при $O \leq K$ и $x = -|OK|$, если $K \leq O$. Аналогично определяется число y — *вторая координата* или *ордината* точки M . Упорядоченная пара координат (x, y) записывается после точки, не отделяясь от нее знаком равенства: $M(x, y)$. Система координат, введенная таким образом, называется *прямоугольной* или *декартовой*¹³. Для M на рис. 76

¹²Названия абсцисса, ордината и аппликата для трех координат произошли от латинских слов *abscissa*, *ordinatus*, *applicata*, означающие «отрезанная», «упорядоченная» и «приложенная» соответственно. Первые термин «ордината» применил Г.В.Л. Лейбниц в 1694 году.

¹³Рене Декарт (1596–1650) — французский математик, физик, физиолог; был на военной службе, много путешествовал; в главном математическом труде «Геометрия» Декарт заложил основы аналитической геометрии, считая, что единственным методом математики является алгебра; разработал теорию алгебраических уравнений; утверждал, что опыт играет подчиненную роль по отношению к рационалистической



первая координата отрицательна, а вторая — больше нуля.

Тригонометрической окружностью называется окружность $\omega_1 = \omega(O, 1)$. Через P_0 обозначим точку с координатами $(1, 0)$ а через P_φ — такую точку ω_1 , что $\widehat{P_0OP_\varphi} = \varphi$ (рис. 77). Первая координата точки P_φ называется *косинусом* φ и обозначается $\cos \varphi$, а ее вторая координата — *синусом* φ и обозначается $\sin \varphi$.

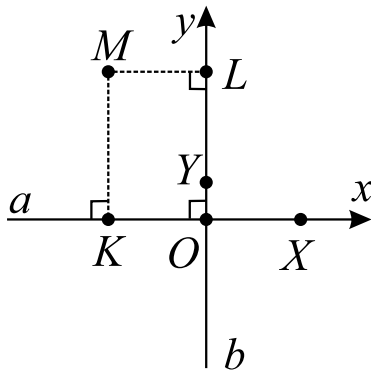


Рис. 76

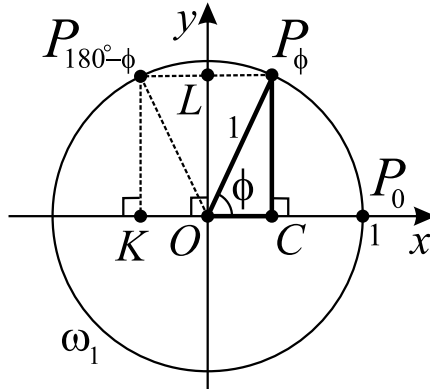


Рис. 77

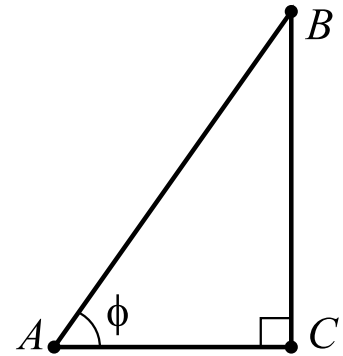


Рис. 78

Замечание. Пусть $\varphi \in (0^\circ; 180^\circ)$, $\varphi \neq 90^\circ$, $C = \text{Пр}_a(P_\varphi)$ и $K = \text{Пр}_a(P_{180^\circ-\varphi})$. Тогда по 2КРТ выполняется $\triangle OP_\varphi C = \triangle OP_{180^\circ-\varphi} K$ (по гипотенузе и двум прилежащим углам). Учитывая, то P_φ и $P_{180^\circ-\varphi}$ лежат по разные стороны от оси Oy и $|OC| = |OK|$, получим $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$. Проекции этих точек на ось Oy совпадают, поэтому $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$. В алгебре, при изучении тригонометрии, ограничение $\varphi \in (0^\circ; 180^\circ)$ будет снято.

Существует еще геометрический подход в определении синуса и косинуса. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, в котором $\widehat{C} = 90^\circ$ и $\widehat{A} = \varphi$ (рис. 78). Синусом φ называется $\sin \varphi = |BC|/|AB|$ (отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы). Косинусом φ называется $\cos \varphi = |AC|/|AB|$ (отношение длины прилежащего катета к длине гипотенузы). Сразу заметим, что «геометрическое» определение дает значение синуса и косинуса только для $\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$, в то время как «тригонометрическое» — для $\varphi \in [0^\circ; 360^\circ]$. Хотелось бы надеяться, что для острых углов оба определения приводят к одним и тем же числовым значениям. Действительно, рассмотрим прямоугольный треугольник $OP_\varphi C$ на рис. 77, считая, что $\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$. Тогда «геометрическое» определение дает $\sin \varphi = |P_\varphi C|/|OP_\varphi| = |P_\varphi C|/1 = |P_\varphi C|$ — это число равно ординате точки



P_φ , что совпадает с «тригонометрическим» определением синуса. Аналогично проверяется, что для одинаковых острых углов оба определения косинуса дают одно и то же значение.

Следующее утверждение называется *теоремой синусов*.

Теорема 10.1. Пусть окружность $\omega = \omega(O, R)$ описана около треугольника ABC . Тогда справедливы равенства

$$\frac{|AB|}{\sin \widehat{C}} = \frac{|AC|}{\sin \widehat{B}} = \frac{|BC|}{\sin \widehat{A}} = 2R.$$

Доказательство. В окружности $\omega = \omega(O, R)$ проведем диаметр $[AD]$, тогда по ГМТ5 выполняется $\widehat{ABD} = 90^\circ$ и из прямоугольного треугольника $\triangle ABD$ сразу находим, что $\sin \widehat{D} = |AB|/|AD| = |AB|/(2R)$. Теперь рассмотрим два случая.

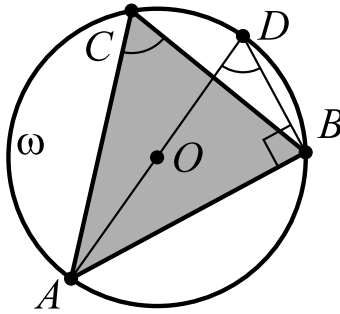


Рис. 79

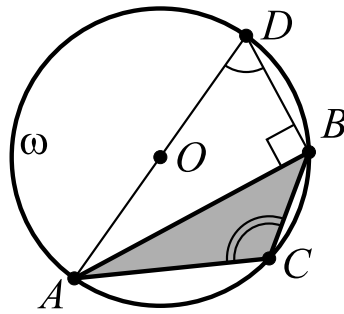


Рис. 80

1-й случай: точки C и D расположены по одну сторону от (AB) (рис. 79). Тогда по второму следствию теоремы 9.2 получим $\angle C = \angle D$, откуда $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{D} = \frac{|AB|}{2R}$ или $2R = |AB|/\sin \widehat{C}$.

2-й случай: точки C и D расположены по разные стороны от (AB) (рис. 80). То

гда по третьему следствию теоремы 9.2 получим $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{D}$, откуда (см. замечание выше) $\sin \widehat{C} = \sin \widehat{D} = |AB|/(2R)$ или $2R = |AB|/\sin \widehat{C}$.

Равенства $\frac{|AC|}{\sin \widehat{B}} = 2R$ и $\frac{|BC|}{\sin \widehat{A}} = 2R$ доказываются аналогично. ■

Движением α называется такое отображение¹⁴ $f : \alpha \rightarrow \alpha$ плоскости α на себя, что для любой пары точек $A, B \in \alpha$ выполняется равенство $[AB] = [f(A)f(B)]$. По свойству функции длины, последнее равенство равносильно $|f(A)f(B)| = |AB|$. Таким образом, движение α — это отображение плоскости на себя, при котором сохраняется расстояние между точками (или длина отрезков). Множество всех движений плоскости α обозначается

¹⁴Отображением множества X во множество Y называется правило $f : X \rightarrow Y$, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y = f(x) \in Y$. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется отображением «на», если для любого элемента $y \in Y$ найдется хотя бы один элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$.



через D_α или D_2 и будет подробно изучено в следующей главе. Отметим только, что центральная симметрия (Z_O) и осевая симметрия относительно прямой a (S_a) являются примерами движений. Пусть $O \in \alpha$, тогда для любой точки $A \in \alpha$ ее образ $A' = Z_O(A)$ определяется так: точка O должна быть серединой отрезка $[AA']$. Пусть $a \subseteq \alpha$, тогда для любой точки $A \in \alpha$ ее образ $A' = S_a(A)$ определяется следующим образом: прямая a должна быть серединным перпендикуляром для отрезка $[AA']$. Легко проверить, что $Z_O, S_a \in D_2$. Фигуры¹⁵ Φ_1, Φ_2 называются *равными* (или конгруэнтными), если существует такое $f \in D_2$, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$.

Определение. Пусть $A \in \alpha$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, тогда ε -окрестностью точки A называется множество $O_\varepsilon(A) = \{B \in \alpha : |AB| < \varepsilon\}$.

Точка $A \in \Phi$ называется *внутренней* точкой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$, если существует такая $O_\varepsilon(A)$, что $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$. Фигура, состоящая из одних только внутренних точек, называется *открытым* множеством. Примерами открытых множеств в плоскости α являются: $O_\varepsilon(A)$, $\emptyset$, α , $\overset{\circ}{\alpha}(a, B)$. При проверке открытости последнего множества для произвольной точки $A \in \overset{\circ}{\alpha}(a, B)$ в качестве ε можно выбрать, например, $d(A, a)/2$, тогда $O_\varepsilon(A) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}(a, B)$.

Точка $A \in \alpha$ называется *граничной* точкой фигуры $\Phi \subseteq \alpha$, если для **любой** $O_\varepsilon(A)$ одновременно выполняются два соотношения: $O_\varepsilon(A) \cap \Phi \neq \emptyset$ и $O_\varepsilon(A) \cap (\alpha \setminus \Phi) \neq \emptyset$. Фигура, содержащая все свои граничные точки, называется *замкнутым* множеством. Примерами замкнутых множеств в плоскости α являются: $\{A\}$, $[AB]$, $[AB)$, $\emptyset$, α , $\alpha(a, B)$.

Напомним, что n -угольником называется простая замкнутая ломаная из n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) звеньев вместе с ее внутренней областью, поэтому уточним понятие треугольника: пусть $A, B, C \in \alpha$, $C \notin (AB)$, тогда $\triangle ABC = \alpha((AB), C) \cap \alpha((AC), B) \cap \alpha((BC), A)$. Ломаная $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$ содержит все граничные точки $\triangle ABC$ и целиком содержится в $\triangle ABC$, поэтому любой треугольник является замкнутым множеством. *Многоугольной* *фигурой* Γ называется любое подмножество плоскости, которое можно предста-

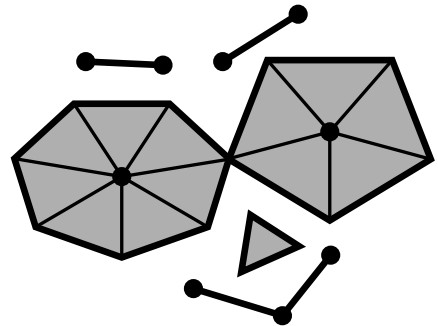


Рис. 81

вить в виде конечного объединения треугольников и (возможно) конечного числа отрезков, не имеющих общих внутренних точек. По индукции несложно доказать, что любой n -угольник является многоугольной фигурой. Обратное

¹⁵Фигурой в плоскости α называется произвольное ее подмножество.



неверно — на рис. 81 приведен пример несвязной многоугольной фигуры. Через $\mathcal{M}$ будем обозначать множество всех многоугольных фигур.

Почти всем известно, что *прямоугольник* — это параллелограмм, у которого все углы прямые, *ромб* — четырехугольник с одинаковыми сторонами, а *квадрат* — это прямоугольник, у которого все стороны равны между собой. Квадрат $A_0B_0C_0D_0$ называется *единичным*, если $|A_0B_0| = 1$.

Определение. Площадью на множестве многоугольных фигур называется функция $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

- 1) для любой фигуры $\Gamma \in \mathcal{M} \Rightarrow s(\Gamma) \geq 0$;
- 2) для любых двух фигур $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{M}$ без общих внутренних точек выполняется $s(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ (свойство аддитивности);
- 3) для любых $\Gamma \in \mathcal{M}$ и $f \in D_2 \Rightarrow s(\Gamma) = s(f(\Gamma))$;
- 4) если $A_0B_0C_0D_0$ — единичный квадрат, то $s(A_0B_0C_0D_0) = 1$ (нормировка).

Замечание. В одиннадцатом классе будет доказано, что существует единственная функция s со свойствами 1–4, а также то, что площадь любого прямоугольника равна произведению длин двух его смежных сторон.

Определение. Фигуры $\Gamma, \Gamma^* \in \mathcal{M}$ называются:

- а) *равновеликими*, если $s(\Gamma) = s(\Gamma^*)$;
- б) *равносоставленными*, если их так можно представить в виде объединений многоугольных фигур $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ и $\Gamma^* = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i^*$, что Γ_i и Γ_i^* равны друг другу (т.е. переводятся друг в друга некоторым движением) при всех $i \in \{1, \dots, n\}$; кроме того, Γ_i и Γ_j между собой и Γ_i^* и Γ_j^* друг с другом не имеют общих внутренних точек при всех различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$;
- в) *равнодополняемыми*, если найдутся такие две равносоставленные фигуры $\Gamma, \Gamma_1 \in \mathcal{M}$, что фигуры $\Gamma \cup \Gamma_1$ и $\Gamma^* \cup \Gamma_1^*$ равны друг другу, при этом Γ и Γ_1 между собой и Γ^* и Γ_1^* друг с другом не имеют общих внутренних точек.

Следствие. 1) если $\Gamma, \Gamma^* \in \mathcal{M}$ равносоставлены, то они равновелики.

2) если $\Gamma, \Gamma^* \in \mathcal{M}$ равнодополняемы, то они равновелики.

Доказательство. 1) последовательно используем свойства (2), (3) и снова (2) из определения функции площади:

$$s(\Gamma) = s\left(\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i\right) = \sum_{i=1}^n s(\Gamma_i) = \sum_{i=1}^n s(\Gamma_i^*) = s\left(\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i^*\right) = s(\Gamma^*).$$



2) опять используем связку свойств (2), (3) и снова (2) из определения функции площади:

$$s(\Gamma) + s(\Gamma_1) = s(\Gamma \cup \Gamma_1) = s(\Gamma^* \cup \Gamma_1^*) = s(\Gamma^*) + s(\Gamma_1^*).$$

Учитывая равенство $s(\Gamma_1) = s(\Gamma_1^*)$, получим $s(\Gamma) = s(\Gamma^*)$.



Задача.** Верно ли, что в классе многоугольных фигур свойства (а), (б) и (в) из последнего определения эквивалентны?

Теорема 10.2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм и $[BH]$ — его высота, опущенная на (AD) (т.е. $H = \text{Пр}_{(AD)}(B)$). Тогда

- 1) $s(ABCD) = |AD| \cdot |BH|$.
- 2) $s(ABCD) = |AD| \cdot |AB| \cdot \sin \widehat{BAD}$.

Доказательство. 1) «классический» вариант доказательства использует идею равносоставленности. Опустим высоты $[BH]$ и $[CH_1]$ на прямую (AD) (рис. 82) и заметим, что по 2КРТ выполняется $\triangle ABH = \triangle DCH_1$ (также $\triangle DCH_1$ получается из $\triangle ABH$ движением — параллельным переносом на $\overrightarrow{AD}$). Используя (1) из предыдущего следствия, получим

$$\begin{aligned} s(ABCD) &= s(\triangle ABH) + s(BHDC) = s(\triangle DCH_1) + s(BHDC) = \\ &= s(BHH_1C) = |BC| \cdot |BH| = |AD| \cdot |BH|. \end{aligned}$$

В таком способе доказательства обнаруживается проблема: в случае, когда $H \in ([AD] \setminus [AD])$ (рис. 83) трудно установить равносоставленность параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника BHH_1C , поэтому воспользуемся равнодополняемостью этих двух четырехугольников. С помощью $\triangle DCH_1$ параллелограмм $ABCD$ дополняется до $ABCH_1$, до этой же фигуры дополняется прямоугольник BHH_1C с помощью $\triangle ABH$. Учитывая равенство $\triangle ABH = \triangle DCH_1$, по (2) из предыдущего следствия получим, что $s(ABCD) = s(BHH_1C) = |AD| \cdot |BH|$.

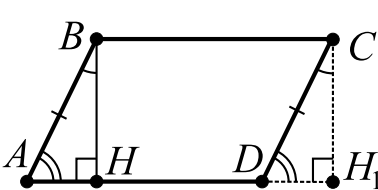


Рис. 82

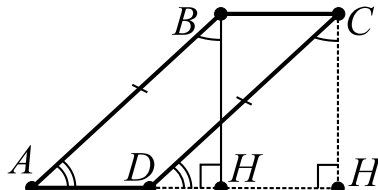


Рис. 83

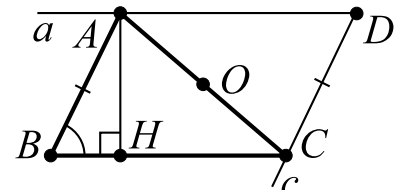


Рис. 84



2) из треугольника $\triangle ABH$ выражаем $|BH| = |AB| \cdot \sin \widehat{BAD}$, если $\angle BAD$ — острый; или $|BH| = |AB| \cdot \sin(180^\circ - \widehat{BAD}) = |AB| \cdot \sin \widehat{BAD}$, если $\angle BAD$ — тупой угол. Подставляя в (1), получим требуемый результат. ■

Следствие. Пусть $[AH]$ — высота треугольника $\triangle ABC$ (т.е. $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$). Тогда

$$1) s(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AH|.$$

$$2) s(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AB| \cdot \sin \widehat{ABC}.$$

Доказательство. 1) пусть $a \parallel (BC)$, $A \in a$ и $c \parallel (AB)$, $C \in c$, а также $\{D\} = a \cap c$ (рис. 84). Параллельность противоположных сторон дает, что $ABCD$ — параллелограмм, и по ЗКРТ получим $\triangle ABC = \triangle CDA$ (также выполняется $Z_O(\triangle ABC) = \triangle CDA$, где O — середина $[AC]$). Из предыдущей теоремы и аддитивности площади (поскольку $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$ не имеют общих внутренних точек), имеем

$$|BC| \cdot |AH| = s(ABCD) = s(\triangle ABC) + s(\triangle CDA) = 2 \cdot s(\triangle ABC).$$

Откуда получаем необходимую формулу.

2) из треугольника $\triangle ABH$ выражаем $|AH| = |AB| \cdot \sin \widehat{ABC}$, если $\angle ABC$ — острый; или $|AH| = |AB| \cdot \sin(180^\circ - \widehat{ABC}) = |AB| \cdot \sin \widehat{ABC}$, если $\angle ABC$ — тупой угол. Подставляя в (1), получим требуемый результат. ■

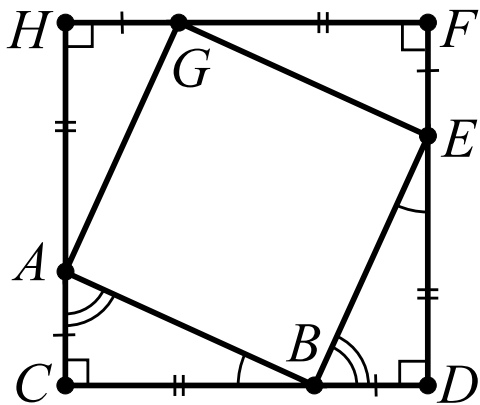


Рис. 85

Следующий результат — хорошо известная теорема Пифагора¹⁶.

Теорема 10.3. Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, $\widehat{C} = 90^\circ$. Тогда $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

Доказательство. На продолжении стороны $[BC]$ за точку B (т.е. на луче, противоположном $[BC]$) выберем точку D так, что $[BD] = [AC]$ и через D проведем перпендикуляр к (BC) (рис. 85), на этом перпендикуляре последовательно отложим $[DE] = [BC]$

и $[EF] = [AC]$. Проводя еще два перпендикуляра и отложив три отрезка,

¹⁶Пифагор(ок. 570 – ок 500 до н.э.) — древнегреческий математик и философ; ему приписывают введение доказательств в математику и построение геометрии как дедуктивной науки; основал пифагорейский союз — философское и религиозно-политическое общество; пифагорейцы открыли три правильных тела, установили четыре математические дисциплины: арифметику, геометрию, астрономию и музыку; пифагорейцы считали, что все закономерности мира можно выразить с помощью числа.



получим квадрат $CDFH$, состоящий из четырех одинаковых прямоугольных треугольников (переводящихся друг в друга центральной симметрией или поворотом на 90°) и ромба $ABEG$. Заметим, что

$$\widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{DBE} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{CAB}) = 90^\circ.$$

Таким образом, $ABEG$ — квадрат. Учитывая, что пять фигур на рис. 85 не имеют общих внутренних точек, из свойства аддитивности и сохранения площади при движении, получим

$$(|AC| + |BC|)^2 = s(CDFH) = |AB|^2 + 4 \cdot \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = |AB|^2 + 2 \cdot |AC| \cdot |BC|.$$

Откуда $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

■

Формула следующего утверждения называется *основным тригонометрическим тождеством*.

Следствие. Для любого угла величины φ справедливо $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Доказательство. Для прямоугольного треугольника OP_φ на рис. 77 применим теорему Пифагора:

$$1 = |OP_\varphi|^2 = |CP_\varphi|^2 + |OC|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi.$$

■

Следующее утверждение называется *теоремой косинусов*.

Теорема 10.4. В произвольном треугольнике ABC выполняется равенство $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{C}$.

Доказательство. Случай $\widehat{C} = 90^\circ$ сразу следует из теоремы Пифагора, поэтому далее считаем, что $\widehat{C} \neq 90^\circ$. Из двух оставшихся углов — $\angle A$ и $\angle B$ — по крайней мере один должен быть острым. Б.о.о. считаем, что $\angle A$ — острый.

Тогда точка $H = \text{Пр}_{(AC)}(B)$ может быть расположена на луче $[AC)$ двумя различными способами: $H \in]AC[$ или $H \in ([AC) \setminus [AC])$.

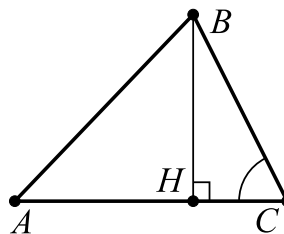


Рис. 86

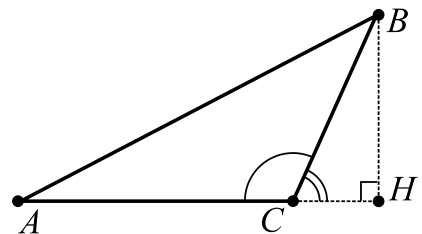


Рис. 87



1-й случай: $H \in]AC[$ (рис. 86). Тогда выполняется $|BH| = |BC| \cdot \sin \widehat{C}$ и $|AH| = |AC| - |CH| = |AC| - |BC| \cdot \cos \widehat{C}$. Осталось применить теорему Пифагора к $\triangle ABH$:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (|AC| - |BC| \cdot \cos \widehat{C})^2 + |BC|^2 \cdot \sin^2 \widehat{C} = \\ &= |AC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{C} + |BC|^2(\sin^2 \widehat{C} + \cos^2 \widehat{C}) = \\ &= |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{C}. \end{aligned}$$

2-й случай: $H \in ([AC] \setminus]AC[)$ (рис. 87). Тогда выполняются равенства: $|BH| = |BC| \cdot \sin(180^\circ - \widehat{C}) = |BC| \cdot \sin \widehat{C}$ и $|AH| = |AC| + |CH| = |AC| + |BC| \cdot \cos(180^\circ - \widehat{C}) = |AC| - |BC| \cdot \cos \widehat{C}$. Применение теоремы Пифагора к $\triangle ABH$ полностью повторяет первый случай. ■

С помощью теоремы косинусов можно усилить теорему Пифагора.

Следствие 1. Для треугольника ABC справедливо следующее утверждение: $\widehat{C} = 90^\circ \Leftrightarrow |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$.

Доказательство. $\Rightarrow$) следует из теоремы Пифагора.

$\Leftarrow$) два соотношения $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC| \cdot |BC| \cdot \cos \widehat{C}$ и $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ сразу дают, что $\cos \widehat{C} = 0$, т.е. $\widehat{C} = 90^\circ$ (так как в интервале углов $(0^\circ; 180^\circ)$ есть единственный угол с нулевым косинусом). ■

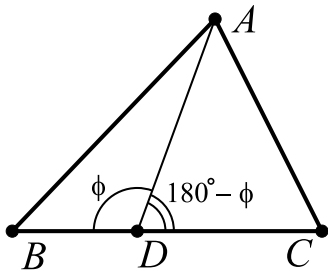


Рис. 88

Формулу следующего утверждения часто называют *формулой Стюарта*¹⁷.

Следствие 2. На стороне $[BC]$ треугольника ABC произвольно выбрана точка D . Тогда выполняется следующее соотношение

$$|AD|^2 = |AC|^2 \cdot \frac{|BD|}{|BC|} + |AB|^2 \cdot \frac{|CD|}{|BC|} - |BD| \cdot |CD|. \quad (*)$$

Доказательство. Случаи $D = B$ или $D = C$ превращают (*) в очевидное равенство, поэтому будем считать, что $D \in]BC[$ (рис. 88). Обозначим через $\varphi = \widehat{ADB}$ запишем теорему косинусов для треугольников ABD и ACD :

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2|AD| \cdot |BD| \cdot \cos \varphi \quad (1),$$

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD| \cdot |DC| \cdot \cos(180^\circ - \varphi) =$$

¹⁷Формула была опубликована английским математиком М. Стюартом в книге «Некоторые общие теоремы» (1746, Эдинбург). Формулу сообщил Стюарту его учитель, шотландский математик, доктор медицины Роберт Симсон (1687–1768), который опубликовал доказательство этой формулы лишь в 1749 г.



$$= |AD|^2 + |DC|^2 + 2|AD| \cdot |DC| \cdot \cos \varphi \quad (2).$$

Умножив первое уравнение на $|DC|$, сложим результат со вторым уравнением, умноженным на $|BD|$, и получим

$$\begin{aligned} |AB|^2 \cdot |DC| + |AC|^2 \cdot |BD| &= |AD|^2(|DC| + |BD|) + |BD| \cdot |DC|(|DC| + |BD|) = \\ &= |AD|^2 \cdot |BC| + |BD| \cdot |DC| \cdot |BC|. \end{aligned}$$

Осталось сократить на $|BC|$ обе части уравнения и выразить $|AD|^2$:

$$|AD|^2 = |AC|^2 \cdot \frac{|BD|}{|BC|} + |AB|^2 \cdot \frac{|CD|}{|BC|} - |BD| \cdot |CD|.$$

■

1.11. Площадь треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты треугольника

Площадь треугольника является его важной числовой характеристикой. Существует много формул для ее вычисления. В эти формулы входят разные элементы треугольника, поэтому площадь часто используют для выражения одних элементов треугольника через другие. Так, например, для нахождения радиусов вписанной, описанной или внеписанной окружностей треугольника часто сначала находят его площадь. Шестую формулу из следующего утверждения традиционно называют *формулой Герона*¹⁸.

Теорема 11.1. Пусть $\triangle ABC$ — произвольный треугольник, p — его полупериметр; r , R , r_A , r_B , r_C — радиусы (соответственно) вписанной, описанной и трех внеписанных окружностей; $h_A = |AH|$ — длина высоты (т.е. $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$). Тогда выполняются следующие формулы:

- 1) $s(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h_A$;
- 2) $s(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AB| \sin \widehat{ABC}$;
- 3) $s(\triangle ABC) = \frac{|BC| \cdot |AB| \cdot |AC|}{4R}$;

¹⁸Герон Александрийский (I в н.э.) — величайший инженер за всю историю человечества, первым изобрел автоматические двери, автоматический театр кукол, декорации, автомат для продаж, скорострельный арбалет, паровую турбину, первый начал создавать программируемые устройства; его правила земельной съемки фактически использовали прямоугольную систему координат; в книге «Метрика» привел формулы для вычисления площадей правильных многоугольников, объемов пирамиды, конуса, усеченного конуса, тора, шарового сегмента, правила численного решения квадратного уравнения, алгоритмы извлечения квадратных и кубических корней, формулу Герона (три столетия до него открытую Архимедом).



$$4) \quad s(\triangle ABC) = p \cdot r ;$$

$$5) \quad s(\triangle ABC) = r_A(p - |BC|) ;$$

$$6) \quad s(\triangle ABC) = \sqrt{p(p - |BC|)(p - |AC|)(p - |AB|)} ;$$

$$7) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} ;$$

$$8) \quad s(\triangle ABC) = \sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C} .$$

Доказательство. Формулы (1) и (2) выведены в следствии из теоремы 10.2.

3) из теоремы синусов имеем соотношение $\sin \widehat{ABC} = |AC|/(2R)$, подставляя которое в (2), получим (3).

4) докажем более общее утверждение: если в n -угольник $A_1 \dots A_n$ можно вписать окружность $\omega = \omega(O, r)$, то его площадь можно вычислить по формуле $s(A_1 \dots A_n) = p \cdot r$, где $p = (|A_1 A_2| + \dots + |A_{n-1} A_n| + |A_n A_1|)$ — его полупериметр (рис. 89). Соединим центр окружности с каждой вершиной $A_1 \dots A_n$ и получим n треугольников, в каждом из которых r — длина высоты, проведенной к стороне, которой касается ω . Используя n раз формулу (1) и аддитивность функции площади, получим

$$s(A_1 \dots A_n) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|A_1 A_2| + \dots + |A_{n-1} A_n| + |A_n A_1|) = r \cdot p.$$

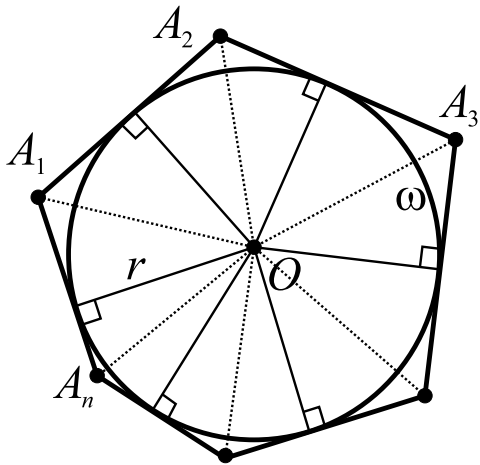


Рис. 89

5) в теореме 9.5 была доказана справедливость равенства $pr = r_A(p - |BC|)$, поэтому формула (5) следует из (4).

6) добавим к формулам $pr = r_A(p - |BC|)$, $rr_A = (p - |AB|)(p - |AC|)$ из теоремы 9.5 очевидное соотношение $p = p$, и перемножим соответственно левые и правые части этих формул:

$$p^2 r^2 \cdot r_A = r_A \cdot p(p - |BC|)(p - |AC|)(p - |AB|).$$

Из (4) получим $\left(s(\triangle ABC)\right)^2 = p^2 r^2 = p(p - |BC|)(p - |AC|)(p - |AB|)$, откуда

и следует формула Герона-Архимеда.

7) обозначим для краткости $S = s(\triangle ABC)$, тогда из (5) и (4) получим

$$\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{p - |BC|}{S} + \frac{p - |AC|}{S} + \frac{p - |AB|}{S} =$$



$$= \frac{3p - |BC| - |AC| - |AB|}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

8) снова пусть $S = s(\triangle ABC)$, тогда из (4), (5) и (6) имеем

$$\begin{aligned} r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C &= \frac{pr}{p} \cdot \frac{S}{p - |BC|} \cdot \frac{S}{p - |AC|} \cdot \frac{S}{p - |AB|} = \\ &= \frac{S^4}{p(p - |BC|)(p - |AC|)(p - |AB|)} = \frac{S^4}{S^2} = S^2, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемая формула. ■

Следствие 1. Если в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ длины высот $[AH]$ и $[A_1H_1]$ равны, то $s(\triangle ABC)/s(\triangle A_1B_1C_1) = |BC|/|B_1C_1|$.

Доказательство. Следует из формулы (1) предыдущей теоремы. ■

Следствие 2. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняется равенство $\sin \widehat{ABC} = \sin \widehat{A_1B_1C_1}$, то $\frac{s(\triangle ABC)}{s(\triangle A_1B_1C_1)} = \frac{|BC| \cdot |AB|}{|B_1C_1| \cdot |A_1B_1|}$.

Доказательство. Следует из формулы (2) предыдущей теоремы. ■

Определение. Отрезок, соединяющий вершину треугольника ABC с внутренней точкой противоположной стороны, называется чевианой¹⁹ треугольника ABC .

Лемма 11.2. Две чевианы, проведенные из разных вершин треугольника ABC , пересекаются.

Доказательство. Б.о.о. докажем, что чевианы $[AA_1]$ и $[BB_1]$ пересекаются (рис. 90). Пусть $a = (AA_1)$ и $b = (BB_1)$. Прямая a пересекает $]BC[$ в точке A_1 и не пересекает сторону B_1C треугольника BCB_1 (поскольку $A \notin [CB_1]$), поэтому из аксиомы Паша найдем такую точку M , что $\{M\} = a \cap [BB_1] \subseteq a \cap b$. Также применяя аксиму Паша, но уже для прямой b и треугольника ACA_1 , найдем точку L , для которой $\{L\} = b \cap [AA_1] \subseteq b \cap a$. Учитывая, что прямые a и b различны, пересечение

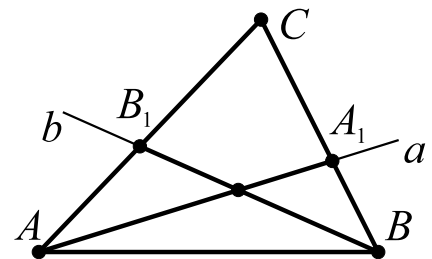


Рис. 90

¹⁹ Джованни Чева (1648–1734) — итальянский математик; основные работы относятся к геометрии, механике, гидравлике; в своем основном труде «О прямых линиях» (1678) использовал свойства центра масс системы точек; работал правительственным комиссаром Мантуанского герцогства.



$a \cap b$ может состоять только из одной точки, откуда $L = M$ — общая точка $[AA_1]$ и $[BB_1]$.

■

Определение. Если точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC и луч $[AA_1]$ является биссектрисой $\angle A$, то отрезок AA_1 называется биссектрисой $\triangle ABC$.

Теорема 11.3. Пусть $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ — биссектрисы $\triangle ABC$ и $l_A = |AA_1|$, тогда

1) $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности $\triangle ABC$;

$$2) \frac{s(\triangle ABA_1)}{s(\triangle ACA_1)} = \frac{|AB|}{|AC|};$$

$$3) \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \text{ (основное свойство биссектрисы);}$$

$$4) l_A = \frac{2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos(\hat{A}/2)}{|AB| + |AC|};$$

$$5) l_A = \sqrt{|AB| \cdot |AC| - |BA_1| \cdot |A_1C|}.$$

Доказательство. 1) по предыдущей лемме найдем точку O , для которой $\{O\} = [AA_1] \cap [BB_1]$. Из теоремы 9.5 следует, что $O \in [CC_1]$. Используя предыдущую лемму для $[CC_1]$ и $[AA_1]$, заключаем, что $O \in [CC_1]$, поэтому центр вписанной окружности лежит на каждой биссектрисе $\triangle ABC$.

2) пусть $L = \text{Пр}_{(AB)}(A_1)$ и $M = \text{Пр}_{(AC)}(A_1)$ (рис. 91). Из ГМТЗ следует, что $|A_1L| = |A_1M|$, поэтому

$$\frac{s(\triangle ABA_1)}{s(\triangle ACA_1)} = \frac{|AB| \cdot |A_1L|/2}{|AC| \cdot |A_1M|/2} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

3) треугольники $BA A_1$ и $CA A_1$ имеют общую высоту $[AH]$ (где $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$). Применяя (2) и первое следствие, получим

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{s(\triangle ABA_1)}{s(\triangle ACA_1)} = \frac{|BA_1|}{|A_1C|}.$$

4) трижды воспользуемся формулой (2) из первой теоремы

$$s(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot l_A \cdot (|AB| + |AC|) \cdot \sin(\hat{A}/2).$$



Выразим из этого равенства l_A и применим простую тригонометрическую формулу²⁰:

$$l_A = \frac{2|AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\hat{A}/2) \cos(\hat{A}/2)}{(|AB| + |AC|) \sin(\hat{A}/2)} = \frac{2|AB| \cdot |AC| \cdot \cos(\hat{A}/2)}{|AB| + |AC|}.$$

5) обозначим через D точку пересечения открытого луча $[AA_1)$ с окружностью ω , описанной около $\triangle ABC$ (рис. 92). Из равенства углов $\angle B$ и $\angle D$ (оно доказывается применением следствия 2 теоремы 9.2) получаем подобие треугольников ABA_1 и ADC (по 2КПТ), откуда сразу следует отношение

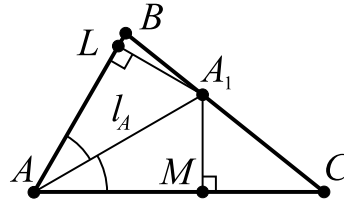


Рис. 91

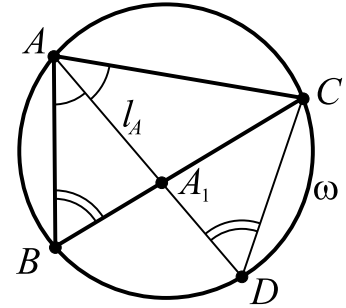


Рис. 92

$l_A : |AC| = |AB| : |AD|$ или $l_A \cdot |AD| = |AB| \cdot |AC|$ (*). Теперь воспользуемся теоремой о хордах и получим $|BA_1| \cdot |A_1C| = l_A(|AD| - l_A)$, откуда $l_A^2 = l_A \cdot |AD| - |BA_1| \cdot |A_1C|$. Осталось применить соотношение (*) и преобразовать последнее равенство к виду $l_A^2 = |AB| \cdot |AC| - |BA_1| \cdot |A_1C|$. Для окончательной победы остается извлечь квадратный корень из обеих частей.

Напомним, что отрезок A_1B_1 , соединяющий середины сторон треугольника ABC , называется его *средней линией*. Треугольник, составленный из средних линий $\triangle A_1B_1C_1$, будем называть *срединным* для $\triangle ABC$.

Лемма 11.4. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон $[BC], [AC], [AB]$ (соответственно) треугольника ABC , тогда

- 1) $(A_1B_1) \parallel (AB)$, $|A_1B_1| = |AB|/2$;
- 2) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, $k = 1/2$ — коэффициент подобия.

Доказательство. 1) по 1КПТ треугольники CB_1A_1 и CAB подобны с коэффициентом подобия $k = |CB_1|/|CA| = 1/2$, откуда $\angle CB_1A_1 = \angle A$ и $(B_1A_1) \parallel (AB)$.

- 2) следует из (1) и 3КПТ.

Как обычно, *медианой* треугольника называют отрезок, соединяющей его вершину с серединой противоположной стороны.

²⁰Для любого φ справедливо $\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ (эта формула доказана в главе «Тригонометрия» учебника Алгебра10).



Теорема 11.5. Пусть $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ — медианы $\triangle ABC$ и $m_A = |AA_1|$, тогда

- 1) медианы делят друг друга точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины (основное свойство медиан);
- 2) три медианы пересекаются в одной точке²¹;
- 3) медиана делит площадь треугольника пополам;
- 4) три медианы делят треугольник на шесть треугольников равных по площади (или равновеликих);
- 5) $m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2(|AB|^2 + |AC|^2) - |BC|^2}$.

Доказательство. 1) используя лемму о двух чевианах, найдем такую точку M , что $\{M\} = [AA_1] \cap [BB_1]$ (рис. 93). По предыдущей лемме $(A_1B_1) \parallel (AB)$, откуда $\angle MA_1B_1 = \angle MAB$ и $\angle MB_1A_1 = \angle MBA$, что по 2КПТ дает $\triangle AMB \sim \triangle A_1MB_1$ и $|AM| : |MA_1| = |BM| : |MB_1| = |AB| : |A_1B_1| = 2 : 1$.

2) по (1) третья медиана, $[CC_1]$, должна разделить $[AA_1]$ точкой пересечения в отношении $2 : 1$, считая от вершины A . Такая точка по теореме 6.1 (свойство 8) определяется однозначно, поэтому $M \in [CC_1]$.

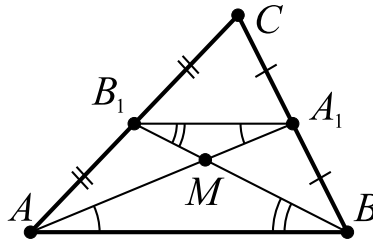


Рис. 93

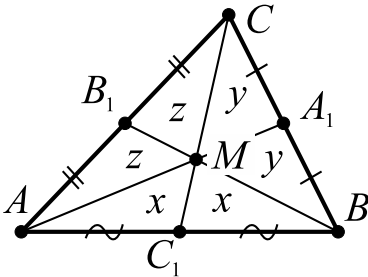


Рис. 94

3) треугольники ABA_1 и ACA_1 имеют общую высоту $[AH]$ (где $H = \text{Пр}_{(BC)}(A)$) и равные основания $[BA_1]$ и $[CA_1]$, откуда $s(\triangle ABA_1) = s(\triangle ACA_1)$.

4) отрезок $[MC_1]$ является медианой в $\triangle AMB$, поэтому можно обозначить че-

рез $x = s(\triangle AMC_1) = s(\triangle BMC_1)$ (рис. 94). Аналогично вводим обозначения $y = s(\triangle BMA_1) = s(\triangle CMA_1)$ и $z = s(\triangle AMB_1) = s(\triangle CMB_1)$. По (3) треугольники ABA_1 и ACA_1 равновелики, откуда $2x + y = 2z + y$ или $x = z$. Кроме того, $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ также равновелики, поэтому $2z + x = 2y + x$ или $z = y$. В результате $x = y = z$.

5) из формулы Стюарта (см. стр. 66) получим

$$m_A^2 = |AC|^2 \cdot \frac{1}{2} + |AB|^2 \cdot \frac{1}{2} - |BC|^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(2(|AB|^2 + |AC|^2) - |BC|^2),$$

откуда и следует требуемое. ■

²¹Точка пересечения медиан треугольника ABC называется его *центром масс* или *центром тяжести*.



Напомним, что отрезок AA_1 называется *высотой* треугольника ABC , если $A_1 = \text{Пр}_{(BC)}(A)$.

Теорема 11.6. Пусть $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ — высоты $\triangle ABC$ и $h_A = |AA_1|$.

1) если $\hat{C} \neq 90^\circ$, то треугольники ACB и A_1CB_1 подобны с коэффициентом $|\cos \hat{C}|$.

2) если треугольник ABC остроугольный, то его высоты содержат биссектрисы $\triangle A_1B_1C_1$ (этот треугольник называется *ортоцентрическим* для $\triangle ABC$).

3) прямые (AA_1) , (BB_1) и (CC_1) пересекаются в одной точке²².

$$4) h_A = \frac{\sqrt{(|AB|+|AC|+|BC|)(|AB|+|AC|-|BC|)(|AB|+|BC|-|AC|)(|AC|+|BC|-|AB|)}}{2|BC|}.$$

Доказательство. 1) рассмотрим два случая.

1-й случай: $\hat{C} < 90^\circ$ (рис. 95а). Из прямоугольных треугольников ACA_1 и BCB_1 получим $|CB_1|/|CB| = |CA_1|/|CA| = \cos \hat{C}$ и подобие треугольников ACB и A_1CB_1 теперь следует из 1КПТ.

2-й случай: $\hat{C} > 90^\circ$ (рис. 95б). Из прямоугольных треугольников ACA_1 и BCB_1 получим $|CB_1|/|CB| = |CA_1|/|CA| = \cos(180^\circ - \hat{C}) = -\cos \hat{C}$ и подобие $\triangle ACB$ и $\triangle A_1CB_1$, но уже с коэффициентом $k = -\cos \hat{C}$, теперь следует из 1КПТ.

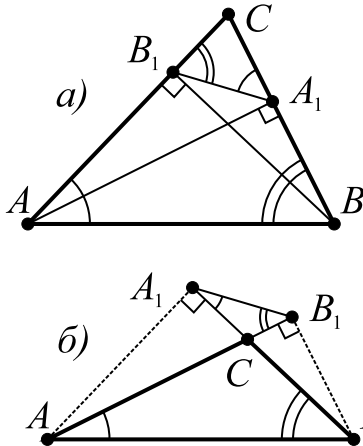


Рис. 95

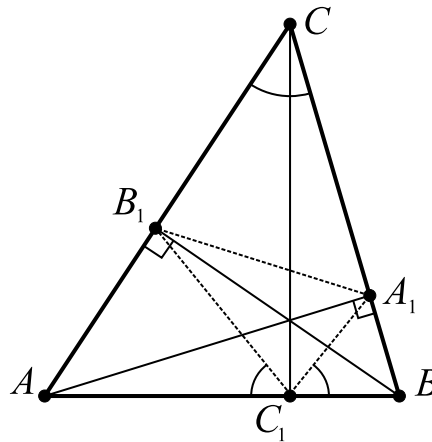


Рис. 96

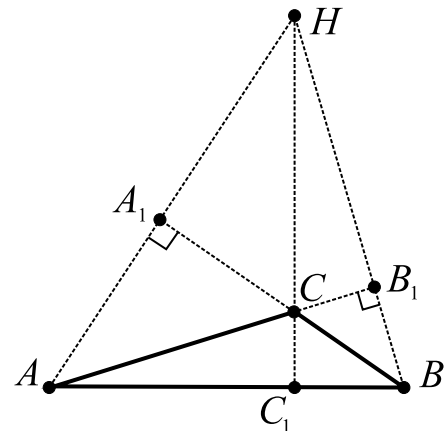


Рис. 97

2) если $\hat{A} < 90^\circ$, то точка $C_1 = \text{Пр}_{(AB)}(C)$ принадлежит открытому лучу $]AB)$. Аналогично из условия $\hat{B} < 90^\circ$ следует, что $C_1 \in]BA)$. Таким образом, $C_1 \in]AB[$ и все высоты в остроугольном треугольнике являются

²²Эта точка называется *ортоцентром* треугольника ABC .



его чевианами. Применяя (1) к высотам $[CC_1]$ и $[BB_1]$, получим $\triangle ACB \sim \triangle AC_1B_1$ и $\angle AC_1B_1 = \angle C$ (рис. 96). Точно также доказывается равенство $\angle BC_1A_1 = \angle C$. Учитывая $(CC_1) \perp (AB)$ и равенство $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$, получим $\angle CC_1B_1 = \angle CC_1A_1$ и $[CC_1]$ содержит биссектрису $\angle A_1C_1B_1$. Аналогично устанавливается, что $[AA_1]$ и $[BB_1]$ содержат две остальные биссектрисы $\triangle A_1B_1C_1$.

3) рассмотрим три случая.

1-й случай: $\triangle ABC$ — остроугольный (рис. 96). Из (2) следует, что на каждом из отрезков $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ находится центр вписанной окружности $\triangle A_1B_1C_1$, поэтому высоты остроугольного треугольника пересекаются в центре вписанной окружности ортоцентрического треугольника.

2-й случай: $\triangle ABC$ — прямоугольный. Б.о.о. $\widehat{C} = 90^\circ$, тогда C и является точкой пересечения указанных прямых.

3-й случай: $\triangle ABC$ — тупоугольный (рис. 97). Б.о.о. $\widehat{C} > 90^\circ$, тогда $\angle A$, $\angle B$ — острые. Кроме того, $\widehat{BAA_1} = 90^\circ - \widehat{B} < 90^\circ$ и $\widehat{ABB_1} = 90^\circ - \widehat{A} < 90^\circ$. Обозначим через H точку пересечения лучей $[AA_1]$ и $[BB_1]$, тогда из четырехугольника HA_1CB_1 находим, что $\widehat{H} = 180^\circ - \widehat{C} < 90^\circ$. Таким образом, все углы в $\triangle ABH$ острые и точка C является пересечением высот $[AB_1]$ и $[BA_1]$ в этом треугольнике. Применив первый случай, получим $(HC) \perp (AB)$. Отсюда $C_1 \in (HC)$, что дает $H \in (CC_1)$. Таким образом, прямые (AA_1) , (BB_1) и (CC_1) проходят через точку H .

4) обозначим через $P = P_{\triangle ABC}$ периметр треугольника ABC , тогда формулу Герона-Архимеда можно преобразовать к виду

$$s(\triangle ABC) = \sqrt{\frac{P}{2} \cdot \frac{P - 2|BC|}{2} \cdot \frac{P - 2|AC|}{2} \cdot \frac{P - 2|AB|}{2}} = \\ = \frac{\sqrt{(|AB| + |AC| + |BC|)(|AB| + |AC| - |BC|)(|AB| + |BC| - |AC|)(|AC| + |BC| - |AB|)}}{4}.$$

Теперь формула (4) следует из $h_A = 2 \cdot s(\triangle ABC)/|BC|$. ■

Высота в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, обладает несколькими полезными свойствами, о которых в следующем утверждении.

Теорема 11.7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\widehat{C} = 90^\circ$) проведена высота CH , $h_C = |CH|$. Тогда

- 1) $\triangle AHC \sim \triangle ACB$ и $\triangle ACB \sim \triangle CHB$;
- 2) $\triangle AHC \sim \triangle CHB$;



- 3) $|AC|^2 = |AB| \cdot |AH|$ и
 $|BC|^2 = |AB| \cdot |BH|$;
 4) $h_C = \sqrt{|AH| \cdot |BH|}$.

Доказательство. 1) два прямоугольных треугольника с общим острым углом подобны по 2КПТ.

2) следует из (1) и транзитивности равенства углов.

3) из (1) получаем, что $|AC|/|AB| = |AH|/|AC|$ или $|AC|^2 = |AB| \cdot |AH|$ (рис. 98). Аналогично доказывается и второе равенство.

4) из (2) получим пропорцию $h_C/|BH| = |AH|/h_C$ (рис. 98), которую можно переписать в виде произведения $h_C^2 = |AH| \cdot |BH|$, откуда и следует нужная формула.

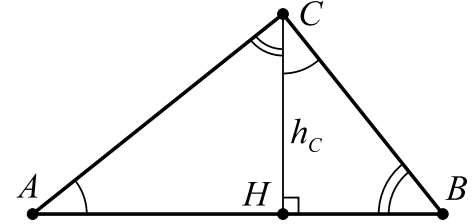


Рис. 98

Замечание. Для двух неотрицательных чисел $x, y \in \mathbb{R}$ величина $\sqrt{xy}$ называется их *средним геометрическим*. Кроме того, $|AH|$ и $|BH|$ называются *проекциями катетов на гипотенузу*. В этих терминах последняя формула предыдущей теоремы дает, что длина высоты прямоугольного треугольника, которая проведена к гипотенузе, равна среднему геометрическому проекций его катетов. ■

1.12. Теоремы Чебы и Менелая

Установим сначала несколько вспомогательных результатов.

Лемма 12.1. 1) если $x, y, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, $y, y_1, (y - y_1) \neq 0$ и $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$, то $\frac{x}{y} = \frac{x - x_1}{y - y_1}$.

2) если $C_1, C_2 \in]AB[$ и $|AC_1| : |C_1B| = |AC_2| : |C_2B|$, то $C_1 = C_2$.

3) если $B_1, B_2 \in (AC) \setminus [AC]$ и $|CB_1| : |B_1A| = |CB_2| : |B_2A|$, то точки B_1 и B_2 совпадают.

Доказательство. 1) учитывая, что $y, y_1, (y - y_1) \neq 0$, получим цепочку равносильных переходов:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow xy - xy_1 = yx - yx_1 \Leftrightarrow xy_1 = x_1y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}.$$



2) пусть $|AC_1| = x$, $|AC_2| = y$, тогда из условия следует

$$\frac{x}{|AB| - x} = \frac{y}{|AB| - y} \Leftrightarrow x|AB| - xy = y|AB| - xy \Leftrightarrow x|AB| = y|AB| \Leftrightarrow x = y.$$

Отсюда $[AC_1] = [AC_2]$ и из аксиомы об однозначном откладывании отрезка ($C_1, C_2 \in [AB]$) получим $C_1 = C_2$.

3) заметим, что множество $(AC) \setminus [AC]$ состоит из двух открытых лучей, для одного из которых выполняется $|CB_1| : |B_1A| < 1$, для другого — $|CB_1| : |B_1A| > 1$. Поэтому условие $|CB_1| : |B_1A| = |CB_2| : |B_2A|$ гарантирует, что обе точки B_1 и B_2 лежат на одном из этих лучей. Б.о.о. B_1 и B_2 лежат на луче, противоположном к $[CA]$. Обозначим $x = |CB_1|$, $y = |CB_2|$ и преобразуем данное нам отношение

$$\frac{x}{|AC| + x} = \frac{y}{|AC| + y} \Leftrightarrow x|AC| + xy = y|AC| + xy \Leftrightarrow x|AC| = y|AC| \Leftrightarrow x = y.$$

Откуда $[CB_1] = [CB_2]$ и из аксиомы III.1 получим $B_1 = B_2$.

■

Определение. Чевиины $[AA_1]$, $[BB_1]$ и $[CC_1]$ треугольника ABC называются конкурентными, если они пересекаются в одной точке.

Следующий результат получен Дж. Чевоу в 1678 году и называется теоремой Чеви.

Теорема 12.2. Чевиины $[AA_1]$, $[BB_1]$ и $[CC_1]$ треугольника ABC конкурентны тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (*).$$

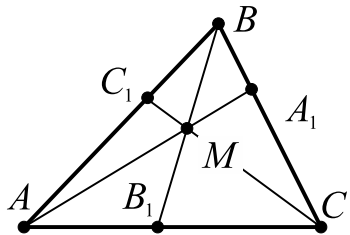


Рис. 99

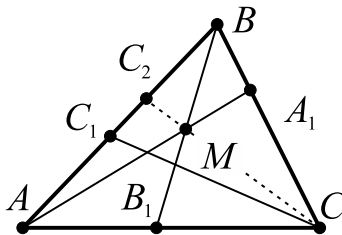


Рис. 100

Доказательство. $\Rightarrow$) предположим, что нашлась точка M , что $\{M\} = [AA_1] \cap [BB_1] \cap [CC_1]$ (рис. 99). Заметим, что $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ имеют общую высоту к (AB) , поэтому их площади относятся как длины оснований, лежащих на (AB) . Аналогичный результат справедлив и для $\triangle AMC_1$ и $\triangle BMC_1$. Третье равенство в следующей цепочке появилось из-за (1) предыдущей леммы:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{s(\triangle ACC_1)}{s(\triangle BCC_1)} = \frac{s(\triangle AMC_1)}{s(\triangle BMC_1)} = \frac{s(\triangle ACC_1) - s(\triangle AMC_1)}{s(\triangle BCC_1) - s(\triangle BMC_1)} = \frac{s(\triangle AMC)}{s(\triangle BMC)}.$$



Точно также получаем еще два соотношения:

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{s(\triangle AMB)}{s(\triangle AMC)} \quad \text{и} \quad \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{s(\triangle BMC)}{s(\triangle AMB)}.$$

Перемножая соответственно левые и правые части трех равенств, получим

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{s(\triangle AMC)}{s(\triangle BMC)} \cdot \frac{s(\triangle AMB)}{s(\triangle AMC)} \cdot \frac{s(\triangle BMC)}{s(\triangle AMB)} = 1.$$

$\Leftarrow$) о/п: выполняется равенство $(*)$, но чевианы не конкурентны. Пусть $\{M\} = [AA_1] \cap [BB_1]$ (рис. 100) и чевиана $[CC_2]$ проходит через точку M . По уже доказанной части имеем

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (**).$$

Из $(*)$ и $(**)$ получим $|AC_1| : |C_1B| = |AC_2| : |C_2B|$. Применяя (2) предыдущей леммы, приходим к $C_1 = C_2$. $\bowtie$

■

Следующий результат называется *теоремой Менелая*²³.

Теорема 12.3. В произвольном треугольнике ABC выбраны точки $A_1 \in]BC[$ и $C_1 \in]AB[$, а точка B_1 выбрана на прямой (AC) , но не на стороне $[AC]$. Тогда B_1 лежит на прямой (A_1C_1) в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (\heartsuit).$$

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $B_1 \in (A_1C_1)$. Проведем через вершину C прямую s так, чтобы $s \parallel (AB)$ (рис. 101) и пусть $\{K\} = s \cap (A_1C_1)$ (если бы (A_1C_1) и s были бы параллельны, то через C_1 проходили бы две различные прямые, параллельные прямой s).

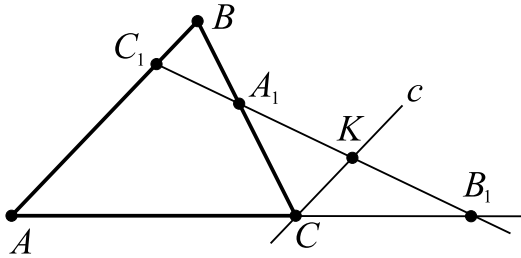


Рис. 101

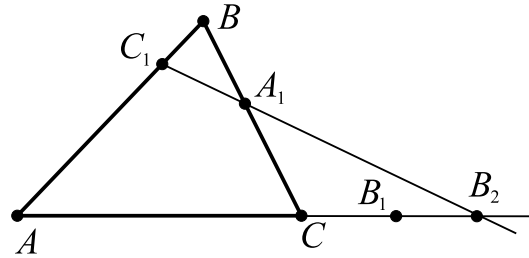


Рис. 102

²³Менелай Александрийский (1 в.н.э.) — древнегреческий математик и астроном, написал трактат «Сферика» о сферической тригонометрии; доказал теорему о трансверсалиях, применил ее к сферическому треугольнику.



Подобия $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CKB_1$ и $\triangle CKA_1 \sim \triangle BC_1A_1$ дают два соотношения:

$$\frac{|AC_1|}{|CK|} = \frac{|B_1A|}{|CB_1|} \quad \text{и} \quad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|C_1B|}{|CK|}.$$

Перемножим соответственно левые и правые части этих равенств:

$$\frac{|AC_1|}{|CK|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|B_1A|}{|CB_1|} \cdot \frac{|C_1B|}{|CK|} \Leftrightarrow \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

$\Leftrightarrow$ о/п: пусть выполняется $(\heartsuit)$, но $B_1 \notin (A_1C_1)$. Сразу заметим, что прямые A_1C_1 и AC не могут быть параллельными. Иначе по обобщенной теореме Фалеса (теорема 6.2) получили бы $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = 1$, поэтому из $(\heartsuit)$ следовало $|CB_1|/|B_1A| = 1$ и точка B_1 была бы серединой $[AC]$, что противоречит условию $B_1 \notin [AC]$. Значит, найдется такая точка B_2 , что $\{B_2\} = (AC) \cap (A_1C_1)$. По уже доказанной части (то, что B_2 не лежит на стороне $[AC]$ следует из аксиомы Паша) условие $B_2 \in (A_1C_1)$ дает

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} = 1 \quad (\diamond).$$

Из $(\heartsuit)$ и $(\diamond)$ получим $|CB_1| : |B_1A| = |CB_2| : |B_2A|$ и, используя утверждение (3) предыдущей леммы, делаем неожиданный вывод, что точки B_1 и B_2 совпадают. $\bowtie$.

■

1.13. Четырехугольники

Определение. Фигура Φ называется выпуклой, если для любых точек $A, B \in \Phi$ следует, что $[AB] \subseteq \Phi$.

Очевидно, что пустое множество, прямая, любой треугольник, плоскость — выпуклы, а супертупой угол выпуклым множеством не является.

Замечание. В этом параграфе договоримся о следующем:

а) если специально не оговорено противное, рассматриваем только выпуклые четырехугольники;

б) для сокращения записи будем использовать маленькие латинские буквы для обозначения длин отрезков.

Начнем с простого критерия, когда в четырехугольник можно вписать окружность. Такая окружность должна касаться всех его сторон. Напомним, что окружность ω касается невырожденного отрезка AB , если точка касания $\omega \cap (AB)$ принадлежит $[AB]$.



Теорема 13.1. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны между собой, т.е. $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

Доказательство. $\Rightarrow$) предположим сначала, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность (рис. 103). Используя равенство отрезков касательных из одной точки к окружности, обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 103. Тогда $|AB| + |CD| = x + y + z + t$ и $|AD| + |BC| = x + t + y + z$, откуда и следует требуемое равенство $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.

$\Leftarrow$) пусть теперь справедливо равенство $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$. Докажем, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. О/п: этого сделать нельзя. Тогда существует окружность ω , касающаяся трех сторон этого четырехугольника и не пересекающая четвертую сторону (первый случай) или пересекающая ее в двух точках (второй случай). Центр такой окружности будет точкой пересечения биссектрис двух смежных углов четырехугольника. Доказательство обоих случаев схожи, поэтому мы рассмотрим только первый из них.

Пусть ω касается $[AB]$, $[BC]$, $[AD]$ и не пересекает $[CD]$ (рис. 104). Выберем на лучах $[BC)$ и $[AD)$ точки C_1 и D_1 так, что прямая (C_1D_1) касается окружности ω . Обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 104 ($b = |BC_1|$, $d = |AD_1|$ и т.д.). Тогда дан-

ное нам равенство $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ можно переписать в виде $a + c = (b + x) + (d + y)$ (1). Поскольку в четырехугольник ABC_1D_1 вписана окружность, верно $a + c_1 = b + d$ (2). Вычитая из (1) равенство (2), получаем $c - c_1 = x + y$ или $c = x + c_1 + y$, что противоречит неравенству многоугольника (см. стр. 46): $c < x + c_1 + y$.

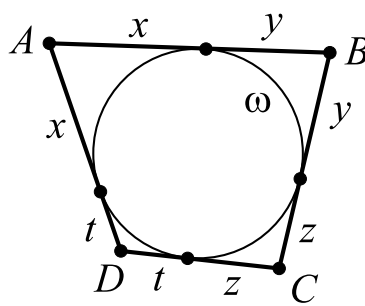


Рис. 103

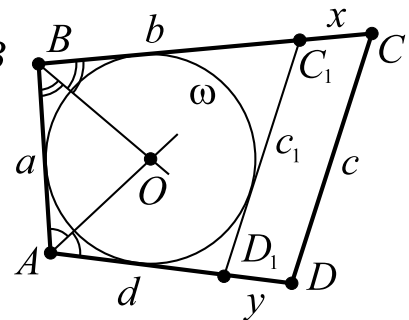


Рис. 104

В девятом параграфе были найдены несколько критериев того, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Основной из них — сумма противоположных углов $ABCD$ равна 180° . Обсудим еще несколько равносильных утверждений.



Следующую теорему называют *теоремой Симсона*²⁴.

Теорема 13.2. *Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда три проекции одной из его вершин на прямые, определяемые тремя остальными вершинами, лежат на одной прямой.*

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $\omega = \omega(O, R)$ описана около $ABCD$ и будем рассматривать проекции точки D : $K = \text{Пр}_{(AB)}(D)$, $L = \text{Пр}_{(AC)}(D)$, $M = \text{Пр}_{(BC)}(D)$. При $K = A$ сразу получим, что $[BD]$ — диаметр ω , $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$, $M = C$, что дает $L \in (KM) = (AC)$. Поэтому далее считаем, что $K \neq A$ и $M \neq C$. Это предположение дает нам, что $O \notin [BD]$ и ровно один из углов — $\angle A$, $\angle C$ — является острым. Б.о.о. $\hat{A} > 90^\circ$ и $\hat{C} < 90^\circ$, тогда K попадает на продолжении стороны BA , а M — внутренняя точка $[BC]$ (рис. 105). Построим на $[AD]$ и $[CD]$, как на диаметрах, окружности ω_A и ω_C (соответственно). Равенства $\widehat{AKD} = \widehat{ALD} = 90^\circ$ по ГМТ5 дают $K, L \in \omega_A$ и $\angle ADK = \angle ALK$ (*). Аналогично из $\widehat{CLD} = \widehat{CMD} = 90^\circ$ делаем вывод, что $M, L \in \omega_C$ и $\angle CDM = \angle CLM$ (**). Теперь осталось заметить, что из $\hat{C} + \hat{A} = 180^\circ$ следует $\hat{C} = \widehat{DAK}$ и

$$\widehat{ADK} = 90^\circ - \widehat{DAK} = 90^\circ - \hat{C} = \widehat{CDM}.$$

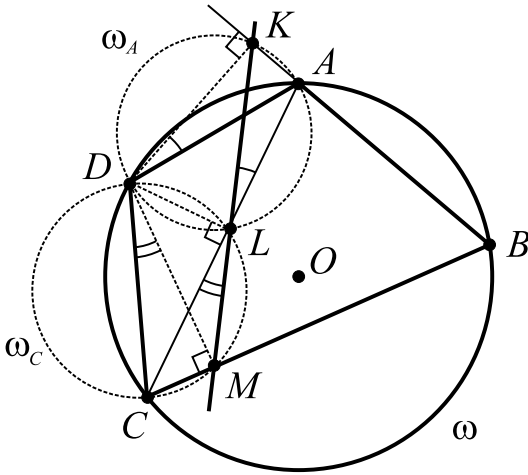


Рис. 105

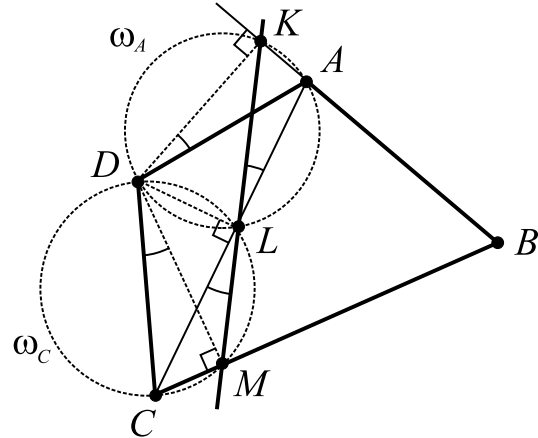


Рис. 106

Теперь из (*) и (**) заключаем, что $\angle CLM = \angle ALK$ и $M \in (KL)$ (иначе мы бы провели луч $[LM_1]$, противоположный к лучу $[LK]$, и от луча

²⁴В действительности она доказана У. Уоллесом в 1797 г. Уильям Уоллес (1768–1843) — шотландский математик, профессор математики Эдинбургского университета; его исследования относятся к теории конических сечений, логарифмов, теории шарнирных механизмов; изобрел пантограф (1831) — прибор для копирования рисунков.



$[LC)$ в одной полуплоскости были бы отложены два угла, равные $\angle ALK$, что противоречит аксиоме III.4).

$\Leftarrow$) сохраним обозначения первой части доказательства. Пусть точка $M \in (KL)$. При $K = A$ получим $(KL) = (AC)$ и $M \in (AC) \cap (BC)$, т.е. $M = C$ и $\hat{A} = \hat{C} = 90^\circ$. Поэтому далее считаем, что $K \neq A$ и $M \neq C$. Заметим, что условия $K \in]AB[$ и $M \in]BC[$ не могут выполняться одновременно. Иначе $\angle A$ и $\angle C$ — оба острые, $\angle DAC$ и $\angle DCA$ — еще острее и точка L попадает на сторону AC . В результате прямая KM пересекает три стороны треугольника ACB , что противоречит аксиоме Паша. Похожим образом получается противоречие в случае, если одновременно $K \notin [AB]$ и $M \notin [BC]$. Поэтому ровно одна из этих точек попадает на сторону данного четырехугольника, а другая лежит на продолжении стороны. Б.о.о. $K \notin [AB]$ и $M \in]BC[$ (рис. 106). Условие $M \in (KL)$ дает $\angle CLM = \angle ALK$. Учитывая, что $(*)$ и $(**)$ по-прежнему справедливы, приходим к

$$\hat{C} = 90^\circ - \widehat{CDM} = 90^\circ - \widehat{CLM} = 90^\circ - \widehat{ALK} = 90^\circ - \widehat{ADK} = \widehat{DAK}.$$

Теперь из равенства $\hat{A} + \widehat{DAK} = 180^\circ$ получим $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ и около $ABCD$ можно описать окружность.

■

Следствие. Пусть $\omega = \omega(O, R)$ описана около треугольника ABC . Тогда $D \in \omega$ в том и только в том случае, если проекции точки D на (AB) , (AC) и (BC) лежат на одной прямой²⁵.

Доказательство. Если точка D совпадает с одной из вершин $\triangle ABC$, то совпадают две из трех ее проекций, поэтому утверждение очевидно. Во всех остальных случаях имеем дело с четырехугольником, для которого можно применить предыдущую теорему.

■

Следующий результат называется *теоремой Птолемея*²⁶.

²⁵Эта прямая называется *прямой Симсона*.

²⁶Клавдий Птолемей (ок. 100 – ок. 170) — астроном, математик, географ эпохи позднего эллинизма, автор «Альмагеста», который содержал практически полное собрание астрономических знаний Греции и Ближнего Востока того времени; нашел для $\sin 1^\circ$ значение, равное 0,017268 (точное значение 0,017453...), а для π — 3,14166; ввел деление градуса на минуты и секунды; исходя из шарообразности Земли, пользовался стереографической проекцией для переноса объектов на плоскость чертежа; положение места определял по его долготе и широте; описал устройство «астролабона» — прообраза астролябии, прибора для измерения горизонтальных углов и определения широт и долгот небесных тел.



Теорема 13.3. *Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда произведение его диагоналей равно сумме попарных произведений его противоположных сторон, т.е.*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|. \quad (\heartsuit)$$

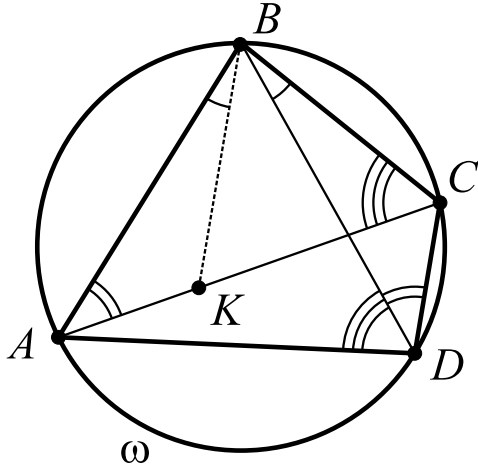


Рис. 107

Доказательство. $\Rightarrow$) б.о.о. будем считать, что $\widehat{ABD} \geq \widehat{CBD}$ (рис. 107). Обозначим через K такую точку диагонали AC , что $\angle ABK = \angle CBD$. Используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получаем, что $\angle BAC = \angle BDC$ и $\angle BCA = \angle BDA$. Отсюда $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ и $\triangle BCK \sim \triangle BDA$. Переписывая пропорции $|AK|/|CD| = |AB|/|BD|$ и $|KC|/|AD| = |BC|/|BD|$ в виде произведения, имеем $|AK| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD|$ и $|KC| \cdot |BD| = |BC| \cdot |AD|$. Складывая последние два равенства, получаем $(\heartsuit)$.

$\Leftarrow$) пусть $(\heartsuit)$ выполняется и окружность $\omega = \omega(O, R)$ описана около треугольника ABC . Докажем, что лежат на одной прямой три проекции точки D : $K = \text{Пр}_{(AB)}(D)$, $L = \text{Пр}_{(AC)}(D)$, $M = \text{Пр}_{(BC)}(D)$. Снова построим на $[AD]$ и $[CD]$, как на диаметрах, окружности ω_A и ω_C (соответственно). Будем использовать рис. 106, не предполагая, что $M \in (KL)$. Применяя теорему синусов для $\triangle AKL$ и $\triangle ABC$, получим $\sin \widehat{A} = |BC|/(2R)$ и $\sin \widehat{LAK} = |KL|/|AD|$. Учитывая, что синусы смежных углов равны, получим $|KL| = |AD| \cdot |BC|/(2R)$. Аналогично $|LM| = |AB| \cdot |CD|/(2R)$. Вокруг четырехугольника $BKDM$ можно описать окружность с диаметром $[BD]$, поэтому дважды применяя теорему синусов, получим $\sin \widehat{B} = |KM|/|BD| = |AC|/(2R)$ или $|KM| = |AC| \cdot |BD|/(2R)$. Ясно, что равенство $(\heartsuit)$ равносильно

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{2R} + \frac{|AD| \cdot |BC|}{2R} = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2R} \Leftrightarrow |LM| + |KL| = |KM|.$$

По второму утверждению следствия 3 (см. стр. 46) получим $L \in [KM]$ и по следствию из теоремы Симсона заключаем, что точка $D \in \omega$.





В следующем утверждении приводится аналог теоремы косинусов для четырехугольников (*соотношение Бретшнайдера*²⁷, доказанное им в 1842 году).

Теорема 13.4. *Обозначим в четырехугольнике $ABCD$ длины его сторон и диагоналей: $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$. Тогда*

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}). \quad (\diamond)$$

Доказательство. На сторонах AB и AD четырехугольника $ABCD$ в его внешней области построим два треугольника ABF и ADE так, чтобы они были подобны соответственно треугольникам CAD и CAB (рис. 108).

Из подобия получаем

$$\frac{|AF|}{c} = \frac{a}{e}, \frac{|BF|}{d} = \frac{a}{e}, \frac{|AE|}{b} = \frac{d}{e}, \frac{|DE|}{a} = \frac{d}{e},$$

откуда следуют равенства $|AF| = (ac)/e$, $|AE| = (bd)/e$, $|BF| = |DE| = (ad)/e$. Теперь заметим, что $\widehat{FBD} + \widehat{BDE} = \widehat{ABD} + (\widehat{FBA} + \widehat{ADE}) + \widehat{ADB} = \widehat{ABD} + \widehat{BAD} + \widehat{ADB} = 180^\circ$, поэтому $BDEF$ — параллелограмм, $|FE| = f$. По построению $\widehat{FAE} = \hat{A} + \hat{C}$. Применяя теорему косинусов к треугольнику AFE , получим

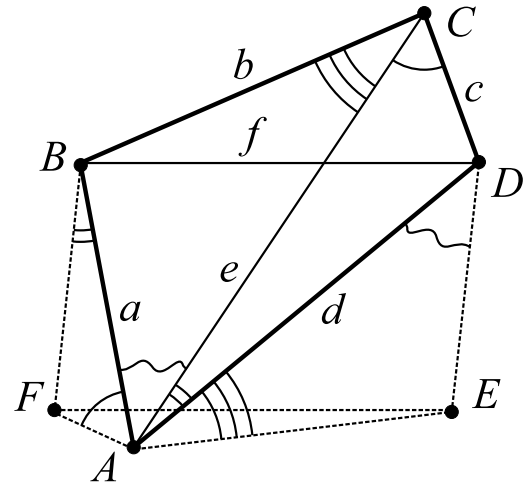


Рис. 108

$$f^2 = \left(\frac{ac}{e}\right)^2 + \left(\frac{bd}{e}\right)^2 - \frac{2abcd}{e^2} \cos(\hat{A} + \hat{C}),$$

что равносильно соотношению Бретшнайдера. ■

Следствие. *Из соотношения Бретшнайдера следует теорема Птолемея.*

Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность тогда и только тогда, когда $\cos(\hat{A} + \hat{C}) = -1$. По предыдущей теореме это равносильно соотношению

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd \Leftrightarrow (ef)^2 = (ac + bd)^2.$$

Далее обсудим несколько формул, по которым можно найти площадь четырехугольника. Начнем с очень простого утверждения.

²⁷Карл Бретшнайдер (1808–1878) — немецкий математик, ученик Мёбиуса, ввел общепринятые ныне сокращения si и ci для интегрального синуса и интегрального косинуса, а также ввел современное обозначение γ для постоянной Эйлера-Маскерони.



Теорема 13.5. Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей равны $e = |AC|$, $f = |BD|$, а величина угла между ними равна φ , тогда $s(ABCD) = \frac{1}{2}ef \sin \varphi$.

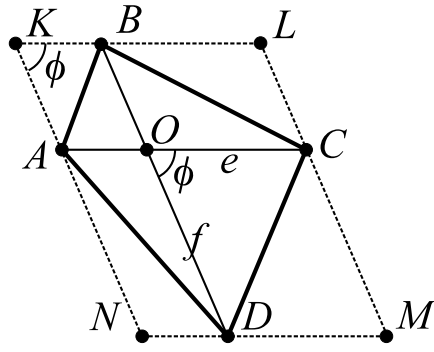


Рис. 109

Доказательство. Обозначим через O точку пересечения диагоналей $ABCD$ и проведем через его вершины прямые, которые параллельны его диагоналям (рис. 109). Получим параллелограмм $KLMN$, стороны которого равны $e = |KL| = |MN|$ и $f = |KN| = |LM|$. Кроме того, величина наименьшего угла между сторонами $KLMN$ равна φ . По второй формуле из теоремы 10.2 получим $s(KLMN) = ef \sin \varphi$. Заметим, что диагональ AB разбивает параллелограмм $AKBO$ на два равных треугольника.

Сделав еще три подобных наблюдения, получим $s(KLMN) = 2s(ABCD)$, откуда $s(ABCD) = \frac{1}{2}ef \sin \varphi$. ■

Замечание. Формула предыдущей теоремы справедлива и для невыпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажем это. Для определенности будем считать, что диагональ BD разбивает $ABCD$ на два тупоугольных треугольника. Теперь будем перемещать $[BD]$ вдоль (BD) , сохраняя его длину, пока четырехугольник AB_1CD_1 не станет выпуклым. Из равенства $|BD| = |B_1D_1|$ и первого следствия со стр. 69 получим $s(\triangle ABD) = s(\triangle AB_1D_1)$, $s(\triangle CBD) = s(\triangle CB_1D_1)$, откуда $s(ABCD) = s(AB_1CD_1) = \frac{1}{2}ef \sin \varphi$.

Следствие. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей равны $e = |AC|$, $f = |BD|$. Если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то $s(ABCD) = ef/2$.

Доказательство. Применяем формулу предыдущей теоремы, подставляя $\sin 90^\circ = 1$. ■

В следующей теореме мы воспользуемся двумя простыми тригонометрическими формулами: $\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$ и $1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$. Эти формулы будут доказаны в главе «Тригонометрия» курса Алгебра10. Следующий технически непростой результат будет иметь много полезных приложений.



Теорема 13.6. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ длины его сторон равны $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$ и $p = (a + b + c + d)/2$ — его полупериметр. Тогда

$$\left(s(ABCD)\right)^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \quad (\clubsuit).$$

Доказательство. Пусть $S = s(ABCD)$, тогда из аддитивности площади получим $4S = 4s(\triangle ABD) + 4s(\triangle BCD) = 2ad \sin \hat{A} + 2bc \sin \hat{C}$. Возводим в квадрат и используем основное тригонометрическое тождество:

$$16S^2 = 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 8abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} - (4a^2d^2 \cos^2 \hat{A} + 4b^2c^2 \cos^2 \hat{C}). \quad (1)$$

Дважды обратимся к теореме косинусов: $a^2 + d^2 - 2ad \cos \hat{A} = |BD|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{C}$, откуда $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \hat{A} - 2bc \cos \hat{C}$. Снова смело возводим в квадрат и получим

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 8abcd \cos \hat{A} \cos \hat{C} = 4a^2d^2 \cos^2 \hat{A} + 4b^2c^2 \cos^2 \hat{C}. \quad (2)$$

Перед подстановкой (2) в (1) одно тригонометрическое наблюдение:

$$\begin{aligned} 8abcd \sin \hat{A} \sin \hat{C} - 8abcd \cos \hat{A} \cos \hat{C} &= -8abcd \cos(\hat{A} + \hat{C}) = \\ &= 8abcd - 8abcd(1 + \cos(\hat{A} + \hat{C})) = 8abcd - 16abcd \cos^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

И еще одно алгебраическое наблюдение (конечное число раз пользуемся формулами разности квадратов, квадрата разности и квадрата суммы):

$$\begin{aligned} 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 8abcd - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= (2ad + 2bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \left((a+d)^2 - (b-c)^2\right) \left((b+c)^2 - (a-d)^2\right) = \\ &= (a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2d) = \\ &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d). \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, подставляя (2) в (1) и используя наблюдения (3) и (4), получим

$$16S^2 = 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd \cos^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2},$$

откуда немедленно следует $(\clubsuit)$. ■

Формула в следующем утверждении называется *формулой Брахмагупты*²⁸.

²⁸Брахмагупта (ок. 598–660) — индийский математик и астроном, руководил обсерваторией в Удждайне; ввел правила операций с нулем, положительными и отрицательными числами; сформулировал правило решения квадратного уравнения; известна *задача Брахмагупты* — построить с помощью циркуля и линейки вписанный четырехугольник по четырем его сторонам.



Следствие 1. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ длины его сторон равны $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$ и $p = (a + b + c + d)/2$ — его полупериметр. Если около $ABCD$ можно описать окружность, то $s(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Доказательство. Для такого четырехугольника $(\hat{A} + \hat{C})/2 = 90^\circ$, поэтому $\cos \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = 0$ и формула Брахмагупты сразу следует из ($\clubsuit$). ■

Следствие 2. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ длины его сторон равны $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$. Если в $ABCD$ можно вписать окружность, то $(s(ABCD))^2 = abcd \sin^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$.

Доказательство. Сохраняем обозначения предыдущей теоремы. Из первой теоремы этого параграфа имеем $a + c = b + d = p$, поэтому $p - a = c$, $p - b = d$, $p - c = a$, $p - d = b$. Теперь ($\clubsuit$) преобразуется к

$$(s(ABCD))^2 = abcd \left(1 - \cos^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \right) = abcd \sin^2 \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}.$$

Следствие 3. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ длины его сторон равны $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$. Если в $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность, то его площадь может быть найдена по формуле $s(ABCD) = \sqrt{abcd}$.

Доказательство. Для такого четырехугольника $(\hat{A} + \hat{C})/2 = 90^\circ$, поэтому $\sin \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = 1$, остается применить формулу из предыдущего следствия. ■

Глава 2

Преобразования плоскости

2.1. Группа преобразований и группа движений

Вспомним сначала некоторые понятия и простые факты из теории множеств. *Декартовым произведением* (или просто произведением) множеств X и Y называется $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, при этом (x, y) — упорядоченная пара, в которой x — ее первый элемент, а y — второй. *Соответствием* между множествами X и Y называют произвольное множество $\varphi \subseteq X \times Y$, т.е. φ состоит из упорядоченных пар. Используют два обозначения: $X \xrightarrow{\varphi} Y$ или $\varphi : X \rightarrow Y$. *Областью определения* φ называется множество $D(\varphi) = \{x \in X : \exists (x, y) \in \varphi\}$. *Множеством значений* φ называется $E(\varphi) = \{y \in Y : \exists (x, y) \in \varphi\}$. Соответствие φ называется *всюду определенным* (сюръективным), если $D(\varphi) = X$ (соответственно $E(\varphi) = Y$). Сюръективные соответствия также называются соответствиями «на». Соответствие φ называется *однозначным*, если из условий $(x, y), (x, y_1) \in \varphi$ следует, что $y = y_1$, т.е. каждому $x \in D(\varphi)$ соответствует при φ единственный элемент из $E(\varphi)$; в этом случае вместо $(x, y) \in \varphi$ можно писать $y = \varphi(x)$ и элемент y называется *образом* элемента x при φ . Соответствие φ называется *инъективным*, если из условий $(x, y), (x_1, y) \in \varphi$ следует, что $x = x_1$, т.е. различным элементам из $D(\varphi)$ соответствуют при φ различные элементы из $E(\varphi)$. Всюду определенные и однозначные соответствия называются *отображениями* и обозначаются f, g, h . *Биекциями* называются всюду определенные, сюръективные, однозначные и инъективные соответствия. Часто соответствия $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задаются формулами. Например, $f(x) = x^2$ задает отображение, которое не сюръективно (так как $-1 \notin E(f)$) и не инъективно (так как $f(-1) = f(1) = 1$). В то же время формулы $f(x) = x^3$ или $g(x) = 2020x + 2021$ задают биекции между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Для отображения



$f : X \rightarrow Y$ и произвольного подмножества $X_1 \subseteq X$ образом множества X_1 при f называется множество $f(X_1) = \{f(x) : x \in X_1\}$; прообразом $Y_1 \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in X : f(x) \in Y_1\}$. Сразу из определения следует, что при $X_1 \subseteq X_2$ (или $Y_1 \subseteq Y_2$) выполняется $f(X_1) \subseteq f(X_2)$ (соответственно $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$).

Для соответствия $\varphi : X \rightarrow Y$ можно определить обратное соответствие $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ следующим образом: $\varphi^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \varphi\}$. Нетрудно заметить, что при переходе к обратному соответствию всюду определенность и сюръективность, а также однозначность и инъективность меняются местами (т.е. если φ однозначно, то φ^{-1} инъективно), поэтому **соответствие, обратное к биекции, само является биекцией**.

Для двух соответствий $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ можно определить их композицию $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ следующим образом:

$$\psi \circ \varphi = \{(x, z) : \exists y \in Y, \text{ для которого } (x, y) \in \varphi \text{ и } (y, z) \in \psi\}.$$

Для двух отображений $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$ вместо $(x, z) \in g \circ f$ можно записывать $z = g(f(x))$. Так, для двух конкретных отображений, которые были определены выше, можно рассмотреть две их различные композиции: $(g \circ f)(x) = 2020x^3 + 2021$ и $(f \circ g)(x) = (2020x + 2021)^3$. Если для $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ выполнено $D(\varphi) = X$ и $D(\psi) = Y$, то $D(\psi \circ \varphi) = X$, т.е. композиция всюду определенных соответствий всюду определена. Аналогично проверяется сохранение оставшихся трех свойств при переходе к композиции. Поэтому **композиция биекций $\varphi : X \rightarrow Y$ и $\psi : Y \rightarrow Z$ является биекцией между X и Z** .

Обсудим еще несколько алгебраических понятий. *Операцией* (или бинарной операцией) на множестве G называется отображение $* : G \times G \rightarrow G$ (т.е. операция любой упорядоченной паре элементов G ставит в соответствие элемент этого же множества). Так, сложение и умножение являются операциями на $\mathbb{N}$, а разность и деление — нет. Множество G с операцией $*$ на нем обозначается через $(G, *)$.

Определение. $(G, *)$ называется группой, если выполняются следующие три свойства:

- 1) $\forall a, b, c \in G \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность);
- 2) существует такой элемент $e \in G$, что для любого $a \in G$ выполняется $e * a = a * e = a$ (e — нейтральный элемент);
- 3) для любого $a \in G$ найдется такой элемент $b \in G$, что $a * b = b * a = e$



(элемент b называется обратным к a).

Если кроме этих свойств выполняется (4) $\forall a, b \in G \Rightarrow a * b = b * a$ (коммутативность), то группа называется *коммутативной* или *абелевой*¹. Так, $(\mathbb{Z}, -)$ группой не является (не выполняется ассоциативность), а $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ — абелевы группы.

Определение. Биекция $f : \alpha \rightarrow \alpha$ называется преобразованием плоскости α . Через Tr_2 или Tr_α обозначают² множество всех преобразований плоскости α .

Пример 1. Тожественное преобразование $\varepsilon : \alpha \rightarrow \alpha$ определяется так: $\forall A \in \alpha \Rightarrow \varepsilon(A) = A$. Все свойства биекции очевидно выполняются.

Пример 2. Центральная симметрия относительно точки O обозначается Z_O и определяется следующим образом: $\forall A \in \alpha \Rightarrow Z_O(A) = A'$, причем O является серединой отрезка AA' . Для Z_O легко проверяются все свойства биекции.

Пример 3. В последних двух главах мы подробно обсудим понятие вектора и применение векторов в геометрии, а для следующего примера нам будет достаточно интуитивного о них представления. *Параллельный перенос* на вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначается $T_{\overrightarrow{AB}}$ и определяется следующим образом: $\forall X \in \alpha \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(X) = Y$, причем выполняется равенство $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB}$. Для $T_{\overrightarrow{AB}}$ также легко проверяются все свойства биекции.

Пример 4. Воспользуемся декартовой системой координат (см. стр. 59). Определим f на произвольной точке $M(x, y)$ следующим образом. При $y \geq 0$ пусть $f(M(x, y)) = M'(x+1, y)$, а при $y < 0$ пусть $f(M) = M$. Другими словами, все точки «верхней» полуплоскости сдвигаются на единичный вектор вправо, а точки открытой «нижней» полуплоскости отображаются сами в себя. Очевидно, что для f все свойства биекции выполняются.

Теорема 1.1. $(Tr_2, \circ)$ является группой.

Доказательство. 0) если $f, g \in Tr_2$, то $g \circ f$ также является биекцией, поэтому $g \circ f \in Tr_2$ и композиция является операцией на Tr_2 (мы проверили корректность использования обозначения $(Tr_2, \circ)$).

¹Нильс Абель (1802–1829) — норвежский математик, доказал неразрешимость в радикалах уравнения пятой степени; продвинул теорию сходимости степенных рядов и полностью исследовал проблему сходимости степенного ряда; заложил основы теории Галуа и теории функций комплексного переменного.

²Transformation (англ.) — преобразование.



1) выберем любые $f, g, h \in Tr_2$ и рассмотрим произвольную $A \in \alpha$. Тогда

$$(h \circ (g \circ f))(A) = h((g \circ f)(A)) = h(g(f(A))),$$

$$((h \circ g) \circ f)(A) = (h \circ g)(f(A)) = h(g(f(A))),$$

откуда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ и ассоциативность доказана.

2) докажем, что ε — нейтральный элемент в $(Tr_2, \circ)$. Действительно, для каждого $f \in Tr_2$ и любой точки $A \in \alpha$ верно

$$(\varepsilon \circ f)(A) = \varepsilon(f(A)) = f(A) \quad \text{и} \quad (f \circ \varepsilon)(A) = f(\varepsilon(A)) = f(A),$$

откуда $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$ и ε — нейтральный элемент.

3) для каждого $f \in Tr_2$ соответствие f^{-1} также является биекцией, т.е. $f^{-1} \in Tr_2$. Кроме того, для каждой точки $A \in \alpha$ из условия $(A, A') \in f \Rightarrow (A', A) \in f^{-1}$, поэтому $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1} \circ f = \varepsilon$. Аналогично доказывается, что $f \circ f^{-1} = \varepsilon$. Поэтому f^{-1} — обратный элемент к f . ■

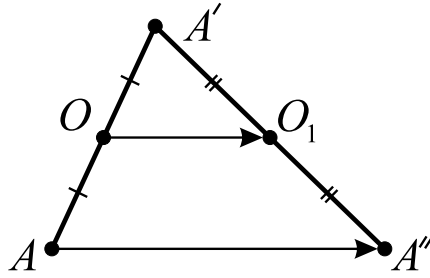


Рис. 110

Абелевость $(Tr_2, \circ)$ не получится установить. Достаточно привести пример двух преобразований, на которых коммутативность нарушается. Пусть $f = Z_O$, $g = Z_{O_1}$, $O \neq O_1$ и точка $A \notin (OO_1)$ (рис. 110). Обозначим через $A' = f(A)$ и $A'' = g(A')$. Используя свойства средней линии в $\triangle AA'A''$, получим $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO_1}$, т.е. $g \circ f = T_{2\overrightarrow{OO_1}}$. Аналогично доказывается, что $f \circ g = T_{2\overrightarrow{O_1O}}$. При $O \neq O_1$ выполняется

$\overrightarrow{OO_1} \neq \overrightarrow{O_1O}$, поэтому $g \circ f \neq f \circ g$.

Теорема 1.2. Для каждого $f \in Tr_2$ и любых двух фигур $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \alpha$ выполняется $f(\Phi_1 \cap \Phi_2) = f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$.

Доказательство. Равенство двух множеств $X = Y$ обычно проверяется включением в обе стороны: $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пусть $C \in f(\Phi_1 \cap \Phi_2)$, тогда найдется такая точка $A \in \Phi_1 \cap \Phi_2$, что $C = f(A)$. Поскольку $A \in \Phi_1$, верно $C \in f(\Phi_1)$; а раз $A \in \Phi_2$, верно $C \in f(\Phi_2)$. Таким образом, $C \in f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$.



Пусть теперь $C \in f(\Phi_1) \cap f(\Phi_2)$, тогда найдутся такие точки $A \in \Phi_1$ и $B \in \Phi_2$, что $f(A) = C = f(B)$. В силу инъективности f , выполняется $A = B \in \Phi_1 \cap \Phi_2$, откуда $C \in f(\Phi_1 \cap \Phi_2)$. ■

Определение. $f \in Tr_2$ называется движением плоскости α , если для любых точек $A, B \in \alpha \Rightarrow |f(A)f(B)| = |AB|$. Множество всех движений плоскости α обозначается через D_2 или D_α .

Другими словами, любое движение сохраняет равенство отрезков или расстояние между точками. Очевидно, что ε , Z_O , $T_{\overrightarrow{AB}} \in D_2$, а преобразование из четвертого примера не сохраняет расстояние.

Теорема 1.3. $(D_2, \circ)$ — группа.

Доказательство. 0) если $f, g \in D_2$ и $A, B \in \alpha$, обозначим $A' = f(A)$, $A'' = g(A')$, $B' = f(B)$, $B'' = g(B')$, тогда $(g \circ f)(A) = A''$ и $(g \circ f)(B) = B''$. Так как $f, g \in D_2$, то $|A'B'| = |AB|$ и $|A''B''| = |A'B'|$, откуда $|A''B''| = |AB|$ и $g \circ f$ также является движением, поэтому $g \circ f \in D_2$ и композиция является операцией на D_2 (мы проверили корректность использования обозначения $(D_2, \circ)$).

1) поскольку $D_2 \subseteq Tr_2$, ассоциативность на множестве D_2 также выполняется.

2) поскольку ε — нейтральный элемент в $(Tr_2, \circ)$, $D_2 \subseteq Tr_2$, $\varepsilon \in D_2$, этот элемент будет нейтральным и в $(D_2, \circ)$.

3) для каждого $f \in D_2$ соответствие f^{-1} также является преобразованием, осталось показать, что f^{-1} сохраняет расстояние. Выберем произвольные $A', B' \in \alpha$, тогда, в силу сюръективности f , найдутся такие точки $A, B \in \alpha$, что $f(A) = A'$ и $f(B) = B'$. Из условия $f \in D_2$ следует, что $|A'B'| = |AB|$, а из определения обратного соответствия получим $f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1}(B') = B$. Переписывая равенство $|A'B'| = |AB|$ в виде $|A'B'| = |f^{-1}(A')f^{-1}(B')|$, приходим к $f^{-1} \in D_2$. ■

Рассмотрим еще несколько примеров движений плоскости.

Пример 5. *Осевая симметрия* относительно прямой a обозначается S_a и определяется следующим образом: $\forall A \in \alpha \setminus a \Rightarrow S_a(A) = A'$, причем a является серединным перпендикуляром к отрезку AA' , если же $A \in a$, то $S_a(A) = A$. Пусть $B' = S_a(B)$ и покажем, что $|A'B'| = |AB|$. При $(AB) \parallel a$ или $(AB) \perp a$ проверка очевидна. Пусть $\{C\} = (AB) \cap a$. Первый случай: $C \in [AB]$ (рис. 111). Дважды воспользуемся ГМТ1 и получим $|CA| = |CA'|$



и $|CB| = |CB'|$. Из аддитивности длины следует, что выполняется равенство $|A'B'| = |A'C| + |CB'| = |AC| + |CB| = |AB|$. Второй случай: $C \notin [AB]$. Б.о.о. $A \in [CB]$ (рис. 112). Снова дважды воспользуемся ГМТ1 и получим $|CA| = |CA'|$ и $|CB| = |CB'|$. Из аддитивности длины следует, что верно $|CB'| = |CA'| + |A'B'| = |CA| + |AB| = |CB|$, откуда $|A'B'| = |AB|$.

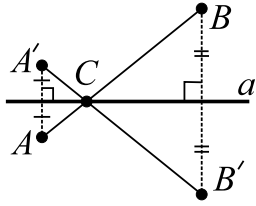


Рис. 111

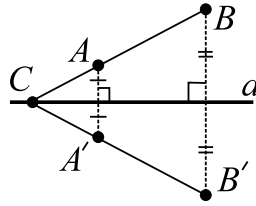


Рис. 112

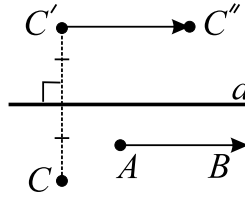


Рис. 113

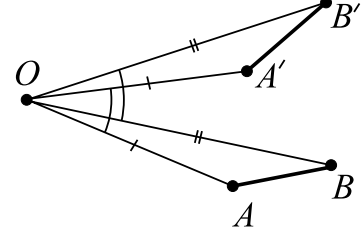


Рис. 114

Пример 6. Скользящая симметрия является композицией двух движений — $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a$ — при условии, что $\overrightarrow{AB} \parallel a$. Из (0) предыдущей теоремы следует, что скользящая симметрия является движением. На рис. 113 построен образ точки C при скользящей симметрии: $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a(C) = T_{\overrightarrow{AB}}(C') = C''$.

Пример 7. Поворот с центром в точке O на угол величины φ обозначается через R_O^φ и определяется следующим образом: $\forall A \in \alpha \Rightarrow R_O^\varphi(A) = A'$, причем $|OA| = |OA'|$ и $\widehat{AOA'} = \varphi$. При $\varphi \geq 0$ поворот всех точек осуществляется в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки³), а при $\varphi < 0$ — в отрицательном. Покажем, что $R_O^\varphi \in D_2$. Пусть $B' = R_O^\varphi(B)$ и докажем, что $|A'B'| = |AB|$. При $O \in (AB)$ равенство $|A'B'| = |AB|$ следует из аддитивности функции длины. Пусть $O \notin (AB)$ (рис. 114). Условие $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \varphi$ дает $\angle AOB = \angle A'OB'$, поэтому треугольники AOB и $A'OB'$ равны по 1КРТ, откуда $|A'B'| = |AB|$.

Теорема 1.4. Пусть f — произвольное движение, $A, B, C \in \alpha$ и $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $C \in [AB] \Leftrightarrow C' \in [A'B']$;
- 2) образом прямой является прямая;
- 3) образом луча является луч;
- 4) если $C \notin (AB)$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$;
- 5) образом открытой полуплоскости является открытая полуплоскость;
- 6) образом угла является равный ему угол;

³Позже в этой главе мы строго определим ориентацию плоскости и откладывание углов в положительном и отрицательном направлении, избавившись тем самым от хронометрической зависимости.



- 7) пусть $\omega = \omega(O, r)$, тогда $f(\omega) = \omega'$, причем $\omega' = \omega(f(O), r)$;
 8) если $a \parallel b$, то $f(a) \parallel f(b)$.

Доказательство. 1) дважды воспользуемся вторым утверждением третьего следствия со стр. 46:

$$C \in [AB] \Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB| \Leftrightarrow |A'B'| = |A'C'| + |C'B'| \Leftrightarrow C' \in [A'B'].$$

2) предположим, что $a = (AB)$ и покажем, что $f(a) = (A'B') = a'$, проверив включение этих множеств друг в друга.

$\subseteq$) для любой точки $C \in (AB)$ одна из точек $\{A, B, C\}$ лежит между двумя другими. Если, б.о.о., $A \in [BC]$, то по (1) получим $A' \in [B'C']$, т.е. $C' \in (A'B')$. Значит, $f(a) \subseteq a'$.

$\supseteq$) рассмотрим f^{-1} — обратное движение к данному. Для него выполняется $f^{-1}(A') = A$ и $f^{-1}(B') = B$. По уже доказанной части получим $f^{-1}(a') \subseteq a$. Можно применить к левой и правой части этого включения движение f , тогда $f(f^{-1}(a')) \subseteq f(a)$, или $a' \subseteq f(a)$. Тем самым мы проверили обратное включение.

3) из (1) следует, что при движении сохраняется отношение лежать между, а из (2) — прямые отображаются на прямые. Луч определялся с помощью этих понятий, поэтому луч переходит в луч.

4) равенство $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ выполняется по ЗКРТ.

5) следует из (1) и (2). Действительно, открытая полуплоскость определялась с помощью отношения лежать по одну сторону от прямой. Образом прямой при движении является прямая, а образом отрезка — отрезок. Причем, если $[AB] \cap a = \emptyset$, то по второй теореме получим $[A'B'] \cap a' = \emptyset$, откуда точки A' и B' лежат по одну сторону от a' . Поэтому образом открытой полуплоскости (или полуплоскости) с границей a будет открытая полуплоскость (соответственно полуплоскость) с границей a' .

6) угол определялся с помощью лучей и открытых полуплоскостей, поэтому образом угла будет угол. То, что величина угла сохраняется, следует из (4).

7) достаточно проверить равенство множеств $f(\omega) = \omega'$, доказав включения в обе стороны.

$\subseteq$) для любой точки $A \in \omega$ выполняется $|OA| = r$, откуда по определению движения $|A'O'| = |AO| = r$, что дает $A' \in \omega'$ и $f(\omega) \subseteq \omega'$.

$\supseteq$) рассмотрим f^{-1} — обратное движение к данному. Для него справедливо $f^{-1}(O') = O$. По уже доказанной части получим $f^{-1}(\omega') \subseteq \omega$. Можно применить к левой и правой части этого включения движение f , тогда



$f(f^{-1}(\omega')) \subseteq f(\omega)$, или $\varepsilon(\omega') \subseteq f(\omega)$, что дает $\omega' \subseteq f(\omega)$. Тем самым мы проверили обратное включение.

8) уже доказано, что $f(a)$ и $f(b)$ — прямые. Если $a = b$, то $f(a) = f(b)$ и $f(a) \parallel f(b)$. При $a \cap b = \emptyset$ по второй теореме получим $f(a) \cap f(b) = \emptyset$. Вспомнив, что $f(a), f(b) \subseteq \alpha$, окончательно получим $f(a) \parallel f(b)$. ■

2.2. Неподвижные точки. Теорема о представлении

Определение. Точка A называется неподвижной точкой (н.т.) движения f , если $f(A) = A$. Остальные точки плоскости называются подвижными для f .

Любая точка плоскости является неподвижной для ε . Неподвижные точки S_a лежат в точности на прямой a , а поворот R_O^φ при $\varphi \in (0^\circ; 360^\circ)$ имеет единственную неподвижную точку — центр поворота.

Лемма 2.1. Пусть $f \in D_2$, A — н.т. движения f , а B — его подвижная точка, причем $f(B) = B'$. Тогда точка A лежит на серединном перпендикуляре к $[BB']$.

Доказательство. Любое движение сохраняет расстояние, поэтому $|AB| = |f(A)f(B)| = |AB'|$, что по ГМТ1 влечет требуемое. ■

В следующем утверждении описываются все движения, которые имеют по крайней мере две различные неподвижные точки. Не лишним будет напомнить, что преобразования $f, g \in Tr_2$ равны друг другу (пишут $f = g$), если для **любой точки** $A \in \alpha$ следует, что $f(A) = g(A)$. Если же найдется хотя бы одна точка $A_0 \in \alpha$, для которой $f(A_0) \neq g(A_0)$, то $f \neq g$.

Теорема 2.2. Пусть $A \neq B$ и A, B — н.т. движения f . Тогда $f = S_{(AB)}$ или $f = \varepsilon$.

Доказательство. I. Сразу заметим, что каждая $C \in (AB)$ является неподвижной точкой для f . О/п: для некоторой $C \in (AB)$ случилось $f(C) = C' \neq C$. Применяя лемму, получим, что A и B лежат на серединном перпендикуляре к $[CC']$, т.е. (AB) — это серединный перпендикуляр к $[CC']$. Отсюда $C \notin (AB)$. ✕.

Пусть теперь $C \notin (AB)$. Для $f(C)$ есть две возможности: $f(C) = C$ и $f(C) \neq C$.



1-й случай: $f(C) = C$. Тогда $f(C) = \varepsilon(C)$.

2-й случай: $f(C) = C' \neq C$. По лемме, (AB) является серединным перпендикуляром к $[CC']$, поэтому $f(C) = C' = S_{(AB)}(C)$.

Итак, для каждой точки $C \in \alpha$ выполняется $f(C) = \varepsilon(C)$ или $f(C) = S_{(AB)}(C)$. Но это еще не дает нужного результата (см. абзац перед теоремой) — пока не исключена возможность для f непустое множество точек плоскости вне прямой AB оставлять неподвижными, а другие точки (тоже непустое множество вне прямой AB) симметрично отображать относительно этой прямой.

II. Докажем, что $f = S_{(AB)}$ или $f = \varepsilon$. О/п: нашлись такие две точки $C, D \notin (AB)$, для которых $f(C) = C$ и $f(D) = D' \neq D$. Применяя лемму для точек A, B, C и отрезка $[DD']$, получим, что (AB) — серединный перпендикуляр для этого отрезка и $C \in (AB)$. $\nearrow \nwarrow$.

■

Следствие 1. Если A, B, C — н.т. движения f и $C \notin (AB)$, то $f = \varepsilon$.

Доказательство. По предыдущей теореме выполняется одно из двух: $f = S_{(AB)}$ или $f = \varepsilon$. Но $S_{(AB)}(C) = C' \neq C$ (так как C не лежит на прямой AB), остается лишь $f = \varepsilon$.

■

Неужели при $f, g \in D_2$ для проверки равенства $f = g$ необходимо подставлять каждую точку плоскости? Следующее утверждение позволяет выиграть время.

Следствие 2. Пусть $f, g \in D_2$ и нашлись такие три точки A_1, A_2, A_3 , не лежащие на одной прямой, для которых $f(A_i) = g(A_i)$ при $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда $f = g$.

Доказательство. Рассмотрим $h = g^{-1} \circ f$. По теореме 1.3 заключаем, что h — движение. Из равенства $f(A_i) = g(A_i)$ получим, что для всех $i \in \{1, 2, 3\}$

$$h(A_i) = g^{-1}(f(A_i)) = g^{-1}(g(A_i)) = A_i.$$

Таким образом, A_1, A_2, A_3 — н.т. h и $A_3 \notin (A_1A_2)$. Применяя предыдущее следствие, получим $h = \varepsilon$ или $g^{-1} \circ f = \varepsilon$. Раз эти два движения равны, то при композиции им с любым движением в результате получатся также два равных движения. Берем композицию⁴ этих движений с движением g , т.е.

⁴В математическом фольклоре этот прием называется «домножение слева на g »



$g \circ (g^{-1} \circ f) = g \circ \varepsilon$, откуда (используя ассоциативность и нейтральность ε)
 $(g \circ g^{-1}) \circ f = g$ или $f = g$.

■

Из курса арифметики известно, что любое составное натуральное число можно представить в виде произведения простых. Осевые симметрии в группе $(D_2, \circ)$ играют роль простых чисел в $\mathbb{N}$. Об этом следующий результат, который называется *теоремой о представлении*.

Теорема 2.3. *Любое движение можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.*

Доказательство. Пусть $f \in D_2$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от количества неподвижных точек у f .

1-й случай: найдутся две различные точки A и B , для которых $f(A) = A$ и $f(B) = B$. По предыдущей теореме $f = S_{(AB)}$ или $f = \varepsilon = S_a \circ S_a$. Нам удалось f представить в виде композиции не более двух осевых симметрий.

2-й случай: нашлась только одна точка A , для которой $f(A) = A$. Пусть $f(B) = B' \neq B$ и обозначим через b серединный перпендикуляр к $[BB']$. Рассмотрим вспомогательное движение $g = S_b \circ f$. По лемме следует, что $A \in b$, поэтому $g(A) = A$. Кроме того, $g(B) = S_b(f(B)) = S_b(B') = B$. Таким образом, A, B — н.т. движения g . Применяя первый случай к g , получим $g = \varepsilon$ или $g = S_{(AB)}$, откуда $S_b \circ f = \varepsilon$ или $S_b \circ f = S_{(AB)}$. Домножая слева последние два равенства на S_b , приходим к

$$(S_b \circ S_b) \circ f = S_b \circ \varepsilon \quad \text{или} \quad (S_b \circ S_b) \circ f = S_b \circ S_{(AB)},$$

что дает $f = S_b$ или $f = S_b \circ S_{(AB)}$. Снова f удалось представить в виде композиции не более двух осевых симметрий.

3-й случай: f не имеет неподвижных точек. Пусть $f(A) = A' \neq A$ и c — серединный перпендикуляр к $[AA']$. Рассмотрим вспомогательное движение $h = S_c \circ f$. Для него $h(A) = S_c(f(A)) = S_c(A') = A$, т.е. A — н.т. для h . По предыдущему случаю $h = S_b$ или $h = S_b \circ S_{(AB)}$, откуда $f = S_c \circ S_b$ или $f = S_c \circ S_b \circ S_{(AB)}$. Таким образом, f можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.

■

Заметим, что предыдущая теорема не запрещает представлять движение в виде композиции большего числа осевых симметрий. Так, тождественное преобразование можно легко представить, например, в виде композиции 2024 осевых симметрий.



2.3. Свойство подвижности. Теорема Шаля-Д'Аламбера

Следующее утверждение называется *свойством подвижности*.

Теорема 3.1. Пусть $A \neq B$ и $[AB] = [A_1B_1]$, тогда существует в точности два движения f_1 и f_2 , для которых $f_i(A) = A_1$, $f_i(B) = B_1$, при $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство. I. Существование. Обозначим $T_{AA_1}^{\rightarrow}(B) = B'$ и рассмотрим два случая.

1-й случай: $B' = B_1$. Тогда $f_1 = T_{AA_1}^{\rightarrow}$ обладает нужными свойствами: $f_1(A) = A_1$, $f_1(B) = B_1$.

2-й случай: $B' \neq B_1$ (рис. 115). Обозначим через $\varphi = \widehat{B'A_1B_1}$ и рассмотрим движение $f_1 = R_{A_1}^{\varphi} \circ T_{AA_1}^{\rightarrow}$. Тогда $f_1(A) = A_1$ (поскольку A_1 — н.т. $R_{A_1}^{\varphi}$) и $f_1(B) = R_{A_1}^{\varphi} \circ T_{AA_1}^{\rightarrow}(B) = R_{A_1}^{\varphi}(B') = B_1$. Поэтому f_1 — искомое движение.

Движение f_2 определим так: $f_2 = S_{(A_1B_1)} \circ f_1$. Поскольку A_1 и B_1 — н.т. относительно $S_{(A_1B_1)}$, по-прежнему будут выполняться равенства $f_2(A) = A_1$ и $f_2(B) = B_1$. Покажем, что $f_2 \neq f_1$. Для этого выберем точку $D \notin (A_1B_1)$. Движение f_1 сюръективно, поэтому найдется такая точка C , что $f_1(C) = D$.

Заметим теперь, что $f_2(C) = S_{(A_1B_1)} \circ f_1(C) = S_{(A_1B_1)}(D) = D' \neq D$, поскольку $D \notin (A_1B_1)$. Поэтому $f_1(C) \neq f_2(C)$, что дает $f_1 \neq f_2$.

II. Не более двух. Пусть $g \in D_2$ и $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$. Рассмотрим вспомогательное движение $h = g \circ f_1^{-1}$, тогда

$$h(A_1) = g \circ f_1^{-1}(A_1) = g(A) = A_1 \quad \text{и} \quad h(B_1) = g \circ f_1^{-1}(B_1) = g(B) = B_1.$$

Таким образом, h — движение с двумя различными неподвижными точками и по теореме 2.2 получим, что $h = \varepsilon$ или $h = S_{(A_1B_1)}$. Отсюда $g \circ f_1^{-1} = \varepsilon$ или $g \circ f_1^{-1} = S_{(A_1B_1)}$. Домножая оба эти равенства справа на f_1 , приходим к $g = f_1$ или $g = S_{(A_1B_1)} \circ f_1 = f_2$. ■

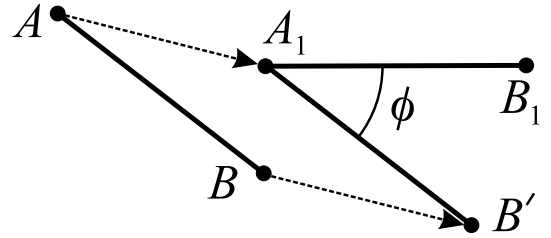


Рис. 115

Из предыдущей теоремы было бы ошибочно заключить, что существуют только два движения, переводящие один невырожденный отрезок AB в ему равный отрезок A_1B_1 . На самом деле, найдутся еще два движения, которые



точку A отображают в B_1 , а точку B — в A_1 . Если сразу указано, как должны переходить концы отрезка AB (как это сделано в предыдущей теореме), то таких движений будет только два. Воспользуемся этим фактом при доказательстве следующего утверждения, которое называется *теоремой Шалля⁵-Д'Аламбера⁶*, в нем классифицируются все движения плоскости. Предварительно заметим, что $\varepsilon = R_O^{0^\circ}$, $Z_O = R_O^{180^\circ}$, а S_a является частным случаем скользящей симметрии — с нулевым вектором переноса вдоль прямой a .

Теорема 3.2. Пусть $f \in Tr_2$. Тогда f является движением плоскости тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

- 1) f — параллельный перенос;
- 2) f — поворот;
- 3) f — скользящая симметрия.

Доказательство. $\Leftarrow$) в примерах было доказано, что каждое из этих преобразований сохраняет расстояние, поэтому является движением.

$\Rightarrow$) если $f = \varepsilon$, то f — поворот на нулевой угол или параллельный перенос на нулевой вектор, поэтому выполняются (1) или (2).

Пусть $f \neq \varepsilon$ и точка A подвижна относительно f . Обозначим через $B = f(A) \neq A$ и $C = f(B)$, тогда (по условию $f \in D_2$) выполняется $|AB| = |f(A)f(B)| = |BC|$. Рассмотрим несколько случаев расположения точек A , B и C .

1-й случай: $C \in (AB)$ и $C \neq A$. Тогда из $[AB] = [BC]$ и аксиомы III.1 следует, что точка B — середина $[AC]$. Обозначим через $f_1 = T_{\overrightarrow{AB}}$ и $f_2 = S_{(AB)} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$. Тогда $f_1 \neq f_2$ и $f(A) = f_1(A) = f_2(A) = B$ и $f(B) = f_1(B) = f_2(B) = C$. По свойству подвижности $f = f_1$ или $f = f_2$, поэтому для f выполнено (1) или (3).

2-й случай: $C \in (AB)$ и $C = A$ (рис. 116). Пусть O — середина отрезка AB и a — серединный перпендикуляр к этому отрезку. Обозначим через $f_1 = R_O^{180^\circ}$ и $f_2 = S_a$. Тогда $f_1 \neq f_2$, поскольку у f_2 бесконечно больше неподвижных точек, и выполняются равенства $f(A) = f_1(A) = f_2(A) = B$,

⁵Мишель Шаль (1793–1880) — французский математик, профессор (1841) Политехнической школы в Париже, с 1846 становится первым геометром Франции; создал новое научное направление — вычислительную геометрию; в рядах Национальной гвардии дважды защищал Париж (1814, 1870).

⁶Жан Д'Аламбер (1717–1783) — французский математик, механик, философ; незаконный сын маркизы де Тансен, воспитывался в семье стекольщика; основные математические исследования относятся к теории дифференциальных уравнений, заложил основы математической физики, первым при решении дифференциальных уравнений стал применять теорию функций комплексного переменного; некоторые его работы посвящены теории рядов и алгебре; дал первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы алгебры, во Франции она называется теоремой Д'Аламбера–Гаусса.



$f(B) = f_1(B) = f_2(B) = C$. По свойству подвижности $f = f_1$ или $f = f_2$, поэтому для f выполнено (2) или (3).

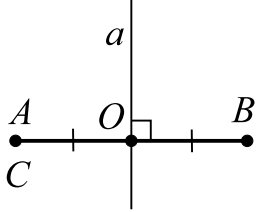


Рис. 116

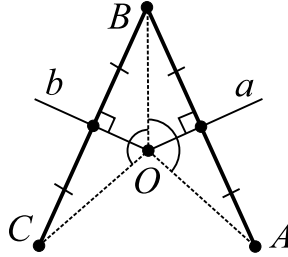


Рис. 117

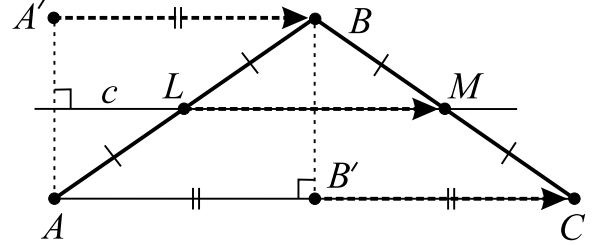


Рис. 118

3-й случай: $C \notin (AB)$. Пусть a — серединный перпендикуляр к $[AB]$, b — серединный перпендикуляр к $[BC]$ и $\{O\} = a \cap b$ (рис. 117). Тогда O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$. Из $[AB] = [BC]$ по 3КРТ получим $\triangle AOB = \triangle BOC$ и $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \varphi$. Обозначим через $f_1 = R_O^\varphi$, тогда $f(A) = f_1(A) = B$, $f(B) = f_1(B) = C$.

Найдем второе движение с похожим действием на точки A и B . Обозначим середины $[AB]$ и $[BC]$ соответственно через L и M , $c = (LM)$ (рис. 118). Пусть $f_2 = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c$, тогда

$$f_2(A) = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c(A) = T_{\overrightarrow{LM}}(A') = B \quad \text{и}$$

$$f_2(B) = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c(B) = T_{\overrightarrow{LM}}(B') = C.$$

Движения f_1 и f_2 различны, поскольку O — н.т. движения f_1 , а f_2 не имеет неподвижных точек. По свойству подвижности $f = f_1$ или $f = f_2$, поэтому для f выполнено (2) или (3). ■

2.4. Группы симметрий правильных многоугольников

Определение. Фигура $\Phi \subseteq \alpha$ инвариантна относительно $f \in D_2$, если $f(\Phi) = \Phi$. Множество всех движений, относительно которых Φ инвариантна, обозначается через $D(\Phi)$ (т.е. $D(\Phi) = \{f \in D_2 : f(\Phi) = \Phi\}$).

Очевидно, что $D(\alpha) = D_2$ и $\varepsilon \in D(\Phi)$ для любой фигуры Φ . Нетрудно заметить, что для окружности $\omega = \omega(O, 1)$ справедливо $R_O^{30^\circ} \in D(\omega)$, хотя на этой окружности нет ни одной неподвижной точки для $R_O^{30^\circ}$.



Теорема 4.1. $(D(\Phi), \circ)$ — группа.

Доказательство. 0) для любых $f, g \in D(\Phi)$ выполняется $g \circ f(\Phi) = g(\Phi) = \Phi$, поэтому $g \circ f \in D(\Phi)$, т.е. композиция является операцией на множестве $D(\Phi)$ и мы проверили корректность использования обозначения $(D(\Phi), \circ)$.

1) ассоциативность выполняется, поскольку $D(\Phi) \subseteq Tr_2$.

2) выше мы уже заметили, что $\varepsilon \in D(\Phi)$. Будучи нейтральным элементом в Tr_2 , тождественное преобразование будет нейтральным и в любом подмножестве Tr_2 .

3) для любого $f \in D(\Phi)$ выполняется $f(\Phi) = \Phi$. Подействуем на левую и правую часть этого равенства движением f^{-1} и получим $f^{-1}(f(\Phi)) = f^{-1}(\Phi)$, откуда $\Phi = f^{-1}(\Phi)$. Мы проверили, что $f^{-1} \in D(\Phi)$. ■

Алгоритм нахождения $D(\Phi)$. Теорема Шалля-Д'Аламбера перечисляет все типы движений плоскости, поэтому для определения $D(\Phi)$ достаточно:

- 1) найти все параллельные переносы, для которых $T_{\overrightarrow{AB}}(\Phi) = \Phi$;
- 2) найти все повороты, для которых $R_O^\varphi(\Phi) = \Phi$;
- 3) найти все осевые симметрии, для которых $S_a(\Phi) = \Phi$;
- 4) найти все скользящие симметрии, для которых $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a(\Phi) = \Phi$.

Напомним, что фигура $\Phi \subseteq \alpha$ называется ограниченной, если найдется точка $A \in \alpha$ и такая ее окрестность $O_\delta(A)$, что $\Phi \subseteq O_\delta(A)$. В частности, $O_\delta(A) = \{X \in \alpha : |XA| < \delta\}$ — ограниченное множество, поскольку $O_\delta(A) \subseteq O_{2\delta}(A)$ (радиус окрестности положителен по определению). Для ограниченных фигур поиск $D(\Phi)$ упрощается в два раза, об этом пойдет речь в следующей теореме, но сначала одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4.2. Для любой ограниченной фигуры Φ и любой прямой a найдется такой $[EF]$, что $\Phi \cap a \subseteq [EF]$.

Доказательство. Если $\Phi \cap a = \emptyset$, то подойдет любой отрезок. Пусть $\Phi \cap a \neq \emptyset$ и $\Phi \subseteq O_\delta(A)$ (рис. 119). Тогда $a \cap O_\delta(A) =]EF[$ и отрезок EF искомый, поскольку $\Phi \cap a \subseteq a \cap O_\delta(A) \subseteq [EF]$. ■

Теорема 4.3. Пусть Φ — непустое ограниченное множество. Тогда в $D(\Phi)$ нет параллельных переносов и скользящих симметрий с нетривиальным (т.е. ненулевым) вектором переноса.



Доказательство. I. Докажем, что в $D(\Phi)$ кроме тождественного нет других параллельных переносов. О/п: нашлся $T_{\overrightarrow{LM}} \in D(\Phi)$ и $L \neq M$. Выберем произвольную точку $B \in \Phi$ и проведем через нее прямую a так, чтобы $a \parallel (LM)$ (рис. 119). По предыдущей лемме найдется такой отрезок EF , что $\Phi \cap a \subseteq [EF]$.

Пусть $B_1 = B$, $B_2 = T_{\overrightarrow{LM}}(B_1)$, ..., $B_{i+1} = T_{\overrightarrow{LM}}(B_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Из предположения $T_{\overrightarrow{LM}}(\Phi) = \Phi$ получим, что $B_i \in \Phi$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Это утверждение обозначим через $(*)$.

Введем на прямой a порядок $\leq$ с помощью луча $[B_1B_2)$ и б.о.о. будем считать, что $E < F$. Из аксиомы Архимеда (аксиома V.1) следует, что найдется такое натуральное число n , что F будет находиться между B_1 и B_n , поэтому $B_n \notin [EF]$. Учитывая, что $\Phi \cap a \subseteq [EF]$, получим, что $B_n \notin \Phi$, а это противоречит $(*)$. $\nexists$.

II. Докажем, что в $D(\Phi)$ нет скользящих симметрий с нетривиальным вектором переноса. О/п: нашлось движение $f = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c \in D(\Phi)$, $\overrightarrow{LM} \parallel c$ и $L \neq M$. Нетрудно проверить, что из $\overrightarrow{LM} \parallel c$ следует, что $T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c = S_c \circ T_{\overrightarrow{LM}}$. По первой теореме из $f, f \in D(\Phi)$ следует, что $f \circ f \in D(\Phi)$, но

$$f^2 = f \circ f = T_{\overrightarrow{LM}} \circ S_c \circ S_c \circ T_{\overrightarrow{LM}} = T_{\overrightarrow{LM}} \circ T_{\overrightarrow{LM}} = T_{2\overrightarrow{LM}}.$$

Отсюда $T_{2\overrightarrow{LM}} \in D(\Phi)$, а это противоречит ранее доказанному утверждению о нетривиальных параллельных переносах. $\nexists$.

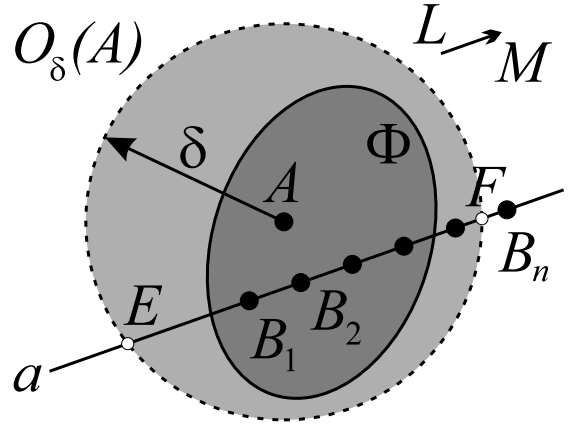


Рис. 119

Предыдущая теорема при поиске группы симметрий ограниченной и непустой фигуры позволяет исключить из алгоритма пункты (1) и (4).

Пример 1. Пусть $\Phi = \{A\}$. Если R_O^φ — нетривиальный поворот (т.е. не являющийся тождественным преобразованием), то $R_O^\varphi \in D(\Phi) \Leftrightarrow O = A$. Также легко проверяется, что $S_a \in D(\Phi) \Leftrightarrow A \in a$. Итак, в группе симметрий точки находятся все повороты с центром в этой точке и осевые симметрии, чья ось проходит через данную точку.



Пример 2. Пусть $\Phi = \omega = \omega(O, r)$. Тогда $f \in D(\Phi) \Leftrightarrow f(\omega) = \omega \Leftrightarrow f(O) = O$ (мы воспользовались свойством 7 теоремы 1.4). Таким образом, $D(\omega) = D(\{O\})$.

Определение. Выпуклый n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ называется правильным, если все его углы равны между собой и стороны попарно равны (т.е. $\angle A_i = \angle A_j$ и $[A_iA_{i+1}] = [A_jA_{j+1}]$ при всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$; точка A_{n+1} по определению считается равной A_1).

Лемма 4.4. Пусть $\Phi = A_1A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник.

1) существует точка O , одновременно являющаяся центром вписанной и описанной окружности Φ (O называется центром Φ).

2) если n — четное число, то выполняются свойства:

а) для каждой вершины A_i прямая A_iO проходит через другую вершину A_j этого многоугольника (вершины A_i и A_j называются противоположными);

б) прямая a_i , которая является серединным перпендикуляром к стороне $[A_iA_{i+1}]$, одновременно является серединным перпендикуляром к другой стороне $[A_jA_{j+1}]$ этого многоугольника (стороны $[A_iA_{i+1}]$ и $[A_jA_{j+1}]$ называются противоположными).

3) если n — нечетное число, то для каждой вершины A_i прямая A_iO является серединным перпендикуляром к некоторой стороне $[A_jA_{j+1}]$ этого многоугольника (вершина A_i и сторона $[A_jA_{j+1}]$ называются противоположными).

Доказательство. 1) пусть l_i — луч с вершиной в A_i , который является биссектрисой внутреннего угла $\angle A_i$ этого многоугольника. Из-за выпуклости Φ , величина любого из его углов меньше 180° , поэтому l_1 и l_2 образуют со стороной $[A_1A_2]$ острые углы и поэтому пересекаются в некоторой точке O (рис. 120). Из равенства $\widehat{A_1}/2 = \widehat{A_2}/2$ следует равнобедренность треугольника OA_1A_2 и равенство углов $\angle OA_2A_3 = \angle OA_1A_2$, поэтому $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$ по 1КРТ, что дает равнобедренность $\triangle OA_2A_3$, равенство $\widehat{A_2A_3O} = \widehat{A_3}/2$ и $O \in l_3$. Аналогично доказывается, что $O \in l_i$ и $\triangle OA_iA_{i+1}$ — равнобедренный. Таким образом, точка O равноудалена от всех сторон Φ и находится на одинаковом расстоянии от всех вершин Φ , поэтому является искомым центром.

2) а) достаточно проверить это утверждение для вершины A_1 (иначе просто перенумеруем вершины Φ). Обозначим через $\varphi_0 = 360^\circ/n$ (рис. 121),



тогда

$$\widehat{A_1 O A_{\frac{n}{2}+1}} = \left(\frac{n}{2} + 1 - 1 \right) \varphi_0 = \frac{n}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Отсюда $A_{\frac{n}{2}+1} \in (A_1 O)$ и вершина $A_{\frac{n}{2}+1}$ является искомой.

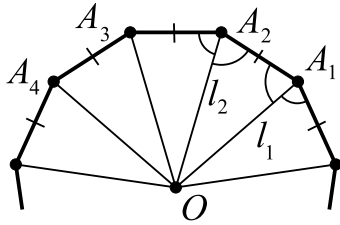


Рис. 120

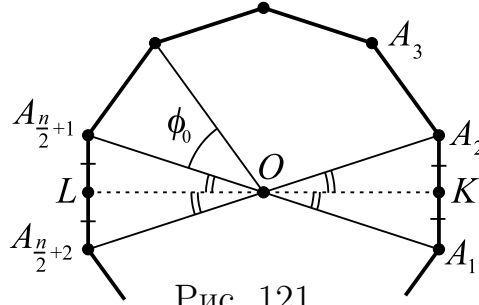


Рис. 121

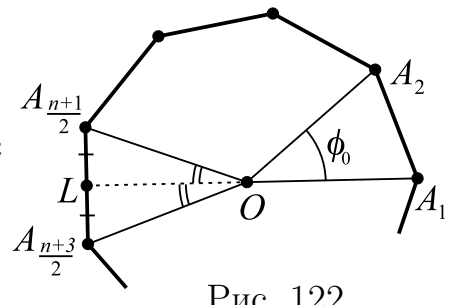


Рис. 122

б) снова, проверим это утверждение только для a_1 — серединного перпендикуляра к $[A_1 A_2]$. Обозначим через K и L соответственно середины сторон $[A_1 A_2]$ и $[A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}+2}]$ (рис. 121). Из (1) мы знаем, что треугольники $O A_1 A_2$ и $O A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}+2}$ — равнобедренные, поэтому $[OK]$ и $[OL]$ являются биссектрисами в этих треугольниках, откуда

$$\widehat{LOK} = \widehat{A_1 O A_{\frac{n}{2}+1}} - \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0}{2} = \widehat{A_1 O A_{\frac{n}{2}+1}} = 180^\circ.$$

В результате, прямая $a_1 = (OK) = (OL)$ одновременно является серединным перпендикуляром к сторонам $[A_1 A_2]$ и $[A_{\frac{n}{2}+1} A_{\frac{n}{2}+2}]$.

3) обозначим через $\varphi_0 = 360^\circ/n$ и пусть L — середина стороны $[A_{\frac{n+1}{2}} A_{\frac{n+3}{2}}]$ (рис. 122). Треугольник $O A_{\frac{n+1}{2}} A_{\frac{n+3}{2}}$ является равнобедренным и $[OL]$ — его биссектриса, поэтому

$$\widehat{A_1 O L} = \widehat{A_1 O A_{\frac{n+1}{2}}} + \frac{\varphi_0}{2} = \left(\frac{n+1}{2} - 1 \right) \varphi_0 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Таким образом, прямая $(A_1 O) = (OL)$ является серединным перпендикуляром к стороне $[A_{\frac{n+1}{2}} A_{\frac{n+3}{2}}]$.

■

Теорема 4.5. Пусть $\Phi = A_1 A_2 \dots A_n$ — правильный n -угольник, O — его центр, $\varphi_0 = 360^\circ/n$. Пусть также при четных n прямые a_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) проходят через противоположные вершины этого многоугольника или середины его противоположных сторон; при нечетных n прямые $a_i = (A_i O)$ ($i \in \{1, \dots, n\}$). Тогда $D(\Phi) = \mathcal{X}$, где

$$\mathcal{X} = \{R_O^{\varphi_0(i-1)} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\} \cup \{S_{a_i} : i \in \mathbb{N}, i \leq n\}.$$



Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что любое движение $f \in \mathcal{X}$ вершины Φ переводит в вершины Φ , а стороны Φ — в стороны Φ , поэтому $f(\Phi) = \Phi$ и $f \in D(\Phi)$, т.е. $\mathcal{X} \subseteq D(\Phi)$. Осталось показать, что $D(\Phi) \subseteq \mathcal{X}$.

Рассмотрим произвольное движение $f \in D(\Phi)$ и $\omega = \omega(O, r)$ — окружность, описанную около Φ . Поскольку $f(\Phi) = \Phi$, вершины A_1, A_2, A_3 (которые лежат на окружности ω) переходят в вершины $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$ этого же многоугольника, которые также лежат на окружности ω . Отсюда $f(\omega) = \omega$ и $f \in D(\omega) = D(\{O\})$ (см. первый и второй примеры). Поэтому $f = R_O^\varphi$ или $f = S_a$, где $O \in a$. Рассмотрим отдельно эти два случая.

1-й случай: $f = R_O^\varphi$. При этом повороте вершина A_1 переходит в некоторую вершину A_i этого же многоугольника, поэтому $\varphi = \varphi_0(i-1)$. Стало быть, $f = R_O^{\varphi_0(i-1)} \in \mathcal{X}$.

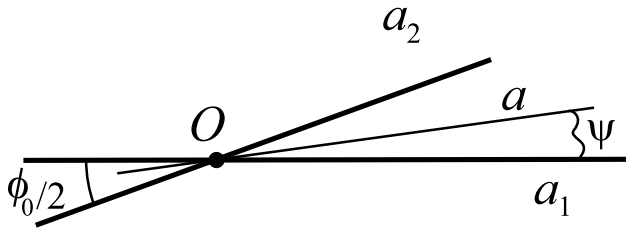


Рис. 123

2-й случай: $f = S_a$, где $O \in a$.
О.п.: предположим, что $a \neq a_i$ для всех $i \in \mathbb{N}, i \leq n$. Все прямые a_i разбивают α на $2n$ одинаковых углов, каждый из которых имеет величину $\varphi_0/2$. Прямая a отличается от этих прямых, но также проходит через точку O , поэтому попадает в одну пару вертикальных углов. Будем считать, что эта пара вертикальных углов образована прямыми a_1 и a_2 (иначе вершины и прямые можно переименовать). С какой-то из этих двух прямых прямая a образует меньший угол, чем с другой. Для определенности, $\widehat{a_1, a} = \psi \leq \widehat{a, a_2}$ (рис. 123). Тогда $\psi \leq \widehat{a_1, a_2}/2$, т.е. $\psi \leq \varphi_0/4$. По трем точкам, не лежащим на одной прямой, несложно проверить, что $S_a \circ S_{a_1} = R_O^{2\psi}$. Поскольку S_{a_1} и S_a лежат в $D(\Phi)$, по первой теореме получим, что $R_O^{2\psi}$ также должен принадлежать $D(\Phi)$ причем $0 < 2\psi \leq \varphi_0/2$. Мы обнаружили «новый» поворот в $D(\Phi)$, отличный от тех, что были описаны в первом случае. $\nwarrow \nearrow$.

Итак, группа симметрий правильного n -угольника состоит из $2n$ движений, среди которых n поворотов и n осевых симметрий. Несложно убедиться в некоммутативности этой группы (осевые симметрии с неперпендикулярными осями неперестановочны). Поэтому для любого четного числа $k \geq 6$

■



существует пример некоммутативной группы, состоящей из k элементов. Вопрос: можно ли привести пример некоммутативной группы с k элементами, где $k \leq 5$? Другими словами, верно ли, что группа симметрий правильного треугольника является примером некоммутативной группы с минимальным числом элементов?

2.5. Ориентация плоскости

Напомним, что любая прямая $a \subseteq \alpha$ разбивает α на две открытые полуплоскости: $\overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\overset{\circ}{\alpha}_2(a)$. Если $C \in \alpha$ и $C \notin a$, то $\overset{\circ}{\alpha}(a, C)$ — та из двух открытых полуплоскостей, которая содержит точку C , при этом C называется определяющей точкой. Если нам будет не важно, какую из двух открытых полуплоскостей с границей a рассматривать, используем обозначение $\overset{\circ}{\alpha}(a)$. При добавлении к открытой полуплоскости ее границы получается полуплоскость (или замкнутая полуплоскость): $\alpha(a) = \overset{\circ}{\alpha}(a) \cup a$.

Определение. Пусть $O \in]AA_1[$, $a = (OA) \subseteq \alpha$. Флагом $\mathcal{F}$ называют $[OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ (рис. 124), при этом O — центр (или начало) флага, $[OA)$ — его древко, $\overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ — полотнище флага $\mathcal{F}$. Противоположным к флагу $\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ называется флаг $-\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$ (рис. 125). Дополнительным к флагу $\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ называется флаг $\overline{\mathcal{F}} = [OA_1) \cup \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$ (рис. 126). **Flag** — множество всех флагов плоскости α .

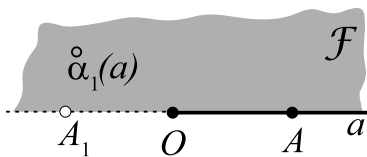


Рис. 124

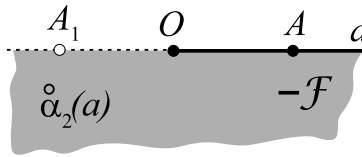


Рис. 125

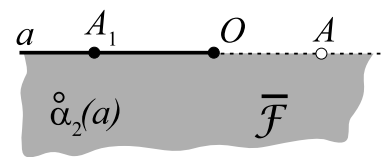


Рис. 126

Сначала введем одинаковую ориентированность для флагов с общим центром.

Определение А. Пусть $a = (OA)$, $b = (OB)$, $a, b \subseteq \alpha$. Флаги $\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [OB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, которые имеют один и тот же центр, называются одинаково ориентированными, если выполняется одно из двух условий:

- 1) $(OA) = (OB)$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ или $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$;
- 2) $(OA) \neq (OB)$ и ровно один из флагов — $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ — содержит древко другого флага.



В остальных случаях флаги с общим центром называются *противоположно ориентированными*.

Одинаково ориентированные флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с общим центром будем обозначать $\mathcal{F} \dot{\sim}_A \mathcal{G}$, а противоположно ориентированные флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с общим центром будем обозначать $\mathcal{F} \dot{\nabla}_A \mathcal{G}$. В частности, $\mathcal{F} \dot{\nabla}_A (-\mathcal{F})$.

На рис. 127 флаги $\mathcal{F} = [OA) \cup \dot{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [OB) \cup \dot{\alpha}_1(b)$ одинаково ориентированы ($\mathcal{F} \dot{\sim}_A \mathcal{G}$), поскольку $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$. На рис. 128 флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ противоположно ориентированы ($\mathcal{F} \dot{\nabla}_A \mathcal{G}$), поскольку $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \subseteq \mathcal{G}$. На рис. 129 флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ также противоположно ориентированы ($\mathcal{F} \dot{\nabla}_A \mathcal{G}$), поскольку $[OB) \not\subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$.

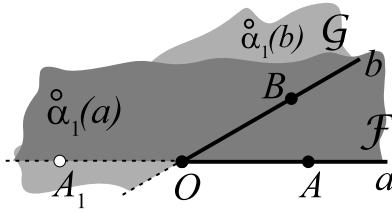


Рис. 127

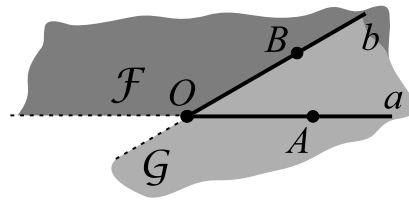


Рис. 128

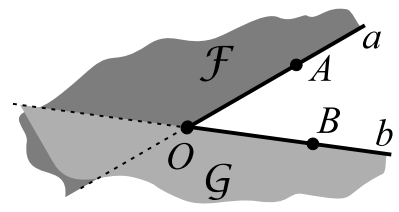


Рис. 129

Прежде чем мы установим основные результаты, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5.1. Пусть $B \notin a = (OA)$. Тогда $B \in \dot{\alpha}(a) \Leftrightarrow]OB) \subseteq \dot{\alpha}(a)$.

Доказательство. $\Rightarrow$) выберем произвольную точку $X \in]OB)$, тогда B и X лежат на прямой (OB) по одну сторону от O , т.е. $O \notin [BX]$. Отсюда $[BX] \cap a = \emptyset$ (поскольку $\{O\} = (OB) \cap a$ и $O \notin [BX]$), что дает $X \in \dot{\alpha}(a, B) = \dot{\alpha}(a)$. Тем самым мы проверили, что $]OB) \subseteq \dot{\alpha}(a)$.

$\Leftarrow$) очевидно выполняется, поскольку $B \in]OB) \subseteq \dot{\alpha}(a)$. ■

Таким образом, для проверки включения $]OB) \subseteq \dot{\alpha}(a)$ (при условии, что вершина луча лежит на этой прямой, а точка B — нет) достаточно выяснить, что одна точка открытого луча $]OB)$ лежит в $\dot{\alpha}(a)$.

Лемма 5.2. Пусть $\mathcal{F} = [OA) \cup \dot{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [OB) \cup \dot{\alpha}_1(b)$. Тогда $\mathcal{G} \dot{\sim}_A \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \dot{\sim}_A \overline{\mathcal{F}}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если $(OB) = (OA)$, то условие $\mathcal{G} \dot{\sim}_A \mathcal{F}$ может выполняться лишь в двух случаях: $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ или $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$. Осталось только воспользоваться определением, по которому $\mathcal{F} \dot{\sim}_A \overline{\mathcal{F}}$ и $\overline{\mathcal{F}} \dot{\sim}_A \overline{\mathcal{F}}$.



Пусть теперь $(OA) \neq (OB)$ и $O \in]AA_1[$. Тогда ровно один из флагов — $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ — содержит древко другого флага. Б.о.о. будем считать, что одновременно выполняются $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$ (рис. 127). По предыдущей лемме это можно переписать в виде $B \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $A \notin \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, что равносильно $B \notin \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$ и $A_1 \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$. Снова воспользуемся предыдущей леммой, заменяем последние условия на $[OB) \not\subseteq \overline{\mathcal{F}}$ и $[OA_1) \subseteq \mathcal{G}$, поэтому ровно один флаг из $\overline{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{G}$ содержит древко другого флага, что по определению дает $\mathcal{G} \dot{\lhd}_A \overline{\mathcal{F}}$.

$\Leftarrow$) по уже доказанной части, из $\mathcal{G} \dot{\lhd}_A \overline{\mathcal{F}}$ следует, что $\mathcal{G} \dot{\lhd}_A \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Осталось лишь заметить, что $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \mathcal{F}$. ■

Напомним, что обычным углом называется объединение одномерного угла $[OA) \cup [OB)$ (при условии, что $B \notin (OA)$) с его внутренней областью, т.е. с множеством $\overset{\circ}{\alpha}((OA), B) \cap \overset{\circ}{\alpha}((OB), A)$.

Лемма 5.3. Пусть $\angle AOB$ — обычный угол. Тогда

- 1) для любой точки $X \in]AB[$ следует, что X лежит во внутренней области $\angle AOB$;
- 2) для любой точки C из внутренней области $\angle AOB$ луч $[OC)$ пересекается с интервалом $]AB[$.

Доказательство. 1) если $X \in]AB[$ (рис. 130), то по аксиоме II.3 точка A не может лежать на отрезке $[BX]$, поэтому $[BX] \cap a = \emptyset$ (так как $\{A\} = (BX) \cap a$), откуда точки B и X лежат по одну сторону от a и $X \in \overset{\circ}{\alpha}((OA), B)$. Аналогично доказывается, что $X \in \overset{\circ}{\alpha}((OB), A)$.

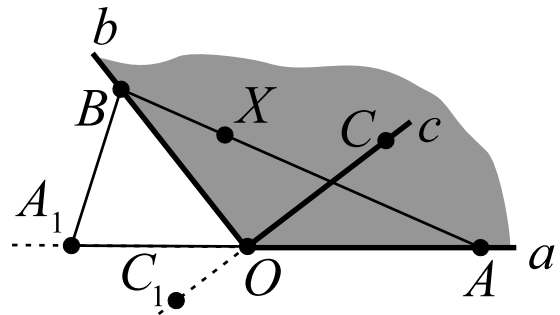


Рис. 130

2) обозначим через $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) = \overset{\circ}{\alpha}(a, B)$, $\overset{\circ}{\alpha}_1(b) = \overset{\circ}{\alpha}(b, A)$. По условию точка C принадлежит $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) \cap \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ — внутренней области $\angle AOB$. Также выберем точки A_1 и C_1 так, чтобы $O \in]AA_1[\cap]CC_1[$ (рис. 130). Будем применять аксиому Паша к прямой $c = (OC)$ и треугольнику ABA_1 . Прямая c не проходит через вершины $\triangle ABA_1$, иначе точка C попала бы на a или на b , что противоречит выбору точки C . По первой лемме $]A_1B) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $]OC_1) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$ (так как $C_1 \in \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$), поэтому $[OC_1) \cap [A_1B] = \emptyset$ (*). Точки A и A_1 лежат по разные стороны от b , поэтому из $A \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ сле-



дует, что $A_1 \in \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$. По первой лемме снова переходим к открытым лучам: $]BA_1) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$ и $]OC) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$. Отсюда $]OC) \cap [A_1B] = \emptyset$ (**). Из (*) и (**) следует, что $c = [OC_1) \cup [OC)$ не пересекает $[A_1B]$ и по аксиоме Паша получим, что $c \cap]AB[\neq \emptyset$. Осталось только проверить, что $]OC_1) \cap [AB] = \emptyset$. В третий раз используя первую лемму, приходим к $]AB) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, но $]OC_1) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$, откуда $]OC_1) \cap [AB] = \emptyset$. Ясно, что из условий $c \cap]AB[\neq \emptyset$ и $]OC_1) \cap [AB] = \emptyset$ следует, что луч $]OC)$ пересекается с интервалом $]AB[$.

■

Если никакие три вершины выпуклого многоугольника не лежат на одной прямой, то биссектрисы углов любых двух его смежных вершин пересекутся. В следующей лемме мы сформулируем более общее утверждение, которое хоть и не используется в развитии теории ориентации плоскости, но помогает при доказательстве существования разных точек (например, центров вписанных или невписанных окружностей).

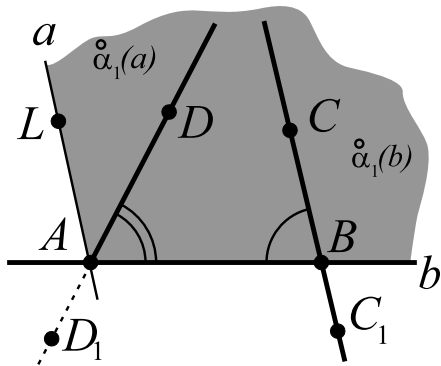


Рис. 131

Лемма 5.4. Пусть $b = (AB)$, $C, D \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, причем выполняется неравенство $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} < 180^\circ$, тогда лучи $[AD)$ и $[BC)$ пересекаются.

Доказательство. Проведем через точку A прямую $a \parallel (BC)$ и выберем на ней L так, чтобы $L \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ (рис. 131), пусть $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) = \overset{\circ}{\alpha}(a, B)$. Сразу из данного нам неравенства $\widehat{BAD} + \widehat{ABC} < 180^\circ = \widehat{LAB} + \widehat{ABC}$ заключаем, что $\angle BAD < \angle LAB$ и поэто-

му $]AD)$ лежит во внутренней области $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) \cap \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ обычного угла $\angle BAL$. По первой лемме $D \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a) \cap \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$.

Из аксиомы Евклида о параллельных следует, что (AD) не параллельна (BC) , поэтому найдется такая точка M^* , что $\{M^*\} = (AD) \cap (BC)$, и надо лишь показать, что эта точка лежит на $[AD)$ и $[BC)$. Пусть точки D_1 и C_1 выбраны так, что $A \in]DD_1[$ и $B \in]CC_1[$. Из того, что D и D_1 лежат по разные стороны от a , и условия $D \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, следует, что $D_1 \in \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$ и $]AD_1) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$. В то же время $B \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $(BC) \parallel a$, поэтому $(BC) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Делаем вывод, что $]AD_1) \cap (BC) = \emptyset$ и $M^* \notin]AD_1)$, т.е. $M^* \in [AD)$. По выбору точки C_1 , выполняется $C_1 \in \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$, откуда (по первой лемме)



$]BC_1) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$, поэтому $]BC_1) \cap [AD) = \emptyset$. Таким образом, $M^* \notin]BC_1)$, откуда $M^* \in [BC)$.

■

Напомним, что отношение на некотором множестве является отношением эквивалентности (см. Алгебра 10, гл. «Введение в теорию множеств»), если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Такое отношение позволяет разбить множество на классы эквивалентности.

Теорема 5.5. *Отношение $\sim_A$ на множестве всех флагов с общим центром является отношением эквивалентности.*

Доказательство. 1) рефлексивность очевидно выполняется, так как по определению $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{F}$.

2) симметричность также сразу следует из определения, поскольку из $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ получим $\mathcal{G} \sim_A \mathcal{F}$.

3) пусть $a = (OA)$, $b = (OB)$, $c = (OC)$, $\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, $\mathcal{G} = [OB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, $\mathcal{H} = [OC) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$. Кроме того, выполняются два отношения: $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \sim_A \mathcal{H}$. Докажем, что $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{H}$.

Если $(OA) = (OB)$, то лемма 5.2 позволяет заменить $\mathcal{G}$ на $\mathcal{F}$ и транзитивность очевидна. Аналогично рассуждаем и в случае $(OB) = (OC)$. Наконец, если $(OA) = (OC) \neq (OB)$ по лемме 5.2 можно считать, что $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ или $\mathcal{H} = -\mathcal{F}$. Первое равенство дает $\mathcal{H} \sim_A \mathcal{F}$. Второе равенство приводит к тому, что сразу выполняются два условия: $\mathcal{G} \sim_A \mathcal{F}$ и $\mathcal{G} \sim_A (-\mathcal{F})$. Плотноща у флагов $\mathcal{F}$ и $-\mathcal{F}$ противоположные, поэтому ровно один из этих флагов содержит древко флага $\mathcal{G}$ и условия $\mathcal{G} \sim_A \mathcal{F}$ и $\mathcal{G} \sim_A (-\mathcal{F})$ одновременно выполняться не могут. Далее считаем, что прямые a , b и c попарно различны.

Применяя не более двух раз лемму 5.2, можно добиться, чтобы $[OB)$ и $[OC)$ сразу оказались во флаге $\mathcal{F}$ (переходя, если это необходимо, к дополнительным флагам). Таким образом, для флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ уже выполняется: $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$ (*).

Остается рассмотреть только два случая расположения флагов $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$.

1-й случай: $[OC) \subseteq \mathcal{G}$ и $[OB) \not\subseteq \mathcal{H}$ (рис. 132). По первой лемме условия $[OC) \subseteq \mathcal{G}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$ (см. (*)) можно переписать в виде $C \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ и $A \in \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$, поэтому A и C лежат по разные стороны от прямой b и найдется такая точка B^* , что $\{B^*\} = b \cap]AC[$ (**). Пусть точка B_1 выбрана так, что $O \in]BB_1[$, тогда открытый луч $]OB_1)$ содержится в $\overset{\circ}{\alpha}_2(a)$, поэтому



пересекаться с интервалом $]AC[$ (который содержится в $\overset{\circ}{\alpha}_1(a)$) не может. Таким образом, $(**)$ можно усилить: $\{B^*\} =]OB) \cap]AC[$ $(***)$. Вспомним, что $[OB) \not\subseteq \mathcal{H}$, поэтому $B \in \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$ и по $(***)$ также и $B^* \in \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$. Условие $B^* \in]AC[$ дает $C \notin [AB^*]$, поэтому точки B^* и A лежат по одну сторону от c , т.е. $A \in \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$ и $A \notin \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$. Переписывая эти условия для лучей, имеем $[OA) \not\subseteq \mathcal{H}$ и $[OC) \subseteq \mathcal{F}$, что по определению дает $\mathcal{F} \curvearrowright_A \mathcal{H}$.

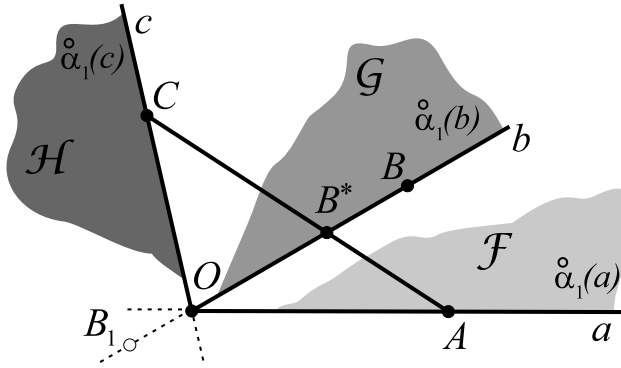


Рис. 132

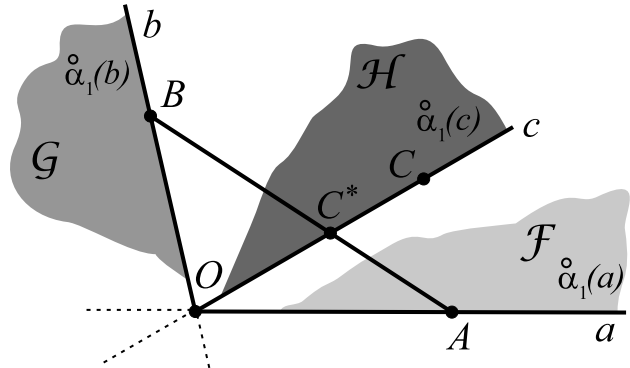


Рис. 133

2-й случай: $[OB) \subseteq \mathcal{H}$ и $[OC) \not\subseteq \mathcal{G}$ (рис. 133). По первой лемме получим, что $C \notin \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, поэтому $C \in \overset{\circ}{\alpha}_2(b) \cap \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ — внутренней области обычного угла $\angle AOB$. Применяя (2) леммы 5.3, получим, что $[OC) \cap]AB[\neq \emptyset$, т.е. точки A и B лежат по разные стороны от c . Тогда из $B \in \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$ следует, что $A \in \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$. В очередной раз применяем первую лемму, переписывая это условие для лучей: $[OA) \not\subseteq \mathcal{H}$ и $[OC) \subseteq \mathcal{F}$, что по определению дает $\mathcal{F} \curvearrowright_A \mathcal{H}$.

■

Теорема 5.6. Для двух произвольных флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с общим центром выполняется в точности одно из следующих утверждений: $\mathcal{G} \curvearrowright_A \mathcal{F}$ или $\mathcal{G} \curvearrowright_A (-\mathcal{F})$.

Доказательство. **I. Хотя бы одно.** Пусть $a = (OA)$, $b = (OB)$, $\mathcal{F} = [OA) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, $\mathcal{G} = [OB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$.

Если $a = b$, то по лемме 5.2 можно считать, что $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ или $\mathcal{G} = (-\mathcal{F})$, тогда хотя бы одно из утверждений $\mathcal{G} \curvearrowright_A \mathcal{F}$ или $\mathcal{G} \curvearrowright_A (-\mathcal{F})$ очевидно выполняется.

Пусть теперь $a \neq b$, тогда по лемме 5.2 можно считать, что $[OB) \subseteq \mathcal{F}$. Осталось рассмотреть два случая: $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$ или $[OA) \subseteq \mathcal{G}$.

1-й случай: $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \not\subseteq \mathcal{G}$. Тогда по определению $\mathcal{G} \curvearrowright_A \mathcal{F}$.



2-й случай: $[OB) \subseteq \mathcal{F}$ и $[OA) \subseteq \mathcal{G}$. Тогда $B \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, поэтому $B \notin \overset{\circ}{\alpha}_2(a)$. В результате $[OB) \not\subseteq (-\mathcal{F})$ и $[OA) \subseteq \mathcal{G}$, тогда по определению $\mathcal{G} \nrightarrow_A (-\mathcal{F})$.

II. Только одно. О/п: $\mathcal{G} \nrightarrow_A (-\mathcal{F})$ и $\mathcal{G} \nrightarrow_A \mathcal{F}$, тогда по транзитивности получим $\mathcal{F} \nrightarrow_A (-\mathcal{F})$. $\nrightarrow$.

■

От флагов с общим центром переходим к флагам с сонаправленными древками.

Определение. Лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются сонаправленными в каждом из следующих двух случаев:

- 1) $(AB) = (CD)$ и один луч содержится в другом;
- 2) $(AB) \parallel (CD)$, $(AB) \neq (CD)$ и оба луча $[AB)$, $[CD)$ лежат по одну сторону от (AC) .

Сонаправленные лучи обозначаются через $[AB) \uparrow [CD)$. Из $[AB) \subseteq [AB)$ сразу следует, что $[AB) \uparrow [AB)$.

Определение В. Пусть $a = (AB)$, $b = (CD)$, $a, b \subseteq \alpha$, $[AB) \uparrow [CD)$. Флаги $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, которые имеют сонаправленные древки, называются одинаково ориентированными, если выполняется одно из двух условий:

- 1) $(OA) = (OB)$ и $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) = \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$;
- 2) $(OA) \neq (OB)$ и ровно один из флагов — $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ — содержит древко другого флага.

В остальных случаях флаги с сонаправленными древками противоположно ориентированными.

Одинаково ориентированные флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с сонаправленными древками будем обозначать $\mathcal{F} \nrightarrow_B \mathcal{G}$, а противоположно ориентированные флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с сонаправленными древками будем обозначать $\mathcal{F} \nrightarrow_B \mathcal{G}$. В частности, $\mathcal{F} \nrightarrow_B (-\mathcal{F})$.

На рис. 134 флаги $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ одинаково ориентированы ($\mathcal{F} \nrightarrow_B \mathcal{G}$), поскольку $[CD) \subseteq \mathcal{F}$ и $[AB) \not\subseteq \mathcal{G}$. На рис. 135 флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ противоположно ориентированы ($\mathcal{F} \nrightarrow_B \mathcal{G}$), поскольку $[AB) \subseteq \mathcal{G}$ и $[CD) \subseteq \mathcal{F}$. На рис. 136 флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ также противоположно ориентированы ($\mathcal{F} \nrightarrow_B \mathcal{G}$), поскольку $[AB) \not\subseteq \mathcal{G}$ и $[CD) \not\subseteq \mathcal{F}$.

Проверку на одинаковую ориентированность флагов с сонаправленными древками можно осуществлять проще: один из флагов должен содержать (целиком) полотнище другого флага. Покажем это. Случай $(AB) = (CD)$ очевиден, поэтому считаем, что $(AB) \neq (CD)$. Пусть для флагов $\mathcal{F} =$



$= [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ с сонаправленными древками выполняется $[CD) \subseteq \mathcal{F}$ и $[AB) \not\subseteq \mathcal{G}$ (рис. 134). Условия $C \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $b \parallel a$ дают, что $b \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Любая точка $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ с точкой A лежат по разные стороны от b , поэтому найдется точка Y , для которой $\{Y\} = [XA] \cap b$. Откуда $A \notin [XY]$ или $[XY] \cap a = \emptyset$, что дает $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ (здесь мы использовали то, что $Y \in b \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$). В результате $\overset{\circ}{\alpha}_1(b) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Для доказательства обратного утверждения предположим, что $\overset{\circ}{\alpha}_1(b) \not\subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Из этого условия, а также из $a \parallel b$, $a \neq b$ следует, что $a \not\subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, поэтому $a \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$. Тогда, выбрав произвольную $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, во-первых, найдем $\{Y\} = [XA] \cap b$; во-вторых, учитывая $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, получим $Y \in]AX] \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Из условий $b \parallel a$ и $Y \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ следует, что $b \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Итак, $[CD) \subseteq \mathcal{F}$ и $[AB) \not\subseteq \mathcal{G}$, поэтому $\mathcal{F} \not\sim_B \mathcal{G}$. Теперь становится совсем просто доказать транзитивность $\sim_B$.

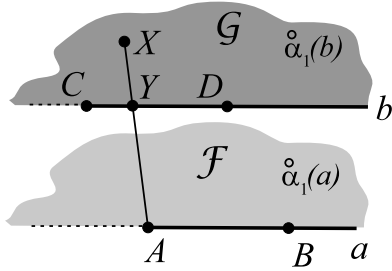


Рис. 134

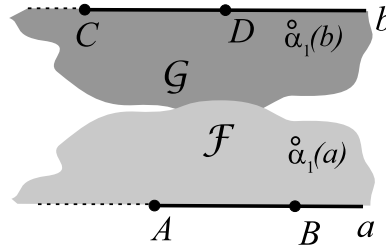


Рис. 135

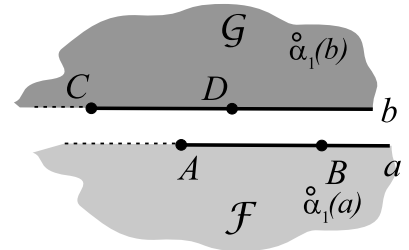


Рис. 136

Теорема 5.7. *Отношение $\sim_B$ является отношением эквивалентности на множестве флагов с сонаправленными древками.*

Доказательство. 1) рефлексивность очевидно выполняется, так как по определению $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{F}$.

2) симметричность также сразу следует из определения, поскольку из $\mathcal{F} \sim_A \mathcal{G}$ получим $\mathcal{G} \sim_A \mathcal{F}$.

3) Пусть $a = (AB)$, $b = (CD)$, $c = (EF)$, $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, $\mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, $\mathcal{H} = [EF) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$, $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ и $[CD) \uparrow\uparrow [EF)$. Кроме того, выполняются два отношения: $\mathcal{F} \sim_B \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \sim_B \mathcal{H}$. Докажем, что $\mathcal{F} \sim_B \mathcal{H}$. Транзитивность отношения $\uparrow\uparrow$ на множестве лучей мы докажем в первом параграфе главы «Алгебра векторов», поэтому будем считать, что уже выполняется $[AB) \uparrow\uparrow [EF)$.

Случай совпадения двух (или всех трех) прямых из a , b и c очевиден, поэтому далее считаем эти прямые попарно различными. Из различных вариантов включения полотнищ, два случая — $\overset{\circ}{\alpha}_1(a) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(b) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$ и



$\overset{\circ}{\alpha}_1(c) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(b) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ — сразу приводят к $\mathcal{F} \nabla_B \mathcal{H}$. Два оставшихся случая рассматриваются аналогично, поэтому б.о.о. считаем, что $\overset{\circ}{\alpha}_1(b) \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, $\overset{\circ}{\alpha}_1(c)$ и прямая c находится между a и b .

Выберем произвольно $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ (рис. 137). Из $A \in \overset{\circ}{\alpha}_2(b)$ следует, что найдется такая точка Y , что $\{Y\} = [XA] \cap b$. Поскольку прямая c лежит между a и b , существует точка Z , для которой $c \cap [AY] = \{Z\}$. Условия $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $Z \in [AX]$ дают $[ZX] \cap a = \emptyset$, поэтому $Z \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $c \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ (так как $c \parallel a$) (*). Далее, используя условия $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$ и $]XA[\cap c \neq \emptyset$, получим, что точки X и A лежат по разные стороны от прямой c , поэтому $A \in \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$ и $a \subseteq \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$ (так как $a \parallel c$) (**). Из результатов (*) и (**) получим $[EF) \subseteq \mathcal{F}$ и $[AB) \not\subseteq \mathcal{H}$, что дает $\mathcal{F} \nabla_B \mathcal{H}$. ■

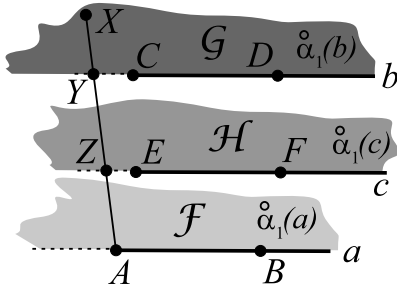


Рис. 137

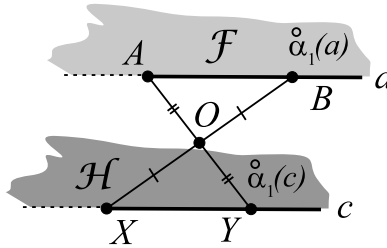


Рис. 138

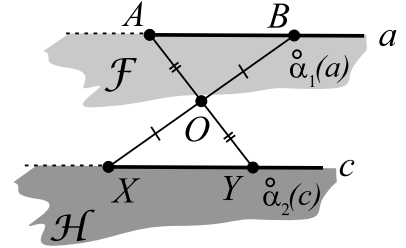


Рис. 139

Следующее утверждение позволит по определению **В** переходить от одного центра к другому.

Теорема 5.8. Для любого флага $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и точки $X \in a$ найдется такой флаг $\mathcal{H}$ с центром в точке X , что $\mathcal{F} \nabla_B \mathcal{H}$.

Доказательство. Если $X \in a$, обозначим через $\leq$ — порядок на прямой a , порожденный лучом $[AB)$, и выберем $Y \in a$ так, чтобы $X < Y$. Тогда $[AB) \uparrow \uparrow [XY)$ и флаг $\mathcal{H} = [XY) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ — искомый.

Пусть теперь $X \notin a$ и O — середина $[BX]$ (рис. 138), тогда выберем Y так, чтобы O была серединой и отрезка AY . Диагонали в четырехугольнике $ABYX$ точкой O делятся пополам, поэтому $ABYX$ — параллелограмм и $a \parallel (XY)$. Из условия $(BY) \parallel (AX)$ следует, что $[BY] \cap (AX) = \emptyset$, поэтому точки B, Y а, стало быть, и лучи $[AB), [XY)$ лежат по одну сторону от (AX) . Мы проверили, что $[XY) \uparrow \uparrow [AB)$. Обозначим теперь через $c = (XY)$, $\overset{\circ}{\alpha}_1(c) = \overset{\circ}{\alpha}(c, A)$ и рассмотрим два случая.

1-й случай: $X \notin \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ (рис. 138). Тогда $\mathcal{H} = [XY) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$ — искомый флаг, поскольку $[AB) \subseteq \mathcal{H}$ и $[XY) \not\subseteq \mathcal{F}$.



2-й случай: $X \in \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ (рис. 139). Тогда $\mathcal{H} = [XY) \cup \overset{\circ}{\alpha}_2(c)$ — искомым флагом, поскольку $[AB) \not\subseteq \mathcal{H}$ и $[XY) \subseteq \mathcal{F}$.

■

Одинаковая ориентация двух произвольных флагов плоскости α вводится следующим образом.

Определение С. Пусть $a = (AB)$, $b = (CD)$, $a, b \subseteq \alpha$. Флаги $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$ и $\mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$ называются одинаково ориентированными (обозначение: $\curvearrowright$), если найдется конечное множество флагов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$, для которых

1) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}$;

2) при всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ выполняется $\mathcal{F}_i \curvearrowright_A \mathcal{F}_{i+1}$ или $\mathcal{F}_i \curvearrowright_B \mathcal{F}_{i+1}$.

Если флаги $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ не являются одинаково ориентированными, они называются противоположно ориентированными (обозначение: $\mathcal{F} \nrightarrow \mathcal{G}$).

Для флагов на рис. 140 выполняются два соотношения: $\mathcal{F}_1 \curvearrowright_B \mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_2 \curvearrowright_A \mathcal{F}_3$. По определению получим, что $\mathcal{F}_1 \curvearrowright \mathcal{F}_3$ и искомое конечное множество состоит из трех флагов.

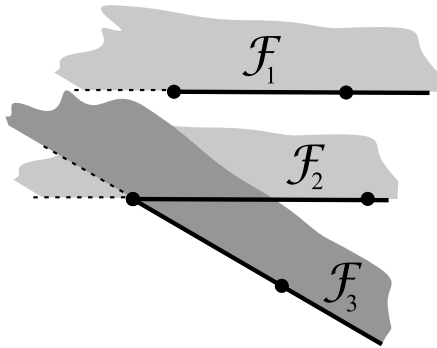


Рис. 140

Теорема 5.9. Отношение $\curvearrowright$ является отношением эквивалентности на **Flag** — множестве всех флагов плоскости α .

Доказательство. 1) рефлексивность очевидна, поскольку $\mathcal{F} \curvearrowright_A \mathcal{F}$ и искомое конечное множество состоит из двух флагов: $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}$.

2) пусть $\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{G}$ и $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ — конечное множество из определения. Учитывая симметричность отношений $\curvearrowright_A$ и $\curvearrowright_B$, получим, что конечное множество флагов $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n-1}, \dots, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1$ обеспечивает $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{F}$.

3) пусть $\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{H}$. Тогда по определению найдутся два множества флагов: $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n\}$ и $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k\}$. Обозначим через $\mathcal{F}_{n+i} = \mathcal{G}_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тогда конечное множество флагов $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+2}, \dots, \mathcal{F}_{n+k}$ обеспечивает $\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{H}$.

■

Следствие. Пусть $\mathcal{F}^*$ — флаг плоскости α . Тогда множество **Flag** разбивается на два класса $\mathcal{K}(\mathcal{F}^*)$ и $\mathcal{K}(-\mathcal{F}^*)$, где

$$\mathcal{K}(\mathcal{F}^*) = \{\mathcal{F} \in \mathbf{Flag} : \mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{F}^*\} \quad \text{и} \quad \mathcal{K}(-\mathcal{F}^*) = \{\mathcal{G} \in \mathbf{Flag} : \mathcal{G} \curvearrowright (-\mathcal{F}^*)\}.$$



Доказательство. Пусть $\mathcal{F}^* = [AB] \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$, где $a = (AB) \subseteq \alpha$. Рассмотрим произвольный $\mathcal{H} = [EF] \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(c)$, где $c = (EF) \subseteq \alpha$. По теореме 5.8 найдется такой флаг $\mathcal{H}_2 = [AC] \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, что $b = (AC)$, $[AC] \uparrow\uparrow [EF]$ и $\mathcal{H} \uparrow\uparrow_B \mathcal{H}_2$. Флаги $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{F}^*$ имеют общий центр, поэтому по теореме 5.6 получим: $\mathcal{H}_2 \uparrow\uparrow_A \mathcal{F}^*$ или $\mathcal{H}_2 \uparrow\uparrow_A (-\mathcal{F}^*)$. В первом случае множество из трех флагов $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{F}^*$ гарантирует $\mathcal{H} \uparrow\uparrow \mathcal{F}^*$. Во втором случае множество из трех флагов $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_2$, $(-\mathcal{F}^*)$ гарантирует $\mathcal{H} \uparrow\uparrow (-\mathcal{F}^*)$. Тем самым, мы доказали, что $\mathbf{Flag} = \mathcal{K}(\mathcal{F}^*) \cup \mathcal{K}(-\mathcal{F}^*)$.

Осталось проверить, что $\mathcal{K}(\mathcal{F}^*) \cap \mathcal{K}(-\mathcal{F}^*) = \emptyset$. О/п: нашелся флаг $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{K}(\mathcal{F}^*) \cap \mathcal{K}(-\mathcal{F}^*)$. Тогда одновременно выполняются два утверждения: $\mathcal{H}_0 \uparrow\uparrow \mathcal{F}^*$ и $\mathcal{H}_0 \uparrow\uparrow (-\mathcal{F}^*)$. По транзитивности имеем $\mathcal{F}^* \uparrow\uparrow (-\mathcal{F}^*)$. $\nearrow \nwarrow$.



Определение. Множества $\mathcal{K}(\mathcal{F}^*)$ и $\mathcal{K}(-\mathcal{F}^*)$ из предыдущего утверждения соответственно называются положительной и отрицательной ориентациями по отношению к флагу $\mathcal{F}^*$.

Определение. Пусть (xOy) — декартова система координат плоскости α и $\mathcal{F}_0 = [Ox] \cup \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ — флаг с древком $[Ox]$, в качестве полотнища которого выбрана «верхняя» полуплоскость. Тогда $\mathcal{K}(\mathcal{F}_0)$ называется положительной ориентацией плоскости α , а $\mathcal{K}(-\mathcal{F}_0)$ называется отрицательной ориентацией плоскости α .

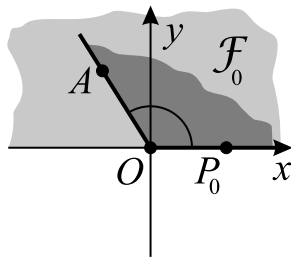


Рис. 141

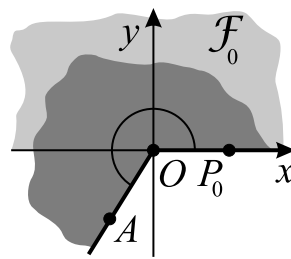


Рис. 142

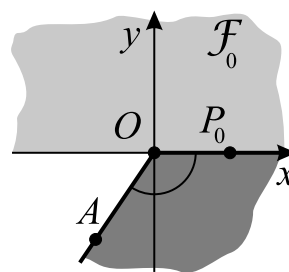


Рис. 143

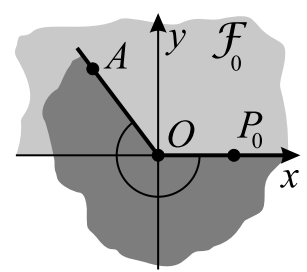


Рис. 144

Определение. Пусть в декартовой системе координат (xOy) дана точка $P_0(1, 0)$. Неполный угол P_0OA отложен от луча $[Ox]$ в положительном направлении, если $\angle P_0OA \subseteq \mathcal{F}_0$ (рис. 141) или $\mathcal{F}_0 \subseteq \angle P_0OA$ (рис. 142). В остальных случаях $\angle P_0OA$ отложен от луча $[Ox]$ в отрицательном направлении (рис. 143 и рис. 144).



2.6. Движения первого рода и движения второго рода

Сначала выясним, как действует произвольное движение на любой флаг. Мы продолжаем рассматривать подмножества некоторой плоскости α (в частности, **Flag** — множество всех флагов α) и движения этой плоскости.

Теорема 6.1. Пусть $g \in D_2$ и $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Flag}$. Тогда

- 1) $g(\mathcal{F}) \in \mathbf{Flag}$;
- 2) $g(-\mathcal{F}) = -g(\mathcal{F})$;
- 3) $g(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{g(\mathcal{F})}$;
- 4) если $\mathcal{F} \dot{\lhd} \mathcal{G}$, то $g(\mathcal{F}) \dot{\lhd} g(\mathcal{G})$;
- 5) если $\mathcal{F} \dot{\lhd}^* \mathcal{G}$, то $g(\mathcal{F}) \dot{\lhd}^* g(\mathcal{G})$.

Доказательство. 1) пусть $\mathcal{F} = [AB) \cup \dot{\alpha}_1(a)$, где $a = (AB) \subseteq \alpha$ и $a' = (A'B')$, где $A' = g(A)$, $B' = g(B)$. По теореме 1.4 сразу получаем, что $a' = g(a)$, $[A'B') = g([AB)$. Выберем теперь произвольные $X, Y \in \dot{\alpha}_1(a)$, тогда $[XY] \cap a = \emptyset$, откуда (по теореме 1.2) следует, что $[X'Y'] \cap a' = \emptyset$ (как обычно, $X' = g(X)$ и $Y' = g(Y)$). Тем самым, точки X' и Y' лежат по одну сторону от a' . Пусть $\dot{\alpha}_1(a') = \dot{\alpha}(a', X')$. Выше мы проверили, что $g(\dot{\alpha}_1(a)) \subseteq \dot{\alpha}_1(a')$. Аналогично доказывается, что $g^{-1}(\dot{\alpha}_1(a')) \subseteq \dot{\alpha}_1(a)$. Применив к последнему включению движение g , получим

$$g\left(g^{-1}(\dot{\alpha}_1(a'))\right) \subseteq g(\dot{\alpha}_1(a)) \Rightarrow \dot{\alpha}_1(a') \subseteq g(\dot{\alpha}_1(a)).$$

Мы проверили обратное включение, поэтому $\dot{\alpha}_1(a') = g(\dot{\alpha}_1(a))$. В результате, $g(\mathcal{F}) = [A'B') \cup \dot{\alpha}_1(a') = \mathcal{F}' \in \mathbf{Flag}$.

2) сохраним обозначения предыдущего пункта и выберем произвольные $X \in \dot{\alpha}_1(a)$, $Z \in \dot{\alpha}_2(a)$ тогда $]XZ[\cap a \neq \emptyset$, откуда (по теореме 1.2) следует, что $[X'Z'] \cap a' \neq \emptyset$ (как обычно, $X' = g(X)$ и $Z' = g(Z)$). Тем самым, точки X' и Z' лежат по разные стороны от a' и $g(\dot{\alpha}_2(a)) = \dot{\alpha}_2(a')$. В результате,

$$g(-\mathcal{F}) = [A'B') \cup \dot{\alpha}_2(a') = -\mathcal{F}' = -g(\mathcal{F}).$$

3) снова используем обозначения из (1). Лучи $[AB)$ и $[AC)$ противоположные, если $A \in]BC[$. Переходя к образам, получим $A' \in]B'C'[($ (где $C' = g(C)$). Используя результат о противоположных открытых полуплоскостях из (2), имеем

$$g(\overline{\mathcal{F}}) = g([AC) \cup \dot{\alpha}_2(a)) = [A'C') \cup \dot{\alpha}_2(a') = \overline{\mathcal{F}'} = \overline{g(\mathcal{F})}.$$



4) для флагов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ рассмотрим несколько случаев.

1-й случай: $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a) \curvearrowright_A \mathcal{G} = [AC) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, $b = (AC)$. Случай $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ тривиален, а в случае, когда $\mathcal{G} = \overline{\mathcal{F}}$, достаточно применить (3). Пусть теперь $b \neq a$ и ровно один из флагов — $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$ — содержит древко другого флага. Б.о.о. $[AC) \subseteq \mathcal{F}$ и $[AB) \not\subseteq \mathcal{G}$, тогда $[A'C') \subseteq \mathcal{F}'$ и $[A'B') \not\subseteq \mathcal{G}'$, откуда $\mathcal{F}' \curvearrowright_A \mathcal{G}'$.

2-й случай: $\mathcal{F} = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a) \curvearrowright_B \mathcal{G} = [CD) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(b)$, $b = (CD)$. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что $\mathcal{F}' \curvearrowright_B \mathcal{G}'$.

3-й случай: $\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{G}$. Применяя определение **C** и результаты предыдущих двух случаев, получим $\mathcal{F}' \curvearrowright \mathcal{G}'$.

5) о/п: нашлись такие два флага $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0$, что $\mathcal{F}_0 \curvearrowright \mathcal{G}_0$, но выполняется $\mathcal{F}'_0 = g(\mathcal{F}_0) \curvearrowright g(\mathcal{G}_0) = \mathcal{G}'_0$. Применяя (4) к флагам $\mathcal{F}'_0$ и $\mathcal{G}'_0$ и движению g^{-1} , получим $g^{-1}(\mathcal{F}'_0) \curvearrowright g^{-1}(\mathcal{G}'_0)$, т.е. $\mathcal{F}_0 \curvearrowright \mathcal{G}_0$. $\bowtie$

Определение. Движение g сохраняет (соответственно меняет) ориентацию, если для каждого $\mathcal{F} \in \mathbf{Flag}$ следует, что $g(\mathcal{F}) \curvearrowright \mathcal{F}$ ($g(\mathcal{F}) \curvearrowright \mathcal{F}$).

Движения, которые сохраняют ориентацию плоскости, называются еще *движениями 1-го рода*. Движения, которые меняют ориентацию называются *движениями 2-го рода*.

Теорема 6.2. 1) движение g сохраняет ориентацию тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один флаг $\mathcal{F}_0$, для которого $g(\mathcal{F}_0) \curvearrowright \mathcal{F}_0$.

2) движение g меняет ориентацию тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один флаг $\mathcal{F}_0$, для которого $g(\mathcal{F}_0) \curvearrowright \mathcal{F}_0$.

3) композиция сохраняющих ориентацию движений, а также четного числа меняющих ориентацию движений, сохраняет ориентацию.

4) композиция одного сохраняющего ориентацию движения и одного меняющего ориентацию движения, а также нечетного числа меняющих ориентацию движений, меняет ориентацию.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) любой флаг подойдет в качестве $\mathcal{F}_0$.

$\Leftarrow$) следствие из теоремы 5.9 нам дает представление для множества всех флагов $\mathbf{Flag} = \mathcal{K}(\mathcal{F}_0) \cup \mathcal{K}(-\mathcal{F}_0)$, поэтому достаточно рассмотреть следующие два случая.

1-й случай: $\mathcal{F} \curvearrowright \mathcal{F}_0$. Применяя (4) предыдущей теоремы, получим

$$g(\mathcal{F}) \curvearrowright g(\mathcal{F}_0) \curvearrowright \mathcal{F}_0 \curvearrowright \mathcal{F}$$

и, используя транзитивность, приходим к $g(\mathcal{F}) \curvearrowright \mathcal{F}$.



2-й случай: $\mathcal{F} \not\sim \mathcal{F}_0$. Применяя (5) предыдущей теоремы, получим

$$g(\mathcal{F}) \not\sim g(\mathcal{F}_0) \not\sim \mathcal{F}_0 \not\sim \mathcal{F}.$$

Поскольку существует только две ориентации плоскости — $\mathcal{K}(\mathcal{F}_0)$ и $\mathcal{K}(-\mathcal{F}_0)$, то из условия $g(\mathcal{F}), \mathcal{F} \not\sim \mathcal{F}_0$, приходим к $g(\mathcal{F}) \not\sim \mathcal{F}$.

2) $\Rightarrow$) сразу следует из определения.

$\Leftarrow$) о/п: g не меняет ориентацию, тогда найдется хотя бы один флаг $\mathcal{F}_1$, для которого $g(\mathcal{F}_1) \not\sim \mathcal{F}_1$. Но тогда по (1) движение g сохраняет ориентацию и $g(\mathcal{F}_0) \not\sim \mathcal{F}_0$. ∇ .

Утверждения (3) и (4) следуют из определения сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию движений, уже доказанных пунктов (1) и (2) (позволяющих проводить рассуждения только на одном флаге), а также из того факта, что существует только две ориентации плоскости α . ■

Следствие 1. *Осевая симметрия S_a меняет ориентацию.*

Доказательство. Пусть $a = (AB)$. В качестве $\mathcal{F}_0$ тогда рассмотрим флаг $[AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_1(a)$. Очевидно, что $S_a(\mathcal{F}_0) = [AB) \cup \overset{\circ}{\alpha}_2(a) = (-\mathcal{F}_0) \not\sim \mathcal{F}_0$ и по предыдущей теореме получим, что S_a меняет ориентацию. ■

Следствие 2. *Параллельный перенос и поворот сохраняют ориентацию, а скользящая симметрия меняет ее.*

Доказательство. Параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ можно представить в виде композиции $S_b \circ S_a$, где $a \perp \overrightarrow{AB}$ и $b = T_{\overrightarrow{AB}/2}(a)$. Далее используем утверждение (3) предыдущей теоремы.

Поворот R_O^φ также можно представить в виде композиции двух осевых симметрий $S_b \circ S_a$, где $O \in a \cap b$ и $\widehat{a, b} = \varphi/2$. Опять, используя утверждение (3) предыдущей теоремы, получим, что R_O^φ сохраняет ориентацию.

Скользящая симметрия по определению является композицией осевой симметрии и параллельного переноса, и, по утверждению (4) предыдущей теоремы, меняет ориентацию. ■

В следующем утверждении усилим ранее доказанное свойство подвижности.

Следствие 3. *Пусть $[AB] = [A_1B_1]$ и $A \neq B$. Тогда существует ровно одно сохраняющее ориентацию движение f_1 и в точности одно меняющее*



ориентацию движение f_2 , для которых $f_i(A) = A_1$ и $f_i(B) = B_1$ при $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Из доказательства свойства подвижности следует, что $f_1 = R_{A_1}^\varphi \circ T_{AA_1}^{\rightarrow}$ — это движение сохраняет ориентацию по предыдущему следствию и утверждению (3) последней теоремы. Кроме того, второе найденное в свойстве подвижности движение $f_2 = S_{(A_1B_1)} \circ f_1$, меняет ориентацию по (4) предыдущей теоремы. ■

Усилим также теорему Шаля-Д’Аламбера.

Следствие 4. *Существует только два типа движений плоскости, которые сохраняют ориентацию: параллельный перенос и поворот. Существует единственный тип движений плоскости, который меняет ориентацию — скользящая симметрия.*

Доказательство. Следует из теоремы Шаля-Д’Аламбера и второго следствия. ■

2.7. Гомотетия. Группа подобий плоскости

Договоримся, что все точки и фигуры, которые рассматриваются в этом параграфе, лежат в некоторой плоскости α .

Определение. Пусть $O \in \alpha$, $k \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$. Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k называется преобразование $H_O^k : \alpha \rightarrow \alpha$, при котором $H_O^k(O) = O$, а для любой точки $A \neq O$ ее образ $A' = H_O^k(A)$ определяется из следующих условий:

- 1) $A' \in (OA)$ и $|OA'| = |k| \cdot |OA|$;
- 2) $A' \in [OA) \Leftrightarrow k > 0$.

Всюду определенность H_O^k следует из определения, однозначность и сюръективность из двух фактов: точка O разбивает прямую только на два луча и на луче можно отложить отрезок данной длины единственным образом (аксиома III.1 и теорема 6.1 первой главы). Последнее свойство, инъективность, следует из (1) следующей теоремы, поскольку расстояние между образами двух различных точек не может быть равным нулю.

Теорема 7.1. Пусть $H_O^k(A) = A'$, $H_O^k(B) = B'$ и $H_O^k(C) = C'$. Тогда

- 1) $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$;



- 2) $C \in [AB] \Leftrightarrow C' \in [A'B']$;
 3) если $C \notin (AB)$, то $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ и $|k|$ — коэффициент подобия этих треугольников;
 4) $H_O^{k_1} \circ H_O^k = H_O^{k \cdot k_1}$;
 5) $(H_O^k)^{-1} = H_O^{1/k}$;
 6) образом любой прямой a является прямая $a' = H_O^k(a)$, причем $a' \parallel a$;
 7) образом луча является луч, открытой полуплоскости — открытая полуплоскость, угла — равный ему угол;
 8) если $O'_1 = H_O^k(O_1)$, то образом окружности $\omega = \omega(O_1, r)$ при гомотетии H_O^k является окружность $\omega' = \omega(O'_1, |k| \cdot r)$.

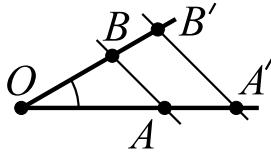


Рис. 145

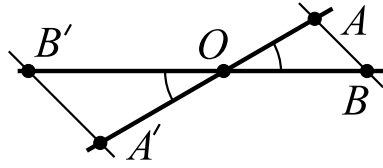


Рис. 146

Доказательство. 1) при $A = B$, $A = O$ или $B = O$ утверждение очевидно. Пусть точки A , B , O попарно различны и рассмотрим два случая.

1-й случай: $B \notin (OA)$. Тогда $|OA'|/|OA| = |OB'|/|OB| = |k|$ и

$\angle AOB = \angle A'OB'$ (как совпадающие или вертикальные углы — рис. 145 или 146). Откуда $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.

2-й случай: $B \in (OA)$. Если A и B лежат по разные стороны от O , то A' и B' также лежат по разные стороны от O и выполняется:

$$|A'B'| = |A'O| + |OB'| = |k| \cdot |OA| + |k| \cdot |OB| = |k|(|AO| + |OB|) = |k||AB|.$$

Пусть теперь A и B лежат по одну сторону от O и, б.о.о., $A \in]OB[$, тогда точки A' и B' также лежат по одну сторону от O и выполняется $|OA'| = k|OA| < k|OB| = |OB'|$. Это означает (по теореме 6.1 первой главы), что A' лежит между O и B' и поэтому

$$|A'B'| = |OB'| - |OA'| = |k| \cdot |OB| - k \cdot |OA| = |k|(|OB| - |OA|) = |k| \cdot |AB|.$$

2) дважды воспользуемся вторым утверждением третьего следствия со стр. 46 и уже доказанным пунктом (1):

$$\begin{aligned} C \in [AB] &\Leftrightarrow |AB| = |AC| + |CB| \Leftrightarrow |k| \cdot |AB| = |k| \cdot |AC| + |k| \cdot |CB| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |A'B'| = |A'C'| + |C'B'| \Leftrightarrow C' \in [A'B']. \end{aligned}$$

3) следует из (1) и ЗКПТ.



4) из определения гомотетии для $A \neq O$ и $A'' = H_O^{k_1}(A')$ получим $|OA''| = |k_1| \cdot |OA'| = |k_1| \cdot |k| \cdot |OA| = |k_1 \cdot k| \cdot |OA|$. В случае $k_1 \cdot k > 0$ точка $A'' \in [OA)$, если же $k_1 \cdot k < 0$, то $A'' \in (OA) \setminus [OA)$. Отсюда $H_O^{k_1} \circ H_O^k(A) = H_O^{k \cdot k_1}(A)$. Очевидно, что $H_O^{k_1} \circ H_O^k(O) = H_O^{k \cdot k_1}(O)$. В результате на любую точку плоскости преобразования $H_O^{k_1} \circ H_O^k$ и $H_O^{k \cdot k_1}$ действуют одинаково.

5) из (4) получим $H_O^{1/k} \circ H_O^k = H_O^1 = \varepsilon$, что и надо было проверить.

6) предположим, что $a = (AB)$ и покажем, что $H_O^k(a) = (A'B') = a'$, проверив включение этих множеств друг в друга.

$\subseteq$) для любой точки $C \in (AB)$ одна из точек $\{A, B, C\}$ лежит между двумя другими. Если, б.о.о., $A \in [BC]$, то по (2) получим $A' \in [B'C']$, т.е. $C' \in (A'B')$. Значит, $H_O^k(a) \subseteq a'$.

$\supseteq$) рассмотрим $H_O^{1/k}$ — обратное преобразование к H_O^k . Для него выполняется $H_O^{1/k}(A') = A$ и $H_O^{1/k}(B') = B$. По уже доказанной части получим $H_O^{1/k}(a') \subseteq a$. Можно применить к левой и правой части этого включения гомотетию H_O^k , тогда $H_O^k(H_O^{1/k}(a')) \subseteq H_O^k(a)$, или $a' \subseteq H_O^k(a)$, что дает $a' \subseteq H_O^k(a)$. Тем самым мы проверили обратное включение.

Из (3) следует $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ и равенство $\angle OAB = \angle OA'B'$, откуда $a' \parallel a$.

7) из (2) следует, что при гомотетии сохраняется отношение лежать между, а из (6) — прямые отображаются на прямые. Луч определялся с помощью этих понятий, поэтому луч переходит в луч.

Открытая полуплоскость определялась с помощью отношения лежать по одну сторону от прямой. Образом прямой при гомотетии является прямая, а образом отрезка — отрезок. Причем, если выполнено $[AB] \cap a = \emptyset$, то $[A'B'] \cap a' = \emptyset$, откуда точки A' и B' лежат по одну сторону от a' . Поэтому образом открытой полуплоскости (или полуплоскости) с границей a будет открытая полуплоскость (соответственно полуплоскость) с границей a' .

Угол определялся с помощью одномерного угла и открытых полуплоскостей, поэтому образом угла будет угол. То, что величина угла сохраняется, следует из (3).

8) достаточно проверить равенство множеств $H_O^k(\omega) = \omega'$, доказав включения в обе стороны.

$\subseteq$) для любой точки $A \in \omega$ выполняется $|O_1A| = r$, откуда по (1) получим $|A'O'_1| = |k| \cdot |AO_1| = |k| \cdot r$, что дает $A' \in \omega'$ и $H_O^k(\omega) \subseteq \omega'$.

$\supseteq$) рассмотрим $H_O^{1/k}$ — обратное преобразование к H_O^k . Для него спра-



ведливо $H_O^{1/k}(O'_1) = O_1$. По уже доказанной части получим $H_O^{1/k}(\omega') \subseteq \omega$. Можно применить к левой и правой части этого включения гомотетию H_O^k , тогда $H_O^k(H_O^{1/k}(\omega')) \subseteq H_O^k(\omega)$, или $\varepsilon(\omega') \subseteq H_O^k(\omega)$, что дает $\omega' \subseteq H_O^k(\omega)$. Тем самым мы проверили обратное включение. ■

Определение. Пусть $k \in \mathbb{R}$ и $k > 0$. Подобием с коэффициентом k плоскости α называется такая биекция $f : \alpha \rightarrow \alpha$, что для любой пары точек $A, B \in \alpha$ выполняется $|f(A)f(B)| = k|AB|$. Множество всех подобий плоскости α обозначается через Sim_2 или Sim_α .

Любое движение является подобием с коэффициентом 1. Из (1) предыдущей теоремы следует, что гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$. Следующее утверждение, которое называется *теоремой о представлении подобия*, показывает насколько близко подобие связано с движениями и гомотетиями.

Теорема 7.2. Пусть $f \in \text{Sim}_2$, k — коэффициент f и O — произвольная точка плоскости α . Тогда найдутся такие два движения g_1 и g_2 , что $f = H_O^k \circ g_1 = g_2 \circ H_O^k$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование $g_1 = H_O^{1/k} \circ f$. Для любой пары точек $A, B \in \alpha$ выполняется

$$|g_1(A)g_1(B)| = \left| H_O^{1/k}(f(A)) H_O^{1/k}(f(B)) \right| = \frac{1}{k} \cdot |f(A)f(B)| = \frac{1}{k} \cdot k \cdot |AB| = |AB|.$$

Отсюда $g_1 \in D_2$ и, домножая слева равенство $g_1 = H_O^{1/k} \circ f$ на H_O^k , получим $f = H_O^k \circ g_1$.

Аналогично, рассматривая преобразование $g_2 = f \circ H_O^{1/k}$, устанавливаем, что $g_2 \in D_2$ и $f = g_2 \circ H_O^k$. ■

Теорема 7.3. $(\text{Sim}_2, \circ)$ — группа.

Доказательство. 0) пусть $f_1, f_2 \in \text{Sim}_2$ и k_1, k_2 — коэффициенты f_1 , и f_2 соответственно. Выберем произвольную пару точек $A, B \in \alpha$ и положим $A' = f_1(A)$, $A'' = f_2(A')$, $B' = f_1(B)$, $B'' = f_2(B')$. Тогда

$$|A''B''| = k_2 \cdot |A'B'| = k_2 \cdot k_1 \cdot |AB| = (k_2 \cdot k_1)|AB|.$$

Отсюда $f_2 \circ f_1 \in \text{Sim}_2$ и $k_2 \cdot k_1$ — коэффициент $f_2 \circ f_1$. Мы доказали, что $\circ$ является операцией на Sim_2 и обозначение $(\text{Sim}_2, \circ)$ использовать корректно.



1) ассоциативность следует из включения $\text{Sim}_2 \subseteq \text{Tr}_2$ и того факта, что $(\text{Tr}_2, \circ)$ является группой.

2) поскольку $\varepsilon \in D_2 \subseteq \text{Sim}_2$ и ε — нейтральный элемент в $(\text{Tr}_2, \circ)$, получим, что ε — нейтральный элемент в $(\text{Sim}_2, \circ)$.

3) рассмотрим произвольное $f \in \text{Sim}_2$. Пусть k — коэффициент f и O — произвольная точка плоскости α , тогда по предыдущей теореме найдется движение g_1 , для которого $f = H_O^k \circ g_1$. Обозначим через $h = g_1^{-1} \circ H_O^{1/k}$, тогда по (0) получим, что $h \in \text{Sim}$. Теперь посчитаем композиции $h \circ f$ и $f \circ h$:

$$h \circ f = (g_1^{-1} \circ H_O^{1/k}) \circ (H_O^k \circ g_1) = g_1^{-1} \circ (H_O^{1/k} \circ H_O^k) \circ g_1 = g_1^{-1} \circ g_1 = \varepsilon,$$

$$f \circ h = (H_O^k \circ g_1) \circ (g_1^{-1} \circ H_O^{1/k}) = H_O^k \circ (g_1 \circ g_1^{-1}) \circ H_O^{1/k} = H_O^k \circ H_O^{1/k} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы установили, что $h = f^{-1}$ и $h \in \text{Sim}_2$.

■

Можно существенно развить теорию подобий плоскости, решив следующие проблемы.

1*. Докажите, что если $f \in \text{Sim}_2$, k — коэффициент f , причем $k \neq 1$, то существует и единственна такая точка $A \in \alpha$, что $f(A) = A$.

2**. Докажите, что если $f \in \text{Sim}_2$, k — коэффициент f , причем $k \neq 1$, то f является поворотной или осевой гомотетией, т.е. $f = H_O^k \circ R_O^\varphi$ или $f = H_O^k \circ S_a$ (в последнем случае $O \in a$).

3*. Докажите, что если $k_1 \cdot k = 1$, то композиция $H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$ является параллельным переносом.

4**. (Теорема о трех центрах гомотетий.) Докажите, что если $k_1 \cdot k \neq 1$, то композиция $H_{O_1}^{k_1} \circ H_O^k$ является гомотетией $H_{O_2}^{k \cdot k_1}$, причем $O_2 \in (OO_1)$.

Осенью 1872 года в Эрлангенском университете Ф. Клейн⁷ при вступлении на должность профессора (юному профессору было тогда 23 года!) сделал доклад «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований». Этот доклад кратко называют Эрлангенской программой Клейна. К середине девятнадцатого века геометрия разделилась на несколько различных разделов: евклидову, проективную, сферическую, аффинную, риманову, гиперболическую и др. Клейн в своем докладе предложил революционную идею

⁷Феликс Клейн (1849–1925) — немецкий математик и педагог, ученик Ю. Плюккера; основные работы посвящены неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений, теории эллиптических функций; предложил (1871) модель, реализующую систему аксиом геометрии Лобачевского, тем самым доказав непротиворечивость этой теории; рассматривал группы симметрий многогранников и показал, что ими можно воспользоваться для алгебраического решения некоторых типов уравнений; в топологии построил пример односторонней поверхности без края — «бутылку Клейна».



алгебраической классификации различных геометрий. Геометрией плоскости будем называть $(G, \circ)$ — подгруппу $(Tr, \circ)$, при этом свойство τ будем называть геометрическим в $(G, \circ)$ если оно сохраняется любым преобразованием $f \in G$ (часто говорят, что τ является *инвариантом* любого $f \in G$). Так, евклидова геометрия — это геометрия $(D_2, \circ)$, она обладает огромным запасом геометрических свойств: «лежать между», «быть равными треугольниками», «быть прямой», «величина угла», «длина отрезка», «быть окружностью» и т.д. Очень похожа на эту геометрию геометрия $(Sim_2, \circ)$. Отметим только, что «длина отрезка» и «площадь» не являются геометрическими свойствами в $(Sim_2, \circ)$. В последних параграфах этой главы мы будем изучать инверсию, пример кругового преобразования расширенной плоскости, которая очень сильно отличается по набору инвариантов от $(D_2, \circ)$ и $(Sim_2, \circ)$. Идеи Ф. Клейна обогатили не только геометрию, но оказались очень полезны и в физике: в 1905 году Г. Минковский⁸ включил в схему Клейна теорию относительности, показав, что с математической точки зрения она представляет теорию инвариантов группы Пуанкаре⁹, действующей в четырехмерном пространстве-времени.

2.8. Прямая Эйлера и окружность девяти точек

Из результатов предыдущей главы следует, что у любого треугольника ABC существует точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам $\triangle ABC$ (центр описанной около $\triangle ABC$ окружности), точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (центр масс $\triangle ABC$) и точка пересечения прямых, содержащих высоты $\triangle ABC$ (ортоцентр $\triangle ABC$). Эти три точки всегда лежат на одной прямой, которая называется *прямой Эйлера*¹⁰.

⁸Герман Минковский (1864–1909) — немецкий математик и физик, основные работы посвящены теории чисел, геометрии, гидродинамике и математической физике; разработал геометрическую теорию чисел, получил ряд результатов в теории многогранников; ввел гиперболическое мероопределение, что сблизило теорию относительности с геометрией Лобачевского; в 1896 году доказал неравенство для n -мерного пространства, которое называют *неравенством Минковского*.

⁹Анри Пуанкаре (1854–1912) — французский математик, физик, астроном и философ; основные работы посвящены теории чисел, алгебре, топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, небесной механике, основаниям математики; оставил более 1000 научных работ; ввел основные понятия комбинаторной топологии, вывел формулу, связывающую числа вершин, ребер и граней любого замкнутого многогранника.

¹⁰Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, автор более 850 научных работ; в возрасте 24 лет стал профессором математики Петербургской академии наук; Эйлер оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии; познания Эйлера были энциклопедичны: кроме математики, он глубоко изучил ботанику, медицину, химию, теорию музыки, множество европейских и древних языков.



Теорема 8.1. Пусть в произвольном треугольнике ABC точка O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, M — центр масс $\triangle ABC$ и K — ортоцентр $\triangle ABC$. Тогда

- 1) $M \in [OK]$;
- 2) $|KM| : |MO| = 2 : 1$.

Доказательство. Обозначим через A' середину $[BC]$, B' — середину $[AC]$ и C' — середину $[AB]$ (рис. 147). По основному свойству медиан точка M делит каждый из отрезков AA' , BB' и CC' в отношении $2 : 1$, начиная от вершин $\triangle ABC$, поэтому $H_M^{-1/2}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Из свойства (7) первой теоремы предыдущего параграфа следует, что гомотетия сохраняет величину угла, поэтому высота $[BL]$ исходного треугольника перейдет в высоту $[B'L']$ треугольника $A'B'C'$.

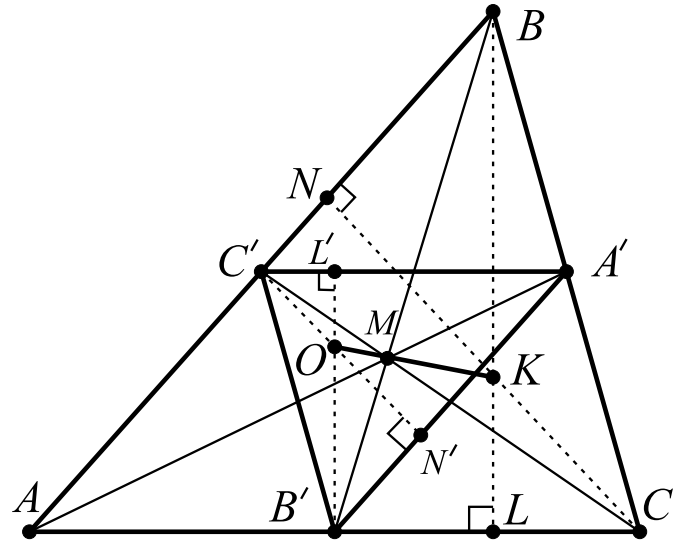


Рис. 147

Учитывая, что $(B'L') \perp (A'C')$, $(AC) \parallel (A'C')$ и B' — середина $[AC]$, получим, что $(B'L')$ — серединный перпендикуляр к $[AC]$. В результате $H_M^{-1/2}((BL)) = (B'L')$ — серединный перпендикуляр к стороне AC . Аналогично доказывается, что при гомотетии $H_M^{-1/2}$ образом прямой CN , содержащей высоту $[CN]$, является $(C'N')$ — серединный перпендикуляр к $[AB]$. По теореме 1.2 получим, что при $H_M^{-1/2}$ пересечение $(BL) \cap (CN) = \{K\}$ переходит в пересечение $(B'L') \cap (C'N') = \{O\}$, т.е. $H_M^{-1/2}(K) = O$. Из-за отрицательного коэффициента гомотетии имеем $M \in [OK]$ и, кроме того, $|KM| : |MO| = 2 : 1$. ■

Окружность в следующем утверждении называют *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*.

Теорема 8.2. Пусть K — ортоцентр произвольного треугольника ABC ; точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон $[BC]$, $[AC]$ и $[AB]$ (соответственно); A_2, B_2, C_2 — основания высот из вершин A, B и C (соответственно); наконец, точки A_3, B_3, C_3 являются (соответствен-



но) серединами $[KA]$, $[KB]$ и $[KC]$. Тогда

1) существует окружность $\omega_{\Delta} = \omega(O_{\Delta}, r_{\Delta})$, для которой $A_i, B_i, C_i \in \omega_{\Delta}$ при $i \in \{1, 2, 3\}$;

2) O_{Δ} — середина $[OK]$, где O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности;

3) $r_{\Delta} = R/2$, где R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

Доказательство. 1) будем считать, что $\angle C$ — наибольший угол в $\triangle ABC$ (иначе переобозначим вершины треугольника). Начнем со случая остроугольного треугольника.

1-й случай: $\angle C < 90^\circ$ (рис. 148). Отрезки A_1C_1 и A_3C_3 являются средними линиями в $\triangle ABC$ и $\triangle AKC$, откуда $|A_1C_1| = |A_3C_3| = |AC|/2$, $(A_1C_1) \parallel (AC) \parallel (A_3C_3)$, т.е. $A_1C_1A_3C_3$ — параллелограмм. С другой стороны, $[A_1C_3]$ и $[C_1A_3]$ — средние линии в $\triangle BCK$ и $\triangle ABK$, что дает цепочку $(A_1C_3) \parallel (BK) \perp (AC) \parallel (A_3C_3)$. В результате, $A_1C_1A_3C_3$ — прямоугольник и около него можно описать окружность ω_{Δ} с диаметрами $[A_1A_3]$ и $[C_1C_3]$. Аналогично доказывается, что $B_1C_1B_3C_3$ — прямоугольник и около него также можно описать окружность с диаметрами $[C_1C_3]$ и $[B_1B_3]$ (эти окружности совпадают, поскольку имеют общий диаметр $[C_1C_3]$). Итак, все точки с индексами 1 и 3 уже попали на ω_{Δ} . Рассмотрим точку A_2 . Поскольку $\widehat{A_1A_2A_3} = 90^\circ$, точка A_2 (по ГМТ5) лежит на окружности с диаметром $[A_1A_3]$, т.е. $A_2 \in \omega_{\Delta}$. Аналогично доказывается, что $B_2, C_2 \in \omega_{\Delta}$.

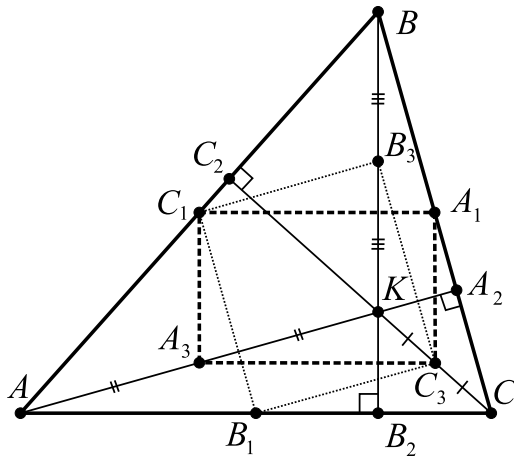


Рис. 148

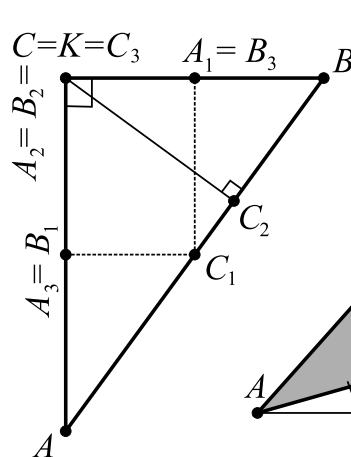


Рис. 149

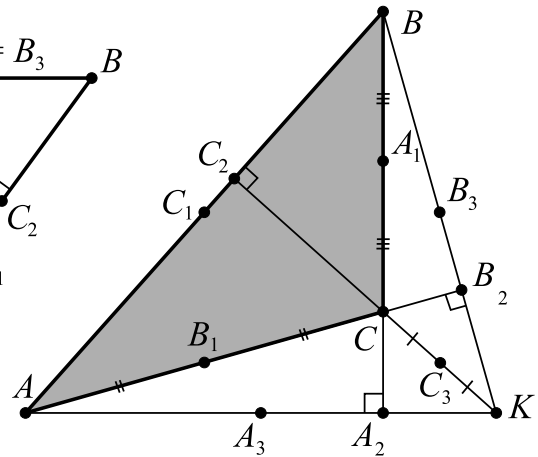


Рис. 150

2-й случай: $\angle C = 90^\circ$ (рис. 149). Очевидно, что $A_1C_1A_3C_3$ — прямоугольник и около него описана окружность ω_{Δ} с диаметрами $[A_1A_3]$ и $[C_1C_3]$.



На этой окружности лежит точка C_2 , поскольку $\widehat{C_1 C_2 C_3} = 90^\circ$. Остальные четыре точки совпадают с одной из пяти уже рассмотренных.

3-й случай: $\angle C > 90^\circ$ (рис. 150). Из теоремы о прямых, содержащих высоты произвольного треугольника (теорема 11.6 первой главы) нам известно, что $\triangle АКВ$ — остроугольный треугольник. Причем в этом треугольнике точка C является его ортоцентром. Применяя первый случай к $\triangle АКВ$, получим, что $A_i, B_i, C_i \in \omega_\varepsilon$ при $i \in \{1, 2, 3\}$.

Одновременно докажем утверждения (2) и (3). Обозначим описанную около $\triangle ABC$ окружность через $\omega = \omega(O, R)$, и подействуем на нее гомотетией $H_K^{1/2}$. При этой гомотетии точки A, B и C переходят соответственно в точки A_3, B_3 и C_3 , поэтому окружность ω отображается на окружность, описанную около $\triangle A_3 B_3 C_3$, т.е. на окружность Эйлера. Из равенства $H_K^{1/2}(\omega) = \omega_\varepsilon$ сразу получаем, что $r_\varepsilon = R/2$ и O_ε — середина $[OK]$. ■

2.9. Инверсия и ее свойства

Обычно пути, ведущие к решению красивых геометрических проблем, сильно не похожи друг на друга. Бесконечность возможных направлений поиска многих приводит в замешательство, но одновременно дает хорошую надежду отыскать свою собственную дорогу в геометрическом лабиринте. В любом случае открытие метода, позволяющего решить целый ряд сложных задач, является событием большой редкости. Об одном из таких методов и пойдет речь в оставшейся части главы. Но начинаем мы с перечисления некоторых классических проблем, решения которых будут приведены в следующих параграфах.

А. Четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 расположены таким образом, что ω_i касается ω_{i+1} для $i < 4$, а ω_4 касается ω_1 . Образуются четыре точки касания. Доказать, что найдется окружность или прямая, проходящая через все эти точки.

В. Разделить с помощью циркуля данный отрезок AB на n равных частей ($n \in \mathbb{N}$).

С. Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

Д. Даны точки A, B, C, D и окружность ω . Только с помощью циркуля найти пересечение прямых AB и CD , а также точки пересечения прямой AB с окружностью ω (*задачи геометрии Мора-Маскерони*).



Е. Построить окружность, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности ω_1 .

Ф. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

Г. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

Н. Для двух различных точек A и B и положительного числа $k \neq 1$ найти геометрическое место точек X , для которых отношение $|XA|/|XB|$ равно k (окружность Аполлония).

И. Для произвольного треугольника через r , R и d обозначим соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. Доказать, что $d^2 = R^2 - 2Rr$ (*формула Эйлера*).

Ж. Доказать, что окружность Эйлера произвольного треугольника касается вписанной в него окружности и трех его внеписанных окружностей.

К. Доказать, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \dots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2 , то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1 , касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, \dots, T_n$ (поризм Штейнера).

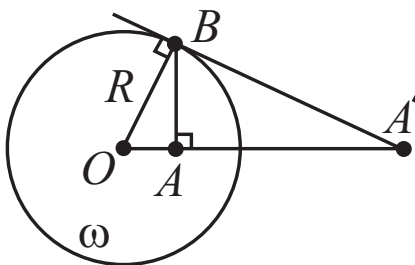


Рис. 151

В 1831 году Л. Магнус¹¹ формально определил преобразование расширенной плоскости, которое получило название симметрии относительно окружности или инверсии (от лат. *inversio* — обращение). Под инверсией плоскости α относительно окружности $\omega(O, R)$ с центром в точке O и радиусом R понимают такое преобразование множества $\alpha \setminus \{O\}$, при котором каждой точке $A \in \alpha \setminus \{O\}$ ставится в соответствие такая точка A' , что A' лежит на луче $[OA)$ и $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ (далее будем использовать обозначение $\text{Inv}_O^R(A) = A'$ или $\text{Inv}_\omega(A) = A'$). Заметим сразу, что инверсия не определена в точке O , но иногда бывает полезно доба-

ка A' , что A' лежит на луче $[OA)$ и $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ (далее будем использовать обозначение $\text{Inv}_O^R(A) = A'$ или $\text{Inv}_\omega(A) = A'$). Заметим сразу, что инверсия не определена в точке O , но иногда бывает полезно доба-

¹¹ Людвиг Магнус (1790–1861) — немецкий математик; в юности был стрелком в наполеоновских войнах; позже серьезно увлекся математикой, получил в 1834 г докторскую степень, был профессором Берлинского ун-та; основные труды относятся к проективной геометрии, дал систематический вывод всех основных формул стереографической проекции; оставив преподавательскую деятельность, стал главным таможенным инспектором Берлина; преобразование инверсии применял Якоб Штейнер еще в 1824 г.



вить к плоскости одну бесконечно удаленную точку, т.е. рассмотреть множество $\tilde{\alpha} = \alpha \cup \{\infty\}$ (это множество называется *расширенной плоскостью*) и при этом считать, что $\text{Inv}_O^R(O) = \infty$ и $\text{Inv}_O^R(\infty) = O$. При добавлении к прямой a бесконечно удаленной точки, получается *расширенная прямая* $\tilde{a} = a \cup \{\infty\}$.

На рис. 151 указан способ построения циркулем и линейкой образа точки A при инверсии относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. Для этого (если точка A расположена внутри окружности) проводят перпендикуляр (AB) к прямой OA ($B \in \omega \cap (AB)$) и из точки B проводят касательную к окружности ω . Из подобия треугольников OAB и OBA' получаем отношение $|OA| : |OB| = |OB| : |OA'|$ или $|OA| \cdot |OA'| = |OB|^2 = R^2$. Следовательно $\text{Inv}_O^R(A) = A'$. Если же точка A расположена вне окружности, то сначала из точки A проводят касательную к окружности, затем из точки касания опускают перпендикуляр на прямую OA и получают точку A' .

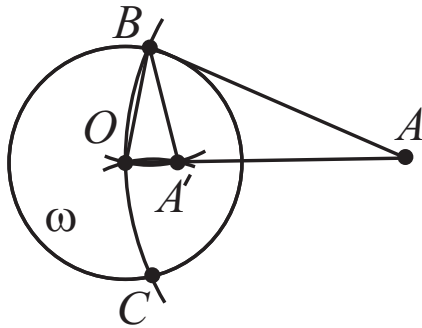


Рис. 152

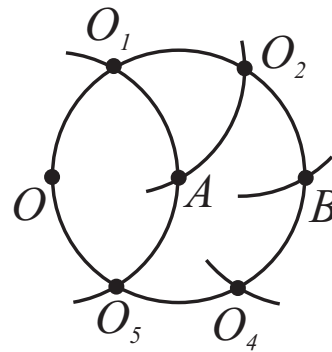


Рис. 153

На рис. 152 построение образа выполнено только с помощью циркуля (в предположении, что $|OA| > R/2$). Для этого достаточно провести окружность $\omega(A, |OA|)$ и для двух точек пересечения $\omega(O, R) \cap \omega(A, |OA|)$ построить равные окружности $\omega(B, R)$ и $\omega(C, R)$. Вторая точка из пересечения $\omega(B, R) \cap \omega(C, R)$, отличная от точки O , является искомой. Для доказательства используем подобие равнобедренных треугольников OBA' и OBA . Сначала получаем $|OA'| : |OB| = |OB| : |OA|$, а затем, необходимое $|OA| \cdot |OA'| = |OB|^2 = R^2$. Если же $|OA| \leq R/2$, то сначала увеличивают отрезок OA в n раз до отрезка OB (удвоение отрезка показано на рис. 153 — последовательно откладывают радиус OA на окружности $\omega(A, OA)$ и используют свойство правильного вписанного шестиугольника), после этого находят $B' = \text{Inv}_O^R(B)$ и снова увеличивают (а не уменьшают!) отрезок OB' в n раз до отрезка OC . Можно доказать, что $C = \text{Inv}_O^R(A)$.



Из многочисленных свойств инверсии рассмотрим лишь следующие. Пусть $A' = \text{Inv}_O^R(A)$ и $B' = \text{Inv}_O^R(B)$.

I. Если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Утверждение требует проверки только когда лучи $[OA)$ и $[OB)$ совпадают. В этом случае $|OA| \neq |OB|$ и поэтому $|OA'| \neq |OB'|$. Приходим к неравенству $A' \neq B'$.

II. Все точки окружности $\omega(O, R)$ при инверсии Inv_O^R остаются неподвижными. Внутренние точки круга с границей $\omega(O, R)$ переходят во внешние, а внешние — во внутренние.

Первая часть утверждения очевидна, а вторая следует из замечания: если $|OA| < R$, то $|OA'| = R^2/|OA| > R$.

III. Если $A' = \text{Inv}_O^R(A)$, то $A = \text{Inv}_O^R(A')$. Для произвольных фигур Φ и Φ' из условия $\Phi' = \text{Inv}_O^R(\Phi)$ также следует, что $\Phi = \text{Inv}_O^R(\Phi')$.

IV. Если $B \notin (OA)$, то треугольники AOB и $A'OB'$ подобны, причем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

Достаточно заметить, что эти треугольники имеют общий угол, а из равенства $|OA| \cdot |OA'| = R^2 = |OB| \cdot |OB'|$ следует $|OA| : |OB'| = |OB| : |OA'|$. Обратите внимание, что в отличие от подобия, пропорциональность связывает стороны $[OA]$ и $[OB']$, $[OB]$ и $[OA']$, а не $[OA]$ и $[OA']$, $[OB]$ и $[OB']$. Из подобия получаем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

V. Расстояние изменяется по формуле $|A'B'| = \frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|} \cdot R^2$.

Действительно, по свойству IV имеем

$$|A'B'| = \frac{|AB| \cdot |OA'|}{|OB|} = \frac{|AB|}{|OA| \cdot |OB|} \cdot R^2.$$

VI. Прямая a , проходящая через центр инверсии, отображается в себя (точнее, $\text{Inv}_O^R(a \setminus \{O\}) = a \setminus \{O\}$ или $\text{Inv}_O^R(\tilde{a}) = \tilde{a}$). Если же $O \notin a$ и A — основание перпендикуляра из точки O на прямую a (рис. 154), то образом прямой a будет окружность ω_1 , построенная на отрезке OA' как на диаметре (точнее, $\text{Inv}_O^R(a) = \omega_1 \setminus \{O\}$ или $\text{Inv}_O^R(\tilde{a}) = \omega_1$).

Для доказательства этого свойства рассмотрим произвольную точку B на прямой a . По свойству IV имеем $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$. Следовательно (по ГМТ5) точка B' лежит на окружности с диаметром $[OA']$. Удивление от такого неожиданного действия инверсии на произвольную прямую пройдет,



если принять в расчет бесконечно удаленную точку. Каждая прямая проходит через ∞ . Поэтому переход точки ∞ в точку O заставляет концы прямой сжиматься к точке O .

Следующее свойство позволяет определить центр окружности, которая является образом прямой из свойства VI.

VII. Пусть $\omega_1 = \text{Inv}_O^R(\tilde{a})$. Обозначим через $O_1 = S_a(O)$, где S_a — осевая симметрия с осью a (рис. 154). Тогда центром окружности ω_1 является точка $O'_1 = \text{Inv}_O^R(O_1)$.

Сохраняя принятые в предыдущем свойстве обозначения, имеем $|OO_1| = 2|OA|$. Подставляя это в равенство $|OA| \cdot |OA'| = R^2 = |OO_1| \cdot |OO'_1|$, получаем $|OO'_1| = |OA'|/2$. Поэтому точка O'_1 является серединой $[OA']$.

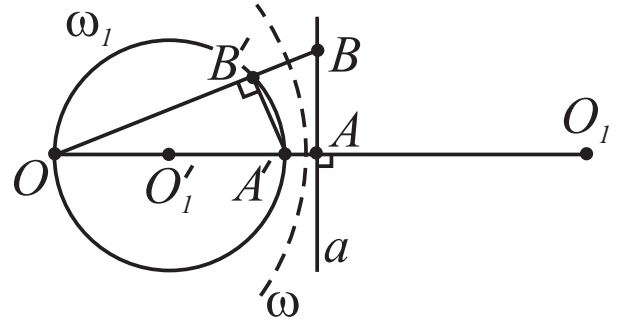


Рис. 154

VIII. Окружность $\omega_1 = \omega(O_1, r)$, проходящая через центр инверсии, отображается на некоторую прямую a (точнее, выполняются соотношения: $\text{Inv}_O^R(\omega_1 \setminus \{O\}) = a$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \tilde{a}$). Более того, если A — конец диаметра, проходящего через O и O_1 ($A \neq O$), то прямая a проходит через точку $A' = \text{Inv}_O^R(A)$ и перпендикулярна прямой OO_1 .

Справедливость этого утверждения сразу следует из свойств III и VI.

IX. Окружность $\omega_1 = \omega(O_1, r)$, которая не проходит через центр инверсии, отображается при Inv_O^R на некоторую окружность ω_2 . Точнее, если точки A и B являются концами диаметра, лежащего на прямой OO_1 (рис. 155), то отрезок $A'B'$ является диаметром окружности ω_2 .

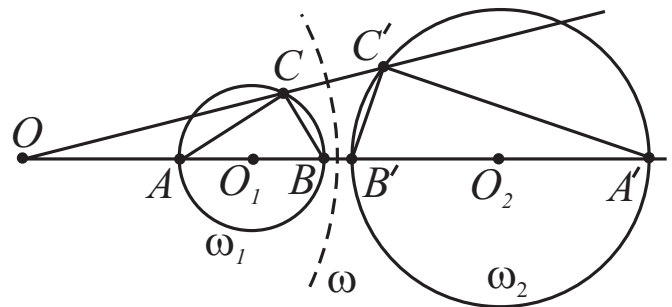


Рис. 155

Для доказательства рассмотрим произвольную точку C окружности ω_1 и покажем, что $C' = \text{Inv}_O^R(C) \in \omega_2$. Из свойства IV имеем равенства $\angle OCA = \angle OA'C'$ и $\angle OCB = \angle OB'C'$. Поэтому $\angle A'C'B' = \angle OB'C' - \angle OA'C' = \angle OCB - \angle OCA = 90^\circ$. Следовательно $C' \in \omega_2$.



Переходит ли центр O_1 окружности ω_1 в центр окружности ω_2 , точку O_2 ? Оказывается, никогда не переходит (убедитесь в этом с помощью прямых вычислений, т.е. докажете, что точка $O'_1 = \text{Inv}_O^R(O_1)$ не может быть серединой $[A'B']$). Этот «недостаток» инверсии с лихвой компенсируется замечательным ее свойством сохранять величину угла. Напомним, что величина угла между пересекающимися окружностями по определению равен величине угла между касательными к этим окружностям в точке их пересечения. Аналогично определяется и величина угла между пересекающимися прямой и окружностью. Рассмотрим частный случай: для двух касающихся окружностей ω_1 и ω_2 определим величину угла между $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$. Вид образов $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$ во многом зависит от положения точки O относительно окружностей ω_1 и ω_2 . Так, если $O \notin \omega_1 \cup \omega_2$, то из свойств I и IX получаем, что $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$ являются касающимися окружностями. Если же O лежит только на одной из окружностей, например на ω_1 , то из свойств I, VIII и IX получим касающиеся прямую $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и окружность $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$. И, наконец, если O совпадает с точкой касания окружностей, то $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$ являются параллельными прямыми (величина угла между параллельными прямыми по определению равна нулю). Итак, в каждом из случаев, величина угла между $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$ равна нулю. Аналогично можно установить, что если прямые a и b параллельны, то величина угла между $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$ также равна нулю.

Х. Инверсия сохраняет величину угла между прямыми, пересекающимися окружностями, пересекающимися прямой и окружностью.

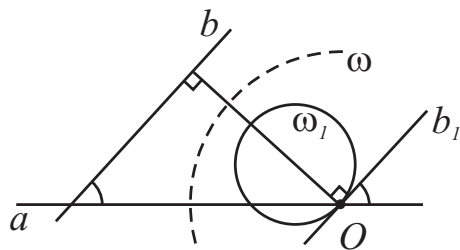


Рис. 156

Докажем сначала, что для любых прямых величина угла между a и b совпадает с величиной угла между $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$. Утверждение очевидно, если прямые проходят через точку O . Пусть теперь $O \in a$ и $O \notin b$ (рис. 156). Обозначим через ω_1 окружность, в которую переходит прямая b , и через b_1 — касательную к ω_1 в точке O . Так прямые b и b_1 перпендикулярны одному и тому же диаметру, то они параллельны. Поэтому величина угла между a и ω_1 , равная по определению величине угла между a и b_1 , совпадает с $\widehat{a, b}$. Рассуждения аналогичны и в случае, когда $O \notin a \cup b$ (надо рассмотреть касательные к окружностям $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$ в точке O).

Поскольку угол между окружностями и между прямой и окружностью



определялся через касательные, доказательство остальных двух утверждений легко сводятся к случаю сохранения угла между прямыми.

Основой решения целого ряда геометрических проблем является удачное применение того или иного преобразования плоскости. При этом мы считаем использование какого-либо преобразования удачным, если образы рассматриваемых фигур поддаются простому геометрическому анализу. В задаче Фаньяно¹², например, стороны треугольника наименьшего периметра (который является ортоцентрическим к данному треугольнику) получаются из отрезка прямой серией осевых симметрий. При отыскании точки Ферма¹³ похожая идея реализуется с помощью поворота на 60° . В следующих параграфах попробуем выяснить к каким геометрическим упрощениям приводит переход в «инвертированный мир». Этот параграф закончим решением проблемы **A**.

Решение A. Обозначим через A , B , C , и D соответственно точки касания $\omega_1 \cap \omega_2$, $\omega_2 \cap \omega_3$, $\omega_3 \cap \omega_4$ и $\omega_4 \cap \omega_1$. Сделаем инверсию с центром в $O = A$ относительно окружности некоторого радиуса R . По свойству VIII и IX получим пару параллельных прямых $a = \text{Inv}_O^R(\omega_1)$, $b = \text{Inv}_O^R(\omega_2)$ и пару касающихся окружностей $\omega'_3 = \text{Inv}_O^R(\omega_3)$ и $\omega'_4 = \text{Inv}_O^R(\omega_4)$ (рис. 157).

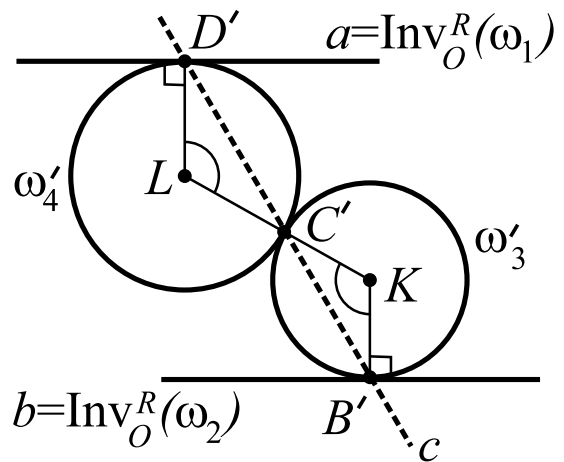


Рис. 157

Нетрудно заметить, что точки касания исходных окружностей, за исключением точки A (которую инверсия забросит в бесконечность), отобразятся в точки касания образов. Докажем теперь, что B' , C' и D' лежат на одной прямой. Так как $(KB') \parallel (LD')$, то верно $\angle B'KC' = \angle C'LD'$. Отсюда следует равенство углов $\angle KC'B' = \angle LC'D'$ ($\triangle KC'B'$ и $\triangle LC'D'$ являются равнобедренными), поэтому B' , C' и D' лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через c и подействуем на нее снова инверсией Inv_O^R . Ее образом будет либо окружность $\text{Inv}_O^R(c)$ (если $A \notin c$), которая проходит через центр инверсии, точку A , а также через точки $B = \text{Inv}_O^R(B')$, $C = \text{Inv}_O^R(C')$ и $D = \text{Inv}_O^R(D')$, либо прямая c (если $A \in c$), которая также проходит через центр инверсии, точку A , а также через точки $B = \text{Inv}_O^R(B')$, $C = \text{Inv}_O^R(C')$ и $D = \text{Inv}_O^R(D')$.

¹²Задача Фаньяно: в данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

¹³Точкой Ферма остроугольного треугольника ABC называется точка M , для которой сумма расстояний от нее до вершин треугольника — $|MA| + |MB| + |MC|$ — принимает наименьшее значение.



2.10. Геометрия Мора-Маскерони

Теория построения одним циркулем получила свою известность благодаря книге «Геометрия циркуля» (1797 г.) Л. Маскерони¹⁴. Значительно позже в одном из букинистических магазинов была обнаружена книга Г. Мора¹⁵ «Датский Евклид», датированная 1672 годом! Обе книги содержат следующий основной результат геометрии циркуля, который называется *теоремой Мора-Маскерони*.

Теорема 10.1. *Все построения, выполненные с помощью циркуля и линейки, могут быть проделаны только с помощью циркуля (при этом мы считаем прямую построенной, если найдены хотя бы две точки этой прямой).*

Для доказательства этой теоремы достаточно научиться находить только с помощью циркуля пересечения двух прямых, прямой и окружности. Для этого рассмотрим несколько предварительных задач (среди них — проблемы **B**, **C** и **D**), при решении которых у нас отнимут линейку.

Пример 1. Разделить с помощью циркуля данный отрезок AB на n равных частей ($n \in \mathbb{N}$).

Решение. Чтобы разделить отрезок AB на n равных частей, сначала увеличим его в n раз, т.е. на луче $[AB)$ найдем точку C , что $[AC] = n \cdot [AB]$. А затем построим точку C' — образ точки C при инверсии относительно окружности $\omega(A, |AB|)$. Из соотношения $|AC| \cdot |AC'| = |AB|^2$ получаем $|AC'| = |AB|/n$. Все указанные построения можно выполнить только с помощью циркуля (для этого даже не нужна прямая AB).

Пример 2. Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

Решение. Выберем произвольную точку O окружности $\omega_1 = \omega(X, r)$, центр X которой нам нужно определить (рис. 158). Из точки O проведем произвольную окружность $\omega(O, R)$ так, чтобы она пересекала исходную окружность ω_1 . Обозначим точки пересечения $\omega \cap \omega_1$ через A и B . Куда перейдет прямая AB при инверсии Inv_O^R ? Конечно же в ω_1 , поскольку точки A и B остаются неподвижными (свойства II и VI). По свойству VII центр

¹⁴Лоренцо Маскерони(1750-1800) — итальянский инженер, изучал математику самостоятельно. Работы относятся к теории геометрических построений, теории многоугольников, интегральному исчислению; результаты его геометрических исследований доложил в 1797 году на заседании Национального института Наполеон Бонапарт.

¹⁵Георг Мор (1640–1697) — датский математик, учился у Х. Гюйгенса, много путешествовал по Франции, Англии, Голландии и Дании, переписывался с Г.В. Лейбницем.



$\text{Inv}_O^R((AB))$ (т.е. центр ω_1) является образом точки $S_{(AB)}(O)$ при Inv_O^R . Из этих рассуждений следует цепочка необходимых построений. Сначала находим точку $O_1 = S_{(AB)}(O)$, симметричную O относительно прямой AB . А затем строим образ точки O_1 при Inv_O^R , он и будет искомым центром. Все указанные построения выполняются только с помощью циркуля.

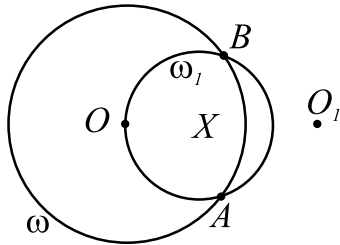


Рис. 158

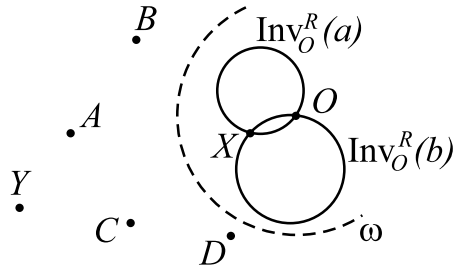


Рис. 159

Пример 3. Даны точки A, B, C, D и окружность ω . Только с помощью циркуля найти пересечение прямых AB и CD , а также точки пересечения прямой AB с окружностью ω .

Решение. Опишем поиск пересечения двух прямых только с помощью циркуля. Пусть даны точки A, B, C и D (рис. 159). Выберем точку O так, чтобы она не лежала на прямых $a = (AB)$ и $b = (CD)$ (для этого достаточно провести две окружности, описанные около треугольников ABC и BCD и выбрать точку их пересечения, отличную от точки C ; если же эти две окружности совпадают, т.е. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, выбираем на этой окружности любую точку, отличную от A, B, C и D). При инверсии Inv_O^R прямые a и b должны перейти в окружности $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$, а их точка пересечения отобразится в точку пересечения окружностей $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$, отличную от точки O (свойства VI и I). Теперь необходимые построения становятся очевидными: с помощью свойства VII строим окружности $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$, находим точку пересечения этих окружностей — точку X , и снова действуем инверсией уже на точку X . Точка $Y = \text{Inv}_O^R(X)$ является искомой. Пересечение прямой и окружности находится похожим образом.

Теперь теорема Мора-Маскерони следует из решения задач предыдущих трех примеров.



2.11. Задачи Аполлония

В этом параграфе рассмотрим задачу о построении окружности, касающейся трех данных окружностей, названную в честь крупнейшего специалиста по коническим сечениям древности Аполлония Пергского¹⁶. Решению проблемы **G** предшествуют решения задач **E** и **F**.

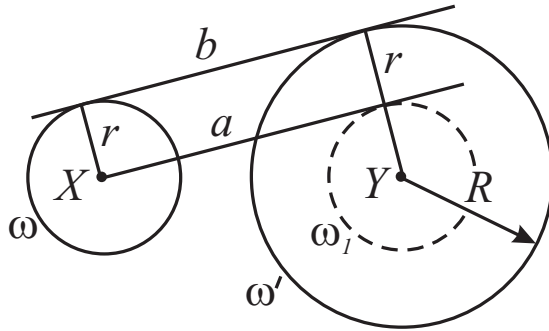


Рис. 160

Решение E. Чтобы построить окружность ω_2 , проходящую через точки A и B и касающуюся данной окружности ω_1 , рассмотрим инверсию с центром в точке $O = A$ относительно окружности произвольного радиуса R . Образом ω_2 при инверсии Inv_O^R должна быть некоторая прямая a , которая проходит через точку $B' = \text{Inv}_O^R(B)$ и касается окружности $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ (свойства VIII и IX). Касатель-

ные из произвольной точки X к произвольной окружности $\omega(Y, r)$ провести довольно легко: для этого достаточно построить вспомогательную окружность ω' на диаметре $[XY]$ и соединить X с точками пересечения $\omega \cap \omega'$. Теперь выполняем необходимые построения в следующем порядке: находим $B' = \text{Inv}_O^R(B)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$, через точку B' проводим касательные a и b к окружности $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$, строим образы $\text{Inv}_O^R(a)$ и $\text{Inv}_O^R(b)$ при инверсии Inv_O^R . В зависимости от расположения точки B' относительно окружности $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ может быть два, одно и ни одного решения (например, когда B' находится внутри $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$).

Решение F. Для решения этой задачи достаточно уметь проводить общую касательную к двум произвольным окружностям $\omega(X, r)$ и $\omega'(Y, R)$. Будем считать, что $r < R$. Проведем из точки X касательную a к окружности $\omega_1(Y, R-r)$ (рис. 160), тогда искомая внешняя касательная b к окружностям ω и ω' будет параллельна прямой a и находится от нее на расстоянии r .

Для проведения внутренней касательной вместо $\omega_1(Y, R-r)$ надо рассмотреть окружность $\omega_2(Y, R+r)$. В общем случае возможно до четырех решений. Теперь вернемся к исходной задаче. Пусть даны точка A и две

¹⁶Аполлоний Пергский(2-я половина 3 в.– 1-я половина 2 в. до н.э.) — математик эпохи эллинизма, родился в Перге (Малая Азия), главный его труд «Конические сечения» сохранился не полностью (первые четыре книги) в оригинале, частично (три последующие книги) в арабском переводе, восьмая книга утеряна; исследуя свойства конических сечений, их диаметров, фокусов, нормалей и касательных, пользовался проективно-геометрическими методами.



окружности ω_1 и ω_2 . Искомая окружность ω , проходящая через A и касающаяся ω_1 и ω_2 , при инверсии с центром $O = A$ должна перейти в некоторую прямую a , которая касается окружностей $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$ (свойства VIII и IX). Таким образом, приходим к следующему порядку построений: находим $\text{Inv}_O^R(\omega_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_2)$, проводим общие касательные (a, b, c, d) и строим образы этих касательных при Inv_O^R . В общем случае получится до четырех искомых окружностей, однако в одном случае решений будет бесконечно много (представьте, что произойдет после инверсии с окружностями ω_1 и ω_2 , если они касаются в точке A).

Решение Г. Задача Аполлония легко сводится к предыдущей задаче. Пусть даны окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$, и $r_1 < r_2 < r_3$. Построим окружность $\omega(O, R)$, проходящую через точку O_1 и касающуюся окружностей $\omega_2(O_2, r_2 - r_1)$ и $\omega_3(O_3, r_3 - r_1)$. Уменьшив радиус окружности ω на r_1 , т.е. рассматривая $\omega(O, R - r_1)$, приходим к одной из искомых окружностей. Количество решений исследовать самим (скорее всего, если исключить бесконечный случай, можно получить до восьми решений).

2.12. Построения одной линейкой

Этот параграф посвящен построениям одной линейкой. Без дополнительно нарисованных линий на плоскости (например, двух параллельных прямых) одной линейкой мало что можно сделать. Например, с помощью только одной линейки без дополнительных линий нельзя даже разделить пополам произвольный отрезок. Но если на плоскости нарисована хотя бы одна окружность и отмечен ее центр, все дальнейшие построения можно выполнять только с помощью одной линейки. В 1833 году Я. Штейнер¹⁷ доказал следующую теорему: *любая задача на построение, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена только одной линейкой, если в плоскости чертежа задана хотя бы одна окружность и отмечен ее центр (при этом задача на построение какой-либо окружности считается решенной, если найден ее центр и отрезок, длина которого равна радиусу искомой окружности)*. Чуть раньше, эту же теорему совершенно другими методами удалось доказать Ж. Понселе¹⁸. Здесь мы разберем несколько задач геометрии линей-

¹⁷Якоб Штейнер (1796–1863) — швейцарский математик, с 1835 — профессор Берлинского университета; основные исследования относятся к проективной геометрии, использовал принцип двойственности, занимался изопериметрической задачей.

¹⁸Жан Понселе (1788–1867) — французский математик, основоположник проективной геометрии и динамики машин; одновременно с Г. Кориолисом ввел в механику понятие работы; будучи участником войны



ки (эту часть геометрии принято называть *геометрией Понселе-Штейнера*).

Пример 1. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки построить прямоугольник.

Решение. Через точку O — центр данной окружности достаточно провести два различных диаметра. Концы этих диаметров будут вершинами прямоугольника, поскольку каждый из углов этого вписанного четырехугольника опирается на диаметр.

Пример 2. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Разделить данный отрезок пополам, используя одну линейку.

Решение. Пусть $a \parallel b$ и $[AB] \subseteq a$ (рис. 161). Выберем произвольно $D \in b$ и на продолжении прямой AD за точку D отметим точку M . В пересечении прямых b и BM получим точку C , а в пересечении прямых AC и BD — точку O . Точки пересечения прямой OM с прямыми a и b обозначим через K и L соответственно. Четырехугольник $ABCD$ является трапецией, отсюда точки K и L — середины ее оснований (в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой — *основное свойство трапеции*).

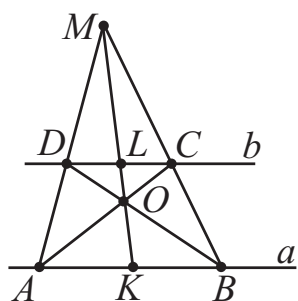


Рис. 161

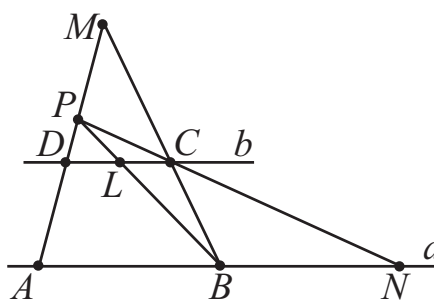


Рис. 162

Пример 3. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Увеличить данный отрезок в два раза, используя одну линейку.

Решение. Используем обозначения предыдущей задачи и рис. 162. Следовательно найдем точки P и N , где $\{P\} = (BL) \cap (AM)$ и $\{N\} = (PC) \cap a$. Используя трапецию $ADCN$, получаем, что B — середина отрезка AN . Отсюда отрезок AN — искомый.

1812 года Понселе попал в плен и несколько важных работ по геометрии им были написаны в Саратове в 1812–14 годах.



Пример 4. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки вписать в эту окружность квадрат.

Решение. Пусть $ABCD$ — вписанный в данную окружность прямоугольник (он построен в первом примере). Его противоположные стороны параллельны, поэтому, используя пример 2, мы можем найти точки K , L , M и N , которые являются соответственно серединами его сторон AB , BC , CD и DA . Прямые KM и LN содержат перпендикулярные диаметры данной окружности, поэтому высекают на ней четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.

Пример 5. Дана прямая a и два равных отрезка AB и BN , лежащих на этой прямой. Через произвольную точку D провести прямую, параллельную прямой a .

Решение. Фактически, эта задача является обратной к задаче из примера 2. Сначала на продолжении прямой AD за точку D произвольно выберем точку M (рис. 163). Пусть O — точка пересечения прямых MB и DN , а C — точка пересечения прямых AO и MN .

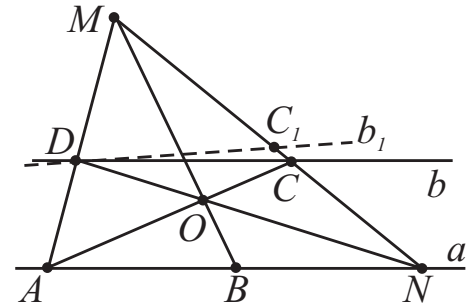


Рис. 163

Докажем, что прямая $b = (DC)$ является искомой. Пусть это не так, тогда рассмотрим прямую b_1 , которая проходит через D , параллельна прямой a и не совпадает с b . Точку пересечения прямых b_1 и MN обозначим через C_1 . Тогда ANC_1D — трапеция, причем точка O , одновременно лежащая на прямых DN и MB должна быть точкой пересечения диагоналей этой трапеции. Таким образом, $C_1 \in (AO)$, откуда $C = C_1$ и $b_1 = b$. Это противоречит предположению $b_1 \neq b$. Параллельность прямых b и a доказана.

Пример 6. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, параллельную данной прямой a .

Решение. Используя примеры 1 и 2 в данную окружность можно вписать прямоугольник $ABCD$ и найти середины его сторон. Прямая a не может быть параллельна каждой стороне этого прямоугольника. Пусть, например прямые AB и a не параллельны. Обозначим через K и M середины отрезков AB и CD . Тогда тройка параллельных прямых — (AD) , (KM) и (BC) — высечет согласно теореме Фалеса на прямой a два равных отрезка. Затем, используя результат предыдущей задачи, через любую точку плоскости, в том числе и через H , можно провести прямую, параллельную данной



прямой a (одной линейкой).

Пример 7. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, перпендикулярную данной прямой a .

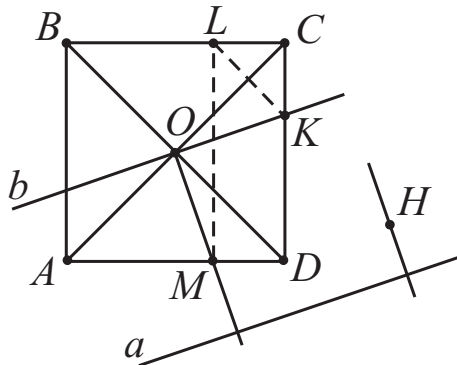


Рис. 164

Решение. Можно считать, что на плоскости, кроме данных прямой и точки нарисован квадрат $ABCD$ (см. пример 4), его центр — точка O , а также прямая b (см. пример 5), которая проходит через точку O и параллельна прямой a (рис. 164). Пусть K — точка пересечения прямой b со стороной CD , прямая KL параллельна диагонали BD (см. пример 5), причем точка $L \in [BC]$. И, наконец, проводя через L прямую параллельно (AB) , получаем на стороне AD точку M .

Докажем, что $(OM) \perp b$. Из равенств $DM = CL = CK$ следует равенство треугольников ODM и OCK (по 1КПТ). Из равенства этих треугольников и условия $(OC) \perp (OD)$ следует, что $(OM) \perp b$. Теперь остается через точку H провести прямую, параллельную прямой OM (см. пример 5).

2.13. Отношение четырех точек. Формула Эйлера

Основой исследований в этом параграфе будет формула V для вычисления расстояния между образами точек A и B при инверсии относительно $\omega(O, R)$: $|A'B'| = |AB|R^2/(|OA| \cdot |OB|)$. Из этой формулы сразу видно, что расстояние при инверсии для произвольных точек A и B не сохраняется и искажение расстояния происходит сильнее при приближении точек A и B к центру окружности инверсии. Прежде чем установить менее очевидный факт, введем важное в теории круговых преобразований¹⁹ понятие *двойного отношения четырех точек*.

Определение. Двойным отношением четырех точек A, B, C и D называют число

$$\frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}.$$

¹⁹Круговым называется такое преобразование множества $\tilde{\alpha} = \alpha \cup \{\infty\}$, при котором каждая обобщенная окружность (т.е. окружность или прямая) отображается на обобщенную окружность. Инверсия — частный случай кругового преобразования.



Теорема 13.1. *Двойное отношение четырех точек сохраняется при инверсии.*

Доказательство. Обозначим через A' , B' , C' и D' соответственно образы точек A , B , C и D при инверсии относительно окружности $\omega(O, R)$. Тогда из формулы V имеем

$$\begin{aligned} \frac{|A'C'|}{|B'C'|} : \frac{|A'D'|}{|B'D'|} &= \frac{|AC|/(|OA| \cdot |OC|)}{|BC|/(|OB| \cdot |OC|)} : \frac{|AD|/(|OA| \cdot |OD|)}{|BD|/(|OB| \cdot |OD|)} = \\ &= \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}. \end{aligned}$$

■

В следующих двух теоремах решаются проблемы **Н** и **I**.

Теорема 13.2. *Пусть даны точки A , B и число $k > 0$ ($k \neq 1$). Множество Φ состоит из всех таких точек X плоскости, для которых $|XA|/|XB| = k$. Тогда Φ является окружностью (окружность Аполлония), центр которой лежит на прямой (AB) .*

Доказательство. На (AB) можно легко найти две точки O и C , принадлежащие множеству Φ (одна из них будет внутренней точкой отрезка AB , другая — внешней точкой этого отрезка). Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром в точке O произвольного радиуса R . Для образов точек A , B и C имеем

$$\frac{|C'A'|}{|C'B'|} = \frac{|CA|R^2/(|OC| \cdot |OA|)}{|CB|R^2/(|OC| \cdot |OB|)} = \frac{|CA|}{|CB|} : \frac{|OA|}{|OB|} = k : k = 1. \quad (1)$$

Пусть $X' = \text{Inv}_O^R(X)$ и $\Phi' = \text{Inv}_O^R(\Phi)$. Тогда, учитывая (1) и сохранение при инверсии отношения четырех точек, получаем

$$\begin{aligned} X \in \Phi &\Leftrightarrow \frac{|XA|}{|XB|} : \frac{|CA|}{|CB|} = k : k = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{|X'A'|}{|X'B'|} : \frac{|C'A'|}{|C'B'|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|X'A'|}{|X'B'|} = 1. \end{aligned}$$

Последнее означает, что Φ' — серединный перпендикуляр к отрезку $[A'B']$. Отсюда $\Phi = \text{Inv}_O^R(\Phi')$ — окружность, диаметр которой лежит на прямой AB .

■

Геометрическое место точек из предыдущей теоремы обозначим **ГМТ7**.



Формула следующей теоремы, названная в честь Леонарда Эйлера, связывает между собой радиусы вписанной и описанной окружностей произвольного треугольника с расстоянием между их центрами.

Теорема 13.3. Пусть для произвольного треугольника ABC числа r , R и d соответственно обозначают радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. Тогда $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Доказательство. Точки касания вписанной окружности $\omega = \omega(O, r)$ со сторонами $[AB]$, $[AC]$ и $[BC]$ обозначим соответственно через K , L и M (рис. 165).

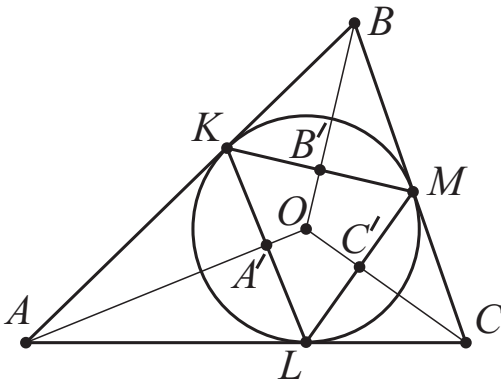


Рис. 165

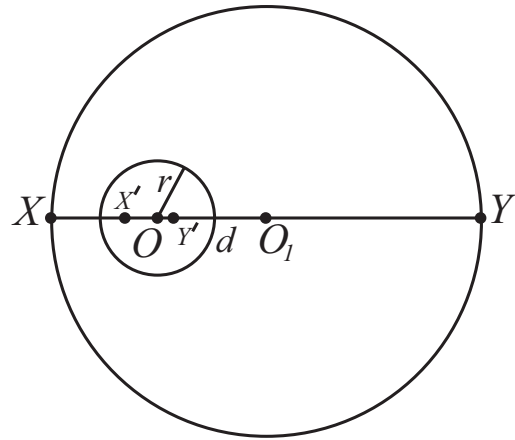


Рис. 166

Пусть также $\omega_1 = \omega(O_1, R)$ — описанная около треугольника ABC окружность. Рассмотрим инверсию относительно вписанной окружности ω . Так как прямые AK и AL являются касательными к окружности инверсии, образом точки A будет середина отрезка KL (точка A'), аналогично $B' = \text{Inv}_O^r(B)$ — середина $[KM]$ и $C' = \text{Inv}_O^r(C)$ — середина $[LM]$. Образом окружности $\omega_1 = \omega(O_1, R)$ будет окружность ω'_1 , проходящая через точки A', B', C' и имеющая радиус равный $r/2$ (так как при гомотетии с коэффициентом $-1/2$ окружность ω переходит в окружность, проходящую через середины сторон $\triangle KLM$, т.е. в ω'_1). Теперь попробуем выяснить, как вообще изменяется радиус окружности при инверсии. Обозначим через X и Y точки диаметра окружности $\omega_1(O_1, R)$, лежащие на прямой (OO_1) (рис. 166). По свойству IX отрезок $[\text{Inv}_O^r(X) \text{Inv}_O^r(Y)]$ является диаметром окружности $\text{Inv}_O^r(\omega_1)$, а по свойству V его длина равна

$$|X'Y'| = \frac{|XY|}{|OX| \cdot |OY|} \cdot r^2 = \frac{2Rr^2}{|R-d| \cdot |R+d|} = \frac{2Rr^2}{|R^2 - d^2|}.$$



Учитывая, что $|X'Y'| = 2R'$, где R' — радиус окружности $\text{Inv}_O^r(\omega_1)$, получаем формулу $R' = \frac{Rr^2}{|R^2 - d^2|}$. Возвращаясь к образу описанной окружности при инверсии относительно $\omega(O, r)$ и учитывая, что $R^2 - d^2 > 0$, имеем

$$\frac{r}{2} = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2} \Rightarrow R^2 - d^2 = 2Rr \Rightarrow d^2 = R^2 - 2Rr.$$

■

2.14. Арбелос. Теорема Паппа

В следующей лемме обнаружим простую связь между инверсией и гомотетией.

Лемма 14.1. Пусть $\omega = \omega(O, R)$ — окружность инверсии, $O \notin \omega_1$, $\omega_1 = \omega(O_1, r_1)$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \omega'_1$. Тогда существует такой коэффициент $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, что $H_O^k(\omega_1) = \omega'_1$.

Доказательство. Обозначим диаметр окружности ω_1 , лежащий на прямой OO_1 , через $[AB]$, $A' = \text{Inv}_O^R(A)$, $B' = \text{Inv}_O^R(B)$, тогда $[A'B']$ — диаметр окружности ω'_1 и $|OA| \cdot |OA'| = R^2 = |OB| \cdot |OB'|$, что дает $|OA'|/|OB| = |OB'|/|OA|$. Теперь рассмотрим два случая: точка O лежит вне окружности ω_1 и точка O лежит внутри ω_1 .

Если центр окружности инверсии лежит вне ω_1 (рис. 167), то точки $A', B' \in [OA]$. Пусть теперь $k = |OA'|/|OB|$, тогда выполняется $H_O^k(B) = A'$ и $H_O^k(A) = B'$. Учитывая, что $H_O^k(O_1) \in [A'B']$, получаем, что $[A'B']$ — диаметр окружности $H_O^k(\omega_1)$, поэтому $H_O^k(\omega_1) = \text{Inv}_O^R(\omega_1)$. Можно также заметить, что для произвольной точки $C \in \omega_1$ и ее образа $C' = \text{Inv}_O^R(C)$ (рис. 167), выполняется $\angle OBC = \angle OC'B' = \angle OA'D$, где D — вторая точка пересечения луча $[OC)$ с ω'_1 . Последнее означает, что $(BC) \parallel (A'D)$ и $D = H_O^k(C)$ (гомотетия переводит прямую в параллельную прямую).

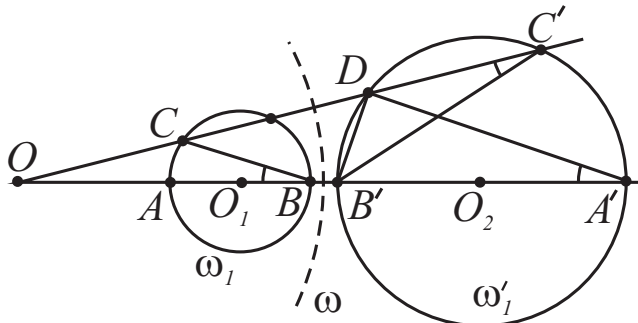


Рис. 167

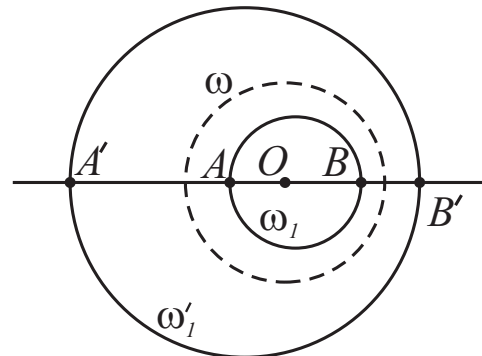


Рис. 168



Рассмотрим второй случай, когда центр окружности инверсии лежит внутри окружности ω_1 (рис. 168), что означает $O \in [AB]$ и $O \in [A'B']$. Пусть теперь $k = -|OA'|/|OB|$, тогда $H_O^k(B) = A'$ и $H_O^k(A) = B'$. Учитывая, что $H_O^k(O_1) \in [A'B']$, получаем, что $[A'B']$ — диаметр окружности $H_O^k(\omega_1)$, поэтому $H_O^k(\omega_1) = \text{Inv}_O^R(\omega_1)$.

■

Далее обсудим две классические задачи, связанные с арбелосом²⁰. Пусть точка B лежит между точками A и C . Рассмотрим полуокружности, с диаметрами AC , AB и BC , которые лежат по одну сторону от прямой AC . Часть плоскости, ограниченная этими тремя полуокружностями, называется *арбелосом* (рис. 169). Обозначать арбелос будем так: $\text{Arb}(ABC)$ (предполагая, что B — внутренняя точка интервала AC). В следующем утверждении решается первая задача об арбелосе, которая называется *задачей Архимеда*.

Теорема 14.2. Пусть половины окружностей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 ограничивают арбелос $\text{Arb}(ABC)$, прямая l перпендикулярна (AB) и $B \in l$. В криволинейные сегменты, ограниченные прямой l и половинами окружностей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 вписываются окружности ω_1 и ω_2 (рис. 169). Тогда радиусы ω_1 и ω_2 равны.

Доказательство. Пусть радиусы окружностей Ω_1 и Ω_2 равны a и b соответственно, тогда радиус Ω_3 равен $a + b$. Далее будем рассматривать только ту полуплоскость с границей (AC) , которая содержит арбелос и через D обозначим точку пересечения прямой l с Ω_3 . Центром инверсии выберем точку $O = C$ и радиус окружности инверсии будем считать $R = |CD|$. Учитывая, что угол CDA вписан в Ω_3 и опирается на диаметр, получим $\angle CDA = 90^\circ$ и $|CB| \cdot |CA| = |CD|^2 = R^2$ (так как треугольники CBD и CDA подобны). Отсюда следует справедливость следующих соотношений: $\text{Inv}_O^R(A) = B$, $\text{Inv}_O^R(B) = A$, $\text{Inv}_O^R(\Omega_3) = l$, $\text{Inv}_O^R(l) = \Omega_3$, $\text{Inv}_O^R(\Omega_2) = l^*$ и $\text{Inv}_O^R(\Omega_1) = \Omega_1$. Теперь ясно, что инверсным образом окружности ω_1 , будет окружность $\omega_1^* = \text{Inv}_O^R(\omega_1)$, которая касается Ω_3 , l и l^* . Ясно, что радиус ω_1^* равен $r_1^* = a$. Проведем предварительные вычисления. Учитывая, что $|O_3O_1| = b$, $|O_3L| = 2a + b$ и $|O_1C| = a + 2b$, применяя теорему Пифагора, последовательно находим $|LO_1| = \sqrt{4a^2 + 4ab}$ и $|LO|^2 = 5a^2 + 8ab + 4b^2$. Применим формулу изменения радиуса окружности при инверсии (см. вывод формулы Эйлера в предыдущем параграфе) и найдем радиус r_1 окружности

²⁰ Арбелос (греч. $\alpha\rho\beta\nu\lambda\omicron\varsigma$) — сапожный нож, его лезвие похоже на рассматриваемую далее геометрическую фигуру.



$$\omega_1 = \text{Inv}_O^R(\omega_1^*)$$

$$r_1 = a \cdot \frac{R^2}{|r_1^{*2} - LO^2|} = a \cdot \frac{4b(a+b)}{4(a^2 + 2ab + b^2)} = \frac{ab}{a+b}.$$

Действуем аналогично, рассматривая инверсию относительно окружности с центром в точке A и радиусом $|AD|$, получим, что радиус окружности ω_2 также равен $ab/(a+b)$.

■

Заметим, что громоздких вычислений при доказательстве последней теоремы можно было избежать. Действительно, мы знаем, что инверсные окружности ω_1^* и ω_1 гомотетичны с тем же центром $O = C$. При этой гомотетии касательная l^* должна перейти в l , поэтому коэффициент гомотетии равен $2b/(2a + 2b)$ и $r_1 = a \cdot \frac{b}{a+b}$. Может возникнуть вопрос о существовании окружностей ω_1 и ω_2 из последней теоремы. Внимательный читатель быстро сведет задачу построения таких окружностей к задаче Аполлония, решение которой было дано ранее.

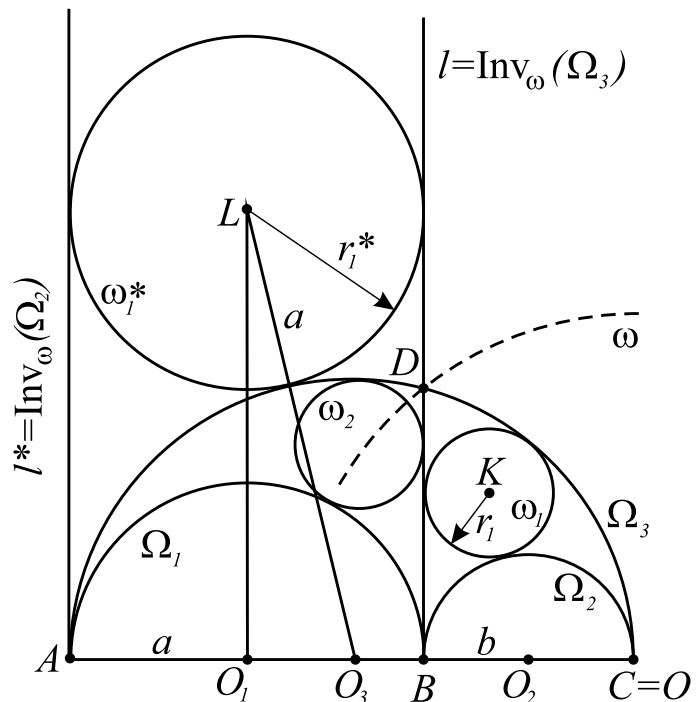


Рис. 169

Сформулируем вторую задачу об арбелосе, используя уже введенные обозначения. Пусть окружность $S_1 = \omega(O_1, r_1)$ касается половин окружностей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 , т.е. вписана в арбелос $\text{Arb}(ABC)$. Тогда расстояние от точки O_1 до прямой AC равно диаметру окружности S_1 . Следующее утверждение, которое называется *теоремой Паппа*²¹ многократно перекрывает этот результат.

Теорема 14.3. Пусть половины окружностей Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 ограничивают арбелос $\text{Arb}(ABC)$. В него вписывается цепочка окружностей

²¹Папп Александрийский — греческий математик и механик, живший и работавший в Александрии; годы его жизни не известны, предположительно III–IV в.н.э.; главный его труд — трактат «Математическое собрание» в восьми книгах дошел до нас не полностью.



$S_1 = \omega(P_1, r_1)$, $S_2 = \omega(P_2, r_2), \dots$, $S_n = \omega(P_n, r_n), \dots$ следующим образом (рис. 170): S_1 касается всех трех полуокружностей арбелоса, а S_i при $i \geq 2$ касается внутренним образом Ω_3 , и внешним образом — Ω_1 , S_{i-1} и S_{i+1} . Обозначим через $d_n = 2r_n$ — диаметр n -ой окружности, тогда расстояние от P_n до прямой AC равно $n \cdot d_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Далее используем обозначения рис. 170.

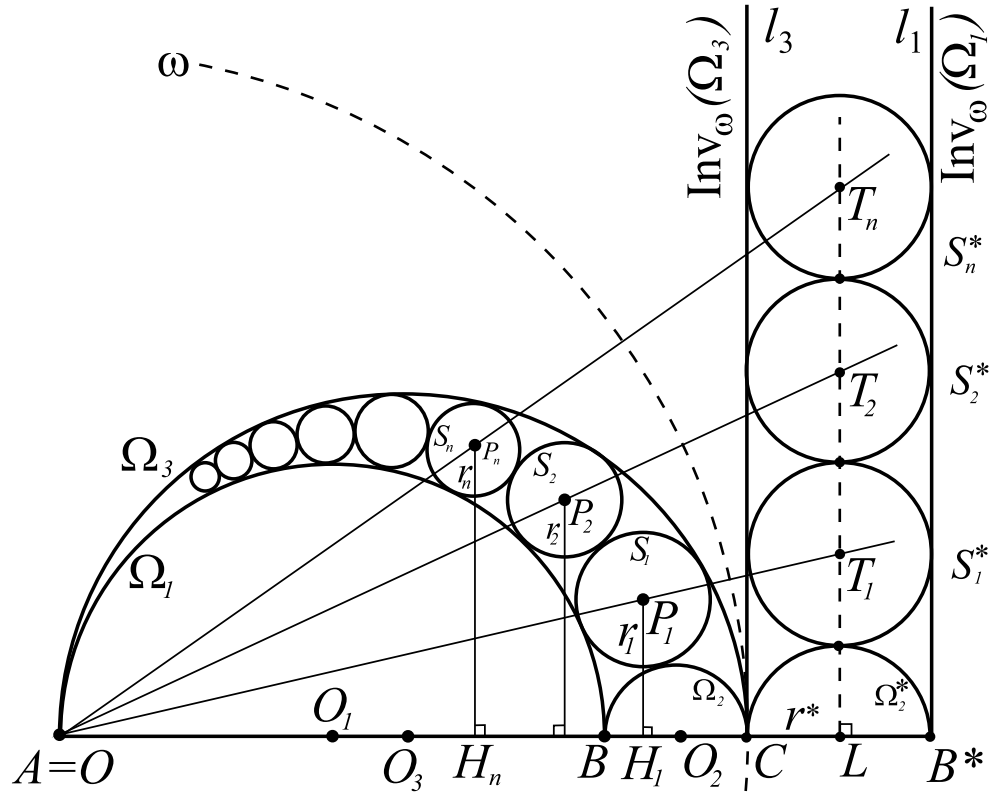


Рис. 170

Будем рассматривать инверсию относительно окружности ω с центром в точке $O = A$ радиуса $R = |AC|$. Пусть $B^* = \text{Inv}_O^R(B)$, тогда образом окружности Ω_1 является прямая l_1 , проходящая через точку B^* и перпендикулярная прямой AC . Окружность Ω_3 также перейдет в прямую l_3 , проходящую через точку C , которая неподвижна относительно этой инверсии. Окружности $\Omega_2, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ переходят соответственно в цепочку окружностей $\Omega_2^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*, \dots$ последовательно касающихся друг друга, а также касающихся прямых l_1 и l_3 . Ясно, что отрезок CB^* — диаметр окружности Ω_2^* , обозначим через $r^* = |CB^*|/2$. Учитывая, что $l_1 \parallel l_3$, получаем, что в цепочке $\Omega_2^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*, \dots$ все окружности имеют радиус r^* . Обозначим центры окружностей $\Omega_2^*, S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*, \dots$ соответственно через $L, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$. Используя лемму, получим,



что окружности S_n и S_n^* гомотетичны друг другу с центром в той же точке O , поэтому для расстояния от центра окружности S_n до прямой AC выполняется следующее соотношение

$$\frac{|P_n H_n|}{r_n} = \frac{|T_n L|}{r^*} = \frac{2r^* \cdot n}{r^*} = 2n \Rightarrow \frac{|P_n H_n|}{d_n} = n \Rightarrow |P_n H_n| = n \cdot d_n.$$

■

2.15. Теорема Фейербаха

Продолжим обзор приложений инверсии одним совершенно неожиданным результатом об окружности девяти точек.

Лемма 15.1. 1) пусть O лежит вне окружности $\omega_1 = \omega(O_1, R_1)$ и $A, X, Y \in \omega_1$, $O \in (XY)$. Тогда (OA) — касательная к ω тогда и только тогда, когда $|OA|^2 = |OX| \cdot |OY|$.

2) для двух различных окружностей $\omega = \omega(O, R)$ и $\omega_1 = \omega(O_1, R_1)$ условие $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \omega_1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\omega \perp \omega_1$.

Доказательство. 1) в одну сторону (рис. 171) утверждение следует из свойства касательной к окружности (теорема 9.4 первой главы). В обратную сторону, предположив противное, на луче $[OA)$ найдем такую точку $B \neq A$, что $B \in \omega_1$. Тогда $|OA|^2 = |OX| \cdot |OY| = |OA| \cdot |OB|$, откуда $|OA| = |OB|$, что противоречит выбору точки B .

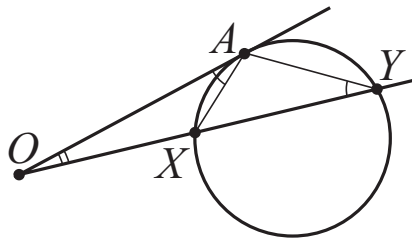


Рис. 171

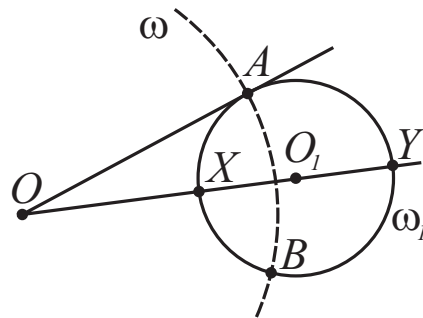


Рис. 172

2) пусть $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \omega_1$, $\omega \cap \omega_1 = \{A, B\}$ и $\omega_1 \cap (OO_1) = \{X, Y\}$ (рис. 172). Тогда $\text{Inv}_O^R(X) = Y$. Отсюда $|OX| \cdot |OY| = R^2 = |OA|^2$. Последнее, по первому пункту леммы, равносильно тому, что (OA) — касательная к окружности ω_1 , что означает $(OA) \perp (O_1A)$ и $\omega \perp \omega_1$.

■



Жемчужиной планиметрии считают следующий результат, установленный в 1822 году, который называется *теоремой Фейербаха*²².

Теорема 15.2. *Окружность Эйлера треугольника ABC касается вписанной и трех внеписанных окружностей этого треугольника.*

Доказательство. Середины сторон данного треугольника обозначим через A' , B' и C' (рис. 173), длины его сторон — через $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Как обычно, $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр $\triangle ABC$. Будем использовать обозначения рисунка 173. Из теоремы 9.5 первой главы имеем $|AL| = p$, $CX_A = |CL| = p - b = |BX|$.

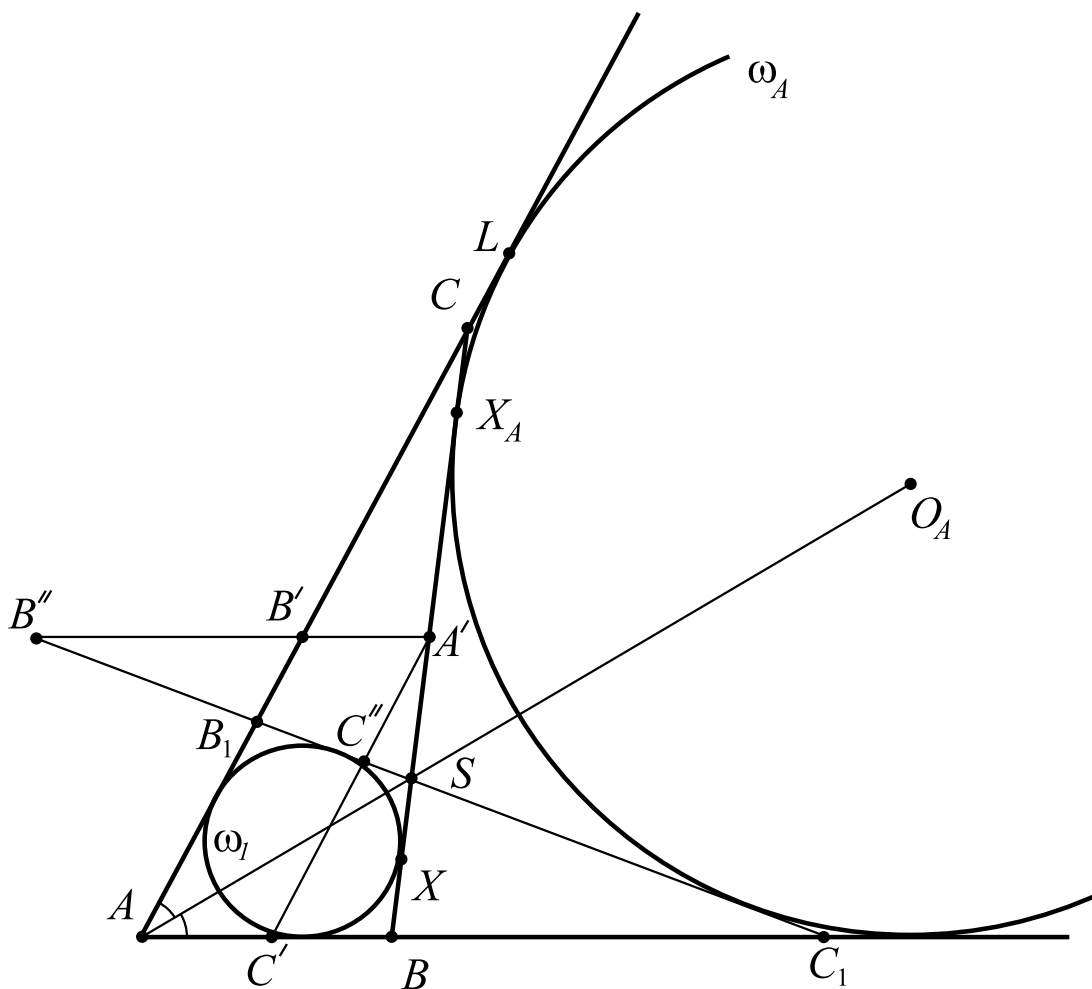


Рис. 173

Также проведем внутреннюю касательную (B_1C_1) к вписанной окружности ω_1 и внеписанной окружности ω_A . При осевой симметрии относительно биссектрисы (AO_A) выполняется $S_{(AO_A)}([BC]) = [B_1C_1]$, поэтому

²²Карл Вильгельм фон Фейербах (1800-1834) — немецкий математик, сын криминалиста Пауля Фейербаха, старший брат философа Людвиг Фейербаха, преподаватель гимназии в Эрлангене.



$|B_1C| = |BC_1| = |AC_1| - |AB| = |AC| - |AB| = b - c$ (далее предполагаем, что $b \geq c$). На отрезке $[XX_A]$ как на диаметре построим окружность ω . Точка $O = A'$ будет центром ω (так как $|BX| = |CX_A|$), а ее радиус равен $R = |XX_A|/2 = (a - 2|BX|)/2 = (b - c)/2$. Рассмотрим симметрию относительно ω . Из условий $\omega_1 \perp \omega$ и $\omega_A \perp \omega$ по предыдущей лемме заключаем, что $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \omega_1$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_A) = \omega_A$. Чтобы найти образ окружности Эйлера ω_Δ при инверсии относительно ω введем дополнительные обозначения.

Пусть S — общая точка биссектрисы $[AO_A]$ и прямых (BC) и (B_1C_1) . Тогда $|SC| = ab/(b + c)$ и $|SB| = ac/(b + c)$. Отсюда

$$|SA'| = (|SC| - |SB|)/2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b - c}{b + c}.$$

Пусть также точки B'' и C'' являются соответственно пересечением касательной (B_1C_1) с прямыми $(A'B')$ и $(A'C')$. Из подобия треугольников $SA'B''$ и SBC_1 получаем

$$|A'B''| = |BC_1| \cdot \frac{|SA'|}{|SB|} = (b - c) \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b - c}{b + c}}{a \cdot \frac{c}{b + c}} = \frac{(b - c)^2}{2c}.$$

Поскольку $|A'B'| = c/2$,

$$|A'B'| \cdot |A'B''| = (b - c)^2/4 = R^2. \quad (1)$$

Рассматривая подобные треугольники $A'SC''$ и CSB_1 приходим к

$$|A'C''| = |B_1C| \cdot \frac{|SA'|}{|SC|} = (b - c) \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b - c}{b + c}}{a \cdot \frac{b}{b + c}} = \frac{(b - c)^2}{2b}.$$

Отсюда

$$|A'C''| \cdot |A'C'| = \frac{(b - c)^2}{2b} \cdot \frac{b}{2} = R^2. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) означают, что $\text{Inv}_O^R(B') = B''$ и $\text{Inv}_O^R(C') = C''$. Поэтому $\text{Inv}_O^R(\omega_\Delta) = (B''C'') = (B_1C_1)$ и ω_Δ касается $\text{Inv}_O^R(\omega_1) = \omega_1$ и $\text{Inv}_O^R(\omega_A) = \omega_A$. Аналогично доказывается, что ω_Δ касается оставшихся двух внеписанных окружностей. ■

Заметим, что окружность Эйлера ω_Δ треугольника ABC является окружностью Эйлера для каждого из следующих треугольников: $\triangle HAB$, $\triangle HAC$, $\triangle HBC$ (H — ортоцентр $\triangle ABC$). Каждый из этих треугольников имеет



свою вписанную и три внеписанные окружности. Таким образом, теорема Фейербаха приводит к фантастическому результату: окружность Эйлера треугольника ABC касается по крайней мере шестнадцати окружностей, естественно определенных этим треугольником.

2.16. Радикальная ось окружностей. Поризм Штейнера

В лемме из предыдущего параграфа мы вспомнили, что для любой секущей к окружности произведение отрезков постоянно и равно квадрату касательной. Аналогичное свойство выполняется и для хорд окружности, проходящих через одну точку (теорема 9.3 первой главы): для двух произвольных хорд AB и CD окружности ω , пересекающихся в точке M , верно соотношение $|AM| \cdot |MB| = |CM| \cdot |MD|$. Тот факт, что произведение отрезков не зависит от выбора прямой, является основой для следующего определения.

Определение. Пусть прямая a проходит через точку M и пересекает окружность $\omega = \omega(O, R)$ в точках A и B ²³. Степенью точки M относительно окружности ω называется число

$$\deg(M, \omega) = \begin{cases} |MA| \cdot |MB|, & \text{если } M \text{ расположена вне } \omega; \\ -|MA| \cdot |MB|, & \text{если } M \text{ расположена внутри } \omega; \\ 0, & \text{если } M \in \omega. \end{cases}$$

В следующей лемме доказывается простое правило вычисления $\deg(M, \omega)$.

Лемма 16.1. Для произвольной точки M и окружности $\omega = \omega(O, R)$ пусть $d = |MO|$, тогда $\deg(M, \omega) = d^2 - R^2$.

Доказательство. Случай $M \in \omega$ очевиден. Пусть точка M расположена вне окружности ω , тогда $|MA| \cdot |MB| = |MK|^2$, где (MK) — касательная к ω и K — точка касания. По теореме Пифагора сразу получаем $\deg(M, \omega) = |MK|^2 = |MO|^2 - |OK|^2 = d^2 - R^2$.

Осталось рассмотреть случай, когда M расположена внутри окружности ω . Проведем через M диаметр CD , тогда

$$\deg(M, \omega) = -|MA| \cdot |MB| = -|MC| \cdot |MD| = -(R - d)(R + d) = d^2 - R^2.$$

■

²³В случае, если a — касательная к ω , будет выполняться $A = B$.



Перед следующей теоремой вспомним, в чем суть координатного метода. На плоскости вводится прямоугольная (декартова) система координат, при этом каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара ее координат — (x, y) (точку с ее координатами обычно записывают в виде $M(x, y)$). Появляется возможность некоторые фигуры на плоскости описать с помощью алгебраических уравнений. Напомним, что уравнение $f(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* фигуры Φ , если

$M(x, y) \in \Phi \Leftrightarrow$ координаты точки M удовлетворяют уравнению $f(x, y) = 0$,

или, что то же самое, $\Phi = \{M(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Хорошо известны координатные уравнения прямых и окружностей. Любая прямая на плоскости имеет своим координатным уравнением уравнение вида $y = k \cdot x + b$, если она не параллельна оси Oy , и $x = x_0$ — в противном случае. Верно и обратное, любое уравнение вида $y = k \cdot x + b$ или $x = x_0$ является координатным уравнением некоторой прямой. Координатным уравнением окружности радиуса $R > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ является уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Верно также, что любое такое уравнение задает на плоскости окружность радиуса $R > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$. Подробнее о координатных уравнениях мы поговорим в четвертой и пятой главах.

Договоримся, что ГМТ из следующей теоремы будем обозначать **ГМТ8**.

Теорема 16.2. *Даны две неконцентрические²⁴ окружности ω_1 и ω_2 . Тогда множество всех точек M , для которых $\deg(M, \omega_1) = \deg(M, \omega_2)$ является прямой, перпендикулярной линии центров этих окружностей (радикальная ось двух окружностей).*

Доказательство. Выберем систему координат так, что ось Ox проходит через центры данных окружностей и начало координат совпадает с центром одной из них. Пусть, например, $\omega_1 = \omega(O, r)$, $\omega_2 = \omega(O_1, R)$, $O_1(x_1, 0)$ и $x_1 > 0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$. Тогда по предыдущей лемме выполняется $\deg(M, \omega_1) = |MO|^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$. Аналогично находим, что $\deg(M, \omega_2) = |MO_1|^2 - R^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2$. Таким образом,

$$x^2 + y^2 - r^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1^2 + r^2 - R^2}{2x_1} = x_0.$$

²⁴Т.е. с разными центрами.



Последнее уравнение задает перпендикулярную к (OO_1) прямую $x = x_0$.

■

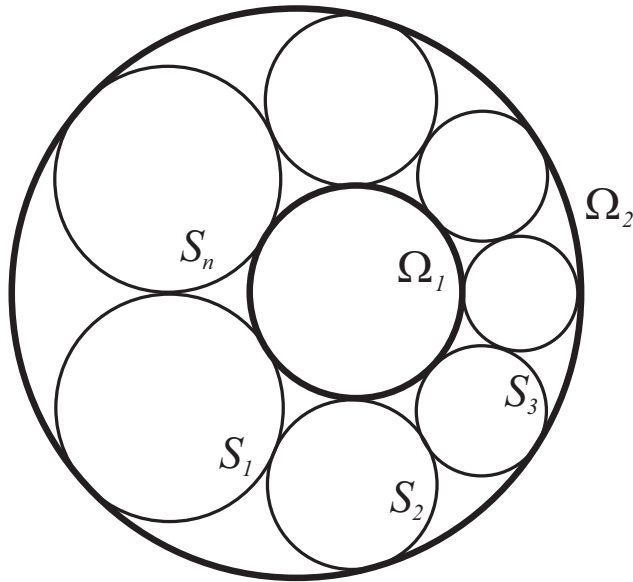


Рис. 174

Предыдущая теорема имеет несколько полезных следствий. Во-первых, для трех окружностей ω_1 , ω_2 и ω_3 , центры которых не лежат на одной прямой, три радикальные оси пересекаются в одной точке (несложно доказать, что точка пересечения двух радикальных осей лежит на третьей радикальной оси). Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей. Во-вторых, если окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух различных точках A и B , то радикальной осью этих окружностей является прямая AB (действительно, эти точки имеют нулевую степень от-

носительно каждой из окружностей). Наконец, в-третьих, если окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются, то на прямой O_1O_2 всегда найдется точка, из которой отрезки касательных к обеим окружностям равны между собой. Выбрав точку пересечения радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2 с линией центров (O_1O_2) сразу обнаруживаем, что квадраты касательных из этой точки к обеим окружностям одинаковы, поэтому эта точка и обладает нужным свойством.

Следующий результат называется *поризмом Штейнера*.

Теорема 16.3. Пусть окружность Ω_1 лежит внутри окружности Ω_2 и для них существует «уникальная» цепочка окружностей $S_1, S_2, \dots, S_n$ (рис. 174), каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1), внешне касается Ω_1 и внутренним образом касающиеся Ω_2 . Тогда таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1 , внешне касающейся Ω_1 и внутренним образом Ω_2 , существует аналогичная цепочка из n (количество окружностей в «уникальных» цепочках одинаково!) касающихся окружностей $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Доказательство. Сразу заметим, что утверждение очевидно, если окружности Ω_1 и Ω_2 концентрические, поскольку такие «уникальные» цепочки



получаются друг из друга поворотом вокруг общего центра этих окружностей.

Пусть M — точка пересечения линии центров $a = (O_1O_2)$ окружностей Ω_1, Ω_2 с их радикальной осью (рис. 175). Выше мы заметили, что отрезки касательных из M к Ω_1 и Ω_2 равны, поэтому обозначим их длину через r . Пусть окружность $\omega^* = \omega(M, r)$ пересекает прямую a в точках O и A . Обозначим через R расстояние между точками O и A и рассмотрим инверсию относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. При этой

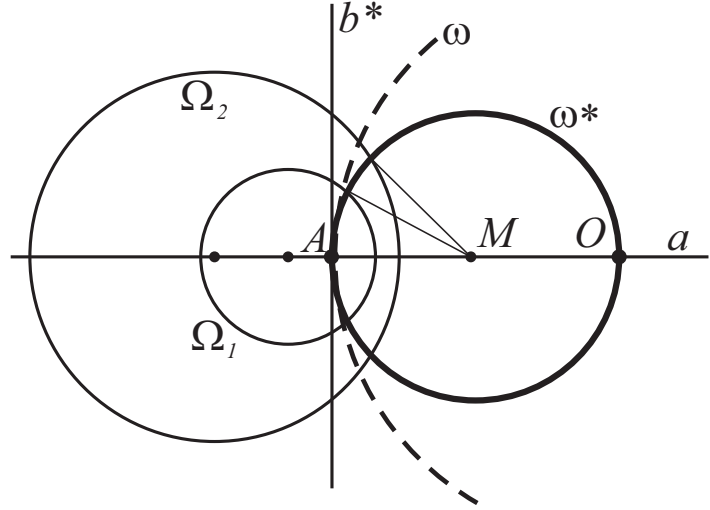


Рис. 175

инверсии $\Omega_1^* = \text{Inv}_O^R(\Omega_1)$, $\Omega_2^* = \text{Inv}_O^R(\Omega_2)$ — окружности, а $b^* = \text{Inv}_O^R(\omega^*)$ — прямая, причем $b^* \perp a$. Радиус окружности ω^* подбирался так, что он равен отрезку касательной из M к окружности Ω_1 и поэтому радиусы этих окружностей, проведенные в точку пересечения этих окружностей, перпендикулярны друг другу, поэтому и окружности перпендикулярны. Учитывая сохранение величины угла при инверсии, получим, что $b^* \perp \Omega_1^*$. Аналогично приходим к $b^* \perp \Omega_2^*$. Ясно, что $a \perp \Omega_1^*$ и $a \perp \Omega_2^*$, поэтому диаметры окружностей Ω_1^* и Ω_2^* одновременно лежат на a и на b^* . Из этого следует, что $a \cap b^*$ — общий центр этих окружностей, т.е. Ω_1^* и Ω_2^* — концентрические.

Цепочка окружностей $S_1, S_2, \dots, S_n$ перейдет в цепочку окружностей $S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$ с сохранением условия касания их между собой, кроме того, они будут касаться Ω_1^* и Ω_2^* . Нам удалось свести общий случай расположения окружностей Ω_1 и Ω_2 к концентрическим окружностям Ω_1^* и Ω_2^* для которых уже было доказано, что существование одной «уникальной» цепочки влечет «уникальность» цепочки, начатой с произвольной окружности T_1^* . Повторное применение инверсии Inv_O^R обеспечивает «уникальность» цепочки, начинающейся с произвольной окружности T_1 , которая касается Ω_1 внешним и Ω_2 — внутренним образом.



Глава 3

Элементы стереометрии

3.1. Параллельные прямые. Скрещивающиеся прямые

Среди аксиом группы соединения выделим несколько, которые описывают расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве. Договоримся называть эти аксиомы *стереометрическими*. В скобках сохраним их предыдущую нумерацию в первой группе аксиом Гильберта.

С1. Для любых трех точек A , B и C , не принадлежащих одной прямой, можно найти единственную плоскость α , которой они принадлежат. В любой плоскости можно найти хотя бы одну точку (I.4 и I.5).

С2. Если прямая a и плоскость α имеют две общие точки, то прямая целиком содержится в плоскости (I.6).

С3. Если две плоскости α и β имеют общую точку, то у них по крайней мере есть еще одна общая точка (I.7).

С4. Существуют по крайней мере четыре точки A , B , C и D , которые не лежат в одной плоскости (I.8).

Следующее утверждение усиливает вторую часть аксиомы С1.

Теорема 1.1. *В любой плоскости можно найти пару пересекающихся прямых.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскость α и по С1 выберем $L \in \alpha$. По С4 найдется четверка точек — A , B , C и D — которые не лежат в одной плоскости. Б.о.о. считаем, что $D \notin \alpha$. Кроме того, по крайней мере одна из точек A , B , C не попадет на прямую DL . Снова, не ограничивая общность, считаем, что $A \notin (DL)$ и рассмотрим плоскость $\beta = (ADL)$. Поскольку $L \in \alpha \cap \beta$, по С3 существует точка $K \in \alpha \cap \beta$, отличная от L . По следствию из теоремы о взаимном расположении плоскостей



(теорема 1.3 первой главы) найдется такая точка $M \in \alpha$, что $M \notin (KL)$. Пусть $a = (LK)$ и $b = (LM)$, тогда по С2 выполняются включения $a \subseteq \alpha$ и $b \subseteq \alpha$. Поскольку $M \notin a$, верно $a \cap b = \{L\}$, поэтому прямые a и b — искомые. ■

Напомним определение параллельных прямых.

Определение. Прямые a и b называются параллельными ($a \parallel b$), если они совпадают или одновременно выполняются два условия:

- 1) существует плоскость, которая содержит обе эти прямые;
- 2) прямые a и b не пересекаются.

Следующее утверждение называется *критерием параллельности двух прямых*.

Теорема 1.2. Прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда любая плоскость α , которая пересекает a по одной точке, пересекает прямую b также только по одной точке.

Доказательство. В случае $a = b$ утверждение очевидно в обе стороны, поэтому далее считаем, что прямые a и b различны.

$\Rightarrow$) пусть $a, b \subseteq \beta$ и $a \cap b = \emptyset$. Рассмотрим произвольную плоскость α , которая пересекает a по одной точке, и обозначим $\{A\} = a \cap \alpha$ (рис. 176). Плоскости α и β различны (поскольку $a \not\subseteq \alpha$) и пересекаются (так как $A \in \alpha \cap \beta$), поэтому по теореме 1.3 из первой главы найдется такая прямая c , что $\alpha \cap \beta = c$. Из условий $A \in a \cap c$, $a \parallel b$, $c \neq a$ и аксиомы Евклида (аксиома IV) следует, что прямые c и b не могут быть параллельными. Но они содержатся в β , поэтому найдется такая точка B , что $c \cap b = \{B\}$. Отсюда

$$\{B\} = c \cap b = (\alpha \cap \beta) \cap b = \alpha \cap (\beta \cap b) = \alpha \cap b.$$

Таким образом, плоскость α пересекает прямую b только в одной точке.

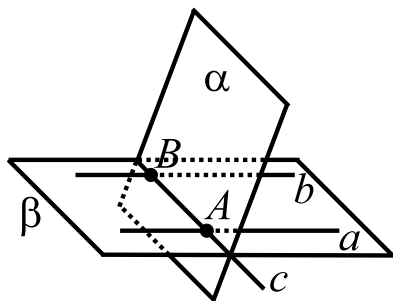


Рис. 176

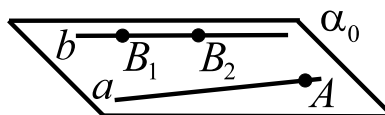


Рис. 177

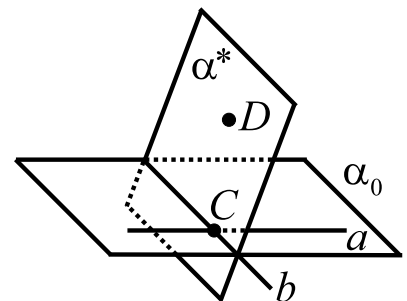


Рис. 178



$\Leftarrow$) выберем различные точки $B_1, B_2 \in b$ и точку $A \in a$ так, чтобы $A \notin b$ (это можно сделать, поскольку $a \neq b$) и рассмотрим плоскость $\alpha_0 = (AB_1B_2)$ (рис. 177). Из С2 сразу следует, что $b \subseteq \alpha_0$, покажем, что $a \subseteq \alpha_0$. О/п: $\{A\} = a \cap \alpha_0$. Тогда по предположению пересечение $b \cap \alpha_0$ также должно состоять ровно из одной точки, но $B_1, B_2 \in b \cap \alpha_0$. $\nearrow$.

Поскольку $a, b \subseteq \alpha_0$, осталось проверить, что $a \cap b = \emptyset$. О/п: найдется такая точка C , что $a \cap b = \{C\}$ (рис. 178). Выберем произвольно точку $D \notin \alpha_0$ и проведем плоскость $\alpha^* = (b, D)$. Учитывая, что из $a \subseteq \alpha_0$ следует $\alpha_0 \cap a = a$, получим

$$\alpha^* \cap a = \alpha^* \cap (\alpha_0 \cap a) = (\alpha^* \cap \alpha_0) \cap a = b \cap a = \{C\}.$$

Таким образом, плоскость α^* пересекает прямую a по одной точке, а прямую b — по бесконечному множеству. $\nearrow$.

Из $a, b \subseteq \alpha_0$ и $a \cap b = \emptyset$ следует, что $a \parallel b$. ■

Теперь легко установить, что отношение параллельности на множестве прямых является отношением эквивалентности. Рефлексивность ($a \parallel a$) и симметричность (из $a \parallel b$ следует, что $b \parallel a$) сразу следуют из определения. Остается проверить только транзитивность этого отношения.

Следствие. Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскость α , для которой пересечение $\alpha \cap a$ состоит ровно из одной точки. По предыдущей теореме получим, что $\alpha \cap b$ также состоит ровно из одной точки. Теперь условие $b \parallel c$ и предыдущая теорема дают, что пересечение $\alpha \cap c$ одноточечно.

Итак, для любой плоскости α , которая пересекает a по одной точке, она пересекает прямую c также только по одной точке. В третий раз применим предыдущую теорему и получим $a \parallel c$. ■

Определение. Прямые a и b называются скрещивающимися ($a \nparallel b$), если они не пересекаются и не параллельны.

Теорема 1.3. Следующие условия равносильны:

- 1) $a \nparallel b$;
- 2) нет такой плоскости α , которая одновременно содержит и a , и b ;
- 3) найдется плоскость α_0 , для которой $a \subseteq \alpha_0$, $b \cap \alpha_0 = \{B\}$ и $B \notin a$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) о/п: нашлась такая плоскость α , для которой



$a, b \subseteq \alpha$. Условие $a \cap b \neq \emptyset$ сразу противоречит $a \dot{\parallel} b$. Если же $a \cap b = \emptyset$ и $a, b \subseteq \alpha$, то получим $a \parallel b$, что также противоречит $a \dot{\parallel} b$.

2) $\Rightarrow$ 3) очевидно, что из (2) следует, что $a \neq b$, что позволяет выбрать различные точки $A_1, A_2 \in a$ и точку $B \in b \setminus a$. Докажем, что плоскость $\alpha_0 = (A_1 A_2 B)$ — искомая. По С2 имеем $a \subseteq \alpha_0$. Условие (2) дает $b \not\subseteq \alpha_0$, поэтому $b \cap \alpha_0 = \{B\}$. По выбору, $B \notin a$.

3) $\Rightarrow$ 1) опять заметим, что условие $a \subseteq \alpha_0$ равносильно $a \cap \alpha_0 = a$. Теперь получим, что

$$a \cap b = (a \cap \alpha_0) \cap b = a \cap (\alpha_0 \cap b) = a \cap \{B\} = \emptyset.$$

Отсюда прямые a и b не могут ни совпадать, ни пересекаться. Теперь предположим, что $a \parallel b$. Применив предыдущую теорему, получим, что из условия $\alpha_0 \cap b = \{B\}$, следует, что пересечение $\alpha_0 \cap a$ должно состоять только из одной точки, что противоречит $a \subseteq \alpha_0$ и аксиоме I.3. В результате, $a \cap b = \emptyset$ и прямые a и b не параллельны, т.е. выполняется $a \dot{\parallel} b$. ■

3.2. Параллельность прямой и плоскости, параллельность двух плоскостей

Определение. Прямая a и плоскость α называются параллельными, если $a \subseteq \alpha$ или a и α не пересекаются (обозначение: $a \parallel \alpha$).

Следующий результат называется *критерием параллельности прямой и плоскости*.

Теорема 2.1. Прямая a параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда найдется такая прямая b , содержащаяся в плоскости α , что $b \parallel a$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $a \parallel \alpha$, тогда рассмотрим два случая.

1-й случай: $a \subseteq \alpha$, тогда прямая $b = a$ — искомая.

2-й случай: $a \cap \alpha = \emptyset$. Аксиома С1 позволяет выбрать точку $B \in \alpha$. Тогда $B \notin a$ и можно рассмотреть плоскость $\beta = (a, B)$ (рис. 179). Из $B \in \alpha \cap \beta$ и $a \subseteq \beta \setminus \alpha$ следует, что $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ и $\alpha \neq \beta$, поэтому из теоремы о взаимном расположении плоскостей (1.3, первая глава) найдем прямую $b = \alpha \cap \beta$. Тогда b — искомая, поскольку $a, b \subseteq \beta$ и $a \cap b \subseteq a \cap \alpha = \emptyset$.

$\Leftarrow$) пусть $a \parallel b$ для некоторой прямой $b \subseteq \alpha$. Если выполняется $a \subseteq \alpha$ или $a \cap \alpha = \emptyset$, то сразу получим $a \parallel \alpha$. Благодаря теореме о взаимном рас-



положении прямой и плоскости (теорема 1.2 первой главы) остается рассмотреть случай $a \cap \alpha = \{A\}$. Из условия $a \parallel b$ и второй теоремы предыдущего параграфа следует, что пересечение $\alpha \cap b$ также должно состоять из одной точки, что противоречит $b \subseteq \alpha$.

■

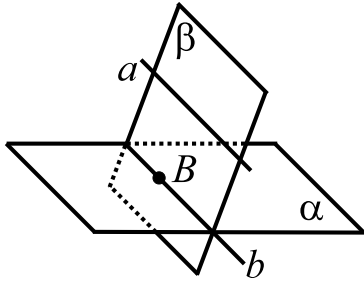


Рис. 179

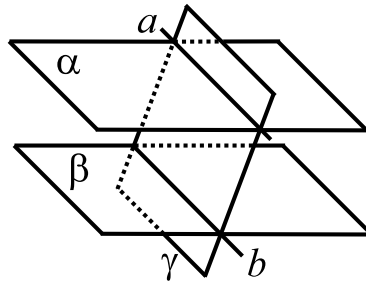


Рис. 180

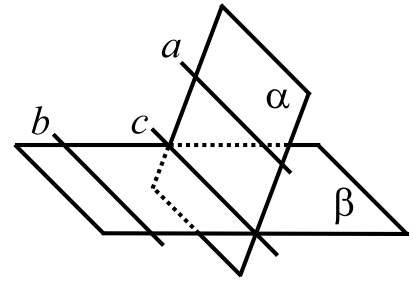


Рис. 181

Определение. Плоскости α и β называются параллельными ($\alpha \parallel \beta$), если они совпадают или не пересекаются.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.2. Пусть $\alpha \parallel \beta$. Если для плоскости γ выполняется $\gamma \cap \alpha = a$ и $\gamma \cap \beta = b$ (рис. 180), то $a \parallel b$.

Доказательство. В случае $\alpha = \beta$ выполняется $a = b$ и утверждение $a \parallel b$ очевидно.

Пусть теперь $\alpha \cap \beta = \emptyset$, тогда $a, b \subseteq \gamma$ и

$$a \cap b = (\gamma \cap \alpha) \cap (\gamma \cap \beta) = \gamma \cap (\alpha \cap \beta) = \gamma \cap \emptyset = \emptyset.$$

Отсюда $a \parallel b$.

■

Лемма 2.3. Пусть $a \parallel b$ и $a \subseteq \alpha$, $b \subseteq \beta$. Если $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 181), то прямая c будет параллельна прямым a и b .

Доказательство. Если вдруг $a \subseteq \beta$, то $a = \alpha \cap \beta = c$ и утверждение $c \parallel a$ очевидно.

Пусть теперь $a \not\subseteq \beta$. По первой теореме этого параграфа из $a \parallel b$ и $b \subseteq \beta$ следует, что $a \parallel \beta$. В нашем случае будет выполняться $a \cap \beta = \emptyset$. Но тогда $a, c \subseteq \alpha$ и

$$a \cap c = a \cap (\beta \cap \alpha) = (a \cap \beta) \cap c = \emptyset \cap c = \emptyset.$$

Тем самым мы проверили, что $a \parallel c$. Транзитивность параллельности прямых дает, что $b \parallel c$.

■



Следующий результат будем называть *первым критерием параллельности двух плоскостей*.

Теорема 2.4. *Плоскости α и β параллельны в том и только в том случае, когда найдутся такие две пары прямых $a, b \subseteq \alpha$ и $a_1, b_1 \subseteq \beta$, что $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ и прямые a и b пересекаются (т.е. $a \cap b$ — одна точка).*

Доказательство. $\Rightarrow$) по первой теореме предыдущего параграфа найдем пару пересекающихся прямых $a, b \subseteq \alpha$. Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: $\alpha = \beta$, тогда $a_1 = a$ и $b_1 = b$ — искомые.

2-й случай: $\alpha \cap \beta = \emptyset$. По С1 найдем точку $O \in \beta$ и проведем плоскости $\gamma_1 = (a, O)$ и $\gamma_2 = (b, O)$ (рис. 182). Пусть $a_1 = \gamma_1 \cap \beta$ и $b_1 = \gamma_2 \cap \beta$, тогда по первой лемме получим, что $a_1 \parallel a$ и $b_1 \parallel b$, поэтому a_1 и b_1 — искомые.

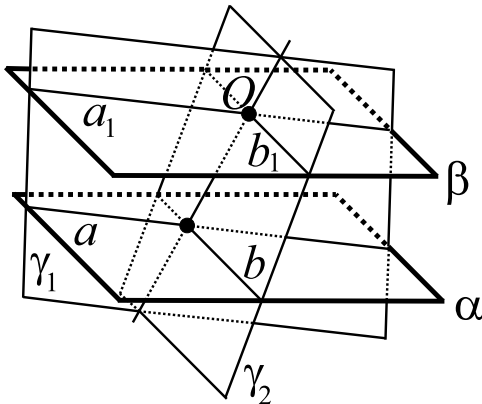


Рис. 182

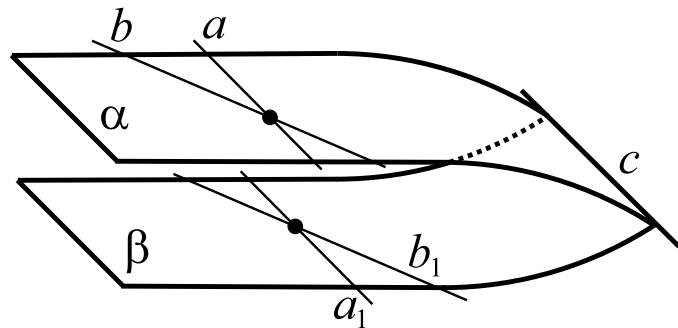


Рис. 183

$\Leftarrow$) в случае $\alpha = \beta$ или $\alpha \cap \beta = \emptyset$ сразу получим $\alpha \parallel \beta$. По теореме о взаимном расположении плоскостей (теорема 1.3, первая глава) остается рассмотреть случай $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 183). Дважды применяя вторую лемму, получим $a, a_1 \parallel c$ и $b, b_1 \parallel c$. Транзитивность параллельности прямых дает $a \parallel b$, что противоречит выбору этих прямых. ■

Следующий результат, который называется *вторым критерием параллельности двух плоскостей*, является двойственным к теореме 1.2 предыдущего параграфа: поменяем плоскости и прямые местами и получим новое утверждение.

Теорема 2.5. *Плоскости α и β параллельны тогда и только тогда, когда любая прямая a , которая пересекает α по одной точке, пересекает плоскость β также только по одной точке.*

Доказательство. В случае $\alpha = \beta$ утверждение очевидно в обе стороны, поэтому далее считаем, что плоскости α и β различны.



$\Rightarrow$) пусть $\alpha \cap \beta = \emptyset$ и $a \cap \alpha = \{A\}$. Этим условиям противоречит вариант $a \subseteq \beta$. В случае $a \cap \beta = \{B\}$ доказывать ничего не надо, поэтому (по теореме 1.2 из первой главы) остается получить противоречие в случае, когда $a \cap \beta = \emptyset$ (рис. 184).

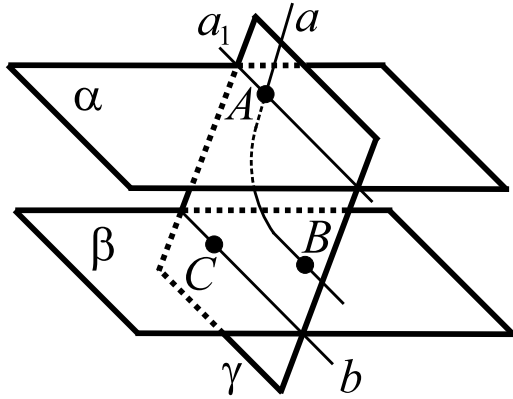


Рис. 184

Выберем произвольно точки $B \in a \setminus \{A\}$, $C \in \beta$ и проведем плоскость $\gamma = (ABC)$. По первой лемме прямые $a_1 = \gamma \cap \alpha$ и $b = \gamma \cap \beta$ параллельны. Кроме того, прямые $a, b \subseteq \gamma$ и $a \cap b \subseteq a \cap \beta = \emptyset$, т.е. $a \parallel b$. Таким образом, через точку A проведены две различные прямые, которые параллельны прямой b , а это противоречит аксиоме Евклида о параллельных.

$\Leftarrow$) в случае $\alpha = \beta$ или $\alpha \cap \beta = \emptyset$ сразу получим $\alpha \parallel \beta$. По теореме о взаимном расположении плоскостей (теорема 1.3, первая глава) остается получить противоречие в случае $\alpha \cap \beta = c$. Выберем различные $K, L \in c$ и точку $M \in \beta \setminus c$ (это можно сделать по следствию из теоремы 1.3 первой главы). Теперь рассмотрим прямую $a = (LM)$. Для этой прямой выполняются условия $M \in a \setminus \alpha$ и $L \in a \cap \alpha$. Применяя теорему о взаимном расположении прямой и плоскости (теорема 1.2 первой главы), получим $a \cap \alpha = \{L\}$, но $a \cap \beta$ — бесконечное множество. Это противоречит данному нам условию. ■

Теперь легко установить, что отношение параллельности на множестве плоскостей является отношением эквивалентности. Рефлексивность ($\alpha \parallel \alpha$) и симметричность (из $\alpha \parallel \beta$ следует, что $\beta \parallel \alpha$) сразу следуют из определения. Остается проверить только транзитивность этого отношения.

Следствие. Если $\alpha \parallel \beta$ и $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную прямую a , для которой пересечение $\alpha \cap a$ состоит ровно из одной точки. По предыдущей теореме получим, что $a \cap \beta$ также состоит ровно из одной точки. Теперь условие $\beta \parallel \gamma$ и предыдущая теорема дают, что пересечение $a \cap \gamma$ одноточечно.

Итак, для любой прямой a , которая пересекает плоскость α по одной точке, она пересекает плоскость γ также только по одной точке. В третий



раз применим предыдущую теорему и получим $\alpha \parallel \gamma$.



3.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Определение. Величиной угла между прямыми a и b (обозначается $\widehat{a, b}$) называется 0° , если $a \parallel b$; величина наименьшего угла между пересекающимися прямыми a и b ; в случае скрещивающихся прямых a и b величина угла между ними равна $\widehat{a, b_1}$, где $b_1 \parallel b$ и $b_1 \cap a \neq \emptyset$.

Заметим, что из равенства соответственных углов при параллельных прямых (теорема 5.3 первой главы) следует, что $\widehat{a, b_1} = \widehat{a, b_2}$ для любых прямых $b_1, b_2 \parallel b$, $b_1 \cap a \neq \emptyset$ и $b_2 \cap a \neq \emptyset$. Поэтому приведенное выше определение корректно, т.е. не зависит от выбора прямой b_1 . Для скрещивающихся прямых также будем использовать обозначение $a \perp b$, если $\widehat{a, b} = 90^\circ$.

Определение. Прямая a называется перпендикулярной плоскости α (обозначение $a \perp \alpha$), если $a \perp b$ для каждой прямой b , которая содержится в плоскости α .

Следующее утверждение называется *критерием перпендикулярности прямой и плоскости*.

Теорема 3.1. Прямая a перпендикулярна плоскости α тогда и только тогда, когда в α найдутся две пересекающиеся прямые b и c , которые перпендикулярны прямой a .

Доказательство. $\Rightarrow$) выбрав две пересекающиеся прямые b и c в плоскости α (существование их следует из теоремы 1.1), из определения получим $a \perp b$ и $a \perp c$.

$\Leftarrow$) пусть $b, c \subseteq \alpha$, $\{O\} = b \cap c$ и $b, c \perp a$. Рассмотрим несколько случаев расположения прямых.

1-й случай: $O \in a$ (рис. 185). Начнем с произвольной прямой d в плоскости α , которая проходит через точку O . Если $d = b$ или $d = c$, то $d \perp a$, поэтому далее считаем, что d отлична от этих прямых.

Выберем точки $B \in b$ и $C \in c$ так, чтобы $]BC[\cap d \neq \emptyset$ и обозначим $\{D\} = d \cap]BC[$. Кроме того, на прямой a выберем точки A и A' так,

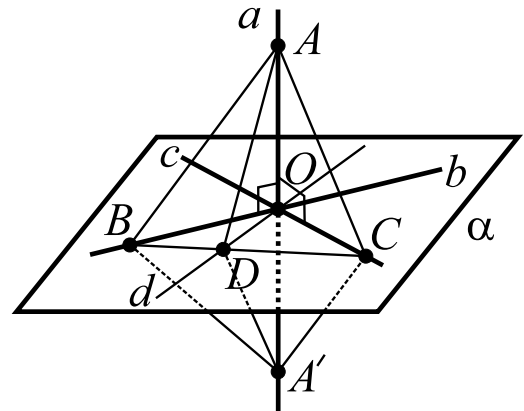


Рис. 185



чтобы O была серединой нетривиального отрезка AA' . По 1КРТ получаем равенства $\triangle AOB = \triangle A'OB$ и $\triangle AOC = \triangle A'OC$, что по 3КРТ дает $\triangle ABC = \triangle A'BC$. Таким образом, $\angle ABD = \angle A'BD$ и треугольники ABD и $A'BD$ равны по 1КРТ. Получим равенство $[AD] = [A'D]$ и по 3КРТ верно, что $\triangle AOD = \triangle A'OD$. Учитывая, что $\angle AOD$ и $\angle A'OD$ — смежные и равные друг другу углы, заключаем, что $a \perp d$.

Если $d \subseteq \alpha$ и $O \notin d$, проведем через O прямую d' так, чтобы $d' \parallel d$. Уже доказано, что $a \perp d'$, тогда по определению угла между скрещивающимися прямыми получим, что $a \perp d$.

2-й случай: $O \notin a$. Проведем через O прямую a' так, чтобы $a' \parallel a$. Уже доказано, что $a' \perp d$ для каждой прямой $d \subseteq \alpha$, тогда $a \perp d$ для всех прямых $d \subseteq \alpha$ и поэтому $a \perp \alpha$. ■

Следующая теорема обеспечивает достаточный запас перпендикулярных прямых и плоскостей.

Теорема 3.2. Для любой плоскости α и для любой точки $A \in \mathbb{P}_3$ можно провести единственную прямую a так, чтобы $A \in a$ и $a \perp \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим два случая расположения точки A и плоскости α .

1-й случай: $A \notin \alpha$. **I. Существование.** Выберем в плоскости α две пересекающиеся прямые: b и c (рис. 186).

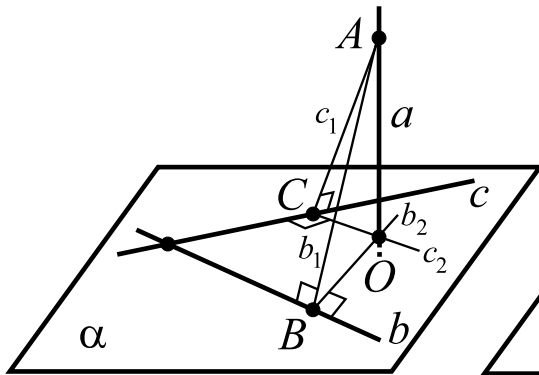


Рис. 186

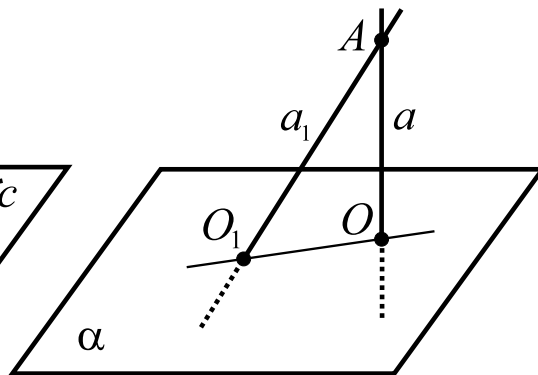


Рис. 187

В плоскости $\beta = (b, A)$ существует единственный перпендикуляр (AB) (причем $B \in b$) к прямой b (теорема 5.1 первой главы), обозначим его через b_1 . Теперь в плоскости α (по третьему следствию теоремы 5.3 первой главы) найдем такую прямую $b_2 \subseteq \alpha$, что $B \in b_2$ и $b_2 \perp b$. Аналогично в плоскости $\gamma = (c, A)$ найдем $c_1 = (AC) \perp c$ и $C \in c$, а также в плоскости



α выберем такую прямую $c_2 \subseteq \alpha$, что $C \in c_2$ и $c_2 \perp c$. Поскольку b, c — пересекающиеся прямые, прямые b_2 и c_2 не могут быть параллельными, поэтому найдется такая точка O , что $\{O\} = b_2 \cap c_2$. Осталось доказать, что $a = (AO)$ — искомый перпендикуляр. В плоскости AOB имеем: $b_1 \perp b$ и $b_2 \perp b$. Используя предыдущую теорему, получим $b \perp (AOB)$, что дает $b \perp a$. Аналогично доказывается, что $c \perp (AOC)$ и $c \perp a$. В результате, для пересекающихся прямых b и c из условий $b, c \subseteq \alpha$, $b, c \perp a$ и предыдущей теоремы получим, что $a \perp \alpha$.

II. Единственность. О/п: нашлась такая прямая $a_1 \neq a$, что $A \in a_1$ и $a_1 \perp \alpha$ (рис. 187). Обозначим через O_1 точку $a_1 \cap \alpha$ и рассмотрим плоскость AOO_1 . Учитывая, что $a, a_1 \perp \alpha$ и $(OO_1) \subseteq \alpha$, получим, что $a, a_1 \perp (OO_1)$ и в плоскости AOO_1 из точки A проведены два различных перпендикуляра к прямой OO_1 , что противоречит теореме 5.1 первой главы.

2-й случай: $A \in \alpha$. **I. Существование.** Снова выберем две пересекающиеся прямые $b, c \subseteq \alpha$ и точку $D \notin \alpha$. По первому случаю найдется такая прямая $d \perp \alpha$, что $D \in d$. По аксиоме Евклида (аксиома IV) существует прямая a , что $A \in a$ и $a \parallel d$. Тогда $a \perp b, c$, что дает $a \perp \alpha$ (по первой теореме этого параграфа).

II. Единственность. О/п: нашлась такая прямая $a_1 \neq a$, что $A \in a_1$ и $a_1 \perp \alpha$. По аксиоме Евклида находим такую прямую d_1 , что одновременно $D \in d_1$ и $d_1 \parallel a_1$, откуда $d_1 \perp b, c$ и $d_1 \perp \alpha$. Единственность перпендикуляра из точки D к плоскости α дает $d_1 = d$, откуда $a \parallel a_1$ (из транзитивности параллельности прямых). Таким образом, $a_1 = a$. $\nearrow \searrow$.

Заметим, что из условия $a \perp \alpha$ всегда следует, что $a \cap \alpha \neq \emptyset$. Действительно, из предположения $a \cap \alpha = \emptyset$ и первой теоремы предыдущего параграфа можно было бы найти такую прямую $b \subseteq \alpha$, что $a \parallel b$. Но условия $a \perp b$ и $a \parallel b$ противоречивы.

Определение. Пусть $a \perp \alpha$ и $A \in a$. Проекцией (или ортогональной проекцией) точки A на плоскость α называется такая точка A' , что $\{A'\} = a \cap \alpha$ (обозначение: $A' = \text{Пр}_\alpha(A)$ или $A' = \text{Пр}_\alpha^\perp(A)$).

Определение. Прямая b называется наклонной к плоскости α , если b не параллельна и не перпендикулярна плоскости α .

Прямая b , которая является наклонной к α , пересекает эту плоскость в единственной точке. Пусть $\{O\} = b \cap \alpha$, $B \in (b \setminus \{O\})$ и $B' = \text{Пр}_\alpha(B)$, тогда прямая $b' = (OB')$ называется проекцией (или ортогональной проек-



цией) прямой b на плоскость α и обозначается через $b' = \text{Пр}_\alpha(b)$. Покажем, что определение b' не зависит от выбора точки из множества $b \setminus \{O\}$. Действительно, выбрав точку $C \in b \setminus \{O\}$, проведем через нее прямую c так, чтобы выполнялось $c \parallel (BB')$. Тогда по первой теореме предыдущего параграфа получим $c \parallel (OBB') = \beta$ и с учетом $C \in \beta \cap c$ имеем $c \subseteq \beta$. Условие $c \parallel b'$ выполняться не может, ведь иначе через B' были бы проведены две различные прямые (b' и (BB')), которые параллельны c . Значит, существует такая точка C' , что $\{C'\} = c \cap b'$. По первой теореме этого параграфа (BB') перпендикулярна паре пересекающихся прямых в плоскости α , а из условия $c \parallel (BB')$ получим, что c также перпендикулярна этой паре прямых, поэтому $c \perp \alpha$ и $C' = \text{Пр}_\alpha(C)$. Таким образом, $(OC') = (OB') = b'$ и определение b' корректно.

Следующее утверждение называется *теоремой о трех перпендикулярах*.

Теорема 3.3. Пусть прямая b является наклонной к плоскости α , $b' = \text{Пр}_\alpha(b)$ и $a \subseteq \alpha$. Тогда $b \perp a \Leftrightarrow b' \perp a$.

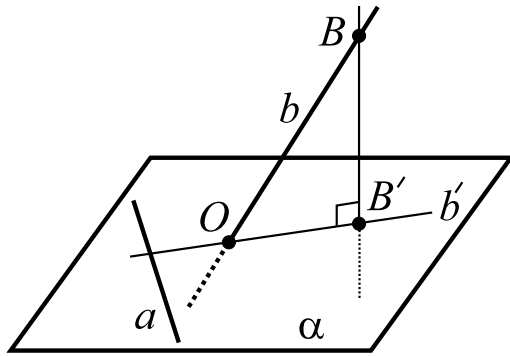


Рис. 188

Доказательство. Пусть $\{O\} = b \cap \alpha$, $B \in (b \setminus \{O\})$, $B' = \text{Пр}_\alpha(B)$ и $\beta = (OBB')$ (рис. 188). Сразу заметим, что из условия $(BB') \perp \alpha$ следует, что $(BB') \perp a$. Кроме того, наклонная b не может совпасть с (BB') , поэтому эти две прямые пересекаются только в одной точке.

$\Rightarrow$) пусть $b \perp a$. Тогда из $b, (BB') \subseteq \beta$ и $b, (BB') \perp a$ следует, что $a \perp \beta$ (используем первую теорему этого параграфа). Последнее утверждение и включение $b' \subseteq \beta$

неминуемо приводят к тому, что прямые a и b' перпендикулярны.

$\Leftarrow$) пусть $b' \perp a$. Тогда из включения $b', (BB') \subseteq \beta$ и $b', (BB') \perp a$ следует, что $a \perp \beta$ (используем первую теорему этого параграфа). Последнее утверждение и включение $b \subseteq \beta$ дают, что $a \perp b$. ■

3.4. Графы. Теорема Эйлера о графах

Определение. Графом G называется упорядоченная пара (V, E) множеств, первое из которых — непустое и конечное множество $V = \{v_1, \dots, v_n\}$,



а каждый элемент e второго множества E имеет вид $e = \{u, v\}$, где $u \neq v$ и $u, v \in V$. Каждый элемент первого множества называется вершиной графа G , а элемент $e = \{u, v\} \in E$ называется ребром G , соединяющим вершины u и v . Также говорят, что ребро $e = \{u, v\}$ инцидентно с каждой из своих вершин. Степенью вершины v в графе G называется число ребер графа, которые с ней инцидентны (обозначение — $\deg(v)$). Два ребра графа называются смежными, если они имеют общую вершину.

Может случиться, что ребер в графе нет, тогда степень каждой его вершины равна нулю. Любая вершина нулевой степени называется *изолированной*, а вершина первой степени — *висячей* вершиной графа. Ничего не мешает нам связать некоторые пары вершин двумя или большим числом ребер. Полученная конструкция соответствует понятию *мультиграфа* или графа с кратными ребрами. Задать мультиграф — значит указать все его вершины и для каждой пары вершин указать количество соединяющих их ребер. Будем считать, что каждый граф является мультиграфом.

Лемма 4.1. 1) *сумма степеней всех вершин мультиграфа равно удвоенному числу ребер.*

2) *в любом мультиграфе число вершин нечетной степени четно.*

Доказательство. 1) заметим, что в любом мультиграфе $G = (V, E)$ каждое ребро вносит по единице к степени каждой из своих вершин, поэтому $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2P$, где $P = |E|$ — количество ребер графа.

2) следует из (1) и очевидного факта, что сумма нечетных чисел будет четным числом только в случае, если их количество четно. ■

Предыдущее утверждение называют *леммой о рукопожатиях* и в качестве следствия формулируют утверждение: «Число людей, сделавших в своей жизни нечетное число рукопожатий, четно». Действительно, считая людей вершинами, а рукопожатия ребрами, получим нужный мультиграф.

Обычно графы изображают на различных поверхностях: плоскости, сфере, торе, бутылке Клейна и т.д. Нас будут интересовать графы только на плоскости и на сфере. *Сферой* (соответственно *шаром*) с центром в точке O и радиусом $R > 0$ называют множество $Sph(O, R) = \{X \in \mathbb{P}_3 : |OX| = R\}$ ($B(O, R) = \{X \in \mathbb{P}_3 : |OX| \leq R\}$). Рассмотрим произвольную фигуру $\Phi \subseteq \mathbb{P}_3$, точку $A \in \Phi$ и положительное число $\varepsilon \in \mathbb{R}$, тогда ε -окрестностью точки A в фигуре Φ называется множество $O_\varepsilon(A) = \{X \in \Phi : |AX| < \varepsilon\}$. Вид $O_\varepsilon(A)$ зависит от фигуры Φ . Так, например, если $\Phi = a$, то $O_\varepsilon(A)$ —



это интервал длины 2ε с центром в точке A ; если $\Phi = \alpha$, то $O_\varepsilon(A)$ — это круг радиуса ε с центром в точке A без ограничивающей его окружности; если $\Phi = \mathbb{P}_3$, то $O_\varepsilon(A) = B(A, \varepsilon) \setminus Sph(A, \varepsilon)$. Теперь можно обсудить понятие непрерывного отображения между фигурами $\Phi_1, \Phi_2 \subseteq \mathbb{P}_3$. Рассмотрим отображение¹ $f: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, точку $A \in \Phi_1$ и ее образ $A' = f(A) \in \Phi_2$. Отображение f называется *непрерывным в точке A* , если для каждой окрестности $O_\varepsilon(A')$ найдется такая $O_\delta(A)$, что $f(O_\delta(A) \cap \Phi_1) \subseteq O_\varepsilon(A')$. Отображение $f: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке множества Φ_1 . Подробно изучать непрерывные отображения мы будем в одиннадцатом классе. Здесь только отметим, что композиция непрерывных отображений является непрерывным отображением.

Определение. *Плоской кривой называется образ отрезка в плоскость при непрерывном отображении. Дугой (или жордановой кривой) на плоскости (соответственно на сфере) называют самонепересекающуюся кривую, т.е. кривую, которая является образом отрезка при непрерывном и взаимно однозначном² отображении отрезка в плоскость (сферу).*

Определение. G называют *плоским графом* (соответственно графом на сфере), если его вершины — точки плоскости (сферы), а любое ребро $e = \{v_i, v_j\}$ — дуга на плоскости (сфере), соединяющая вершины v_i и v_j (т.е. с концами в этих точках) и не проходящая через другие вершины G (рис. 189).

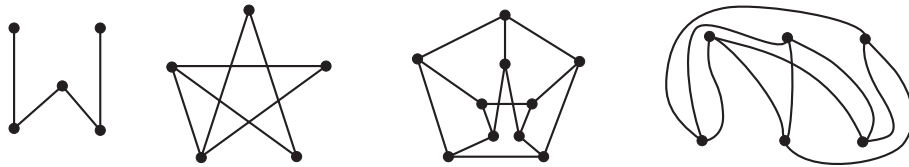


Рис. 189. Плоские графы

Определение. *Планарным (сферическим) называется граф, который можно изобразить на плоскости (соответственно на сфере) так, чтобы его различные ребра не пересекались, или в качестве общих точек имели бы только свои общие вершины (рис. 190).*

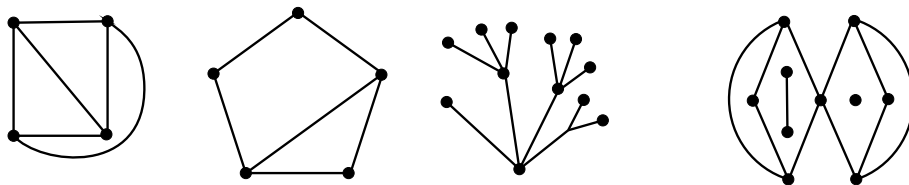


Рис. 190. Планарные графы

¹Т.е. всюду определенное и однозначное соответствие.

²При таком отображении различные точки отрезка отображаются в различные образы.



Далее под планарными (сферическими) графами мы будем считать их изображения на плоскости (соответственно на сфере).

Определение. Гранью планарного (сферического) графа называют максимальное по включению подмножество плоскости (соответственно сферы), любые две точки которого можно соединить кривой на этой плоскости (на этой сфере), не пересекающей ребра графа.

Например, два последних графа на рис. 190 имеют соответственно одну и пять граней. Последний граф на этом рисунке имеет одну изолированную и две висячих вершины.

Определение. Маршрутом в графе G из вершины v в вершину u называют конечную последовательность чередующихся вершин и ребер $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$, где $v(1) = v$, $v(k+1) = u$ и $e(i) = \{v(i), v(i+1)\}$ для $i \in \{1, \dots, k\}$. Маршрут называется цепью, если все его ребра различны, и простой цепью, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут называется циклическим, если $v(1) = v(k+1)$. Циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь — простым циклом.

Определение. Граф G называется связным графом, если для любых двух различных вершин существует соединяющий их маршрут. Цикл, проходящий по всем ребрам графа называется эйлеровым. Цепь, проходящая по всем ребрам графа называется эйлеровой.

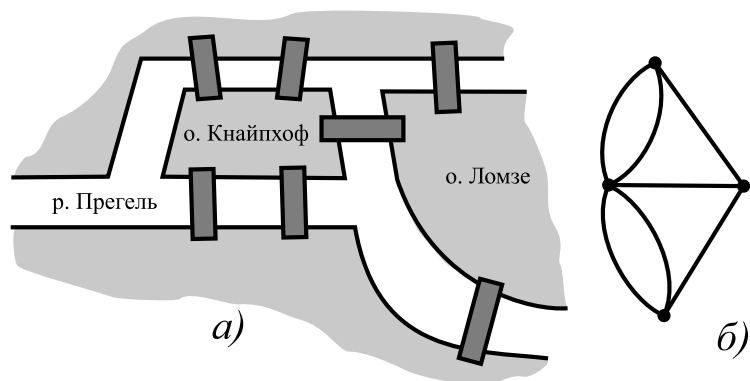


Рис. 191

Нетрудно доказать, что из любого маршрута можно выделить цепь, поэтому для проверки связности графа можно для произвольных двух различных вершин графа требовать существование связывающей их цепи.

Наличие эйлеровой цепи в плоском графе эквивалентно тому, что граф можно нарисовать одним росчерком, т.е. не отрывая карандаша от плоского листа бумаги, и не проводя никакую линию более одного раза.

Началом теории графов считают решение Эйлером в 1736 году задачи о семи кёнигсбергских мостах. На рис. 191(а) изображена примерная карта Кёнигсберга того времени и мосты через реку Прегель. Популярная задача



формулировалась так: можно ли пройти по всем семи городским мостам так, чтобы не проходить ни по одному дважды? Более сильная формулировка: можно ли при этом вернуться в исходную точку? На рис. 191(б) нарисован плоский мультиграф, соответствующий этой задаче, в котором вершины обозначают два острова, левый и правый берега реки, а ребра — мосты. Переформулировка задачи очевидна: имеет ли мультиграф на рис. 191(б) эйлерову цепь (или эйлеров цикл)? Ответ будет в первой теореме Эйлера, но прежде докажем несколько вспомогательных утверждений.

Определение. Степенью вершины v относительно цепи $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$ называют число всех ребер этой цепи, инцидентных этой вершине.

Лемма 4.2. 1) если $v(1) \neq v(k+1)$, то для любого $1 < i < k+1$ степень вершины $v(i)$ относительно цепи $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$ четна, а для $v(1), v(k+1)$ — нечетна.

2) если $v(1) = v(k+1)$, то степень любой вершины относительно цепи $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$ четна.

Доказательство. 1) будем называть ребро $e(i-1)$ входящим в вершину $v(i)$, а $e(i)$ — выходящим из этой вершины. Для любой вершины $v(i)$, при $1 < i < k+1$, число входящих ребер совпадает с числом выходящих ребер, поэтому общее количество ребер цепи, инцидентных $v(i)$, четно. При условии $v(1) \neq v(k+1)$ для $v(1)$ число выходящих, а для $v(k+1)$ число входящих ребер на единицу больше. Следовательно, для этих двух вершин степень относительно цепи нечетна.

2) если $v(1) = v(k+1)$, то число входящих ребер в $v(1)$ также совпадает с числом и выходящих в нее ребер.

■

Лемма 4.3. Пусть G — связный мультиграф. Если непустой цикл C содержит для каждой своей вершины все инцидентные с ней ребра, то этот цикл эйлеров.

Доказательство. О/п: существует ребро $e \in E \setminus C$ и пусть $e = \{v, u\}$. Тогда $v, u \notin C$. Выберем произвольную вершину цикла $w \in C$. Так как граф связан, то существует цепь K , соединяющая w с v : $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$. Поэтому найдется на цикле C вершина $v(i)$ с максимальным номером, принадлежащая цепи K . Заметим, что $v(i) \in C$, но $\{v(i), v(i+1)\} \notin C$. ✕.

■



Теорема 4.4. 1) связный мультиграф $G = (V, E)$ содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень любой его вершины четна.

2) связный мультиграф $G = (V, E)$ содержит эйлерову цепь в том и только в том случае, если в нем существует не более двух вершин нечетной степени.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) следует из леммы 4.2.

$\Leftarrow$) пусть степень каждой вершины четна. Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. Строим максимальную по включению цепь с началом в выбранной вершине. Если $\deg(v) = 0$, то $V = \{v\}$ (в силу связности) и доказательство очевидно. Пусть $\deg(v) \neq 0$. Тогда существует ребро $e = \{v, u\}$, инцидентное данной вершине. Получим вторую вершину цепи. Пусть построена максимальная по включению цепь $v(1), e(1), v(2), \dots, e(k), v(k+1)$, где $v(1) = v$, $v(2) = u$, $e(1) = e$. Тогда, если $v(k+1) \neq v(1)$, то степень $v(k+1)$ относительно построенной цепи нечетна. Следовательно, найдется новое ребро $e(k+1)$, не входящее в цепь (из-за четности степени вершины $v(k+1)$) и найденная цепь не является максимальной по включению. Таким образом, $v(k+1) = v(1)$ и мы можем обозначить полученный цикл через P_1 . Если P_1 эйлеров, то он искомым, иначе по предыдущей лемме найдется вершина v' цикла P_1 и ребро e' , инцидентное v' , которое не входит в P_1 .

Опишем теперь операцию добавления цикла (рис. 192). Для этого построим цикл P' с началом и концом в v' , первым ребром e' так, чтобы его ребра не принадлежали P_1 . Так как степень у каждой вершины графа четна и степень относительно цикла P_1 также четна, поэтому, удалив ребра P_1 , четность степеней каждой вершины сохранится. Поэтому построение цикла P' с началом в v' не отличается от построения цикла P_1 . Представим цикл P_1 в виде объединения двух цепей C_1 и C_2 , где C_1 — цепь от $v(1)$ до v' и C_2 — цепь от v' до $v(1)$. Тогда результатом операции добавления будет цикл $P_2 = C_1 \cup P' \cup C_2$. Заметим, что цикл P_2 содержит все ребра циклов P_1 и P' . В силу конечности числа ребер на некотором этапе получится цикл P^* , который вместе с каждой своей вершиной содержит все инцидентные им ребра. По предыдущей лемме он эйлеров.

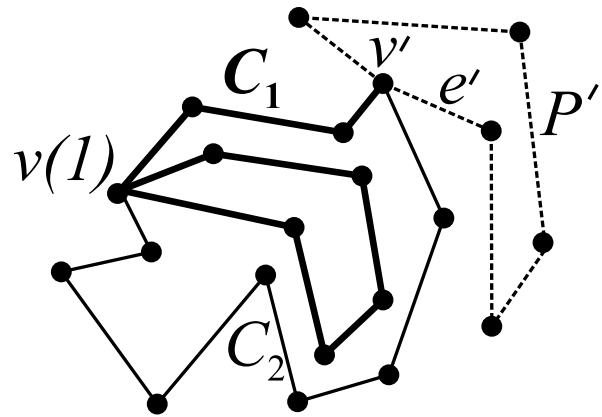


Рис. 192



2) $\Rightarrow$) следует из леммы 4.2.

$\Leftarrow$) если все вершины имеют четную степень, то существует эйлеров цикл, который одновременно является частным случаем эйлеровой цепи. Одной вершины с нечетной степенью не может быть в силу первой леммы этого параграфа. Осталось рассмотреть случай, когда в графе существуют только две вершины v и u нечетной степени. Добавим к E ребро $e^* = \{v, u\}$ и получим связный мультиграф, в котором все вершины имеют четную степень. По (1) в нем найдется эйлеров цикл P^* с началом и концом в точке v . Удалив из P^* ребро e^* , получим эйлерову цепь из вершины v в вершину u . ■

Теперь ясно, что ответ на оба вопроса о кёнигсбергских мостах отрицателен, поскольку мультиграф на рис. 191(б) имеет четыре вершины нечетной степени. Интересно, что в Кёнигсберге в 1905 году был построен Императорский мост, который был впоследствии разрушен в ходе бомбардировки во время Второй мировой войны. Существует легенда о том, что этот мост был построен по приказу самого кайзера, который не смог решить задачу о мостах Кёнигсберга и стал жертвой шутки, которую сыграли с ним учёные умы, присутствовавшие на светском приёме. Очевидно, что добавление любого восьмого ребра к мультиграфу на рис. 191(б) дает существование эйлеровой цепи, но эйлерова цикла по-прежнему не будет.

Равенство из следующего утверждения называется *формулой Эйлера*.

Теорема 4.5. Пусть G — связный, планарный граф, Γ — количество его граней, P — ребер и B — вершин. Тогда $B + \Gamma - P = 2$.

Доказательство. Формулу Эйлера докажем индукцией по количеству ребер. Б.И.: $P = 0$. Так как $V \neq \emptyset$, то $|V| \geq 1$. Граф G связан и $P = 0$, поэтому $|V| < 2$. Отсюда $B = 1$, $\Gamma = 1$, $P = 0$ и $B + \Gamma - P = 2$.

Ш.И. Предположим, что для любого связного планарного графа G' с числом ребер $|P'| \leq k$ ($k \geq 1$) формула Эйлера выполняется. Для графа G с $P = k + 1$ покажем как можно удалить одно ребро, не нарушая связности. Рассмотрим два случая.

1-й случай: в графе есть хотя бы одна висячая вершина. Пусть $v^* \in V$, $\deg(v^*) = 1$ и $e^* = \{v^*, u^*\}$ — единственное ребро, инцидентное v^* . Тогда граф $G' = (V \setminus \{v^*\}, E \setminus \{e^*\})$ связан (поскольку мы исключили только одну вершину v^* и единственное ребро, выходящее из этой вершины). Заметим, что при этой перестройке количество граней останется прежним. По предположению индукции, для G' выполняется $(B - 1) + \Gamma - (P - 1) = 2$, откуда



$$B + \Gamma - P = 2.$$

2-й случай: для любой вершины $v \in V$ справедливо $\deg(v) \geq 2$ (рис. 193). Докажем, что в G найдется цикл. Выберем произвольную вершину $v(1)$ и ребро $e(1) = \{v(1), v(2)\}$ в качестве начала цепи. Заметим, что приходя в «новую» вершину u (т.е. которой не было еще в цепи) мы можем выйти из нее по «новому» ребру, поскольку $\deg(u) \geq 2$. Таким образом, в цепи встретится вершина v^* , в которой мы уже побывали и участок цепи от v^* до v^* будет искомым циклом C^* . Удалив любое ребро e^* из цикла C^* мы не нарушим связности графа G (при этом множество вершин графа мы не изменяем). Действительно, если маршрут из вершины v в вершину u содержал ребро e^* , мы заменим это ребро на оставшуюся часть цикла C^* и получим новый маршрут, связывающий вершину v с вершиной u . Отметим также, что при удалении ребра e^* , две грани с общей границей e^* сольются в одну грань (на рис. 193 эти грани выделены цветом), поэтому количество граней в графе $G' = (V, E \setminus \{e^*\})$ уменьшится по сравнению с G на единицу. По предположению индукции, для G' выполняется $B + (\Gamma - 1) - (P - 1) = 2$, откуда $B + \Gamma - P = 2$.

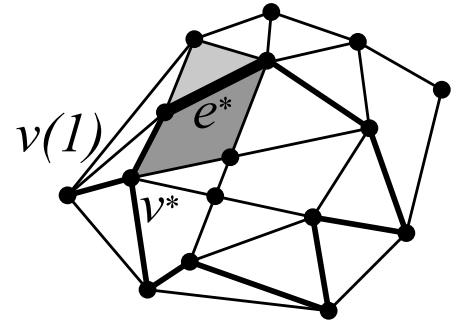


Рис. 193

Пусть $\Phi = Sph(O, R)$ — сфера, $N \in \Phi$, точка S — диаметрально противоположна точке N на сфере Φ (т.е. O — середина $[NS]$). Плоскость α касается Φ в точке S . Стереографической проекцией сферы Φ с полюсом в точке N называется отображение $p_N : \Phi \setminus \{N\} \rightarrow \alpha$, которое каждой точке $A \in \Phi \setminus \{N\}$ ставит в соответствие A' — точку пересечения луча $[NA)$ с плоскостью α . Легко проверить, что p_N — взаимно однозначное отображение. Немного сложнее проверить его непрерывность. При этом отображении любая дуга $f([CD])$ на сфере, не проходящая через полюс N , отображается в дугу на плоскости α . Это следует из того факта, что композиция $p_N \circ f$ двух непрерывных инъективных отображений является непрерывным инъективным отображением отрезка CD в плоскость α . Поэтому всякий связный сферический граф, ребра которого не проходят через полюс, при стереографической проекции отображается на некоторый связный планарный граф.

Следствие. Пусть G — связный сферический граф. Пусть B , Γ , P соответственно количество его вершин, граней и ребер, тогда справедливо



равенство $B + \Gamma - P = 2$.

Доказательство. Выберем некоторую точку N , не лежащую ни на одном ребре G . При стереографической проекции с полюсом в N граф G отображается в связный планарный граф G' , для которого справедлива формула Эйлера. Так как при непрерывном инъективном отображении количество вершин, граней и ребер не меняется, то $B + \Gamma - P = 2$.

■

Теорема 4.6. Пусть B и P соответственно обозначают количество вершин и ребер связного планарного графа G . Тогда $P \leq 3B - 6$.

Доказательство. Каждое ребро графа G является общим для двух его граней. Кроме того, всякая грань содержит не менее трех ребер (поскольку в графе нет кратных ребер), поэтому выполняется неравенство $(\Gamma/2) \leq (P/3)$ или $3\Gamma \leq 2P$. Для этого графа выполнена формула Эйлера $\Gamma + B - P = 2$. Поэтому

$$3\Gamma + 3B - 3P = 6 \Rightarrow 3B - P \geq 6 \Rightarrow P \leq 3B - 6.$$

■

Пример 1. Рассмотрим граф $K_{3,3}$ — «домики-колодцы» (последний граф на рис. 189). Этот граф связан с одной популярной задачей: можно ли на плоскости провести от каждого из трех домиков к каждому из трех колодцев дороги так, чтобы они не пересекались. Если в качестве вершин взять домики и колодцы, а в качестве ребер — соединяющие дороги, то задача сведется к вопросу о планарности этого графа. Покажем, что граф $K_{3,3}$ не планарен. Предположим противное, он планарен. Легко проверить его связность. Следовательно, для него выполнена формула Эйлера: $B + \Gamma - P = 2$. Зная, что $B = 6$ и $P = 9$, получим, что $\Gamma = 5$. Но каждая грань графа G ограничена по крайней мере четырьмя ребрами, поэтому $2P \geq 4\Gamma$. Получаем $18 \geq 20$. ✗.

Пример 2. Обозначение K_n используется для полного графа на n вершинах ($n \in \mathbb{N}$). В таком графе любые две вершины соединены ребром. Граф K_4 планарен, его изображение можно найти на рис. 190 (первый граф). Докажем, что полный граф с пятью вершинами (т.е. K_5) не планарен. Действительно, для него выполняется $B = 5$ и $P = C_5^2 = 10$. Поэтому, в предположении его планарности, неравенство $P \leq 3B - 6$, доказанное в предыдущей теореме, превращается в $10 \leq 9$. ✗.

Два рассмотренных выше примера универсальны. Чтобы оценить их важность, введем понятия изоморфных графов и гомеоморфных графов. Два



графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует биекция $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $e = \{v, u\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(v), \varphi(u)\} \in E_2$. Эта биекция называется изоморфизмом графов G_1 и G_2 . Таким образом, изоморфизм не только гарантирует одинаковое число вершин у двух графов, но и сохраняет отношение инцидентности. Кстати, графы, изоморфные планарным графам, также называются планарными. Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Рассмотрим две простые операции по модификации графов. Операция **A**: если в графе G есть вершина v второй степени и $e_1 = \{u, v\}$ и $e_2 = \{v, w\}$ — два ребра, инцидентные этой вершине (и других ребер, инцидентных v в графе G нет), то разрешается удалить из графа G вершину v , заменив два ребра $e_1 = \{u, v\}$ и $e_2 = \{v, w\}$ на одно ребро $\{u, w\}$. Операция **B**: в графе G можно выбрать любое ребро $\{u, w\}$ и разбить его на два с помощью новой вершины (т.е. исключить ребро $\{u, w\}$, добавив ко множеству вершин новую вершину v^* , а к множеству ребер — два новых ребра $\{u, v^*\}$ и $\{v^*, w\}$). Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *гомеоморфными*, если один граф из другого можно получить, применяя конечное число раз операции **A** и **B**. Следующий критерий планарности был получен Л. Понтрягиным³ (1927) и К. Куратовским⁴ (1930): граф G планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ или K_5 .

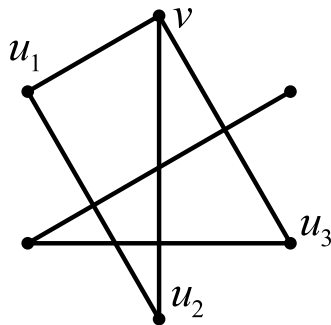


Рис. 194

Закончим наше краткое введение в теорию графов простым утверждением, которое называется *теоремой Симмонса*.

Теорема 4.7. Пусть в полном графе с шестью вершинами каждое ребро окрашено в один из двух цветов. Тогда найдется треугольник, составленный из ребер графа, все стороны которого одного цвета (в качестве ребер графа рассматриваются отрезки).

³Лев Семенович Понтрягин (1908–1988) — советский математик, один из крупнейших математиков XX века; внес значительный вклад в алгебраическую и дифференциальную топологию, вариационное исчисление, теорию управления; создатель математической теории оптимальных процессов; в 14-летнем возрасте потерял зрение в результате несчастного случая.

⁴Казимеж Куратовский (1896–1980) — польский математик, один из главных представителей польской топологической школы; основные работы относятся к общей топологии, теории графов, теории множеств и теории функций действительного переменного; президент Польского математического общества (1946–1953).



Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину v полного графа G (рис. 194). Ей инцидентны пять ребер, из которых три одного цвета (по принципу Дирихле), например, черного (на рисунке ребра одного цвета — черные, другого — белые). Обозначим вершины этих ребер, не совпадающие с v , через u_1 , u_2 и u_3 .

Если хотя бы одно из ребер, скажем $\{u_1, u_2\}$, соединяющих u_1 , u_2 , u_3 между собой, черного цвета, то искомым одноцветным треугольником будет vu_1u_2 (рис. 194). В случае же, когда все ребра, соединяющие u_1 , u_2 , u_3 , будут белого цвета, то треугольник с вершинами $u_1u_2u_3$ будет одноцветным. ■

Следствие. Среди любых шести человек всегда найдутся трое знакомых между собой или трое, не знакомых друг с другом.

Доказательство. Следствие легко доказывается, если один цвет раскраски ребра графа говорит о том, что эти два человека знакомы между собой, а другой — о том, что они не знакомы друг с другом. ■

3.5. Многогранники. Теорема Эйлера о правильных многогранниках

Определение. Многогранной поверхностью M называют конечное объединение многоугольников $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ (каждый из которых называется гранью этой поверхности, его стороны называются ребрами M и вершины — вершинами M), которое удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) каждое ребро любой грани является одновременно ребром другой и только одной грани (грани, имеющие общее ребро, называются смежными);
- 2) для любых двух граней Γ, Γ' существует цепочка граней $\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(k)$ такая, что $\Gamma(1) = \Gamma$, $\Gamma(k) = \Gamma'$, и для любого $j \leq k - 1$ грани $\Gamma(j)$ и $\Gamma(j + 1)$ — смежные;
- 3) если две грани Γ и Γ' имеют общую вершину A , то цепочку граней из предыдущего пункта можно выбрать так, чтобы A являлась вершиной каждой грани $\Gamma(j)$.

Объединения многоугольников на рис. 195 не являются многогранными поверхностями. Определите самостоятельно, какие их свойств предыдущего определения не выполняются для каждого из примеров.



Нетрудно заметить, что многогранная поверхность разбивает пространство на две области, одна из которых ограничена (она называется *внутренней областью* многогранной поверхности), другая содержит прямую, поэтому не ограничена (она называется *внешней областью* многогранной поверхности). *Многогранником* называется объединение многогранной поверхности с ее внутренней областью.

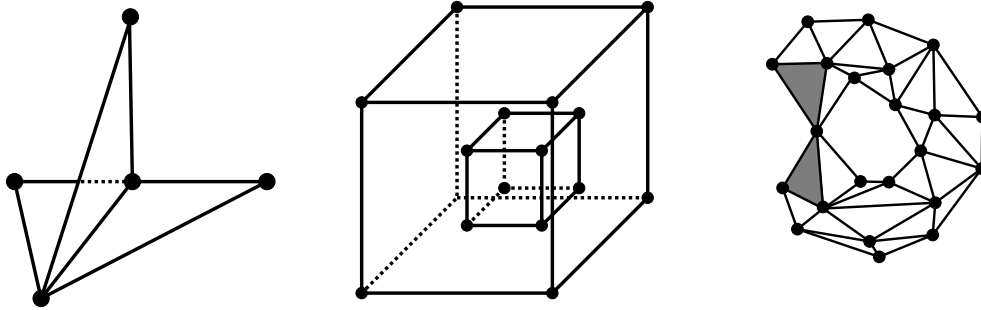


Рис. 195

Определение. Многогранник M называется *эйлеровым*, если его поверхность M можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить на сферу.

Напомним, что в пространстве ε -окрестность точки A , т.е. множество $O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{P}_3 : |AX| < \varepsilon\}$, является шаром с центром в точке A радиуса ε без ограничивающей его сферы. Точка A называется *внутренней* точкой фигуры Φ , если найдется хотя бы одна ее ε -окрестность, для которой $O_\varepsilon(A) \subseteq \Phi$.

Лемма 5.1. Пусть Φ — выпуклая фигура $A, B \in \Phi$, причем A — внутренняя точка Φ . Тогда любая точка полуинтервала $[AB[$ является внутренней точкой Φ .

Доказательство. Пусть $O_\varepsilon(A)$ — окрестность A , целиком содержащаяся в Φ . Тогда рассмотрим множество

$$\Phi_1 = \cup\{[XB] : X \in O_\varepsilon(A)\}.$$

Так как Φ — выпуклое множество, то $\Phi_1 \subseteq \Phi$. Пусть теперь $C \in [AB[$ и $k = |CB|/|BA|$. Тогда окрестность $O_\delta(C) \subseteq \Phi_1$, где $\delta = k \cdot \varepsilon$. Фактически, $O_\delta(C) = H_B^k(O_\varepsilon(A))$. Следовательно, C — внутренняя точка Φ . ■

Теорема 5.2. Всякий выпуклый многогранник M является эйлеровым.

Доказательство. Выберем произвольную внутреннюю точку O многогранника M . Обозначим через M поверхность M и через K — шар с центром в O , содержащий M . Пусть S — сфера, ограничивающая K . Тогда



центральное проектирование из точки O будет искомым отображением M на S (при этом проектировании точке пересечения луча r_O с M ставится в соответствие точка пересечения этого луча с S). Достаточно показать, что любой луч с вершиной в O пересекает M , причем только в одной точке. Если найдется луч, не пересекающий M , то выберем на этом луче точку D , не принадлежащую K . Тогда D — внешняя точка для M и отрезок $[DO]$ не пересекает M , точка O также является внешней для M , что противоречит выбору этой точки. Покажем теперь, что точка пересечения произвольного луча r_O с M единственна. Снова предположим противное и в пересечении некоторого луча с M найдутся по крайней мере две различные точки A , B . Тогда, по предыдущей лемме, ближайшая из них к точке O должна быть внутренней точкой для M , поэтому не может лежать на M . Непрерывность центрального проектирования будем считать очевидной⁵.

■

Определение. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — правильные n -угольники и из каждой вершины выходит k ребер. Пару (n, k) будем называть *характеристикой* правильного многогранника.

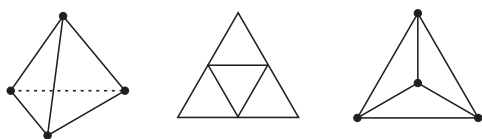


Рис. 196

Пример 1. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a . Пусть O — точка пересечения медиан этого треугольника. На прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной плоскости ABC , выберем точку D так, что $|OD| = a\sqrt{2/3}$.

Тогда по теореме Пифагора получаем $|DA| = |DB| = |DC| = a$. Следовательно, многогранник $ABCD$ является правильным. Он называется *правильным тетраэдром*, и его характеристика равна $(3, 3)$. На рис. 196 последовательно изображены тетраэдр, его развертка и диаграмма Шлегеля⁶. При этом *диаграммой Шлегеля* для многогранника называется планарный граф, имеющий то же количество вершин и ребер, что и у многогранника, и сохраняющий отношение инцидентности.

Пример 2. Рассмотрим квадрат со стороной a и через его вершины проведем прямые, перпендикулярные плоскости квадрата. На этих прямых по одну сторону от плоскости квадрата выберем четыре точки, удаленные от соответствующих вершин на расстояние a . Получим *куб (гексаэдр)* — правильный многогранник (рис. 197) характеристики $(4, 3)$.

⁵В курсе геометрии одиннадцатого класса непрерывные отображения метрических пространств будут подробно изучены.

⁶Виктор Шлегель (1843–1905) — немецкий математик; активно продвигал идеи геометрической алгебры Германа Грассмана; автор метода визуализации многогранников.

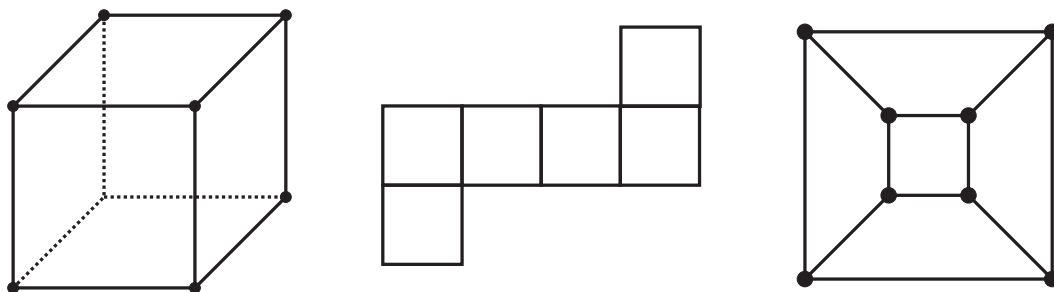


Рис. 197

Пример 3. В очередной раз рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a . Через центр квадрата проведем прямую, перпендикулярную плоскости квадрата. На этой прямой выберем две различные точки E и F , удаленные от центра квадрата на расстояние $a\sqrt{2}/2$. По теореме Пифагора, легко находим, что $|EA| = a$. Соединив точки E и F с вершинами квадрата, получим многогранник $ABCDEF$, чья поверхность состоит из восьми правильных треугольников. Кроме того, из каждой вершины выходит точно по четыре ребра.

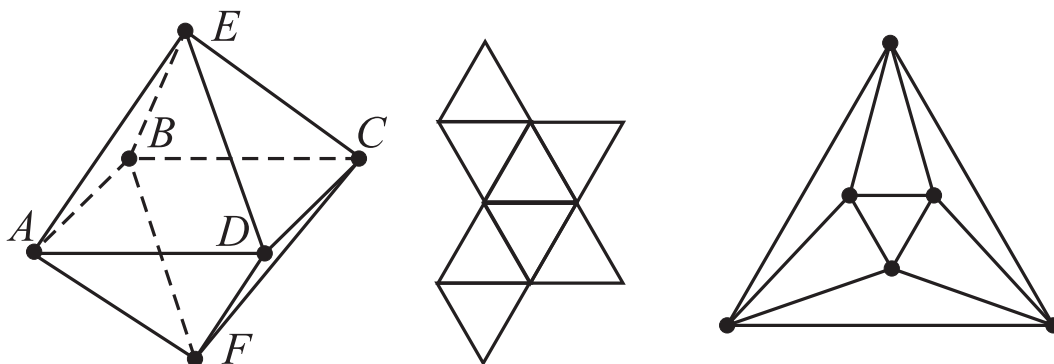


Рис. 198

Этот правильный многогранник называется *октаэдром* (рис. 198). Его характеристика — $(3, 4)$. Заметим, что ромб $AECF$ имеет диагонали равной длины, поэтому он является квадратом.

Пример 4. Рассмотрим три правильных пятиугольника, расположенных в пространстве так, что они имеют общую вершину и каждые два из них имеют общее ребро. Докажем, что отмеченные на рис. 199 диагонали этих пятиугольников ($[AB]$, $[BC]$ и $[BD]$) попарно перпендикулярны. Проведем плоскость α через середину ребра BB' и перпендикулярно ему, при этом плоскость α пройдет и через вершину этого пятиугольника. Тогда диагональ AB при симметрии относительно этой плоскости перейдет в $A'B'$, а BC — в $B'C$. Поэтому достаточно доказать, что $(A'B')$ и $(B'C)$ перпендикулярны.

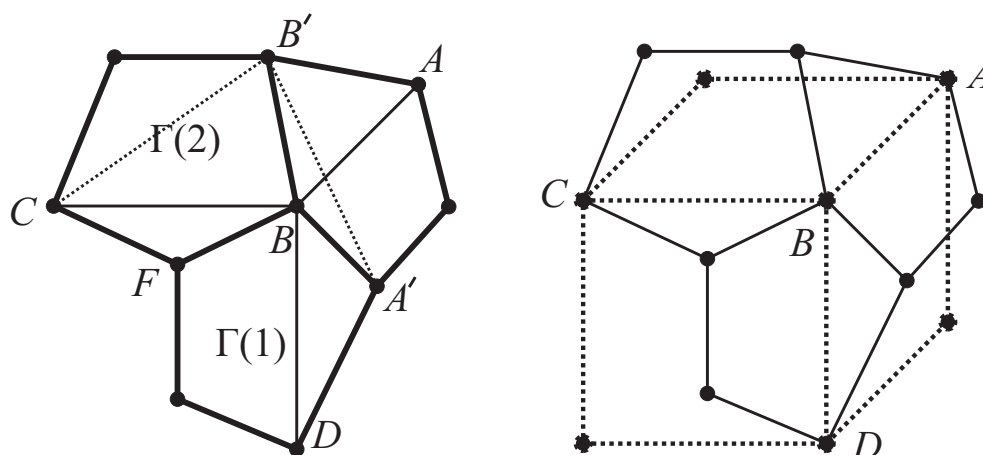


Рис. 199

Так как $(B'C) \parallel (BF)$, то достаточно доказать, что $(A'B') \perp (BF)$. Проведем плоскость β через (BF) так, чтобы она делила угол между пятиугольниками $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$ пополам (биссекторную плоскость). Точки A' и B' симметричны относительно плоскости β , так как пятиугольники $\Gamma(1)$ и $\Gamma(2)$ переходят друг в друга при отображении относительно β . Следовательно, $(A'B') \perp \beta$, поэтому $(A'B') \perp (BF)$.

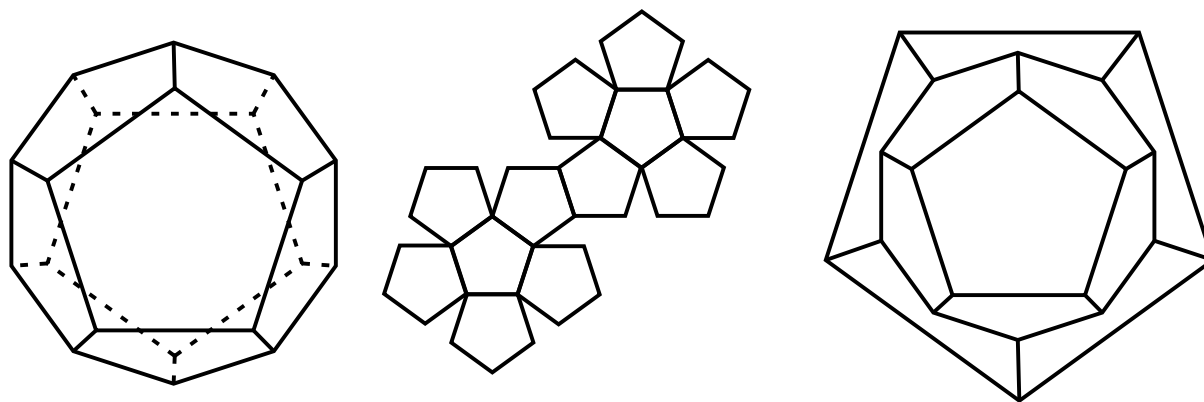


Рис. 200

Так как $[AB]$, $[BC]$ и $[BD]$ попарно перпендикулярны и равны между собой, их можно рассматривать в качестве ребер некоторого куба (рис. 199), причем исходная тройка пятиугольников будет иметь с этим кубом общую вершину. Проведем плоскости, перпендикулярные ребрам куба и проходящие через их середины (их всего три). Каждая из них также пройдет через середину одного из пятиугольников и через сторону другого пятиугольника исходной тройки. Поэтому при симметрии относительно каждой из этих плоскостей получится тройка правильных пятиугольников, имеющая общей



другую вершину квадрата. В результате симметрий относительно этих плоскостей получится многогранная поверхность, состоящая из двенадцати правильных пятиугольников, из каждой вершины которой выходит по три ребра. Эта поверхность является поверхностью *додекаэдра* (рис. 200). Его характеристика — $(5, 3)$.

П р и м е р 5. Используем октаэдр для построения еще одного правильного многогранника — икосаэдра. Расставим стрелки на ребрах октаэдра, как это показано на рис 201. На каждом ребре отметим точку, которая делит это ребро в отношении $k : (1 - k)$, начиная от вершины, из которой выходит стрелка. Считаем, что ребро октаэдра единичной длины, k и $1 - k$ — длины отрезков.

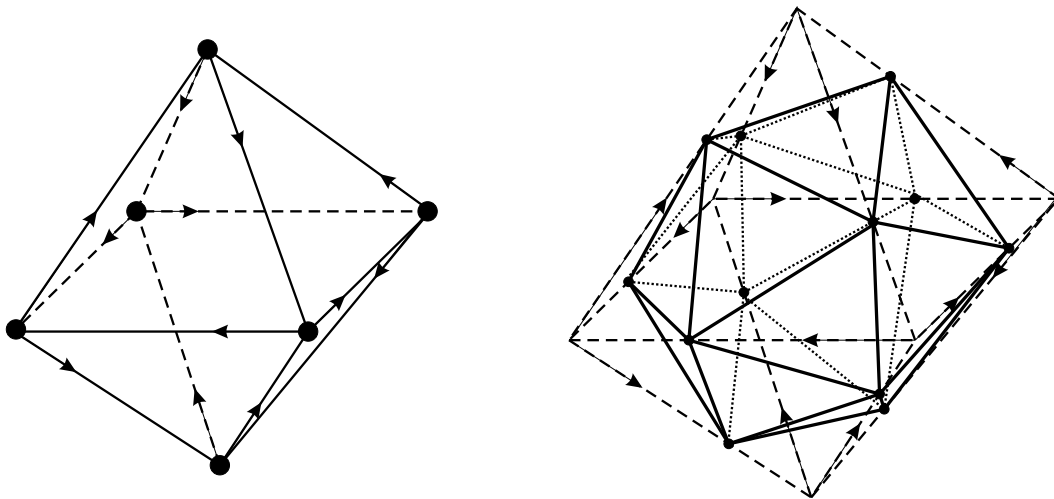


Рис. 201

Найдем значения k , при котором все грани многогранника с отмеченными вершинами будут равносторонними треугольниками. Используя теорему косинусов, найдем квадрат длины ребер этого многогранника, лежащих в гранях октаэдра. Он равен $k^2 + (1 - k)^2 - 2k(1 - k) \cos 60^\circ = 3k^2 - 3k + 1$. Так как четырехугольник $AFCE$ (рис. 198) является квадратом, то легко найти квадрат ребер, не лежащих в гранях октаэдра. Он равен $2(1 - k)^2$. Из уравнения $3k^2 - 3k + 1 = 2(1 - k)^2$ найдем единственное неотрицательное значение $k = (\sqrt{5} - 1)/2$, при котором полученный многогранник будет иметь правильные треугольные грани и из каждой его вершины будет выходить в точности пять ребер (рис. 202). Он называется *икосаэдром*. Его характеристика равна $(3, 5)$.

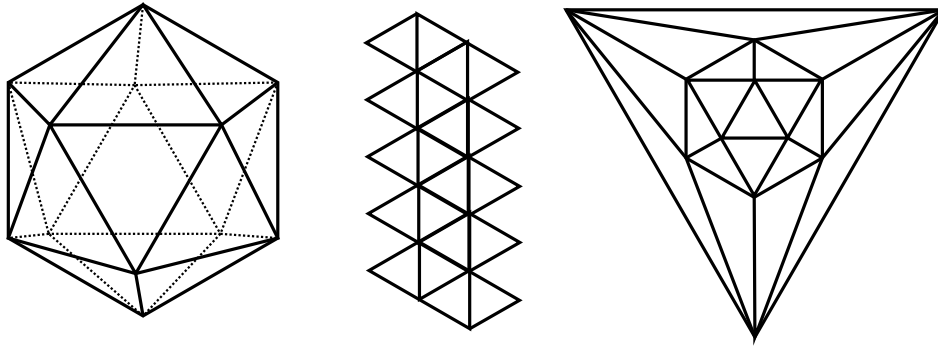


Рис. 202

Следующее утверждение называется *теоремой Эйлера о правильных многогранниках*.

Теорема 5.3. *Существует только пять правильных многогранников (подобные многогранники считаются одинаковыми).*

Доказательство. Предыдущие примеры доказывают существование по крайней мере пяти различных правильных многогранников. Поэтому достаточно доказать, что их не более пяти.

Пусть $\mathcal{M}$ — правильный многогранник характеристики (n, k) . Определим, какие значения могут принимать n и k . Так как из каждой вершины выходит по крайней мере три ребра, то $k \geq 3$. Аналогично каждая грань является n -угольником, поэтому $n \geq 3$. Многогранник $\mathcal{M}$ является выпуклым, поэтому для него выполняется формула Эйлера: $B + \Gamma - P = 2$.

Из каждой вершины многогранника $\mathcal{M}$ выходят k ребер, поэтому верно соотношение $2P = k \cdot B$. Количество ребер умножается на 2, поскольку каждое ребро соединяет две вершины и учитывается дважды (по одному разу для каждой из своих вершин). Теперь будем использовать то, что каждая грань является n -угольником: $2P = n \cdot \Gamma$. Снова, каждое ребро, являясь общим сразу для двух граней, учитывается дважды. Выразим B и Γ через количество ребер и подставим эти значения в формулу Эйлера. Получим

$$\frac{2P}{k} + \frac{2P}{n} - P = 2 \Leftrightarrow P \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Так как $P > 0$, то $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$ (*).

Если $n = 3$, то из (*) получим $k < 6$. Следовательно при $n = 3$ возможны три пары (n, k) : $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$.

Пусть $n = 4$. Тогда из (*) имеем $k < 4$ и k может принимать единственное значение 3.



Аналогично при $n = 5$ получим $k < 10/3$ и $k = 3$.

Остается рассмотреть случай $n \geq 6$. Оценивая левую часть соотношения (*), получим $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \leq 0$.

Это противоречит неравенству (*) и поэтому нет ни одного подходящего значения $n \geq 6$.

В результате получается только пять возможных значений (n, k) (см. таблицу). Осталось заметить, что многогранники одной характеристики (n, k) подобны между собой.

Правильные многогранники

Многогранник	Характеристика	Γ	B	P
Правильный тетраэдр	(3, 3)	4	4	6
Октаэдр	(3, 4)	8	6	12
Икосаэдр	(3, 5)	20	12	30
Куб(гексаэдр)	(4, 3)	6	8	12
Додекаэдр	(5, 3)	12	20	30

■

Следствие. 1) если многогранник имеет только n -угольные грани, то количества ребер и граней связаны равенством $2P = n \cdot \Gamma$. В общем случае $2P = 3 \cdot \Gamma_3 + 4 \cdot \Gamma_4 + \dots + i \cdot \Gamma_i$, где Γ_i — количество i -угольных граней, причем i — максимальный индекс, для которого $\Gamma_i \neq 0$.

2) если из каждой вершины многогранника выходят точно k ребер, то количества ребер и вершин связаны равенством $2P = k \cdot B$. В общем случае $2P = 3 \cdot B_3 + 4 \cdot B_4 + \dots + i \cdot B_i$, где B_i — количество вершин, из которых выходит i ребер, причем i — максимальный индекс, для которого $B_i \neq 0$.

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения предыдущей теоремы для определения удвоенного числа ребер многогранника. Для (1) — считая ребра в каждой грани, для (2) — производя подсчет количества ребер с точки зрения каждой вершины.

■

Глава 4

Алгебра векторов

Долгое время развитие геометрии и алгебры шло непересекающимися курсами. Это происходило потому, что объекты, которые изучались этими науками, сильно различались между собой. Фигуры, геометрические величины и отношения между ними — с одной стороны, а с другой — числа и алгебраические операции. Но не было никаких сомнений, что и алгебра, и геометрия являются составными частями математики, общим свойством которой является возникновение последовательности строгих согласованных между собой определений при построении теории и необходимость безупречных дедуктивных рассуждений при доказательстве утверждений. Такой взгляд на общие черты разных математических направлений существовал еще со времени образования греческой математической школы. В греческой науке было довольно четкое отличие алгебры и геометрии, составляющих математику, от других научных дисциплин — астрономии, механики, философии и т.д. Использование общих принципов при построении теории является лишь внешним сходством геометрии и алгебры. Существенную внутреннюю связь между ними удалось обнаружить только в XVII веке.

Первые шаги были сделаны Р. Бомбелли¹ (еще в середине XVI века) и П. Ферма² в 1626 году, которые начали ставить в соответствие некоторым геометрическим объектам числа. Но решительным шагом на пути сближения

¹Раффаэле Бомбелли (ок. 1530 – ок. 1572) — итальянский математик, основные исследования относятся к алгебре; построил алгебру на базе теории чисел, ввел мнимые числа и установил законы действия над ними; усовершенствовал алгебраическую символику, начал применять скобки, знак корня и величины $\pm i$; дал полную теорию кубических и биквадратных уравнений; вместе с А. Пацци перевел первые пять книг «Арифметики» Диофанта.

²Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик, изучал право в Тулузском ун-те, с 1631 был советником кассационной палаты Тулузского парламента, математикой занимался в свободное время и при жизни почти не печатался; один из основоположников теории чисел и математического анализа; в теории чисел известны великая и малая теоремы Ферма; установил законы дифференцирования и интегрирования степенной функции, вывел формулы интегрирования по частям; ввел уравнения прямой и кривых второго порядка.



алгебры и геометрии стало открытие Рене Декартом координатного метода. В 1637 году вышел его трактат «Рассуждение о методе», в котором кроме философских идей Декарт изложил новый мощный геометрический метод. Так состоялось рождение аналитической геометрии — недостающего мостика между геометрией и алгеброй. Основная идея аналитической геометрии состоит в следующем: каждой точке ставятся в соответствие ее координаты (т.е. упорядоченные пары или упорядоченные тройки чисел), которые ее полностью характеризуют. При этом для многих фигур плоскости и пространства, таких, например, как прямая, окружность, плоскость, аналитическая геометрия позволяет записать их алгебраические уравнения. Полученное уравнение однозначно определяет соответствующую фигуру, т.е. точка принадлежит фигуре в том и только в том случае, когда ее координаты удовлетворяют этому уравнению. Это позволяет свести решение многих геометрических задач к исследованию несложных уравнений и их систем, которое проводится мощными алгебраическими средствами.

Содержанием этой главы являются начала аналитической геометрии. В первом параграфе дается строгое определение направления на плоскости и в пространстве. Это важное понятие играет ключевую роль в определении направленного отрезка и вектора (параграф 2). Операции над векторами и их свойства, определению и изучению которых посвящен параграф 3, являются основой для всех дальнейших исследований. В четвертом параграфе определяется базис плоскости и пространства и обсуждается вопрос алгебраического определения размерности. Следующий за ним параграф является своеобразным итогом исследований, он посвящен способам введения координат и свойствам координат. Заключительную часть главы занимают важные приложения векторов: задача о делении отрезка, определение и свойства центра масс, векторные задания прямой и плоскости.

4.1. Направление на плоскости и в пространстве

Начнем с того, что на множестве всех лучей плоскости и на множестве всех лучей пространства определим отношение *быть сонаправленными между собой* и изучим свойства этого отношения. Договоримся о том, что, используя обозначение для луча $[AB)$ и для прямой (AB) , считать точки A и B различными. Это, конечно, относится и к обозначениям $[CD)$, (CD) и т.д.

Напомним, что совпадающие прямые по определению считаются параллельными. В следующем определении отдельно рассмотрен этот случай.



Определение. Два луча $[AB)$ и $[EF)$, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если один из них является подмножеством другого, т.е. или $[AB) \subseteq [EF)$, или $[EF) \subseteq [AB)$ (рис. 203). Если прямые (AB) и (CD) различны, то лучи $[AB)$ и $[CD)$ называются сонаправленными, если выполняются два условия:

- 1) (AB) и (CD) параллельны;
- 2) лучи $[AB)$ и $[CD)$ лежат по одну сторону от прямой (AC) в плоскости $ABDC$ (рис. 203).

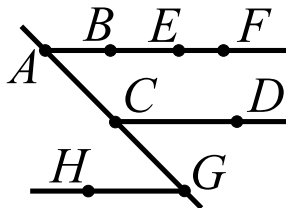


Рис. 203

Тот факт, что лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены, обозначают так: $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$. Лучи $[AB)$ и $[GH)$, лежащие на параллельных прямых и не являющиеся сонаправленными, называются *противоположно направленными* и обозначаются следующим образом: $[AB) \uparrow\downarrow [GH)$ (рис. 203). Так, например, всегда $[AB) \uparrow\downarrow [BA)$.

Свойство диагоналей параллелограмма точкой пересечения делиться пополам дает удобный критерий для проверки сонаправленности двух лучей — об этом следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $[AB)$ и $[CD)$ — произвольные лучи плоскости или пространства. Точки B и D выбраны так, что отрезки $[AB]$ и $[CD]$ равны между собой. Тогда $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$ тогда и только тогда, когда середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$. Если прямые AB и CD различны (рис. 204), то отрезок BD не пересекает (AC) , так как точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно этой прямой. Поэтому можно рассмотреть четырехугольник $ABDC$ (порядок вершин существенен). Стороны $[AB]$ и $[CD]$ этого четырехугольника равны и параллельны, следовательно $ABDC$ является параллелограммом и середины $[AD]$ и $[BC]$ совпадают.

Если прямые AB и CD совпадают, рассмотрим только случай, когда $[CD) \subseteq [AB)$ (рис. 205). Обозначим через O середину $[AD]$, a — серединный перпендикуляр к $[AD]$ и выберем произвольную точку $X \in a \setminus \{O\}$. Из равенств $[AX] = [DX]$, $[AB] = [DC]$ и $\angle XAB = \angle XDC$ по 1КРТ следует $\triangle AXB = \triangle DXC$ и $[BX] = [CX]$. Таким образом, a — серединный перпендикуляр к $[BC]$ и O — середина этого отрезка.

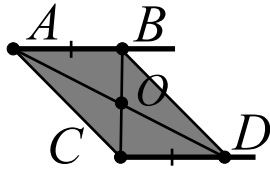


Рис. 204

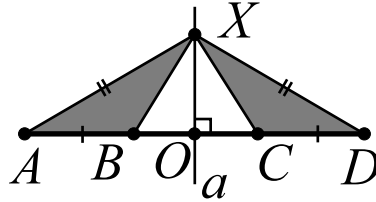


Рис. 205

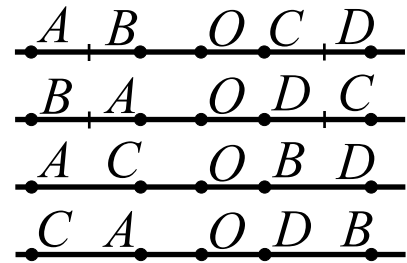


Рис. 206

$\Leftarrow$) пусть теперь середины $[AD]$ и $[BC]$ совпадают. Обозначим эту общую середину через O и сначала рассмотрим случай, когда $O \notin (AB)$ (рис. 204). По ЗКРТ треугольники OAB и OCD равны между собой, поэтому $\angle OBA = \angle OCD$ и $(AB) \parallel (CD)$. Кроме того, из совпадения середин отрезков следует, что четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом, поэтому $[BD] \cap (AC) = \emptyset$ и точки B и D лежат в одной полуплоскости с границей (AC) . Мы проверили, что $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$.

Если $O \in (AB)$, то точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Очевидно рассматриваются случаи: $A = O = D$, или $B = O = C$, или $[AO] = [BO]$. Поэтому далее считаем, что точки A, B, C и D попарно различны и $[AO] \neq [BO]$. Точка O , являясь серединой $[AD]$ и $[BC]$, лежит между точками A и D и между B и C . На рис. 206 изображены случаи взаимного расположения точек A, B, C, D и O , при которых точка O одновременно является серединой $[AD]$ и $[BC]$ (в первых двух точки A и B расположены по одну сторону от точки O , в остальных — по разные стороны). В первом и третьем случаях на рис. 206 получаем $[CD) \subseteq [AB)$, что дает $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$. Обратное включение $[AB) \subseteq [CD)$ (во втором и четвертом случае на рис. 206) также приводит к $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$. ■

Напомним, что одновременно рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на некотором множестве называется отношением эквивалентности. Отношение равенства на множестве всех углов, отношение параллельности на множестве всех прямых плоскости или пространства — примеры таких отношений. Отношение сонаправленности на множестве всех лучей плоскости или множестве всех лучей пространства также удовлетворяет всем этим трем свойствам. При проверке транзитивности мы воспользуемся только что доказанным критерием.

Теорема 1.2. Пусть $[AB), [CD)$ и $[EF)$ — произвольные лучи плоскости или пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $[AB) \uparrow\uparrow [AB)$;



- 2) если $[AB] \uparrow\uparrow [CD]$ то $[CD] \uparrow\uparrow [AB]$;
 3) если $[AB] \uparrow\uparrow [CD]$ и $[CD] \uparrow\uparrow [EF]$ то $[AB] \uparrow\uparrow [EF]$.

Доказательство. Справедливость первых двух утверждений следует из определения сонаправленных лучей.

Проверим выполнение свойства транзитивности. Сразу заметим, что условие $(AB) \parallel (EF)$ следует из транзитивности параллельности прямых (следствие теоремы 1.2 предыдущей главы). Далее рассмотрим несколько случаев взаимного расположения прямых (AB) , (CD) и (EF) .

1-й случай: $(AB) \neq (EF)$. Будем считать, что отрезки $[AB]$, $[CD]$ и $[EF]$ равны между собой. Так как $[AB] \uparrow\uparrow [CD]$, то существует некоторая точка O — общая середина отрезков $[AD]$ и $[BC]$. Аналогично из условия $[CD] \uparrow\uparrow [EF]$ найдется точка P , одновременно являющаяся серединой $[CF]$ и $[DE]$. Заметим, что $[OP]$ — средняя линия в треугольниках ADE и BCF (рис. 207 и 208), поэтому $(AE) \parallel (OP) \parallel (BF)$ откуда $(AE) \parallel (BF)$ (параллельность сохраняется, даже если один из треугольников вырождается в отрезок). В четырехугольнике $ABFE$ противоположные стороны параллельны, стало быть, он является параллелограммом и середины его диагоналей совпадают. Предыдущая теорема дает $[AB] \uparrow\uparrow [EF]$.

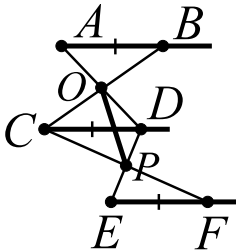


Рис. 207

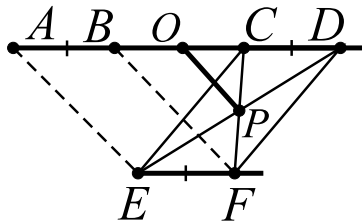


Рис. 208

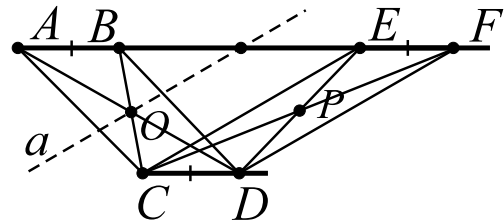


Рис. 209

2-й случай: $(AB) = (EF) \neq (CD)$. Сохраним предыдущие обозначения, т.е. точка O — это пересечение диагоналей параллелограмма $ABDC$ и P — точка пересечения диагоналей параллелограмма $CDFE$ (рис. 209). Покажем, что середины отрезков $[AF]$ и $[BE]$ совпадают. Через точку O проведем прямую a параллельно (CE) и (DF) . Середина $[AF]$ лежит на прямой a , так как эта прямая содержит среднюю линию $\triangle ADF$. Эта же прямая содержит и среднюю линию $\triangle BCE$, поэтому середина $[BE]$ также лежит на прямой a . Так как пересечение a и (AB) содержит не более одной точки, то середины $[AF]$ и $[BE]$ совпадают, откуда $[AB] \uparrow\uparrow [EF]$.

3-й случай: $(AB) = (CD) = (EF) = b$ (рис. 210). Выберем произвольную точку $X \notin b$ и обозначим через M середину отрезка $[BX]$. Пусть Y —



такая точка прямой AM , что $[AM] = [MY]$ и $Y \neq A$. Тогда $[XY) \uparrow\uparrow [AB)$. Воспользуемся вспомогательным лучом $[XY)$ и сведем доказательство этого случая к предыдущим. По первому случаю, из $[CD) \uparrow\uparrow [AB)$ и $[AB) \uparrow\uparrow [XY)$ следует, что $[CD) \uparrow\uparrow [XY)$. Аналогично из $[EF) \uparrow\uparrow [CD)$ и $[CD) \uparrow\uparrow [XY)$ по первому случаю получим $[EF) \uparrow\uparrow [XY)$. Используя второй случай, из $[AB) \uparrow\uparrow [XY)$ и $[XY) \uparrow\uparrow [EF)$ заключаем, что $[AB) \uparrow\uparrow [EF)$.



Из предыдущей теоремы получаем, что отношение сонаправленности на множестве лучей плоскости или пространства является отношением эквивалентности. Этим отношением множество всех лучей разбивается (т.е. представляется в виде объединения непересекающихся множеств) на классы эквивалентности. Два луча принадлежат одному из получившихся классов тогда и только тогда, когда они сонаправлены между собой, или, другими словами, совпадают по направлению. Этим объясняется следующее определение.

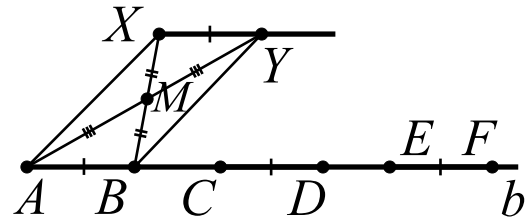


Рис. 210

Определение. *Направлением на плоскости (соответственно в пространстве) называют множество всех сонаправленных между собой лучей плоскости (пространства).*

Итак, направление состоит из лучей. Заметим, что для определения направления достаточно одного луча этого направления. Действительно, выбрав некоторый луч $[AB)$, мы одновременно определяем и содержащее этот луч направление: $\mathcal{K}([AB)) = \{[CD) : [CD) \uparrow\uparrow [AB)\}$. Поэтому мы будем говорить, что направление $\mathcal{K}([AB))$ задается лучом $[AB)$. Следующая теорема утверждает, что каждое направление содержит достаточно много лучей.

Теорема 1.3. *Для любой точки плоскости (соответственно пространства) и любого направления плоскости (пространства) найдется только один луч с началом в этой точке, задающий выбранное направление.*

Доказательство. I. Существование. Выберем произвольное направление $\mathcal{K}$ и произвольную точку X плоскости (доказательство для пространства аналогично). Существует некоторый луч $[AB)$, задающий $\mathcal{K}$. При $X \notin (AB)$ искомый луч был построен во время рассмотрения третьего случая предыдущей теоремы. Если $X \in (AB)$, то обозначим через M середину отрезка $[BX]$. Пусть Y — такая точка прямой AB , что M — середина



$[AY]$. По первой теореме этого параграфа луч $[XY)$ — искомый.

II. Единственность. О/п: нашелся еще один луч $[XY_1) \uparrow\uparrow [AB)$ и выполняется $[XY_1) \neq [XY)$. Из транзитивности сразу следует, что $[XY) \uparrow\uparrow [XY_1)$. Условия $(XY) \parallel (XY_1)$ и $X \in (XY) \cap (XY_1)$ дают, что $(XY) = (XY_1)$. Тогда предположение $[XY_1) \neq [XY)$ и доказанный в первой главе факт, что точка разбивает прямую только на два луча, приводят к тому, что $[XY_1)$ и $[XY)$ — противоположные лучи. Последнее противоречит $[XY) \uparrow\uparrow [XY_1)$. ■

Таким образом, в каждой точке плоскости или пространства образуется «веер» лучей с началом в этой точке, по одному на каждое направление.

Упражнения

1. Действительно ли существует плоскость $ABDC$ из определения сонаправленных лучей? Однозначно ли она определена?
2. Пусть лучи $[AB)$ и $[CD)$ не являются сонаправленными. Следует ли из этого, что они противоположно направлены?
3. Сформулируйте определение противоположно направленных лучей, не используя понятие сонаправленности.
4. Какое количество пар сонаправленных и противоположно направленных лучей можно определить, используя только вершины некоторого параллелограмма? Каких пар больше?
5. Известно, что точки A , B , C и D лежат на одной прямой, и некоторая точка O является серединой отрезков $[AD]$ и $[BC]$. Докажите, что если B лежит между A и O , то C находится между O и D .
6. Докажите, что если на лучах $[AB)$ и $[CD)$ найдутся соответственно по одной точке X и Y ($X \neq A$, $Y \neq C$), лежащих в одной полуплоскости относительно (AC) , то и все точки этих лучей принадлежат этой полуплоскости.
7. Используя предыдущее упражнение, приведите новое доказательство транзитивности отношения сонаправленности лучей.
8. Имея множество всех направлений пространства, попытайтесь получить множество всех направлений данной плоскости. Достаточно ли просто пересечь данное множество направлений с данной плоскостью? Не получится ли при этом пустое множество?



4.2. Направленные отрезки. Векторы

Определения направленного отрезка для плоскости и пространства очень похожи. Поэтому те небольшие отличия, которые возникают при переходе к случаю пространства, будут указаны в скобках. В некоторых других определениях и утверждениях будет сделано то же самое.

Определение. Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ плоскости (пространства) будем называть упорядоченную пару (A, B) точек этой плоскости (пространства). При этом точка A будет называться начальной точкой $\overrightarrow{AB}$, а B — его конечной точкой. Длиной $\overrightarrow{AB}$ будем называть длину отрезка $[AB]$ и обозначать $|\overrightarrow{AB}|$, а направлением $\overrightarrow{AB}$ будем называть направление, которое задается лучом $[AB)$ (при $A \neq B$). В случае, когда $A = B$, т.е. начальная и конечная точки совпадают, направленный отрезок $\overrightarrow{AA}$ называется нулевым и любое направление считается направлением $\overrightarrow{AA}$.

Изображение направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ от изображения отрезка $[AB]$ отличается только стрелкой (рис. 211), которая указывает, в каком порядке должны рассматриваться точки A и B .

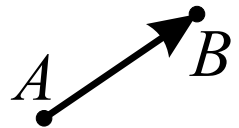


Рис. 211

Существует два основных способа задания направленного отрезка. Первый из них использует определение направленного отрезка. По нему достаточно выбрать две точки плоскости или пространства и указать, какая из них является начальной, а какая — конечной точкой. Другой, более геометричный способ позволяет естественно описать порядок точек. По этому способу достаточно выбрать только одну точку, которая становится начальной, задать некоторое направление и задать длину некоторого отрезка. Точка, которая однозначно получается при откладывании данного отрезка в данном направлении, считается конечной точкой направленного отрезка. Поэтому будем считать, что направленный отрезок характеризуют три элемента: *начальная точка, направление и длина*.

По некоторым причинам приходится различать два, на первый взгляд, похожих понятия: направленный отрезок и вектор. Главная причина — трудность определения операции сложения на множестве направленных отрезков. Так, например, что считать суммой $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, где A, B, C и D попарно различны? Попытка перенести начало $\overrightarrow{CD}$ в точку B даст направленный отрезок с другой начальной точкой и поэтому отличающийся от $\overrightarrow{CD}$. Выход из такой ситуации могут подсказать несколько физических примеров. Так, силу, действующую на некоторую материальную точку, принято обозначать



с помощью направленного отрезка, началом которого является данная точка, а его длина и направление совпадают соответственно с величиной и направлением действующей силы. Одним из принципов статики является следующее утверждение: если на абсолютно твердое тело (т.е. тело, попарные расстояния между точками которого постоянны) действует некоторая сила, то она одинаково действует на каждую точку этого тела. Этот принцип позволяет вместо множества направленных отрезков, совпадающих по длине и направлению, рассматривать один, с началом в произвольно выбранной точке этого тела (обычно в его центре масс). Похожий принцип можно наблюдать и в аэродинамике. Подъемная сила действует не только на крылья самолета, но и, к счастью, на его оставшуюся часть. Итак, в физике достаточно часто принято отождествлять совпадающие по длине и по направлению направленные отрезки (рис. 212), началами которых являются различные материальные точки данного твердого тела.

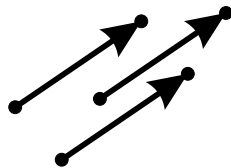


Рис. 212

Чтобы получить математически строгое определение вектора, введем на множестве направленных отрезков следующее отношение.

Определение. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными (при $A \neq B$), если они совпадают по длине и одинаковы по направлению, т.е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$. Любые два нулевых направленных отрезка равны между собой.

Сделаем одно очень важное замечание. На множестве упорядоченных пар уже существовало одно отношение равенства, будем его называть *теоретическим*, когда совпадают первые элементы пар и вторые элементы также равны между собой. В последнем определении было введено новое отношение равенства, которое правильнее было бы называть *геометрическим* равенством направленных отрезков. Чтобы не усложнять терминологию, договоримся о следующем. Все дальнейшие использования равенства для направленных отрезков понимаются только в последнем, *геометрическом* смысле³. Обозначать равные направленные отрезки (договоренность уже вступила в силу) будем так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Следующие две теоремы аналогичны соответствующим теоремам о сонаправленных лучах.

³Равные (в геометрическом смысле) направленные отрезки также называют *эквивалентными*.



Теорема 2.1. *Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны между собой тогда и только тогда, когда середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают.*

Доказательство. При $A \neq B$ достаточно повторить с небольшими изменениями доказательство первой теоремы предыдущего параграфа. Случай $A = B$ очевиден. ■

Теорема 2.2. *Пусть $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ — произвольные направленные отрезки. Тогда выполняются следующие свойства:*

- 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;
- 2) если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$;
- 3) если одновременно $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

Доказательство. Свойства (1) и (2) очевидны.

3) для проверки транзитивности (при $A \neq B$) достаточно заметить, что из $[AB] \uparrow [CD]$, $[CD] \uparrow [EF]$ и теоремы 1.2 следует, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ совпадают по направлению. Равенство их длин следует из аксиомы III.2 и свойства функции длины. При $A = B$ доказательство очевидно. ■

Из последней теоремы делаем вывод, что отношение равенства является отношением эквивалентности, значит это отношение разбивает множество всех направленных отрезков на классы эквивалентности. Два направленных отрезка принадлежат одному классу только в случае, когда они совпадают по длине и направлению.

Определение. *Вектором плоскости (пространства) называют множество всех равных между собой направленных отрезков плоскости (пространства).*

Теперь договоримся об обозначениях. Векторы будем обозначать так: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Множество всех векторов плоскости — V_2 , пространства — V_3 . В тех многочисленных случаях, когда результат справедлив и для V_2 , и для V_3 , будем использовать V — переменную, которая допускает подстановку только V_2 или V_3 .

Общими свойствами направленных отрезков, из которых состоит вектор $\vec{v}$, являются их длина, которую мы будем называть длиной вектора и обозначать $|\vec{v}|$, и направление, которое мы будем называть направлением вектора $\vec{v}$. Вектор, состоящий из всех направленных отрезков вида $\overrightarrow{AA}$, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Его длина равна нулю, а его направлением является сразу любое из направлений.



Таким образом, вектор характеризуют только два элемента: *длина* и *направление*.

Заметим, что каждый направленный отрезок, из которых состоит некоторый вектор $\vec{v}$, несет избыточную (с точки зрения этого вектора) информацию: вектор не зависит от выбора начальной точки. Таким образом, достаточно выбрать один $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$, чтобы задать вектор $\vec{v}$, поскольку $\vec{v} = \{\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\}$. Вместо включения $\overrightarrow{AB} \in \vec{v}$ мы будем использовать традиционную запись: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. При этом мы будем говорить, что вектор $\vec{v}$ задан направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$, или вектор $\vec{v}$ отложен от точки A с помощью $\overrightarrow{AB}$.

Теорема 2.3. *Для любого $\vec{v} \in V$ и для любой точки можно отложить вектор $\vec{v}$ от этой точки, причем это можно сделать единственным образом.*

Доказательство. I. Существование. Пусть X — произвольная точка и $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Если $X = A$, то $\overrightarrow{AB}$ — искомым. Если $A = B$, то искомым будет $\overrightarrow{XX}$. Иначе обозначим середину отрезка $[XB]$ через O и найдем такую точку Y , что O — середина отрезка AY . Направленный отрезок $\overrightarrow{XY}$ — искомым.

II. Единственность. При $A = B$ получим $Y = X$, поэтому единственность очевидна. Пусть теперь $A \neq B$. Единственность в этом случае гарантируется теоремой 1.3 и аксиомой III.1.

■

Возможность отложить некоторый вектор от любой точки плоскости α позволяет обнаружить связь между вектором и некоторым параллельным переносом этой плоскости. При этом параллельным переносом плоскости α будем считать $T = S_b \circ S_a$ — композицию двух осевых симметрий этой плоскости с параллельными осями ($a \parallel b$). Здесь мы постарались дать определение параллельного переноса независимо от вектора. Из этого определения сразу следуют два свойства. Во-первых, для любой прямой $c \subseteq \alpha$ выполняется $c \parallel c^* = T(c)$. При $c \parallel a$ или $c \perp a$ это свойство очевидно, рассмотрим все остальные прямые. Обозначим через $c_1 = S_a(c)$, тогда $\widehat{c_1, a} = \widehat{c_1, b}$. Удваивая последнее равенство, приходим к тому, что равны накрест лежащие углы, которые образуют прямые c и c^* с прямой c_1 , откуда следует, что $c \parallel c^*$. Во-вторых, при $a \neq b$ движение T не имеет неподвижных точек. О/п: предположим, что нашлась такая точка $O \in \alpha$, для которой $T(O) = O$. Очевидно, что $O \notin a \cup b$. Обозначим через $O_1 = S_a(O)$, тогда



из $S_b \circ S_a(O) = O$ следует $S_b \circ S_b \circ S_a(O) = S_b(O)$ или $O_1 = S_a(O) = S_b(O)$. Последнее означает, что различные прямые a и b плоскости α являются серединными перпендикулярами к отрезку $[OO_1] \subseteq \alpha$, что противоречит результатам пятого параграфа первой главы.

Обозначим через $\mathcal{T}_2$ множество всех параллельных переносов плоскости α , V_2 — множество всех векторов этой плоскости, тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Между множествами V_2 и $\mathcal{T}_2$ существует биекция.*

Доказательство. Выберем произвольный $\vec{v} \in V_2$. Сначала опишем некоторый параллельный перенос $\varphi(\vec{v}) \in \mathcal{T}_2$, а затем проверим для соответствия φ все свойства биекции.

Если $\vec{v}$ — нулевой вектор, то $\varphi(\vec{v}) = \varepsilon$, где ε — тождественное преобразование плоскости α . Если $\vec{v} \neq \vec{0}$, выберем некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, задающий $\vec{v}$. Проведем две параллельные прямые a и b так, что прямая a проходит через точку A и перпендикулярна (AB) , а прямая b проходит через середину $[AB]$. Обозначим параллельный перенос $S_b \circ S_a$ через $\varphi(\vec{v})$. Определение φ завершено. Докажем, что φ — биекция.

Очевидно, что $\varphi(\vec{v})$ определено для любого $\vec{v} \in V_2$, поэтому соответствие φ является *всюду определенным*.

Соответствие φ *однозначно*. Чтобы в этом убедиться, выберем $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, задающие один и тот же вектор $\vec{v} \neq \vec{0}$ (при $\vec{v} = \vec{0}$ однозначность очевидна). Пусть $T_1 = S_b \circ S_a$ и $T_2 = S_d \circ S_c$, где прямые a и b строятся по сформулированному для φ правилу для направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, а прямые c и d — для $\overrightarrow{CD}$. Докажем, что $T_1 = T_2$, т.е. для произвольной точки $X \in \alpha$ проверим, что $T_1(X) = T_2(X)$.

Обозначим через $Y_1 = T_1(X)$, $Y_2 = T_2(X)$ и начнем со случая, когда прямые AB и XY_1 различны (рис. 213). Заметим, что $T_1(A) = B$. Следовательно, образом прямой XA при T_1 будет прямая Y_1B и по свойству параллельного переноса $(XA) \parallel (Y_1B)$. Кроме того, $(XY_1) \parallel (AB)$, так как обе эти прямые перпендикулярны a , поэтому четырехугольник XY_1BA является параллелограммом и $\overrightarrow{XY_1} = \overrightarrow{AB}$.

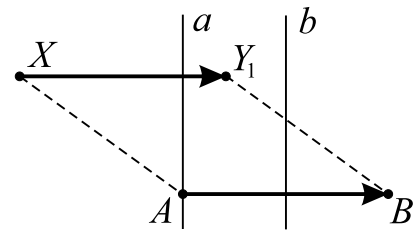


Рис. 213

В случае, когда прямые XY_1 и AB совпадают, можно выбрать $A^* \in a$ и B^* так, что $A^* \notin (AB)$ и $\overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{AB}$. По доказанному выше $\overrightarrow{XY_1} = \overrightarrow{A^*B^*}$.



Кроме того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A^*B^*}$, откуда $\overrightarrow{XY_1} = \overrightarrow{AB}$.

Аналогично и для точки Y_2 можно получить равенство $\overrightarrow{XY_2} = \overrightarrow{CD}$. Из $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, снова используя транзитивность, получаем, что $\overrightarrow{XY_1} = \overrightarrow{XY_2}$, откуда $Y_1 = Y_2$. Однозначность φ доказана.

Заметим, что доказано нечто большее: если $T = \varphi(\vec{v})$, то для любой точки X и ее образа $Y = T(X)$ выполняется $\overrightarrow{XY} = \vec{v}$.

Покажем теперь, что если $T \in \mathcal{T}_2$, то существует $\vec{v} \in V_2$, что $\varphi(\vec{v}) = T$ (т.е. проверим сюръективность φ). Пусть $T = S_b \circ S_a \in \mathcal{T}_2$. Проведем прямую s так, что $s \perp a$. Обозначим через A точку $a \cap s$. Точку B выберем так, что точка $b \cap s$ является серединой отрезка $[AB]$. Обозначим через $\vec{v}$ вектор, который задается с помощью $\overrightarrow{AB}$, тогда из определения φ следует, что $\varphi(\vec{v}) = T$.

Осталось проверить инъективность φ . Выберем различные $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ и покажем, что $T_1 = \varphi(\vec{v}_1) \neq \varphi(\vec{v}_2) = T_2$. Достаточно найти хотя бы одну точку X , на которой T_1 и T_2 различаются, т.е. $T_1(X) \neq T_2(X)$. Выберем в качестве X произвольную точку и покажем, что она искомая. Как было установлено выше: если $T_1(X) = Y_1$, то $\overrightarrow{XY_1} = \vec{v}_1$. Аналогично $\overrightarrow{XY_2} = \vec{v}_2$, где $Y_2 = T_2(X)$. Так как $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$, то $\overrightarrow{XY_1} \neq \overrightarrow{XY_2}$ и $Y_1 \neq Y_2$.

Итак, φ — биекция. ■

Казалось бы, в предыдущей теореме утверждается только, что V_2 и $\mathcal{T}_2$ равномощны. Но на самом деле построенная в этой теореме биекция φ обладает одним замечательным свойством: она сохраняет результат операции (т.е. сумму двух векторов переводит в композицию соответствующих параллельных переносов). В алгебре такие биекции называют изоморфизмами. Но об этом в следующем параграфе.

Упражнения

1. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$.
2. Пусть $a \parallel b$ и $a \neq b$. Пусть также точки $C \in a$, $D \in b$ выбраны так, что $(CD) \perp a$. Направление, которое задается лучом $[CD)$ будем называть направлением от прямой a к прямой b . Докажите, что если $Y = T(X)$, где $T = S_b \circ S_a$, то длина $\overrightarrow{XY}$ равна удвоенному расстоянию между прямыми a и b , а направление $\overrightarrow{XY}$ совпадает с направлением от a к b .
3. Получите, используя результат предыдущего упражнения, новое доказательство однозначности соответствия φ из последней теоремы этого параграфа.



4.3. Операции на множестве векторов

В этом параграфе произойдет соединение двух методов исследования. Геометрическим идеям принадлежало главное место в определении понятия вектора, но, когда приходит время определить операции на некотором множестве и изучить их свойства, основными методами исследования становятся алгебраические методы.

Начнем с операции сложения на множестве векторов и классического определения — *правила треугольника*.

Определение. Суммой векторов $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ называют вектор $\vec{w}$, который задается направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$ (рис. 214). Обозначение для суммы векторов: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Обратим внимание, что первый направленный отрезок, $\overrightarrow{AB}$ (задающий $\vec{u}$), был выбран произвольно, но второй, $\overrightarrow{BC}$ (задающий $\vec{v}$), уже был выбран с началом в точке B . В результате получен некоторый направленный отрезок с началом в точке A . Как показывает следующая теорема, результирующий вектор, т.е. $\vec{w}$, не зависит от выбора точки A . Таким образом, определение суммы векторов корректно.

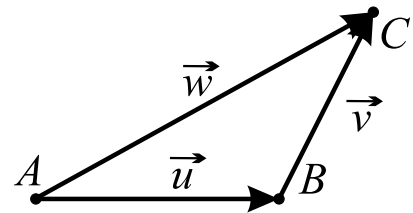


Рис. 214

Теорема 3.1. Операция суммы на множестве векторов не зависит от выбора представителей, т.е. если $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 215).

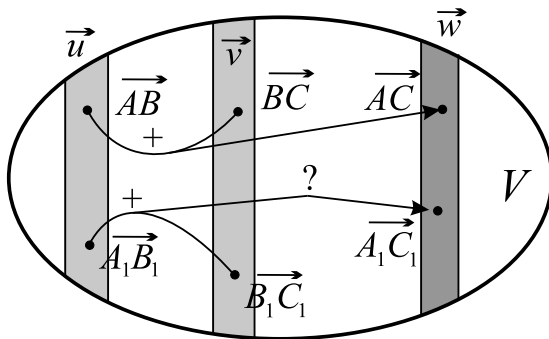


Рис. 215

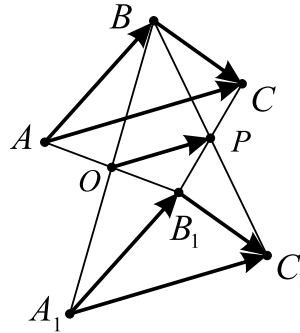


Рис. 216

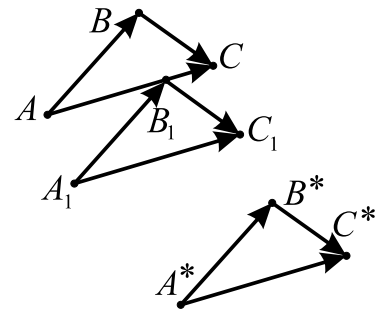


Рис. 217

Доказательство. 1-й случай: $B_1 \notin (AC)$ и $B \notin (A_1C_1)$. Воспользуемся критерием равенства векторов. Так как середины $[AB_1]$ и $[BA_1]$ совпадают (некоторая точка O), а также совпадают и середины отрезков $[BC_1]$ и $[B_1C]$



(точка P), то $[OP]$ является общей средней линией $\triangle AB_1C$ и $\triangle A_1BC_1$ (рис. 216). Легко получаем, что $[AC] = [A_1C_1]$ и $[AC] \parallel [OP] \parallel [A_1C_1]$, откуда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

2-й случай: $B_1 \in (AC)$ или $B \in (A_1C_1)$. Тогда хотя бы один из двух треугольников $\triangle AB_1C$ или $\triangle A_1BC_1$ вырождается (рис. 217). Применим уже знакомый прием. Выберем точки A^*, B^*, C^* так, чтобы кроме равенств $\overrightarrow{A^*B^*} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B^*C^*} = \overrightarrow{BC}$ выполнялись одновременно еще следующие условия: $B, B_1 \notin (A^*C^*)$ и $B^* \notin (AC) \cup (A_1C_1)$ (см. упражнение 1). Дважды применяя первый случай, приходим к равенствам $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A^*C^*}$ и $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A^*C^*}$, откуда $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

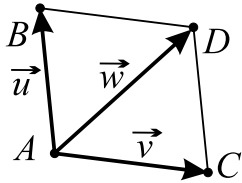


Рис. 218

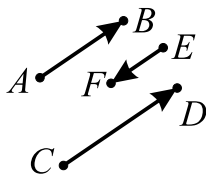


Рис. 219

В следующей теореме описывается еще один способ⁴ сложения векторов.

Теорема 3.2. Если векторы $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ отложены от одной точки, выполнено $C \notin (AB)$ и отрезок $[AD]$ является диагональю параллелограмма со сторонами $[AB]$ и $[AC]$, то суммой $\vec{u} + \vec{v}$ будет вектор

$\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 218).

Доказательство. Заметим, что $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, так как $ABDC$ по условию является параллелограммом. Теперь, по определению суммы векторов и предыдущей теореме, имеем $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Определение. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются сонаправленными (обозначаются так: $\vec{u} \parallel \vec{v}$), если они совпадают по направлению, т.е. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ и $[AB] \parallel [CD]$. Противоположно направленными векторами называются векторы, у которых направления противоположны, т.е. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ и $[AB] \updownarrow [CD]$. Обозначение для противоположно направленных векторов: $\vec{u} \updownarrow \vec{v}$. Будем также по определению считать, что нулевой вектор одновременно сонаправлен и противоположно направлен с любым вектором.

Так, например, $[AB] \updownarrow [BA]$, поэтому $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{BA}$ для любого вектора $\vec{u} \in V$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Для векторов $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$, изображенных на рис. 219, выполняется $\vec{u} \parallel \vec{v}$ и $\vec{u} \updownarrow \vec{w}$.

Несложно находится сумма сонаправленных или противоположно направленных векторов — об этом следующая лемма.

⁴Он называется *правилом параллелограмма*.



Лемма 3.3. 1) если $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, то $\vec{u} + \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{u}, \vec{v}$ и $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.
 2) если $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$, то $|\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$ и вектор $\vec{u} + \vec{v}$ сонаправлен с большим из $\vec{u}, \vec{v}$ по длине вектором.

Доказательство. Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, тогда $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ и точки A, B, C лежат на одной прямой. Если один из векторов нулевой, то доказательство очевидно. Далее считаем векторы ненулевыми и докажем каждое утверждение отдельно.

1) очевидно, что $|\vec{u} + \vec{v}| = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, так как B лежит между A и C (рис. 220). Сонаправленность $[AC)$ с лучами $[AB)$ и $[BC)$ сразу следует из определения.



Рис. 220



Рис. 221

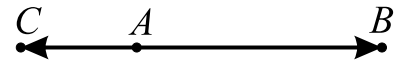


Рис. 222

2) возможны три случая. 1-й случай: $|\vec{u}| > |\vec{v}|$. Тогда C находится между A и B (рис. 221), поэтому $[AC) \uparrow\uparrow [AB)$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}| = |\vec{u}| - |\vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$.

2-й случай: $|\vec{u}| < |\vec{v}|$. Тогда уже A находится между B и C (рис. 222), поэтому $[AC) \uparrow\uparrow [BC)$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AB}| = |\vec{v}| - |\vec{u}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$.

3-й случай: $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Противоположная направленность векторов дает $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ и оба факта очевидно выполняются. ■

Теорема 3.4. $(V, +)$ является коммутативной группой.

Доказательство. 1) покажем, что выполняется свойство коммутативности, т.е. равенство $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ верно для любых $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Если $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ или $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$, то равенство $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ следует из предыдущей леммы. Пусть теперь $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $C \notin (AB)$ и $[AD]$ — диагональ параллелограмма со сторонами $[AB]$ и $[AC]$ (рис. 218). Тогда $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. С другой стороны, $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Следовательно, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

2) докажем, что $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ для любой тройки векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$. Последовательно отложим векторы $\vec{u} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{v} = \overrightarrow{A_2A_3}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{A_3A_4}$. Тогда $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_1A_4}$. При другой расстановке скобок имеем: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_4} = \overrightarrow{A_1A_4}$. Следовательно, свойство ассоциативности также выполняется.



3) нулевой вектор является нейтральным элементом $(V, +)$ по сложению. Выберем произвольный $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, тогда $\vec{v} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Из коммутативности следует, что $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

4) для любого $\vec{u} \in V$ найдется обратный элемент $\vec{v} \in V$, т.е. такой, что $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$. Действительно, пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Обозначим через $\vec{v}$ вектор, который задается направленным отрезком $\overrightarrow{BA}$. Тогда выполняется $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. И снова по (1) имеем $\vec{v} + \vec{u} = \vec{0}$.

■

В следующей теореме описывается еще один популярный способ⁵ сложения векторов.

Теорема 3.5. Если векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ отложены последовательно, т.е. $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}, \dots, \vec{v}_n = \overrightarrow{A_nA_{n+1}}$, то суммой $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$ будет вектор $\vec{w} = \overrightarrow{A_1A_{n+1}}$ (рис. 223).

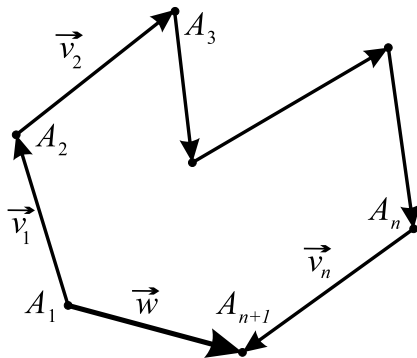


Рис. 223

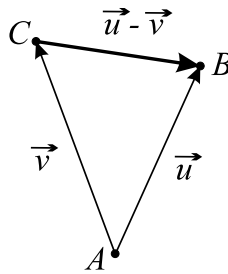


Рис. 224

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по $n \geq 2$.

Б.И. Если $n = 2$, то доказательство очевидно.

Ш.И. Предположим, что для $k = n - 1$ уже доказано, что

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_{n-1} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

Тогда

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_{n-1} + \vec{v}_n = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_{n-1}) + \vec{v}_n = \overrightarrow{A_1A_n} + \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_1A_{n+1}}.$$

■

Договоримся обозначать обратный вектор к вектору $\vec{v}$ через $-\vec{v}$ и, кроме того, разностью векторов $\vec{u} - \vec{v}$ называть сумму $\vec{u} + (-\vec{v})$. Можно сформулировать следующее правило⁶ для нахождения разности двух векторов, которые отложены от одной точки.

Теорема 3.6. Если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, то $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$ (рис. 224).

Доказательство. К обеим частям верного равенства $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ добавим $\overrightarrow{CA}$ и получим $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$. Преобразуем левую

⁵Он называется *правилом многоугольника*.

⁶Будем его называть правилом *КоМиНа* — **К**онец **М**инус **Н**ачало.



часть этого равенства, используя теорему 3.4:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}.$$

Правая же часть равна $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{u} - \vec{v}$.

■

Определение. Пусть $\vec{u} \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Произведением числа λ на вектор $\vec{u}$ называется такой вектор $\vec{v} \in V$ (обозначение $\vec{v} = \lambda \vec{u}$), который одновременно удовлетворяет двум свойствам:

- 1) $|\vec{v}| = |\lambda| |\vec{u}|$,
- 2) если $\lambda \geq 0$, то $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{u}$, иначе $\vec{v} \updownarrow \vec{u}$.

Заметим, что обозначение $-\vec{u}$ для обратного вектора к вектору $\vec{u}$ согласуется с последним определением. Действительно, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ равны между собой по длине ($|-1| = 1$) и противоположно направлены. Переменную, которая принимает только числовые значения, часто называют *скалярной* величиной, или *скаляром*. Поэтому умножение вектора на число называют произведением векторной величины на скаляр. В следующей теореме доказывается свойство ассоциативности умножения на скаляр и два закона дистрибутивности: относительно скаляров и относительно векторов.

Теорема 3.7. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда выполняются следующие свойства:

- 1) $\lambda(\mu \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{v}$;
- 2) $(\lambda + \mu) \vec{v} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{v}$;
- 3) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}$.

Доказательство. Схема доказательства всех трех свойств одинакова: сначала проверяется равенство длин векторов в левой и правой частях уравнения, а затем — совпадение их направлений.

1) обозначим левую часть равенства через $\vec{w}_1$ и правую — через $\vec{w}_2$. Используя определение умножения вектора $\mu \vec{v}$ на λ , а затем вектора $\vec{v}$ на μ , получаем, что $|\vec{w}_1| = |\lambda(\mu \vec{v})| = |\lambda| |\mu \vec{v}| = |\lambda| |\mu| |\vec{v}|$. Аналогично $|\vec{w}_2| = |(\lambda + \mu) \vec{v}| = |(\lambda + \mu)| |\vec{v}| = |\lambda| |\mu| |\vec{v}|$. Чтобы доказать совпадение направлений, рассмотрим два случая.

1-й случай: $\lambda \cdot \mu \geq 0$. Тогда $\vec{w}_1 \uparrow\uparrow \vec{v}$ и $\vec{w}_2 \uparrow\uparrow \vec{v}$, откуда $\vec{w}_1 \uparrow\uparrow \vec{w}_2$.

2-й случай: $\lambda \cdot \mu \leq 0$. Тогда $\vec{w}_1 \updownarrow \vec{v}$ и $\vec{w}_2 \updownarrow \vec{v}$, поэтому $\vec{w}_1 \uparrow\uparrow \vec{w}_2$.

2) и снова доказательство распадается на рассмотрение двух случаев.

1-й случай: $\lambda \cdot \mu \geq 0$. Тогда в левой части имеем: $|\vec{w}_1| = |(\lambda + \mu) \vec{v}| = |\lambda + \mu| |\vec{v}| = (|\lambda| + |\mu|) |\vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| + |\mu| |\vec{v}|$. Для правой части, используя



первую часть леммы 3.3, получим, что $|\vec{w}_2| = |\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}| = |\lambda \vec{v}| + |\mu \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| + |\mu| |\vec{v}|$. Отсюда $|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2|$. Осталось заметить, что если λ и μ неотрицательны, то $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ сонаправлены с $\vec{v}$, поэтому сонаправлены между собой. Если же λ, μ неположительны, то $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ противоположно направлены с $\vec{v}$, поэтому сонаправлены между собой.

2-й случай: $\lambda \cdot \mu \leq 0$. Тогда выполняется $|\vec{w}_1| = |(\lambda + \mu) \vec{v}| = |\lambda + \mu| |\vec{v}| = \left| |\lambda| - |\mu| \right| |\vec{v}| = \left| |\lambda| |\vec{v}| - |\mu| |\vec{v}| \right|$. Снова используя лемму 3.3, но теперь ее вторую часть, получаем: $|\vec{w}_2| = |\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}| = \left| |\lambda \vec{v}| - |\mu \vec{v}| \right| = \left| |\lambda| |\vec{v}| - |\mu| |\vec{v}| \right|$. Отсюда $|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2|$. Докажем теперь, что $\vec{w}_1 \uparrow \vec{w}_2$. Если $|\lambda| \geq |\mu|$, то $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ сонаправлены с $\lambda \vec{v}$, иначе они сонаправлены с $\mu \vec{v}$. В обоих случаях $\vec{w}_1 \uparrow \vec{w}_2$.

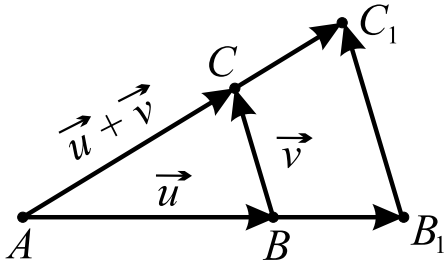


Рис. 225

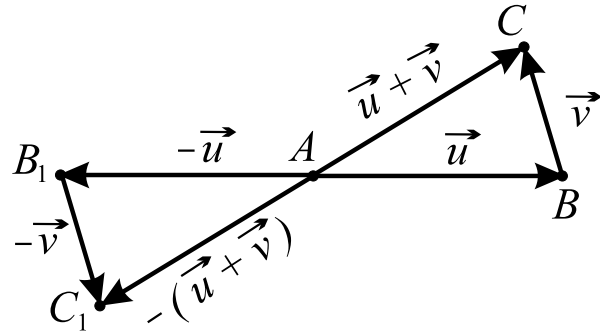


Рис. 226

3) пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Если A, B и C лежат на одной прямой, то это свойство следует из леммы 3.3, а при $\lambda = 0$ оно очевидно. Пусть теперь $B \notin (AC)$ и $\lambda \neq 0$, тогда достаточно рассмотреть три случая.

1-й случай: $\lambda > 0$. Пусть $\overrightarrow{AB_1} = \lambda \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1} = \lambda \overrightarrow{BC}$ (рис. 225). Необходимо доказать, что $\lambda \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC_1}$. Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ по 1КПТ (пропорциональность двух пар сторон и $\angle ABC = \angle AB_1C_1$, так как $\overrightarrow{BC} \uparrow \overrightarrow{B_1C_1}$), отсюда $\angle CAB = \angle C_1AB_1$ и точки A, C, C_1 лежат на одной прямой. Более того, из подобия треугольников имеем: $|\overrightarrow{AC_1}| = |\lambda| |\overrightarrow{AC}|$. И, наконец, поскольку C и C_1 лежат по одну сторону от точки A , то $[AC] \uparrow [AC_1]$.

2-й случай: $\lambda = -1$. Рассмотрим центральную симметрию Z_A относительно точки A (рис. 226). Пусть $C_1 = Z_A(C)$ и $B_1 = Z_A(B)$, тогда $-(\vec{u} + \vec{v}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC_1}$. С другой стороны, $-\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

3-й случай: $\lambda < 0$. Тогда $\lambda = -1 \cdot |\lambda|$. Последовательно используя ассоциативность умножения на скаляр и предыдущие два случая, получаем,



что $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = -|\lambda|(\vec{u} + \vec{v}) = (-1)(|\lambda|(\vec{u} + \vec{v})) = (-1)(|\lambda|\vec{u} + |\lambda|\vec{v}) = -|\lambda|\vec{u} - |\lambda|\vec{v} = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$.

■

Упражнения

1. Пусть точки A, B, C и A_1, B_1, C_1 выбраны так, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$. Докажите, что всегда найдутся такие точки A^*, B^*, C^* , что одновременно выполняется: $B, B_1 \notin (A^*C^*)$, $B^* \notin (AC) \cup (A_1C_1)$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A^*B^*}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B^*C^*}$.
2. Докажите, что $\vec{u} = \vec{v}$ тогда и только тогда, когда $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$.
3. Докажите, что $\vec{u} = \vec{v}$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\vec{w} \in V$, что $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$. Также, $\vec{u} = \vec{v}$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\vec{w} \in V$ выполняется $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$.
4. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$.
5. Предположим, что сложение векторов определено так, что свойство ассоциативности не выполняется. Более того, различная расстановка скобок приводит к получению нового вектора. Предполагая, что коммутативность все-таки выполняется, определите, какое максимальное число векторов можно получить из трех попарно различных ненулевых векторов. Тот же вопрос при дополнительном условии, что перестановка каждой пары векторов приводит к новому суммарному вектору.
6. Пусть $(G_1, +)$ и $(G_2, *)$ — группы. Биекция $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ называется изоморфизмом этих групп, если для любых $a, b \in G_1$ выполняется: $\varphi(a + b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. Если существует биекция между G_1 и G_2 с таким свойством, то группы G_1 и G_2 называются изоморфными. Докажите, что группы $(V_2, +)$ и $(T_2, \circ)$ изоморфны.

4.4. Базис плоскости и пространства

Множества V_2 и V_3 бесконечны. Но достаточно конечного числа специально выбранных векторов (двух — в случае V_2 , и трех — в случае V_3), чтобы с помощью сложения векторов и умножения вектора на скаляр получить все векторы плоскости или пространства. Предварительно установим похожий результат для прямой.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{v}$ называется параллельным прямой a (обозначается $\vec{v} \parallel a$), если $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ и $(AB) \parallel a$. Два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (коллинеарные векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ обозначаются $\vec{u} \parallel \vec{v}$). Нулевой вектор по определению считается параллельным любой прямой.



Лемма 4.1. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \text{ или } \vec{u} \updownarrow \vec{v}.$

Доказательство. $\Leftarrow$) сразу следует из определения сонаправленных или противоположно направленных лучей.

$\Rightarrow$) если один из векторов нулевой, то доказательство очевидно. Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ — ненулевые векторы. Так как $(AB) \parallel (AC)$, то точки A , B и C лежат на одной прямой, обозначим ее через a . Применяя к точке A и прямой a теорему об открытом луче (2.2 из первой главы), рассматриваем только два случая: $[AB) = [AC)$ или $[AB), [AC)$ — противоположные лучи. В первом случае получаем $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, а во втором — $\vec{u} \updownarrow \vec{v}$. ■

Определение. Вектор $\vec{u}$ выражается⁷ через векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, если найдутся такие числовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$), что

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i.$$

Теорема 4.2. Векторы $\vec{u}, \vec{v} \in V$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них выражается через другой.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов нулевой, то утверждение очевидно, поскольку нулевой вектор легко выражается через любой вектор — с нулевым коэффициентом. Поэтому далее считаем, что $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

$\Leftarrow$) очевидно, так как $\vec{v}$ и $\lambda \vec{v}$ коллинеарны. Это следует из определения умножения вектора на скаляр и предыдущей леммы.

$\Rightarrow$) учитывая, что $\vec{v} \neq \vec{0}$, рассмотрим число $\lambda = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$. По предыдущей лемме условие $\vec{u} \parallel \vec{v}$ приводит только к двум случаям: $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ или $\vec{u} \updownarrow \vec{v}$. Тогда в первом случае $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, во втором — $\vec{u} = -\lambda \vec{v}$. Легко проверить совпадение направлений у векторов в левой и правой частях (заметьте, что по своему определению $\lambda > 0$). Равенство длин следует из $|\lambda \vec{v}| = |\lambda| |\vec{v}| = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = |\vec{u}|$. Осталось заметить, что $|- \lambda \vec{v}| = |\lambda \vec{v}| = |\vec{u}|$. ■

Отметим, что если оба коллинеарных вектора отличны от нулевого, то, обозначив через $\mu = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$, можно получить, что $\vec{v} = \mu \vec{u}$ или $\vec{v} = -\mu \vec{u}$.

⁷Или представляется в виде линейной комбинации этих векторов.



Итак, с помощью только одного ненулевого вектора, параллельного некоторой прямой, можно выразить все векторы, параллельные данной прямой.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{v}$, параллельный прямой a , называется базисом (или базисным вектором) этой прямой.

Базисный вектор $\vec{v}$ прямой a часто называют ее направляющим вектором.

Следствие. Пусть $\vec{v}$ — базис прямой a . Тогда $\vec{u} \parallel a$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Доказательство. При $\vec{u} = \vec{0}$ утверждение очевидно.

Пусть $\vec{u} \neq \vec{0}$, тогда условие $\vec{u} \parallel a$ равносильно $\vec{u} \parallel \vec{v}$, что по предыдущей теореме равносильно существованию коэффициента $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Дополнительно установим, что такое $\lambda \in \mathbb{R}$ для вектора $\vec{u}$ определяется однозначно. Из $\vec{u} = \lambda \vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$ и уже доказанной дистрибутивности получим $(\lambda - \lambda_1) \vec{v} = \vec{0}$. Учитывая, что $\vec{v} \neq \vec{0}$ (базисный вектор по определению ненулевой), приходим к $\lambda = \lambda_1$. ■

С помощью базисного вектора $\vec{v}$ прямой a легко можно ввести линейный порядок на этой прямой. Пусть, например, $A, B \in a$. Будем считать, что $A \leq B$, если $\overrightarrow{AB} \uparrow \vec{v}$. Заметим, что, изменяя направляющий вектор, можно ввести только два различных порядка на прямой (порядки $\leq_1$ и $\leq_2$ считаются одинаковыми, если для любых $A, B \in a$ выполняется: $A \leq_1 B \Leftrightarrow A \leq_2 B$).

Теорема 4.3. Пусть $\vec{u}, \vec{v}$ — два направляющих вектора прямой a и $\leq_1, \leq_2$ — порядки, которые соответственно порождаются этими векторами. Тогда порядки $\leq_1$ и $\leq_2$ одинаковы тогда и только тогда, когда $\vec{u} \uparrow \vec{v}$.

Доказательство. $\Leftarrow$) очевидно, так как

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow \vec{v} \Leftrightarrow A \leq_2 B.$$

$\Rightarrow$) выберем различные точки $A, B \in a$, для которых одновременно выполняется: $A \leq_1 B$ и $A \leq_2 B$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow \vec{u}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow \vec{v}$. Используя транзитивность сонаправленности для ненулевых векторов, получим $\vec{u} \uparrow \vec{v}$. ■



Следующие несколько результатов будут относиться к векторам плоскости, поэтому зафиксируем некоторую плоскость α и будем рассматривать V_2 — множество векторов этой плоскости.

Определение. Пара неколлинеарных векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ называются базисом плоскости α (или базисом V_2).

Следующая теорема — о представлении произвольного вектора плоскости по ее базису.

Теорема 4.4. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ — базис плоскости. Тогда для любого $\vec{w} \in V_2$ существуют такие два числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, причем такая пара $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ единственна.

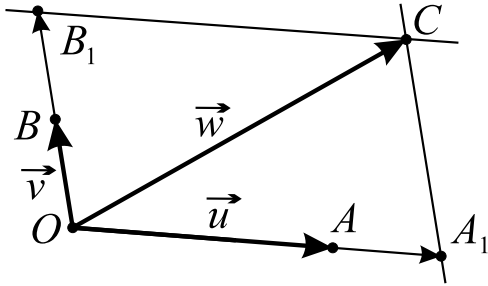


Рис. 227

Доказательство. I. Существование.

Отложим векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ от одной точки $O \in \alpha$: $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$, $\vec{w} = \vec{OC}$. Проведем через точку C прямые a и b так, что $a \parallel (OA)$ и $b \parallel (OB)$. Обозначим точки пересечения: $\{A_1\} = b \cap (OA)$ и $\{B_1\} = a \cap (OB)$ (рис. 227). Заметим, что $\vec{OA_1} \parallel \vec{OA}$ и $\vec{OB_1} \parallel \vec{OB}$. По теореме 4.2

найдутся такие два числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\vec{OA_1} = \lambda\vec{OA}$ и $\vec{OB_1} = \mu\vec{OB}$. Из равенства $\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{A_1C} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$ получаем, что $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$ или $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

II. Единственность представления. Предположим противное, т.е. выполняется $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}$ и $\lambda_1 \neq \lambda$ или $\mu_1 \neq \mu$. Отсюда $(\lambda - \lambda_1)\vec{u} = (\mu_1 - \mu)\vec{v}$. Теперь, если $\lambda_1 \neq \lambda$, то $\vec{u} = \frac{\mu_1 - \mu}{\lambda - \lambda_1}\vec{v}$. Если же $\mu_1 \neq \mu$, то $\vec{v} = \frac{\lambda - \lambda_1}{\mu_1 - \mu}\vec{u}$. В обоих случаях — $\vec{u} \parallel \vec{v}$, а это противоречит тому, что пара $\vec{u}, \vec{v}$ является базисом плоскости. ■

Покидаем плоский мир и переходим к случаю пространства.

Определение. Вектор $\vec{u} \in V_3$ называется параллельным плоскости α , если $\vec{u} = \vec{AB}$ и $(AB) \parallel \alpha$ (обозначение: $\vec{u} \parallel \alpha$). Три вектора $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ будем называть компланарными, если они параллельны одной плоскости. Тот факт, что векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ компланарны, будем обозначать так: $\square \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Теорема 4.5. Пусть $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$. Тогда $\square \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ тогда и только тогда, когда один из этих векторов выражается через два других.



Доказательство. $\Rightarrow$) пусть векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ компланарны. И пусть α — плоскость, которой они все параллельны. Рассмотрим два случая.

1-й случай: $\vec{u}$ и $\vec{v}$ не коллинеарны. Тогда пара $\vec{u}, \vec{v}$ — базис плоскости α , и по предыдущей теореме существуют такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$.

2-й случай: $\vec{u} \parallel \vec{v}$. Тогда по теореме 4.2 $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ или $\vec{v} = \mu \vec{u}$. Отсюда $\vec{u} = \lambda \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$ или $\vec{v} = \mu \vec{u} + 0 \cdot \vec{w}$.

$\Leftarrow$) пусть один из векторов, например $\vec{w}$, выражается через два других. Тогда $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Отложим векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ от одной точки. Пусть $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$, $\vec{w} = \vec{OC}$, $\lambda \vec{u} = \vec{OA_1}$, $\mu \vec{v} = \vec{OB_1}$. Поскольку $\vec{OC} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1}$, точки O , A_1 , B_1 и C лежат в одной плоскости, которую мы обозначим через α . Кроме того, выполняется $A \in (OA_1) \subseteq \alpha$, $B \in (OB_1) \subseteq \alpha$, отсюда $A, B \in \alpha$ и $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \parallel \alpha$. ■

Определение. Тройку некопланарных векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ называют базисом пространства (или базисом V_3).

Базис пространства существует. Это легко проверить, воспользовавшись одной из аксиом: существуют четыре точки O, A, B, C , не лежащие в одной плоскости. Тройка векторов $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$, $\vec{w} = \vec{OC}$ — искомая.

Теорема 4.6. Пусть $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ — базис пространства. Тогда для любого вектора $\vec{s} \in V_3$ найдется такая тройка чисел $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$, что $\vec{s} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \eta \vec{w}$. Причем для вектора $\vec{s}$ и данного базиса $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ такая тройка чисел $(\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ единственна.

Доказательство. I. Существование. Пусть $\vec{u} = \vec{OA}$, $\vec{v} = \vec{OB}$, $\vec{w} = \vec{OC}$, $\vec{s} = \vec{OD}$. Проведем через точку D прямую a , которая параллельна (OC) . Прямая a не может быть параллельна плоскости (OAB) , иначе этой плоскости были бы параллельны все векторы базиса, чего не может быть. Обозначим точку пересечения $a \cap (OAB)$ через

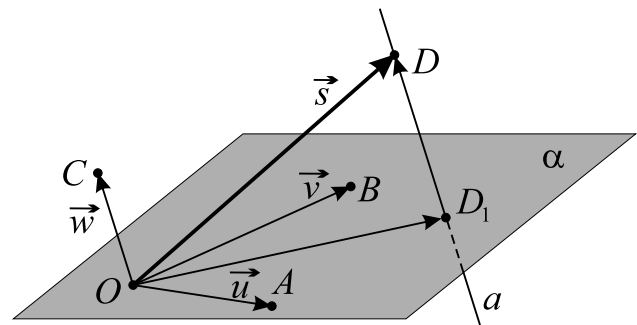


Рис. 228

D_1 (рис. 228). Так как $D_1 \in (OAB)$, то по теореме 4.5 получаем, что $\vec{OD_1} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB}$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Из теоремы 4.2 и условия $a \parallel (OC)$ находим $\eta \in \mathbb{R}$, что $\vec{D_1D} = \eta \vec{OC}$. Окончательно имеем: $\vec{s} = \vec{OD} = \vec{OD_1} + \vec{D_1D} = \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB} + \eta \vec{OC} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \eta \vec{w}$.



II. Единственность представления. О/п: существует еще одно представление $\vec{s} = \lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v} + \eta_1 \vec{w}$, и предположим (б.о.о.), что $\lambda \neq \lambda_1$. Тогда из двух представлений можно выразить $\vec{u}$ через два других вектора: $\vec{u} = \frac{\mu_1 - \mu}{\lambda - \lambda_1} \vec{v} + \frac{\eta_1 - \eta}{\lambda - \lambda_1} \vec{w}$. Теперь из теоремы 4.5 следует, что $\square \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, а это противоречит условию, что $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ — базис пространства. ■

Прежде, чем определить размерность прямой, плоскости и пространства, воспользуемся некоторыми понятиями линейной алгебры.

Определение. Линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ называется сумма $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа. Линейная комбинация со всеми нулевыми коэффициентами называется тривиальной.

Определение. Векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ называются линейно зависимыми, если существует такая нетривиальная линейная комбинация этих векторов $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$, которая равна нулевому вектору (т.е. выполняется $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и существует натуральное $i \leq n$, что $\lambda_i \neq 0$). Если векторы не являются линейно зависимыми, они называются линейно независимыми.

Теорема 4.7. 1) векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них выражается через другие.

2) векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда из равенства $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ всегда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) если $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ и некоторое $\lambda_i \neq 0$, то $\vec{v}_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_n)$.

$\Leftarrow$) если $\vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v}_{i-1} + \lambda_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_n$, то

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \vec{v}_{i-1} + (-1) \vec{v}_i + \lambda_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \quad \text{и} \quad \lambda_i = -1 \neq 0.$$

2) $\Rightarrow$) если $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ линейно независимы, то только их тривиальная линейная комбинация дает нулевой вектор, т.е. когда одновременно $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$\Leftarrow$) по условию сразу получаем, что $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ не являются линейно зависимыми. Значит, по определению они будут линейно независимы. ■

Определение. Максимальное число линейно независимых векторов называется размерностью.



Теорема 4.8. *Размерность множества всех векторов прямой равна одному. Размерность V_2 равна двум. Размерность V_3 равна трем.*

Доказательство. Проведем доказательство только для множества V_3 , для оставшихся двух объектов рассуждения аналогичны.

Выберем произвольный базис $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ и покажем, что тройка векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ линейно независима. Предположим противное, т.е. существуют такие λ , μ , $\eta \in \mathbb{R}$, что $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \eta\vec{w} = \vec{0}$ и хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Предположим (б.о.о.), что $\lambda \neq 0$, тогда $\vec{u} = -(\frac{\mu}{\lambda}\vec{v} + \frac{\eta}{\lambda}\vec{w})$, откуда следует, что векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ компланарны. ✕. Следовательно, размерность пространства больше или равна трем.

Докажем, что размерность пространства не больше трех. Рассмотрим произвольную четверку $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z} \in V_3$ и покажем, что она линейно зависима. Если линейно зависима тройка $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, то и вся рассматриваемая четверка будет линейно зависима (достаточно добавить слагаемое $0 \cdot \vec{z}$). Поэтому предположим, что $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ линейно независима, тогда эта тройка является базисом пространства (иначе эти векторы были бы компланарными, а значит, по теореме 4.5 один представлялся бы через два других и нашлась бы нетривиальная линейная комбинация по первому случаю предыдущей теоремы). Если же $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ — базис V_3 , то по теореме 4.6 вектор $\vec{z}$ можно выразить через $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Снова по предыдущей теореме получаем, что четверка $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ является линейно зависимой. ■

Упражнения

1. Проверьте, что отношение порядка, которое введено на прямой с помощью вектора, действительно является отношением линейного порядка (достаточно проверить рефлексивность, антисимметричность, транзитивность и линейность).
2. Приведите пример линейного порядка на прямой, который нельзя задать с помощью вектора.
3. Докажите, что если некоторая подсистема векторов из системы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ линейно зависима, то линейно зависима и вся система $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.
4. Докажите, что если любой вектор пространства представим в виде линейной комбинации векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, то эта тройка векторов является базисом пространства.
5. Докажите, что если $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ является базисом пространства, то тройка векторов $-\vec{u}$, $\vec{v} + \vec{u}$, $\vec{u} - \vec{w}$ также является базисом пространства.
6. Докажите, что любая пара коллинеарных векторов линейно зависима и что аналогичный результат справедлив для любой тройки компланарных векторов.



7. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$. Тогда линейной оболочкой векторов $\vec{u}, \vec{v}$ назовем следующее множество $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, т.е. это все векторы пространства, полученные линейными комбинациями векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Пусть теперь $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}, \vec{z}$ — пары не коллинеарных между собой векторов (т.е. $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ и $\vec{w} \nparallel \vec{z}$). Докажите, что пересечению $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cap \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ принадлежит ненулевой вектор.
8. Известно, что пересечение $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cap \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ состоит только из нулевого вектора. Что можно сказать об одной из пар $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ и $\{\vec{w}, \vec{z}\}$?
9. Известно, что каждое из множеств $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ и $\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ двумерно, а $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cap \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ — одномерно. Докажите, что $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$ содержит базис V_3 . Верен ли аналогичный результат, если $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cap \langle \vec{w}, \vec{z} \rangle$ двумерно?
10. Докажите, что любая подсистема линейно независимых векторов линейно независима.

4.5. Координатная плоскость и координатное пространство

В предыдущем параграфе порядок векторов базиса плоскости или пространства не имел большого значения. Нас интересовала только возможность однозначного представления произвольного вектора $\vec{z}$ по базису $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (случай V_3) в виде $\vec{z} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \eta \vec{w}$. В этом подразделе нас будут интересовать коэффициенты разложения, т.е. упорядоченные тройки (λ, μ, η) чисел. Но прежде договоримся рассматривать *упорядоченные* базисы, т.е. векторы базиса упорядочиваются, и при этом один из них становится первым, другой — вторым и так далее. Упорядоченный базис плоскости обычно обозначают $\vec{e}_1, \vec{e}_2$; а упорядоченный базис пространства — $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Определение. Координатами вектора $\vec{u} \in V_2$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называют такую упорядоченную пару вещественных чисел (λ, μ) , для которой $\vec{u} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$. Аналогично, координатами $\vec{u} \in V_3$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называют упорядоченную тройку $(\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, что выполняется равенство $\vec{u} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 + \eta \vec{e}_3$.

Поскольку представление вектора в данном базисе единственно, то каждому $\vec{u}$ однозначно соответствуют коэффициенты разложения этого вектора по данному базису. Тот факт, что (λ, μ, η) являются координатами $\vec{u}$, обозначается так: $\vec{u} = (\lambda, \mu, \eta)$. Координаты зависят от выбора базиса. Так, например, если $\vec{u} = (\lambda, \mu, \eta)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то в базисе $\frac{1}{2}\vec{e}_1, \frac{1}{2}\vec{e}_2, \frac{1}{2}\vec{e}_3$ вектор $\vec{u}$ будет иметь координаты $(2\lambda, 2\mu, 2\eta)$. В тех редких случаях, когда рассматриваются одновременно несколько базисов, то к координатам



добавляют и указание соответствующего базиса. Так, например,

$$\vec{u} = (\lambda, \mu, \eta) \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = (2\lambda, 2\mu, 2\eta)_{\frac{1}{2}\vec{e}_1, \frac{1}{2}\vec{e}_2, \frac{1}{2}\vec{e}_3}.$$

В следующей теореме доказываются основные свойства координат пространства. Опуская третью координату, можно получить аналогичные результаты и для плоскости.

Теорема 5.1. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства. Пусть также в этом базисе выполняется, что $\vec{u} = (\lambda_1, \mu_1, \eta_1)$ и $\vec{v} = (\lambda_2, \mu_2, \eta_2)$. Тогда справедливы следующие свойства:

- 1) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ одновременно совпадают соответствующие координаты, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2, \eta_1 = \eta_2$;
- 2) $\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \eta_1 + \eta_2)$;
- 3) для любого $k \in \mathbb{R}$ выполняется, что $k\vec{u} = (k\lambda_1, k\mu_1, k\eta_1)$.

Доказательство. 1) $\Leftarrow$) очевидно следует из однозначности умножения вектора на скаляр и корректного определения сложения векторов.

$\Rightarrow$) если $\vec{u} = \vec{v}$, то равенства $\lambda_1 = \lambda_2, \mu_1 = \mu_2, \eta_1 = \eta_2$ следуют из единственности представления вектора по базису.

2) пусть $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3$ и $\vec{v} = \lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \eta_2 \vec{e}_3$, тогда, пользуясь дистрибутивностью относительно скаляров, получаем:

$$\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{e}_1 + (\mu_1 + \mu_2) \vec{e}_2 + (\eta_1 + \eta_2) \vec{e}_3,$$

откуда $\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \eta_1 + \eta_2)$.

3) если $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3$, то используем теперь дистрибутивность относительно векторов: $k\vec{u} = k(\lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3) = k\lambda_1 \vec{e}_1 + k\mu_1 \vec{e}_2 + k\eta_1 \vec{e}_3$, откуда $k\vec{u} = (k\lambda_1, k\mu_1, k\eta_1)$.

■

Важным понятием при определении системы координат является понятие *репера* (от фр. *repère*). Первоначально это слово использовалось в геодезии и обозначало специально выбранную точку, относительно которой определялась высота других точек поверхности. Это необходимо, например, при разбивке инженерных сооружений. В артиллерии репером называют точку, по которой ведется пристрелка орудий с последующим перенесением огня для поражения других целей. В геометрии это слово означает выбор некоторой точки на плоскости (в пространстве) и некоторого базиса этой плоскости (этого пространства).



Определение. Репером в плоскости α называют тройку $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$, где O — произвольно выбранная точка плоскости α , которая называется началом координат, и $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ — базис плоскости α . Репером в пространстве называется четверка $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, где O — точка пространства и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства.

Базисные векторы часто откладывают от точки O , и тройку направленных отрезков $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}, \overrightarrow{OE_3}$ ($\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$) также называют репером в пространстве. Заметим только, что по этой тройке однозначно восстанавливаются и начало координат, и базисные векторы.

Определение. Пусть $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — репер в пространстве. Радиус-вектором произвольной точки $M \in \mathbb{P}_3$ называют вектор $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$. Его координаты в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются координатами точки M относительно репера $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Легко проверить, что координаты точки O (т.е. вектора $\overrightarrow{OO}$) будут равны $(0, 0, 0)$. Координаты (λ, μ, η) произвольной точки M обычно приписывают справа, не отделяя от точки знаком равенства: $M(\lambda, \mu, \eta)$. Так, например, $E_1(1, 0, 0), E_2(0, 1, 0), E_3(0, 0, 1)$. При фиксированном начале координат удобно задавать вектор $\vec{u}$ с помощью направленного отрезка, начало которого совпадает с началом координат — $\overrightarrow{OA}$, где $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$. При этом указывают координаты только конечной точки (точки A) этого направленного отрезка. Координаты этой точки в точности совпадают с координатами вектора в данном базисе (это следует из определения координат точек).

Теорема 5.2. Пусть $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и $O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — два репера в пространстве, отличающиеся только началом координат, тогда справедливы следующие утверждения:

1) координаты любого вектора $\vec{u} \in V_3$ не зависят от выбора начала координат;

2) если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, то координаты $\vec{u}$ относительно репера $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ равны разности соответствующих координат точек B и A относительно этого репера;

3) координаты точек зависят от выбора начала координат, и если известны координаты точек $M(\lambda, \mu, \eta)$ и $O_1(k, l, m)$ в репере $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то в репере $O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ точка M будет иметь координаты $(\lambda - k, \mu - l, \eta - m)$.

Доказательство. 1) пусть $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$. Необходимо показать, что координаты A в репере $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ совпадают с координатами A_1 в



репере $O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Это так, поскольку координаты обеих точек совпадают с коэффициентами разложения $\vec{u}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

2) действительно, если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ (рис. 229), и координаты точки C будут равны разностям соответствующих координат точек B и A (по теореме 5.1).

3) достаточно заметить, что $\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1} = (\lambda - k, \mu - l, \eta - m)$. ■

Определение. Пусть a — прямая, $\vec{v}$ — ее базисный вектор и $\leq$ — порядок на прямой a , введенный с помощью $\vec{v}$. Прямая a , упорядоченная с помощью $\leq$, называется осью. Для репера $O, \vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ прямая OE_i с порядком, введенным с помощью $\vec{e}_i$, называется i -ой координатной осью ($i \in \{1, 2, 3\}$).

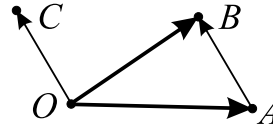


Рис. 229

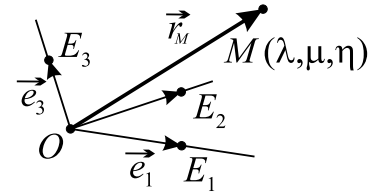


Рис. 230

Системой координат плоскости (пространства) относительно репера $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) называют пару (соответственно тройку) координатных осей: (OE_1) и (OE_2) ($(OE_1), (OE_2)$ и (OE_3)).

Определение. Координатной плоскостью (координатным пространством) с репером $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) называют множество всех упорядоченных пар, первый элемент которых — точка плоскости (пространства), а второй — координаты этой точки относительно этого репера (рис. 230).

Договоримся вместо упорядоченных пар $(M, (\lambda, \mu))$ и $(M, (\lambda, \mu, \eta))$ для записи элементов координатной плоскости или пространства использовать более простые и традиционные обозначения: $M(\lambda, \mu)$ и $M(\lambda, \mu, \eta)$.

Среди многочисленных координатных систем чаще всего используют декартову систему координат, координатные оси которой попарно перпендикулярны.

Определение. Два ненулевых вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются перпендикулярными (или ортогональными), если $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{CD}$ и прямые AB и CD перпендикулярны. Нулевой вектор считается по определению перпендикулярным любому вектору. Перпендикулярные векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ обозначаются так: $\vec{u} \perp \vec{v}$. Базис, в котором все векторы попарно перпендикулярны, называется ортогональным базисом. Базис называется ортонормированным



(сокращение — ОНБ), если он ортогональный и длины всех его векторов равны единице.

Теорема 5.3. *В любой плоскости и в пространстве существуют ортонормированные базисы.*

Доказательство. 1) рассмотрим произвольную плоскость α . Теорема 1.1 из третьей главы гарантирует существование прямой $a \subseteq \alpha$. По следствию из теоремы 1.3 первой главы найдем точку $A \in \alpha$, которая не лежит на прямой a и проведем прямую $b \subseteq \alpha$, для которой $A \in b$ и $b \perp a$ (это можно сделать по теореме 5.1 первой главы). Обозначим через $\{O\} = a \cap b$. Осталось дважды воспользоваться аксиомой об откладывании отрезка (аксиома III.1) и найти такие точки $E_1 \in a$ и $E_2 \in b$, что $[OE_1] = [OE_2] = [A_0B_0]$, где $[A_0B_0]$ — отрезок единичной длины. Тогда $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ — ОНБ плоскости α .

2) выберем плоскость α из предыдущего пункта и точку $D \notin \alpha$ (это можно сделать по аксиоме С4 — см. начало третьей главы). По теореме 3.2 из третьей главы можно найти прямую $d \perp \alpha$, проходящую через точку D . Вспомним, что в плоскости α уже найден ОНБ: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$. Проведем через точку O такую прямую c , что $c \parallel d$. Осталось выбрать точку $E_3 \in c$, для которой $[OE_3] = [A_0B_0]$. Учитывая, что $c \perp \alpha$, получим, что $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$ — ОНБ пространства. ■

Существует стандартное обозначение для ортонормированного базиса — $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Отложенные от некоторой точки O , они образуют ортонормированный репер $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ ($\vec{i} = \overrightarrow{OX}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OY}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OZ}$). Координатные оси⁸ (OX) , (OY) , (OZ) называют соответственно осью абсцисс, ординат и аппликат (лат. *abscissus* — отделенный, *ordinatus* — упорядоченный, *applicata* — прилегающая).

Координаты векторов и точек в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ также обозначаются стандартным образом: (x, y, z) . Так, запись $\vec{u} = (x, y, z)$ означает, что справедливо равенство $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Упражнения

1. Докажите, что в любом базисе пространства выполняется, что $\vec{0} = (0, 0, 0)$.
2. Известно, что $\vec{v}$ имеет координаты $(1, 1)$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Найдите координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 - \vec{e}_1$.

⁸Координатные оси часто обозначают через (Ox) , (Oy) и (Oz) .



3. Докажите, что базис $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{k}$ является ортогональным. Является ли он ортонормированным? Если нет, то с какими коэффициентами необходимо взять векторы этого базиса, чтобы он стал ортонормированным?

4.6. Способы задания прямой и плоскости

Как известно, прямая является неопределяемым понятием в геометрии. Но с помощью некоторого векторного уравнения можно описать все множество радиус-векторов точек этой прямой, т.е. если радиус-вектор точки пространства удовлетворяет этому уравнению, то точка лежит на прямой, иначе она прямой не принадлежит. Для записи векторного уравнения прямой a достаточно зафиксировать некоторую точку O (начало координат), точку M_0 на прямой и некоторый направляющий вектор $\vec{v}$ этой прямой (т.е. $\vec{v} \parallel a$ и $\vec{v} \neq \vec{0}$). Осталось записать условие $M \in a$, выразив $\overrightarrow{OM}$ через фиксированные $\overrightarrow{OM_0}$ и $\vec{v}$.

Теорема 6.1. Пусть $M_0 \in a$, $\vec{v}$ — направляющий вектор прямой a (рис. 231). Тогда $M \in a$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{v}$.

Доказательство. Воспользуемся критерием коллинеарности векторов (теорема 4.2): $M \in a \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{v}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{v}$. ■

Определение. Если $M_0 \in a$ и $\vec{v}$ — направляющий вектор прямой a , то уравнение

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

называют векторным уравнением⁹ прямой a .

Следствие. Пусть $M_0, M_1 \in a$, $M_0 \neq M_1$. Тогда $M \in a$ тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{OM_1}$.

Доказательство. Учитывая $M_0, M_1 \in a$ и $M_0 \neq M_1$, получаем, что $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M_1}$ является базисным вектором прямой a . По предыдущей теореме получим, что $M \in a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{M_0M_1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$, что равносильно $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{OM_1}$. ■

⁹Точнее, первым векторным уравнением прямой.



Уравнение из предыдущего следствия будем называть *вторым векторным уравнением* прямой. Векторные уравнения прямой в пространстве и на плоскости имеют одинаковый вид, поэтому не было специальных ограничений. Отличие их состоит только в том, что точки и векторы в одном случае рассматриваются в пространстве, в другом — на плоскости.

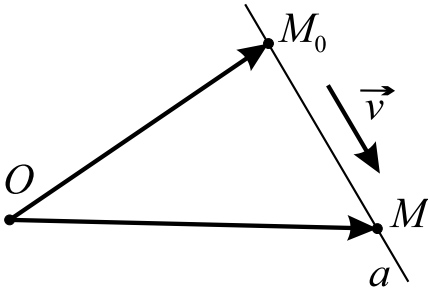


Рис. 231

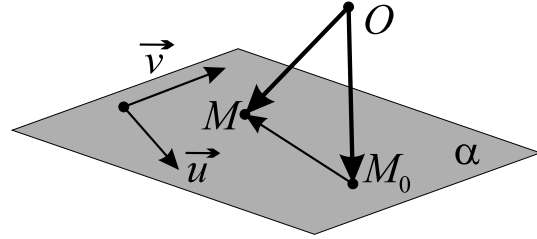


Рис. 232

Перед выводом векторного уравнения плоскости сделаем одно замечание. Раньше в качестве базиса плоскости рассматривалась пара ненулевых неколлинеарных векторов этой плоскости. Теперь, когда плоскость будет рассматриваться как подмножество пространства, ее базисом будет называться пара ненулевых, неколлинеарных векторов, параллельных этой плоскости. Результат теоремы 4.4 сохраняет силу, а именно: вектор параллелен данной плоскости тогда и только тогда, когда он представим (причем, однозначно) в виде линейной комбинации базисных векторов этой плоскости.

Теорема 6.2. Пусть $M_0 \in \alpha$ и $\vec{u}, \vec{v}$ — базис плоскости α (рис. 232). Пусть также O — некоторая точка пространства. Тогда $M \in \alpha$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}.$$

Доказательство. Воспользуемся критерием компланарности векторов (теорема 4.5): $M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \alpha \Leftrightarrow$ существуют такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. ■

Определение. Пусть $M_0 \in \alpha$ и $\vec{u}, \vec{v}$ — базис этой плоскости, тогда уравнение

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

называется *векторным уравнением этой плоскости*.



Заметим, что в векторном уравнении прямой присутствует одна произвольная постоянная — λ , в то время как в векторном уравнении плоскости их две — λ и μ . Это в точности соответствует размерности прямой и размерности плоскости.

Хорошо известно, что уравнение $y = kx + b$ описывает множество точек декартовой плоскости, принадлежащих некоторой прямой. Покажем, что похожий вид координатное уравнение прямой имеет в произвольном (не обязательно ортонормированном) базисе плоскости α . Зафиксируем некоторый репер плоскости $\alpha: O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$. Координаты точек в этом репере мы будем обозначать, используя латинские буквы x и y (хотя базис выбран произвольно). Это сделано для того, чтобы получить традиционный вид координатного уравнения прямой.

Теорема 6.3. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in a \subseteq \alpha$ и $\vec{v} = (l, m) \in \mathbb{R}^2$ — направляющий вектор прямой a . Тогда

$$M(x, y) \in a \Leftrightarrow \text{существует такое } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ что } \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m. \end{cases}$$

Доказательство. Используя векторное уравнение прямой, получаем, что $M \in a \Leftrightarrow$ существует такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{v} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(l, m) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m. \end{cases}$$

■

Определение. Если $M_0(x_0, y_0) \in a$ и $\vec{v} = (l, m) \in \mathbb{R}^2$ — направляющий вектор прямой a , то система

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m, \end{cases}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, называется параметрическим заданием прямой на плоскости.

Следствие. Следующие два утверждения формулируем в условиях предыдущей теоремы.

1) если $l \neq 0$, то существует такая пара чисел $k, b \in \mathbb{R}$, для которой $M(x, y) \in a \Leftrightarrow y = kx + b$.

2) если $l = 0$, то $M(x, y) \in a \Leftrightarrow x = x_0$ для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1) если $l \neq 0$, то выразим λ из первого уравнения системы, которая параметрически задает прямую $a: \lambda = \frac{x-x_0}{l}$. Подставим



λ во второе уравнение и получим, что

$$y = y_0 + \frac{mx}{l} - \frac{mx_0}{l} = \frac{m}{l}x + \left(y_0 - \frac{mx_0}{l}\right) = kx + b,$$

где $k = m/l$ и $b = y_0 - \frac{mx_0}{l}$.

2) подставив $l = 0$ в первое уравнение системы, которая параметрически задает прямую, получим, что $x = x_0$, а y — любое число. Следовательно, второе утверждение следствия также выполняется. ■

Определение. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in a$ и $\vec{v} = (l, m)$ — направляющий вектор прямой a . Если $l \neq 0$, то координатным уравнением прямой называется уравнение $y = kx + b$, где $k = m/l$ и $b = y_0 - \frac{mx_0}{l}$; если $l = 0$, то координатное уравнение прямой — это уравнение $x = x_0$.

Переходим к случаю, когда прямая рассматривается как подмножество пространства.

Теорема 6.4. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in a$ и $\vec{v} = (l, m, n)$ — направляющий вектор прямой. Тогда

$$M(x, y, z) \in a \Leftrightarrow \text{существует такое } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ что } \begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m, \\ z = z_0 + \lambda \cdot n. \end{cases}$$

Доказательство. Используя векторное уравнение прямой в пространстве $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \lambda \vec{v}$ и переписывая его в координатной форме, получаем систему трех линейных уравнений. ■

Определение. Если $M_0(x_0, y_0, z_0) \in a$ и $\vec{v} = (l, m, n)$ — направляющий вектор прямой a , то система

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m, \\ z = z_0 + \lambda \cdot n \end{cases}$$

называется параметрическим заданием прямой в пространстве.

Следствие. Если $l, m, n \neq 0$, то в условиях предыдущей теоремы

$$M(x, y, z) \in a \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Доказательство. Достаточно выразить λ из каждого уравнения и приравнять полученные величины. ■



Определение. Система уравнений

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

называется каноническим заданием прямой с направляющим вектором $\vec{v} = (l, m, n)$ (со всеми ненулевыми координатами) и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Заметим, что прямая в пространстве описывается с помощью системы из двух линейных уравнений: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$ и $\frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$. Это не случайно, поскольку линейное уравнение в пространстве определяет множество всех точек некоторой плоскости. Рассматривая такую систему из двух линейных уравнений, мы рассматриваем тем самым пересечение двух различных (непараллельных) плоскостей, которое как раз и является прямой.

Заключительную часть этого параграфа посвятим выводу координатного уравнения плоскости.

Определение. Непустое подмножество Φ пространства называется линейным, если вместе с каждыми двумя своими различными точками Φ содержит проходящую через них прямую (т.е. $\forall A, B \in \Phi, A \neq B \Rightarrow (AB) \subseteq \Phi$).

Следующая теорема описывает все линейные множества пространства.

Теорема 6.5. Других линейных множеств, кроме точки, прямой, плоскости и всего пространства, не существует.

Доказательство. Легко проверить, что каждое из четырех перечисленных в теореме множеств является линейным.

Предположим теперь, что существует отличное от них линейное множество Φ . Так как $\Phi \neq \emptyset$ и Φ не является точкой, то существуют различные $A, B \in \Phi$, поэтому $(AB) \subseteq \Phi$. По предположению $\Phi \neq (AB)$, что позволяет найти точку $C \in \Phi \setminus (AB)$. Обозначим через α плоскость ABC и покажем, что $\alpha \subseteq \Phi$. Действительно, если $D \in \alpha$ и $(DC) \nparallel (AB)$, то $D \in (CX)$, где $\{X\} = (DC) \cap (AB)$. Следовательно, $D \in (CX) \subseteq \Phi$. Если же $(CD) \parallel (AB)$, то на отрезке $[AC]$ можно выбрать точку $C_1 \notin \{A, C\}$ и повторить те же рассуждения для точек A, B, C_1 и D . Итак, $\alpha \subseteq \Phi$. Поскольку $\Phi \neq \alpha$, то существует $E \in \Phi \setminus \alpha$. Рассмотрим теперь произвольную точку F пространства и докажем, что $F \in \Phi$. Если $(EF) \nparallel \alpha$, то $F \in (EX)$, где $\{X\} = (FE) \cap \alpha$. Следовательно, $F \in (EX) \subseteq \Phi$. Пусть теперь $(FE) \parallel \alpha$. Снова, выбрав из множества $[AE] \setminus \{A, E\}$ точку E_1 , получим $(E_1F) \nparallel \alpha$, $E_1 \in \Phi$, поэтому и $F \in \Phi$. Таким образом, Φ совпадает



со всем пространством. Противоречие. ■

Теорема 6.6. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}$ одновременно не равны нулю, $D \in \mathbb{R}$. Тогда множество Φ всех точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, является плоскостью.

Доказательство. Установим сначала, что множество Φ линейно. Чуть позже проверим непустоту Φ , а сейчас выберем произвольные различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Phi$. Докажем, что $(M_0, M_1) \subseteq \Phi$. Для произвольной точки $M \in (M_0, M_1)$ по второму векторному уравнению прямой найдется такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OM_0} + \lambda\overrightarrow{OM_1}$, т.е. M имеет координаты $((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1, (1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1, (1 - \lambda)z_0 + \lambda z_1)$. Подставляя координаты M в уравнение, получаем

$$\begin{aligned} & A((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) + B((1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1) + C((1 - \lambda)z_0 + \lambda z_1) + D = \\ & = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - \lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0) + \lambda(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = \\ & = 0 - \lambda(-D) + \lambda(-D) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $M \in \Phi$.

Далее без ограничения общности будем предполагать, что $A \neq 0$. Легко проверить, что точки $L_1(-\frac{D}{A}, 0, 0)$, $L_2(-\frac{D+B}{A}, 1, 0)$ и $L_3(-\frac{D+C}{A}, 0, 1)$ принадлежат Φ и $L_3 \notin (L_1L_2)$ (записав параметрическое задание прямой (L_1L_2) , убеждаемся, что все точки этой прямой имеют нулевую третью координату). Кроме того, $M(-\frac{D+1}{A}, 0, 0) \notin \Phi$. Из теоремы 6.5 получаем, что Φ — плоскость. ■

Каждая ли плоскость в пространстве описывается линейным уравнением? Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 6.7. Для любой плоскости α найдется такая четверка чисел $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), что

$$M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$$

Доказательство. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и $\vec{u} = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{v} = (l_2, m_2, n_2)$ — базис α . Тогда по теореме 6.2 точка $M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Расписывая последнее векторное равенство по координатам, получаем, что

$$M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda l_1 + \mu l_2, \\ y = y_0 + \lambda m_1 + \mu m_2, \\ z = z_0 + \lambda n_1 + \mu n_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = \lambda l_1 + \mu l_2, \\ y - y_0 = \lambda m_1 + \mu m_2, \\ z - z_0 = \lambda n_1 + \mu n_2. \end{cases} \quad (*)$$

Рассмотрим векторы $\vec{s}_1 = (l_1, l_2, 0)$, $\vec{s}_2 = (m_1, m_2, 0)$, $\vec{s}_3 = (n_1, n_2, 0)$. Эти векторы компланарны, поскольку, имея нулевую третью координату, они параллельны плоскости OE_1E_2 . Из критерия компланарности векторов (теорема 4.5) найдем такие три числа $A, B, C \in \mathbb{R}$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), что $A\vec{s}_1 + B\vec{s}_2 + C\vec{s}_3 = \vec{0}$ (действительно, если $\vec{s}_1 = p\vec{s}_2 + q\vec{s}_3$, то $A = 1 \neq 0$, $B = -p$, $C = -q$), что эквивалентно (расписывая это векторное равенство по координатам) системе

$$\begin{cases} A \cdot l_1 + B \cdot m_1 + C \cdot n_1 = 0, \\ A \cdot l_2 + B \cdot m_2 + C \cdot n_2 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Поэтому для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ получаем

$$\lambda(A \cdot l_1 + B \cdot m_1 + C \cdot n_1) + \mu(A \cdot l_2 + B \cdot m_2 + C \cdot n_2) = 0,$$

что после перегруппировки и использования системы $(*)$, дает

$$A(\lambda l_1 + \mu l_2) + B(\lambda m_1 + \mu m_2) + C(\lambda n_1 + \mu n_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Итак, координаты любой точки плоскости α удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. По теореме 6.6 уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задает некоторую плоскость α_1 . Так как $\alpha \subseteq \alpha_1$, то $\alpha = \alpha_1$. ■

Определение. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется координатным уравнением плоскости α , если для любой точки M пространства выполняется: $M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0$.

Итак, в произвольной системе координат любой плоскости можно поставить в соответствие ее координатное уравнение, т.е. линейное уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), которому удовлетворяют только координаты точек этой плоскости, и, наоборот, каждое линейное уравнение, чьи коэффициенты при неизвестных одновременно не обращаются в ноль, описывает в пространстве некоторую плоскость. Уравнение



$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ при $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ также называют координатным уравнением плоскости α , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Упражнения

1. Докажите, что если $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ — репер плоскости, то для любых $k, b \in \mathbb{R}$ множество $\{M(x, y) : y = kx + b\}$ является прямой.
2. Могут ли в параметрическом задании прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot l, \\ y = y_0 + \lambda \cdot m \end{cases}$$

числа l и m одновременно равняться нулю?

3. Запишите векторное уравнение, параметрическое и каноническое задания прямой, проходящей через начало координат и через точку $(1, 1, 1)$.
4. Запишите в координатах условие $M \in \alpha$, если α — плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющая своим базисом $\vec{u} = (l_1, m_1, n_1), \vec{v} = (l_2, m_2, n_2)$.
5. Плоскости (OE_1E_2) , (OE_1E_3) и (OE_2E_3) называются координатными плоскостями. Запишите координатные уравнения этих плоскостей.

4.7. Деление отрезка. Центр масс

Случаи использования векторов в решении задач многочисленны. В этом параграфе разбираются две наиболее известные задачи — о делении отрезка в данном отношении и о геометрическом определении центра масс конечной системы точек. Также будут рассмотрены несколько задач, при решении которых используется единственность представления вектора по базису.

Начнем с простого векторного описания всех точек некоторого отрезка. Все факты этого параграфа справедливы и для плоскости, и для пространства, поэтому в утверждениях нет специальных ограничений.

Лемма 7.1. Точка $C \in [AB]$ тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda \in [0; 1]$, что $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если $C \in [AB]$, то $\vec{AC} \parallel \vec{AB}$ и $\frac{|AC|}{|AB|} \leq 1$. Пусть $\lambda = \frac{|AC|}{|AB|}$. Тогда векторы $\vec{AC}$ и $\lambda \vec{AB}$ сонаправлены, так как $\lambda \geq 0$, и равны по длине. Следовательно, $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$.



$\Leftarrow$) из $\lambda \geq 0$ и $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ следует, что $[AC] \uparrow\uparrow [AB]$. Поэтому справедливо $C \in [AB]$. Так как $\lambda \leq 1$, то $\frac{|AC|}{|AB|} \leq 1 \Rightarrow |AC| \leq |AB| \Rightarrow C \in [AB]$ (по свойству (9) теоремы 6.1 из первой главы).

■

Заметим, что легко определить геометрический смысл коэффициента λ из предыдущей теоремы. Если $C \in [AB]$, то $\lambda = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Теорема 7.2. Пусть O, A, B, C — произвольные точки. Точка $C \in [AB]$ тогда и только тогда, когда найдется такое число $\lambda \in [0; 1]$, что $\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ (рис. 233).

Доказательство. По лемме $C \in [AB] \Leftrightarrow$ существует $\lambda \in [0; 1]$, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.

■

Заметим, что число λ не зависит от выбора точки O и равно $|AC|/|AB|$.

Следствие 1. Точка $C \in [AB]$ тогда и только тогда, когда найдутся такие два числа $x, y \in [0; 1]$ и $x + y = 1$, что $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ (где точка O выбирается произвольно).

Доказательство. Обозначив y через λ , получим $x = 1 - \lambda$, где $\lambda \in [0; 1]$. Тогда уравнение можно переписать в виде $\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, что по предыдущей теореме равносильно $C \in [AB]$.

■

Следствие 2. Если $C \in [AB]$ и $|AC| : |CB| = k : n$, где $k, n \in \mathbb{R}$ и $k, n > 0$, то $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{n+k}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{n+k}\overrightarrow{OB}$. Справедливо и обратное: если $\overrightarrow{OC}$ выражается таким образом, то $C \in [AB]$ и $|AC| : |CB| = k : n$.

Доказательство. Из условий $C \in [AB]$ и $|AC| : |CB| = k : n$ следует, что $\lambda = |AC| : |AB| = k : (n + k)$, поэтому достаточно воспользоваться замечанием к лемме и предыдущей теоремой.

■

Следствие 3. Точка C является серединой $[AB]$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Доказательство. В предыдущем следствии достаточно взять $k = 1$ и $n = 1$.

■

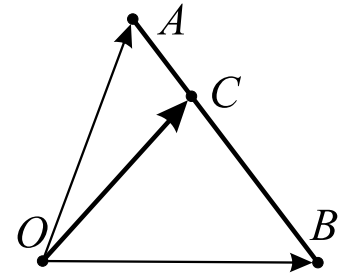


Рис. 233



Из предыдущей теоремы также можно получить критерий, принадлежит ли некоторая точка M треугольнику ABC или нет.

Следствие 4. Точка $M \in \triangle ABC$ тогда и только тогда, когда найдутся $x, y, z \in [0; 1]$, что $x + y + z = 1$ и $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

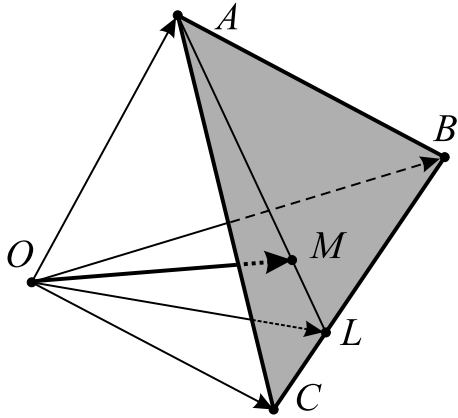


Рис. 234

Доказательство. Точка $M \in \triangle ABC$ тогда и только тогда, когда существует такая точка $L \in [BC]$ (рис. 234), что $M \in [AL]$. По предыдущей теореме это равносильно существованию такого числа $\lambda \in [0; 1]$, что $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OL}$. Снова используя предыдущую теорему, переписываем условие $L \in [BC]$ в виде векторного равенства $\overrightarrow{OL} = (1 - \mu)\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$ для некоторого числа $\mu \in [0; 1]$. Подставляя это выражение в уравнение для $\overrightarrow{OM}$, получим что $M \in \triangle ABC$ тогда и только тогда, когда выполняется

$$\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda((1 - \mu)\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda(1 - \mu)\overrightarrow{OB} + \lambda\mu\overrightarrow{OC}$$

для некоторых $\lambda, \mu \in [0; 1]$. Обозначив через $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda(1 - \mu)$, $z = \lambda\mu$ и убедившись в том, что $x, y, z \in [0; 1]$ и $x + y + z = 1$, получаем $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$. ■

Рассмотрим два примера использования только что полученных результатов.

Пример 1. Пусть AM — медиана $\triangle ABC$, точка N выбрана так, что $N \in [AC]$ и $|AN| : |NC| = 1 : 2$. В каком отношении отрезки $[BN]$, $[AM]$ делят друг друга точкой пересечения?

Решение. Обозначим через O точку пересечения $[BN]$ и $[AM]$ (рис. 235). Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Пара $\vec{u}, \vec{v}$ является базисом плоскости ABC . Запишем теперь с помощью векторов два условия: $O \in [AM]$ и $O \in [BN]$.

1. $O \in [AM] \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AM} = \lambda(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}) = \frac{\lambda}{2}\vec{u} + \frac{\lambda}{2}\vec{v}$ для некоторого $\lambda \in [0; 1]$, причем $\lambda = |AO|/|AM|$.

2. $O \in [BN] \Leftrightarrow$ существует $\mu \in [0; 1]$, что $\overrightarrow{AO} = (1 - \mu)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AN} = (1 - \mu)\vec{u} + \mu \cdot \frac{1}{3}\vec{v} = (1 - \mu)\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{v}$, причем $\mu = |BO|/|BN|$.



Итак, получены два представления одного вектора $\overrightarrow{AO}$ по базису $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\overrightarrow{AO} = \frac{\lambda}{2}\vec{u} + \frac{\lambda}{2}\vec{v} = (1 - \mu)\vec{u} + \frac{\mu}{3}\vec{v}$. Это возможно только в случае, когда коэффициенты при соответствующих векторах совпадают, т.е.

$$\begin{cases} \lambda/2 = 1 - \mu, \\ \lambda/2 = \mu/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda/2 = 1 - \mu, \\ \mu/3 = 1 - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/2, \\ \mu = 3/4. \end{cases}$$

Так как $|AO|/|AM| = \lambda = 1/2$, точка O — середина $[AM]$. Следовательно, искомое отношение $1 : 1$. Поскольку $|BO|/|BN| = \mu = 3/4$, точка O делит $[BN]$ в отношении $3 : 1$, начиная от вершины B .

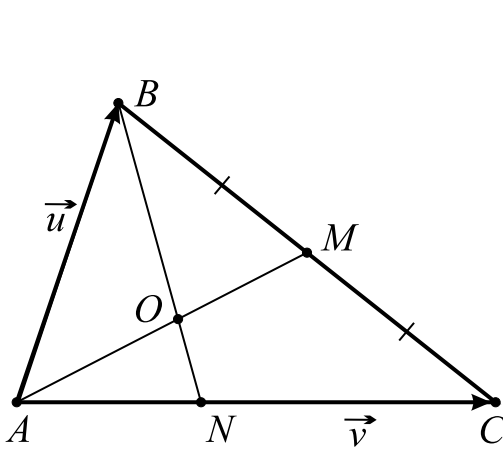


Рис. 235

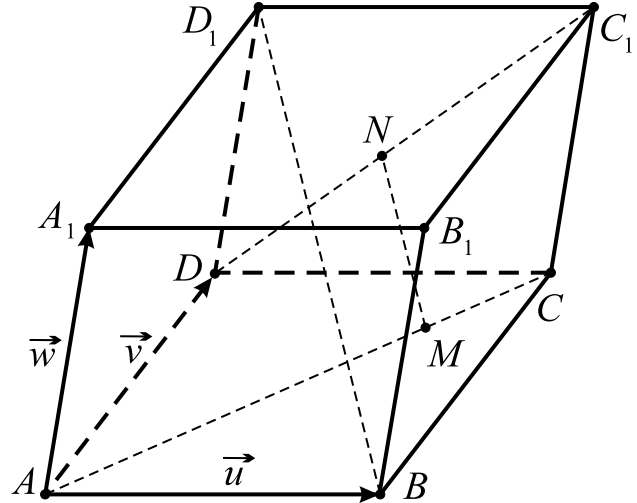


Рис. 236

Пример 2. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 236). На диагоналях $[AC]$ и $[DC_1]$ его граней выбраны соответственно точки M и N так, что $(MN) \parallel (BD_1)$. Чему равно отношение $|MN| : |BD_1|$?

Решение. Снова выберем базис, но теперь в пространстве: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AA_1}$. Представим условия задачи в виде векторных уравнений.

1. $(MN) \parallel (BD_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{BD_1} = \lambda(\vec{v} + \vec{w} - \vec{u}) = -\lambda\vec{u} + \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $M \in [AC] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AC} = \mu(\vec{u} + \vec{v})$, причем $\mu = \frac{|AM|}{|AC|} \in [0; 1]$.

3. $N \in [DC_1] \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1 - \eta)\overrightarrow{AD} + \eta\overrightarrow{AC_1} = (1 - \eta)\vec{v} + \eta(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \eta\vec{u} + \vec{v} + \eta\vec{w}$, причем $\eta = |DN|/|DC_1| \in [0; 1]$.

Из (2) и (3) по правилу КоМиНа получаем следующее векторное равенство $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\eta - \mu)\vec{u} + (1 - \mu)\vec{v} + \eta\vec{w}$.

Последнее равенство и (1) и дают два представления вектора $\overrightarrow{MN}$ по базису $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем



систему трех линейных уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda = \eta - \mu, \\ \lambda = 1 - \mu, \\ \lambda = \eta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \eta, \\ \eta = 1 - \mu, \\ -\eta = \eta - \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1/3, \\ \mu = 2/3, \\ \eta = 1/3. \end{cases}$$

Подставляя $\lambda = 1/3$ в равенство $\overrightarrow{MN} = \lambda \overrightarrow{BD_1}$, получаем, что искомое отношение равно $|MN| : |BD_1| = 1 : 3$. Одновременно получена дополнительная информация о точках M и N : $|AM| : |MC| = 2 : 1$ и $|DN| : |NC_1| = 1 : 2$.

Следующее утверждение является ключевым в определении центра масс конечного множества точек $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Лемма 7.3. Для произвольных точек $X, Y, A_1, A_2, \dots, A_n$ пусть $\frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n}) = \overrightarrow{XM_1}$ и $\frac{1}{n}(\overrightarrow{YA_1} + \overrightarrow{YA_2} + \dots + \overrightarrow{YA_n}) = \overrightarrow{YM_2}$. Тогда точки M_1 и M_2 совпадают.

Доказательство. Рассмотрим разность (рис. 237) векторов $\overrightarrow{YM_2} - \overrightarrow{XM_1} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{YA_1} - \overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{YA_2} - \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{YA_n} - \overrightarrow{XA_n}) = \frac{1}{n}(n\overrightarrow{YX}) = \overrightarrow{YX}$. Отсюда $\overrightarrow{YM_2} - \overrightarrow{XM_1} = \overrightarrow{YX}$ или $\overrightarrow{YM_2} = \overrightarrow{XM_1} + \overrightarrow{YX}$, что дает $M_1 = M_2$. ■

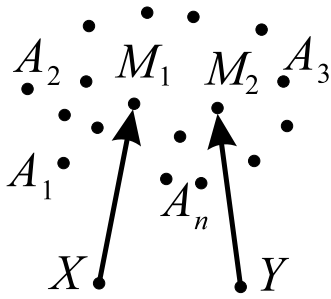


Рис. 237

Таким образом, при изменении точки X конец направленного отрезка $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{XA_i}$ всегда один и тот же, т.е. он не зависит от выбора точки X .

Определение. Центром масс системы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется конечная точка направленного отрезка $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{XA_i}$, где X — произвольно выбранная точка.

Предыдущую лемму можно считать утверждением о существовании и единственности центра масс. Следующий критерий представляет собой полезную характеристику центра масс.

Теорема 7.4. Точка M является центром масс $A_1, A_2, \dots, A_n$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть M — центр масс $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тогда для любой точки X выполняется, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{XA_i}$. Подставляя вместо



Х саму точку M , получаем, что $\overrightarrow{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i}$ или $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow$) пусть дана точка M такая, что $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{0}$. Обозначим через M_1 центр масс $A_1, A_2, \dots, A_n$. Как уже доказано, $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_1A_i} = \overrightarrow{0}$. Рассмотрим разность $\overrightarrow{0} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_1A_i} - \sum_{i=1}^n \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{M_1A_i} - \overrightarrow{MA_i}) = \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{M_1A_i} + \overrightarrow{A_iM}) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{M_1M} = n\overrightarrow{M_1M}$, отсюда $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{0}$. Следовательно, $M = M_1$.

Легко определить центр масс системы, состоящей только из двух точек A и B — центром масс будет середина отрезка AB . Для треугольника ABC также можно доказать, что точка пересечения его медиан, точка M , удовлетворяет свойству $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, поэтому M является центром масс системы трех точек: A, B, C . В общем случае для определения центра масс можно воспользоваться следующим результатом, по которому система разбивается на меньшие подсистемы и по их центрам масс определяется центр масс всей системы.

Теорема 7.5. Пусть M_1 — центр масс $A_1, A_2, \dots, A_n$, а M_2 — центр масс $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+k}$ и $\{A_1, \dots, A_n\} \cap \{A_{n+1}, \dots, A_{n+k}\} = \emptyset$. Тогда центр масс M всей системы $A_1, A_2, \dots, A_{n+k}$ определяется из следующих условий: $M \in [M_1M_2]$ и $|M_1M| : |MM_2| = k : n$.

Доказательство. Пусть X — произвольно выбранная точка (рис. 238). Так как M_1 — центр масс системы точек $A_1, A_2, \dots, A_n$, то $\overrightarrow{XM_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{XA_i}$. Для точки M_2 получаем: $\overrightarrow{XM_2} = \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} \overrightarrow{XA_i}$. Если M — центр масс всей системы точек, то $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n+k} \overrightarrow{XA_i}$. Выразим вектор $\overrightarrow{XM}$ через векторы $\overrightarrow{XM_1}$ и $\overrightarrow{XM_2}$:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{n+k} \sum_{i=1}^{n+k} \overrightarrow{XA_i} = \frac{1}{n+k} \left(n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \overrightarrow{XA_i} + k \cdot \frac{1}{k} \sum_{i=n+1}^{n+k} \overrightarrow{XA_i} \right) =$$

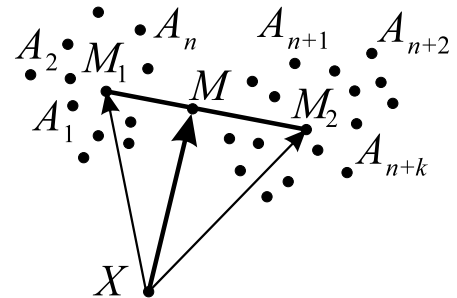


Рис. 238



$$= \frac{n}{n+k} \overrightarrow{XM_1} + \frac{k}{n+k} \overrightarrow{XM_2}.$$

Используя второе следствие из теоремы 7.2, получаем, что $M \in [M_1M_2]$ и $|M_1M| : |MM_2| = k : n$.

■

Следствие 1. Если M_1 — центр масс $A_1, A_2, \dots, A_n$ и M_2 — центр масс $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+n}$, то центром масс системы $A_1, \dots, A_{2n}$ является середина отрезка M_1M_2 .

Доказательство. Сразу следует из предыдущей теоремы, так как $k = n$.

■

Следствие 2. Если M_1 — центр масс $A_1, A_2, \dots, A_n$, то точка M , центр масс системы $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$, находится из следующих условий: $M \in [M_1A_{n+1}]$ и $|M_1M| : |MA_{n+1}| = 1 : n$.

Доказательство. Сразу следует из предыдущей теоремы.

■

Следствие 3. Центром масс треугольника ABC является точка M — точка пересечения его медиан.

Доказательство. Центром масс системы $\{A, B\}$ является точка C_1 — середина отрезка $[AB]$ (первое следствие, $n = 1$). Тогда по второму следствию $M \in [CC_1]$ и $|C_1M| : |MC| = 1 : 2$. Этим свойством обладает единственная точка на медиане $[CC_1]$ — точка пересечения медиан.

■

Используя последнюю теорему и следствия из нее, можно определять центр масс, разными способами разбивая исходную систему. Это используется в следующем примере. Но прежде следует уточнить, что под *средней линией четырехугольника* понимают отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон.

Пример 3. Точка пересечения средних линий произвольного четырехугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей этого четырехугольника (рис. 239).

Решение. Благодаря первому следствию мы получаем, что середина средней линии является центром масс этого четырехугольника. Поэтому эта точка является серединой и другой его средней линии. Кроме того, центр масс должен делить пополам отрезок, соединяющий середины отрезков $[AC]$ и $[BD]$, так как систему $\{A, B, C, D\}$ можно разбить на две системы $\{A, C\}$



и $\{B, D\}$, определить их центры масс (это середины диагоналей) и затем взять середину отрезка с вершинами в этих центрах масс.

Упражнения

1. Докажите, что если $\overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, то $C \in (AB)$ и $|AC| : |AB| = |\lambda|$.

2. Какому ограничению должно удовлетворять число λ , чтобы выполнялось следующее утверждение: $C \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$?

3. Решите задачу первого примера этого параграфа, сделав дополнительные построения и используя подобие получившихся треугольников.

4. Решите задачу первого примера в общем случае, т.е. когда $M \in [BC]$, $N \in [AC]$, $|BM| : |MC| = m : n$ и $|AN| : |NC| = k : l$ ($m, n, k, l > 0$).

5. Определите где находится центр масс произвольного правильного многоугольника.

6. Всегда ли центр масс четырехугольника ему принадлежит?

7. С помощью циркуля и линейки найдите центр масс произвольного пятиугольника.

8. Докажите, что в последнем примере этого параграфа отрезок, соединяющий точку пересечения медиан $\triangle ABC$ и точку D , проходит через точку пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$. В каком отношении он делится этой точкой?

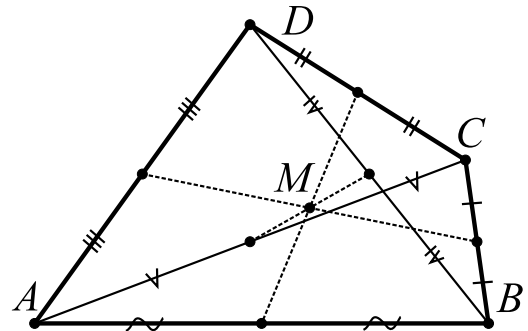


Рис. 239

Глава 5

Скалярное произведение векторов

С каждым вектором в предыдущей главе была уже связана одна числовая характеристика — длина вектора. Однако, зная только длины двух векторов, невозможно определить, как эти векторы расположены друг относительно друга на плоскости или в пространстве. Скалярное произведение (определенное в первом параграфе) не только ставит в соответствие каждой паре векторов некоторое число, но и позволяет по этому числу заключить, когда два вектора перпендикулярны. Это и другие свойства скалярного произведения (доказанные также в первом параграфе) используются при изучении множества нормалей к данной плоскости в параграфе 3.

Во втором параграфе доказывается простая формула вычисления скалярного произведения векторов, если известны их координаты в ортонормированном базисе. Эта формула настолько часто используется начиная с четвертого параграфа этой главы, что практически все полученные результаты будут справедливы только в декартовой системе координат. В конце предыдущей главы каждой плоскости в произвольной системе координат было поставлено в соответствие ее координатное уравнение — некоторое линейное уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$. В декартовой системе координат появляется возможность указать точный геометрический смысл коэффициентов A , B и C , стоящих при неизвестных в этом уравнении. Так, в четвертом параграфе будет установлено, что вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является нормалью к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Несколько параграфов (4, 6, 7) посвящены нахождению расстояний между геометрическими фигурами: точкой и плоскостью, точкой и прямой, между двумя скрещивающимися прямыми. В параграфе 7 вводится понятие двугранного угла и указывается способ нахождения величины угла между плоскостями, между прямой и плоскостью.

Вывод координатных формул некоторых движений плоскости занимает



большую часть восьмого параграфа. Здесь же указывается способ получения координатных формул произвольного движения плоскости. В следующем параграфе (10) мы отходим от декартовой системы координат и выводим формулу вычисления скалярного произведения векторов в произвольном базисе с заданной таблицей умножения. В заключительном параграфе определяется понятие модели геометрии и приводится таблица соответствий между геометрическими объектами и подмножествами модели.

5.1. Скалярное произведение и его свойства

В этом параграфе рассматривается случай пространства. Без существенных изменений все определения и доказательства утверждений переносятся и на плоский случай. Прежде чем дать определение скалярного произведения, введем понятие угла между векторами.

Определение. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$, и $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, кроме того, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Тогда углом между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ (обозначается $\angle \vec{u}, \vec{v}$) называется наименьший из двух углов, образованных лучами $[OA)$ и $[OB)$ (рис. 240). Если векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ противоположно направлены, то углом между ними называется любой из развернутых углов. Нулевой вектор по определению считается перпендикулярным любому вектору.

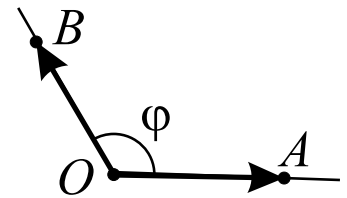


Рис. 240

Величину угла между векторами обозначают $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Легко заметить, что величина угла не зависит от выбора точки O , от которой откладываются векторы. Так, отложив векторы от любой другой точки O_1 , получаем угол $\angle A_1 O_1 B_1$, стороны которого сонаправлены соответствующим сторонам угла $\angle AOB$, поэтому $\angle A_1 O_1 B_1 = \angle AOB$. Поскольку для нахождения $\angle \vec{u}, \vec{v}$ необходимо выбирать минимальный угол, то всегда выполняются такие соотношения: $\angle \vec{u}, \vec{v} = \angle \vec{v}, \vec{u}$ и $0^\circ \leq \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \leq 180^\circ$.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ называется число (обозначается $\vec{u} \cdot \vec{v}$ или $(\vec{u}, \vec{v})$), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$.

Несмотря на то, что скалярное произведение является числом, оно характеризует важное геометрическое свойство — перпендикулярность двух векторов.



Теорема 1.1. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Доказательство. Если $\vec{u} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$, то доказательство очевидно. Далее считаем, что эти векторы ненулевые. В этом случае

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0 \Leftrightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

В предпоследнем переходе мы использовали простой факт: в промежутке $[0^\circ; 180^\circ]$ существует единственный угол с нулевым косинусом. ■

В изучении скалярного произведения нам помогут свойства проекции одного вектора на другой.

Определение. Проекцией вектора $\vec{v}$ на ненулевой вектор $\vec{u}$ называют произведение $|\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$. Обозначают проекцию так: $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$.

Заметим, что знак проекции ненулевого вектора $\vec{v}$ на ненулевой вектор $\vec{u}$ совпадает со знаком $\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ и поэтому он положителен в случае, если $0^\circ \leq \widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 90^\circ$, и отрицателен при $90^\circ < \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \leq 180^\circ$.

Каков геометрический смысл проекции одного вектора на другой? Оказывается, можно установить связь между $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$ и проекцией точек на некоторую прямую. Если $B \notin a$, то в плоскости $\alpha = (a, B)$ найдется (по теореме 5.1 из первой главы) единственная прямая b , для которой $B \in b$ и $b \perp a$. Точка B' , для которой $\{B'\} = b \cap a$, называется *проекцией* (или *ортогональной проекцией*) точки B на прямую a (обозначение: $\text{Пр}_a(B)$). Если $B \in a$, то по определению считаем $\text{Пр}_a(B) = B$.

Лемма 1.2. Пусть $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Пусть также $a = (AB)$, $C' = \text{Пр}_a(C)$, $D' = \text{Пр}_a(D)$, $\leq$ — порядок на прямой a , порожденный $\vec{u}$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) = |C'D'| \Leftrightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \leq 90^\circ \Leftrightarrow C' \leq D'$.
- 2) $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) = -|C'D'| \Leftrightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \geq 90^\circ \Leftrightarrow D' \leq C'$.

Доказательство. При $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v} \perp \vec{u}$ или $\vec{v} \parallel \vec{u}$ утверждения (1) и (2) очевидно выполняются. Далее рассмотрим все остальные случаи.

Отложим векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ от точки C' : $\overrightarrow{C'K} = \vec{u}$, $\overrightarrow{C'E} = \vec{v}$ (рис. 241а и 242а). Плоскость (a, E) обозначим через α , в этой плоскости проведем через точку C' прямую $b \perp a$ и выберем на этой прямой точку L так, чтобы L и E лежали по одну сторону от a (рис. 241б и 242б). При $C \neq C'$ из $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'E}$ следует, что $CDEC'$ — параллелограмм и $(DE) \parallel (CC') \perp a$.



Из условия $(DE), (DD') \perp a$ и теоремы 3.1 третьей главы следует, что $a \perp (DED')$, откуда $(ED') \perp a$ и $D' = \text{Пр}_a(E)$. Если же $C = C'$, то $E = D$ и равенство $D' = \text{Пр}_a(E)$ также верно.

1) обозначим утверждения этого пункта последовательно через (а), (b), (с) и докажем их равносильность.

а $\Rightarrow$ b) очевидно, так как из $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) > 0$ следует, что $\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} > 0$, откуда $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 90^\circ$.

b $\Rightarrow$ а) пусть $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 90^\circ$. Так как $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$, то справедливо $\widehat{EC'D'} = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \varphi$. Из прямоугольного треугольника $EC'D'$ получаем, что $|C'D'| = |C'E| \cos \varphi = |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$.

b $\Leftrightarrow$ с) условие $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 90^\circ$ равносильно тому, что E лежит во внутренней области прямого угла $\angle KC'L$ (рис. 241б), а это равносильно тому, что E и K лежат по одну сторону от прямой b в плоскости α . Учитывая, что $(ED') \parallel b$, точки D' и E всегда лежат по одну сторону от b . Таким образом, получаем равносильное условие — D' и K лежат по одну сторону от b . Эти точки лежат на прямой a , поэтому получаем, что они лежат по одну сторону от C' на этой прямой. Таким образом, неравенство $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 90^\circ$ равносильно совпадению лучей $[C'K) = [C'D')$, что по определению порядка на прямой a , порожденного вектором $\vec{u}$, равносильно неравенству $C' < D'$.

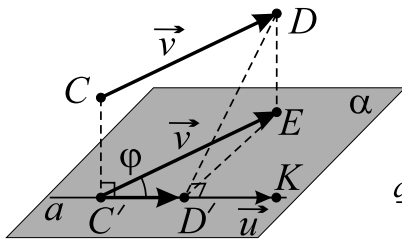


Рис. 241а

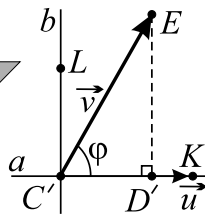


Рис. 241б

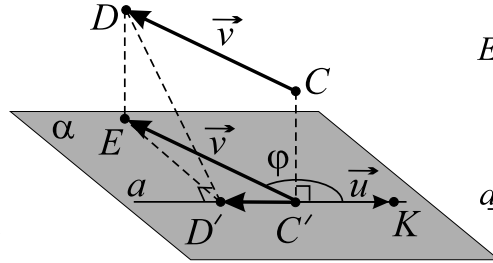


Рис. 242а

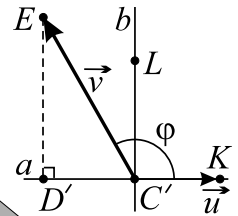


Рис. 242б

2) обозначим утверждения этого пункта последовательно через (а), (b), (с) и докажем их равносильность.

а $\Rightarrow$ b) так как $-|C'D'| < 0$, верно $\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} < 0$, откуда $\widehat{\vec{u}, \vec{v}} > 90^\circ$.

b $\Rightarrow$ а) пусть $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} > 90^\circ$. Как и в (1) получим, что $\triangle EC'D'$ является прямоугольным, но $\widehat{EC'D'} = 180^\circ - \varphi$. Поэтому

$$|C'D'| = |C'E| \cos(180^\circ - \varphi) = -|\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} \Rightarrow |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = -|C'D'|.$$

b $\Leftrightarrow$ с) условие $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} > 90^\circ$ равносильно тому, что L лежит во внутренней области угла $\angle KC'E$ (рис. 242б), а это равносильно тому, что



E и K лежат по разные стороны от прямой b в плоскости α . Учитывая, что $(ED') \parallel b$, точки D' и E всегда лежат по одну сторону от b . Таким образом, получаем равносильное условие — D' и K лежат по разные стороны от b . Эти точки лежат на прямой a , поэтому получаем, что они лежат по разные стороны от C' на этой прямой. Таким образом, неравенство $\varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{v}} > 90^\circ$ равносильно тому, что лучи $[C'K)$ и $[C'D')$ — противоположные, а по определению порядка, порожденного вектором $\vec{u}$, это равносильно $D' < C'$.

■

Следствие. Сохранив обозначения предыдущего утверждения, имеем $|\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})| = |C'D'|$.

Доказательство. Сразу следует из предыдущей леммы.

■

Теорема 1.3. Пусть $\vec{u} \neq \vec{0}$ и $\vec{v}, \vec{w}$ — произвольные векторы. Тогда справедливы следующие свойства:

- 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$;
- 2) $\text{Пр}_{\vec{u}}(\lambda \vec{v}) = \lambda \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) + \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w})$.

Доказательство. 1) доказательство первого свойства следует из определения скалярного произведения и определения проекции.

2) заметим, что $\text{Пр}_{\vec{u}}(\lambda \vec{v}) = |\lambda \vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}} = |\lambda| |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}}$ и рассмотрим три случая.

1-й случай. Если $\lambda = 0$, то доказательство очевидно.

2-й случай. Если $\lambda > 0$, то $\lambda \vec{v} \uparrow \vec{v}$, поэтому $\widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}} = \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ и

$$\text{Пр}_{\vec{u}}(\lambda \vec{v}) = |\lambda| |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}} = \lambda |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \lambda \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

3-й случай. Если $\lambda < 0$, то $\lambda \vec{v} \downarrow \vec{v}$ поэтому $\widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}} = 180^\circ - \widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ и

$$\begin{aligned} \text{Пр}_{\vec{u}}(\lambda \vec{v}) &= |\lambda| |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \lambda \vec{v}} = -\lambda |\vec{v}| \cos (180^\circ - \widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \\ &= \lambda |\vec{v}| \cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \lambda \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}). \end{aligned}$$

3) пусть $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{DE}$. Спроектировав точки C , D , E на прямую $a = (AB)$, получаем $C' = \text{Пр}_a(C)$, $D' = \text{Пр}_a(D)$, $E' = \text{Пр}_a(E)$. Обозначим через $\leq$ порядок на a , порожденный $\vec{u}$. Тогда



возможны только шесть случаев (так как $3! = 6$) взаимного расположения точек C' , D' , E' :

$$\begin{array}{ll} (a) & C' \leq D' \leq E', \\ (b) & C' \leq E' \leq D', \\ (c) & E' \leq C' \leq D', \end{array} \quad \begin{array}{ll} (d) & E' \leq D' \leq C', \\ (e) & D' \leq C' \leq E', \\ (f) & D' \leq E' \leq C'. \end{array}$$

Рассмотрим только случаи (a), (c) и (e). При их доказательстве используется предыдущая лемма.

$$a) \quad \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{Пр}_{\vec{u}}(\overrightarrow{CE}) = |C'E'| = |C'D'| + |D'E'| = \\ = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) + \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w}).$$

$$c) \quad \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = -|C'E'| = -(|D'E'| - |C'D'|) = |C'D'| - |D'E'| = \\ = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) + \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w}).$$

В этом случае мы используем равенства: $|C'D'| = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$ (так как $C' \leq D'$) и $-|D'E'| = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w})$ (так как $E' \leq D'$).

$$e) \quad \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = |C'E'| = |D'E'| - |C'D'| = -|C'D'| + |D'E'| = \\ = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w}) + \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}).$$

Использованы равенства: $-|C'D'| = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v})$ (так как $D' \leq C'$) и $|D'E'| = \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w})$ (так как $D' \leq E'$).

Случаи (b), (d) и (f) доказываются аналогично. ■

В следующей теореме перечислены все основные свойства скалярного произведения.

Теорема 1.4. Пусть $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V_3$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда выполняются следующие соотношения:

- 1) $(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2$;
- 2) $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;
- 3) $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$;
- 4) $(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v})$;
- 5) $(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w})$;
- 6) $(\lambda \vec{u}, \mu \vec{v} + \eta \vec{w}) = \lambda\mu(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda\eta(\vec{u}, \vec{w})$.

Доказательство. 1) $(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}||\vec{u}|\cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

2) следует из (1).

$$3) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}|\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos \widehat{\vec{v}, \vec{u}} = (\vec{v}, \vec{u}).$$

4) если $\vec{u} = \vec{0}$, или $\vec{v} = \vec{0}$, или $\lambda = 0$, то утверждение очевидно. Во всех остальных случаях покажем, что $(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v})$. Из определения и свойств проекции получаем, что

$$(\vec{u}, \lambda \vec{v}) = |\vec{u}|\text{Пр}_{\vec{u}}(\lambda \vec{v}) = \lambda|\vec{u}|\text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v}).$$



По предыдущему свойству $(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \lambda \vec{u})$. Поэтому из уже доказанного следует, что $(\vec{v}, \lambda \vec{u}) = \lambda(\vec{v}, \vec{u}) = \lambda(\vec{u}, \vec{v})$.

5) если $\vec{u} = \vec{0}$, то утверждение очевидно, иначе

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) &= |\vec{u}| \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \\ &= |\vec{u}| \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{v}) + |\vec{u}| \text{Пр}_{\vec{u}}(\vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}, \vec{w}). \end{aligned}$$

6) следует из (4) и (5). ■

Третье свойство последней теоремы называется *симметричностью* скалярного произведения, а свойство (6) — *линейностью* скалярного произведения.

Упражнения

1. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортогональный базис пространства и $\vec{u} = (\lambda, \mu, \eta)$ в этом базисе. Докажите, что

$$\text{Пр}_{\vec{e}_1}(\vec{u}) = \lambda, \quad \text{Пр}_{\vec{e}_2}(\vec{u}) = \mu, \quad \text{Пр}_{\vec{e}_3}(\vec{u}) = \eta.$$

2. Пусть $a \parallel b$ и C, D — произвольные точки. Обозначим через $C_1 = \text{Пр}_a(C)$, $D_1 = \text{Пр}_a(D)$, $C_2 = \text{Пр}_b(C)$, $D_2 = \text{Пр}_b(D)$. Докажите, что $|C_1 D_1| = |C_2 D_2|$.

3. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC выполняется следующее равенство $|BC| = |AC| \cos \hat{C} + |AB| \cos \hat{B}$ (*формула проекций*).

4. Докажите свойства (b), (d), (f) теоремы 1.3.

5. Пусть O — центр масс треугольника ABC . Докажите, что для произвольной точки X выполняется *формула Лейбница*

$$|XA|^2 + |XB|^2 + |XC|^2 = 3|XO|^2 + |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2.$$

6. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, P и Q — середины его диагоналей. Докажите, что

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|PQ|^2.$$

7. Пусть O — центр описанной окружности около треугольника ABC . Докажите, что H является точкой пересечения высот этого треугольника тогда и только тогда, когда $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

8. Докажите, что равенство $\vec{u}(\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v}(\vec{w} - \vec{u}) + \vec{w}(\vec{u} - \vec{v}) = 0$ имеет место для любых $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$.

9. Используя предыдущее упражнение, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.



10. Докажите, что если треугольник ABC равносторонний, то сумма квадратов расстояний от произвольной точки описанной около $\triangle ABC$ окружности до вершин одна и та же. Найдите это значение.

11. Докажите, что для любого треугольника ABC выполняется следующее неравенство $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq 3/2$.

5.2. Формула скалярного произведения в ортонормированном базисе

Начиная с этого подраздела, все результаты будут существенно зависеть от выбранного базиса. Значительная часть из них будет справедлива только в ортонормированном базисе (ОНБ). Результаты будут доказываться опять только для случая пространства. Для плоскости похожие результаты будут получаться (там, где условия допускают плоский случай) простым опусканием третьей координаты. ОНБ пространства принято обозначать $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$). Чтобы получить ортогональную (или декартову) систему координат, необходимо еще зафиксировать некоторую точку O . Координаты точек и векторов в этой системе будут обозначаться с помощью латинских букв x , y и z .

Для вычисления скалярного произведения в общем случае необходимы длины векторов и косинус угла между ними, но в ортонормированном базисе задача сильно упрощается благодаря формуле из следующей теоремы.

Теорема 2.1. Если $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$(\vec{u}, \vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство. Рассмотрим представления $\vec{u}$ и $\vec{v}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Так как $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Используя равенства $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ и $|\vec{i}|^2 = |\vec{j}|^2 = |\vec{k}|^2 = 1$, а также свойства скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}) &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + \\ &+ (x_1y_2 + x_2y_1)\vec{i} \cdot \vec{j} + (x_1z_2 + x_2z_1)\vec{i} \cdot \vec{k} + y_1y_2\vec{j}^2 + (y_1z_2 + y_2z_1)\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1z_2\vec{k}^2 = \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$





Следствие 1. Если $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, то $|\vec{u}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$.

Доказательство. Это следует из равенства $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$. ■

Следующая формула позволяет находить расстояние между точками, зная их координаты.

Следствие 2. Пусть $A = (x_1, y_1, z_1)$ и $B = (x_2, y_2, z_2)$, тогда

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Доказательство. Из векторного равенства $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ получаем, что $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Используя предыдущее следствие, находим

$$|AB| = \sqrt{|\vec{AB}|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Теперь можно в координатном виде описать множество всех точек сферы. Напомним, что сферой $Sph(O_1, R)$ с центром в точке O_1 и радиусом R называется множество всех точек пространства, удаленных от точки O_1 на расстояние $R \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$.

Следствие 3. Пусть $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и $R \geq 0$, тогда

$$M(x, y, z) \in Sph(O_1, R) \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Доказательство. Используя предыдущее следствие, получим, что

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in Sph(O_1, R) &\Leftrightarrow |MO_1| = R \Leftrightarrow |MO_1|^2 = R^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \end{aligned}$$

Определение. Уравнением сферы с центром в точке $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом $R \geq 0$ называется уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Пример 1. Найти радиус и написать уравнение сферы, которая касается всех координатных плоскостей и проходит через точку $A(1, 2, 3)$.

Решение. Обозначим центр сферы через $O_1(x_0, y_0, z_0)$ и определим его координаты. Так как сфера касается координатной плоскости (OXY) , то



расстояние от центра O_1 до этой плоскости равно R , поэтому $|z_0| = R$. Рассуждая аналогично, получаем $|x_0| = |y_0| = R$. Заметим, что сфера целиком находится в одном из восьми трехгранных углов с вершиной в начале координат (каждый из них называется *октантом*). Учитывая, что сфера проходит через точку $A(1, 2, 3)$, получим, что нам нужен тот октант, у которого точки имеют все три неотрицательные координаты. Поэтому $x_0, y_0, z_0 \geq 0$, откуда $x_0 = y_0 = z_0 = R$. Используя предыдущее следствие, запишем уравнение сферы в виде $(x - R)^2 + (y - R)^2 + (z - R)^2 = R^2$ и определим R , подставив в это уравнение координаты точки A . Получаем, что

$$(1 - R)^2 + (2 - R)^2 + (3 - R)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 7 = 0 \Leftrightarrow R_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Итак, существует две сферы с таким свойством. Их уравнения:

$$\begin{aligned} (x - 3 - \sqrt{2})^2 + (y - 3 - \sqrt{2})^2 + (z - 3 - \sqrt{2})^2 &= 11 + 6\sqrt{2}, \\ (x - 3 + \sqrt{2})^2 + (y - 3 + \sqrt{2})^2 + (z - 3 + \sqrt{2})^2 &= 11 - 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Следующая формула полезна своими многочисленными приложениями. Главные из них — нахождение углов между векторами, между прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями.

Следствие 4. Если $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, то

$$\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в случае ненулевых векторов из определения скалярного произведения легко можно выразить косинус: $\cos \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$. После этого используем теорему и первое следствие. ■

Пример 2. Определить величину угла между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

Решение. Достаточно найти угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$. Выбрав A в качестве начала координат и $\vec{i} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} \parallel \overrightarrow{AD}$, $\vec{k} \parallel \overrightarrow{AA_1}$, получим некоторую декартову систему координат (рис. 243). Обозначим через a длину ребра $[AB]$. Тогда $\overrightarrow{AB_1} = (a, 0, a)$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB} = (a, a, a) - (a, 0, 0) = (0, a, a)$. Следовательно,

$$\cos \widehat{\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$



Поэтому искомый угол равен 60° .

Величину этого угла можно было определить, исходя из простых геометрических рассуждений: $\widehat{(AB_1), (BC_1)} = \widehat{(AB_1), (AD_1)}$, так как $(AD_1) \parallel (BC_1)$. Добавим $[B_1D_1]$ к $[AB_1]$ и $[AD_1]$ и получим равносторонний треугольник AB_1D_1 , откуда $\widehat{(AB_1), (AD_1)} = 60^\circ$.

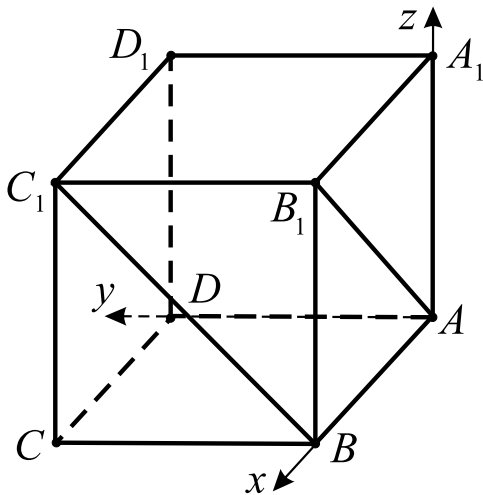


Рис. 243

Упражнения

1. Предположим, что базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортогонален, но длины каждого из этих векторов равны 2. Напишите формулу для нахождения скалярного произведения в таком базисе.
2. Решите предыдущую задачу для произвольного ортогонального базиса.
3. На координатной (декартовой) плоскости в окружность $x^2 + y^2 = R^2$ вписан квадрат $ABCD$, где координаты вершины A равны $(5, -12)$. Найдите R и координаты вершин B, C и D .
4. Найдите сумму квадратов расстояний от центра масс треугольника ABC , где $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(1, 1, 1)$, до вершин этого треугольника.
5. Докажите тремя различными способами факт перпендикулярности противоположных ребер правильного тетраэдра: а) без помощи векторов; б) вводя неортогональный базис по смежным ребрам тетраэдра, выражая нужные ребра и рассматривая скалярное произведение; в) вводя декартову систему координат с началом в центре масс основания.

5.3. Нормаль к плоскости

Здесь мы будем использовать свойства скалярного произведения, доказанные в первом параграфе. Каждое из этих свойств справедливо в любом базисе, поэтому результаты этого параграфа не зависят от выбора базиса.

Определение. Нормалью к плоскости α называется ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный любому вектору, параллельному α .

Тот факт, что $\vec{n}$ является нормалью к плоскости α , обозначают так: $\vec{n} \perp \alpha$. Часто нормалью к плоскости называют перпендикулярную к ней прямую. Из результатов этого подраздела будет видно, что свойства вектора-нормали и нормальной прямой во многом совпадают. Кроме того, несложно



установить справедливость такого факта: прямая нормальна к плоскости α тогда и только тогда, когда любой ее направляющий вектор является нормалью к этой плоскости. Чтобы избежать двусмысленности, договоримся под нормалью дальше понимать только определенный выше вектор.

Теорема 3.1. Пусть $\vec{n} \neq \vec{0}$. Пусть также $\vec{u}$, $\vec{v}$ — базис плоскости α (рис. 244). Тогда $\vec{n} \perp \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vec{n} \perp \vec{u}$ и $\vec{n} \perp \vec{v}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$, являясь базисом α , параллельны ей, поэтому если $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \vec{u}$ и $\vec{n} \perp \vec{v}$.

$\Leftarrow$) пусть теперь $\vec{n} \perp \vec{u}$ и $\vec{n} \perp \vec{v}$. Покажем, что для любого $\vec{w} \parallel \alpha$ будет выполняться $\vec{n} \perp \vec{w}$. Так как $\vec{w} \parallel \alpha$, то $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (по теореме 4.4 четвертой главы). Достаточно теперь доказать, что скалярное произведение $\vec{n}$ и $\vec{w}$ равно нулю:

$$(\vec{n}, \vec{w}) = (\vec{n}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda(\vec{n}, \vec{u}) + \mu(\vec{n}, \vec{v}) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

По теореме 1.1 получаем, что $\vec{n} \perp \vec{w}$.

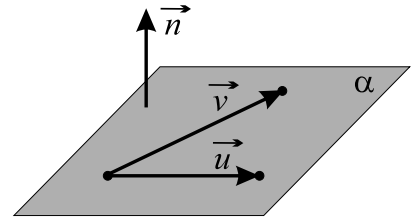


Рис. 244

Нормалей к плоскости бесконечно много. Следующая теорема описывает всё множество нормалей. Оказывается, достаточно взять множество всех векторов, коллинеарных одной нормали, и исключить из этого множества нулевой вектор.

Теорема 3.2. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$. Тогда для ненулевого $\vec{n}_1$ выполняется условие $\vec{n}_1 \perp \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $\vec{n}_1 \perp \alpha$ (рис. 245). Выберем ортогональный базис $\vec{u}$, $\vec{v}$ плоскости α . Так как $\vec{n}$ является нормалью к α , то три вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ некопланарны, поэтому являются некоторым базисом пространства. Тогда (по теореме 4.6 четвертой главы) вектор $\vec{n}_1$ можно представить в виде некоторой линейной комбинации векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$, т.е.

$$\vec{n}_1 = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \eta \vec{n}. \quad (*)$$

Домножив скалярно обе части равенства (*) на вектор $\vec{u}$, получаем, что $(\vec{n}_1, \vec{u}) = \lambda(\vec{u}, \vec{u}) + \mu(\vec{v}, \vec{u}) + \eta(\vec{n}, \vec{u})$. Так как $\vec{n} \perp \vec{u}$, $\vec{n}_1 \perp \vec{u}$ и



$\vec{v} \perp \vec{u}$ (используем $\vec{n} \perp \alpha$, $\vec{n}_1 \perp \alpha$ и ортогональность базиса $\vec{u}, \vec{v}$), то $0 = \lambda |\vec{u}|^2$, откуда $\lambda = 0$. Снова домножив обе части равенства (*), но уже на $\vec{v}$, получим, что и $\mu = 0$. Следовательно, $\vec{n}_1 = \eta \vec{n}$, что дает $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$.

$\Leftarrow$) пусть $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$ и $\vec{u}, \vec{v}$ — базис плоскости α . Исходя из предыдущей теоремы, достаточно показать, что $\vec{n}_1 \perp \vec{u}$ и $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$. Из условия $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}$ следует, что $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Следовательно, $(\vec{n}_1, \vec{u}) = \lambda(\vec{n}, \vec{u}) = 0$. Аналогично $(\vec{n}_1, \vec{v}) = \lambda(\vec{n}, \vec{v}) = 0$. Поэтому $\vec{n}_1 \perp \alpha$.

■

Также легко можно описать множество всех плоскостей, для которых данный ненулевой вектор является нормалью (рис. 246).

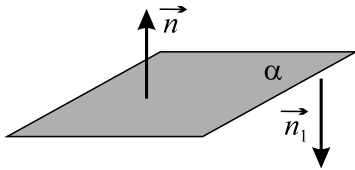


Рис. 245

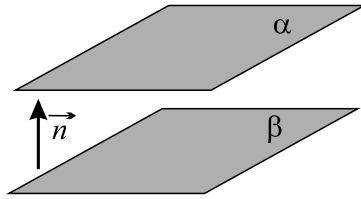


Рис. 246

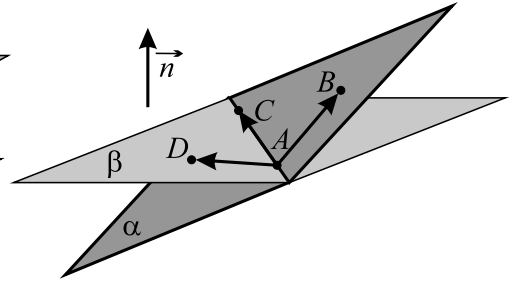


Рис. 247

Теорема 3.3. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$. Тогда $\vec{n} \perp \beta$ тогда и только тогда, когда $\beta \parallel \alpha$.

Доказательство. $\Rightarrow$) пусть $\vec{n} \perp \beta$. Покажем, что $\beta \parallel \alpha$. Предположим от противного, что $\beta \cap \alpha \neq \emptyset$ и $\beta \neq \alpha$. Обозначим через $a = \beta \cap \alpha$ и выберем точки A, B, C (рис. 247) так, что $A \in a$, точки $B, C \in \alpha$ и $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ является базисом плоскости α (достаточно выбрать $C \in a \setminus \{A\}$ и $B \in \alpha \setminus a$). И, наконец, выберем точку $D \in \beta \setminus a$ и обозначим $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Тройка векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ является базисом пространства (если бы они были компланарны, то D лежала бы в плоскости α). Представим $\vec{n}$ по этому базису: $\vec{n} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \eta \vec{w}$. Домножив скалярно обе части этого уравнения на $\vec{n}$, получаем, что

$$(\vec{n}, \vec{n}) = |\vec{n}|^2 = \lambda(\vec{u}, \vec{n}) + \mu(\vec{v}, \vec{n}) + \eta(\vec{w}, \vec{n}) = 0.$$

Противоречие с условием $\vec{n} \neq \vec{0}$.

$\Leftarrow$) пусть $\beta \parallel \alpha$ и $\vec{n} \perp \alpha$. Покажем, что $\vec{n} \perp \beta$. Поскольку вектор параллелен плоскости α в том и только в том случае, когда он параллелен



β , то для любого $\vec{u} \parallel \beta$ получаем, что $\vec{u} \parallel \alpha$, откуда $\vec{n} \perp \vec{u}$. Мы проверили, что $\vec{n} \perp \beta$. ■

Как известно, аксиома С1 гарантируют, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость. Существуют еще несколько утверждений об однозначном задании плоскости с помощью других элементов. Так, в следующей теореме в качестве одного из элементов используется нормальный вектор.

Теорема 3.4. Точка A и ненулевой вектор $\vec{n}$ однозначно определяют плоскость, которая проходит через точку A и имеет $\vec{n}$ своей нормалью.

Доказательство. Необходимо доказать два факта: то, что существует плоскость с таким свойством, и то, что она единственна.

I. Существование. Отложим $\vec{n}$ от точки A (рис. 248) и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, т.е. $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. Обозначим прямую AB через a . Выберем произвольную точку $C \notin a$. Точка C и прямая a однозначно определяют плоскость $\beta = (C, a)$. В этой плоскости существует проходящая через A прямая b , перпендикулярная a . Выберем теперь произвольную точку D , не принадлежащую плоскости β . В плоскости $\gamma = (D, a)$ также найдется прямая c , что $A \in c$ и $c \perp a$. Прямые b, c различны и пересекаются, поэтому они определяют плоскость $\alpha = (b, c)$. Покажем, что она искомая.

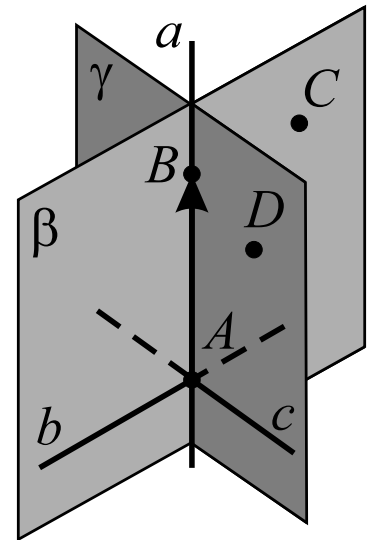


Рис. 248

Для этого выберем направляющий вектор $\vec{u}$ прямой b и направляющий вектор $\vec{v}$ прямой c . Из определения угла между векторами следует, что $\vec{n} \perp \vec{u}$ и $\vec{n} \perp \vec{v}$. По теореме 3.1, $\vec{n} \perp \alpha$.

II. Единственность. Пусть α и α_1 — две плоскости, удовлетворяющие условию теоремы. Так как $\vec{n}$ является общей нормалью для этих плоскостей, то из предыдущей теоремы получаем, что $\alpha \parallel \alpha_1$. Но так как обе эти плоскости содержат точку A , они совпадают. ■

Воспользовавшись определением угла между векторами, можно доказать, что прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их направляющие векторы. Из этого факта следует векторное доказательство



теоремы о трех перпендикулярах.

Теорема 3.5. Пусть $a \subseteq \alpha$, прямая b является наклонной к α и b' — проекция b на α . Тогда $b \perp a$ тогда и только тогда, когда $b' \perp a$.

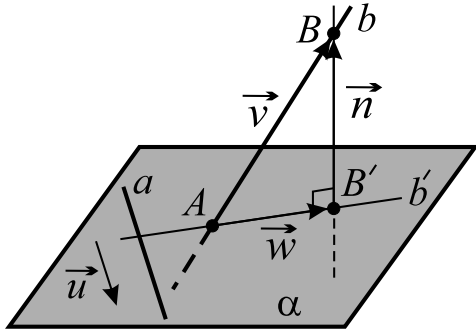


Рис. 249

Доказательство. Введем некоторые обозначения. Пусть A — это точка пересечения $b \cap \alpha$, B — произвольная точка прямой b , не совпадающая с A и $B' = \text{Пр}_\alpha(B)$ (рис. 249). Пусть также $\vec{u}$ — некоторый направляющий вектор прямой a и $\vec{n} = \overrightarrow{B'B}$. Из обозначений сразу следует, что $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ является направляющим вектором прямой b , а вектор $\vec{w} = \overrightarrow{AB'}$ — направляющий вектор прямой b' . Учитывая замечание, сделанное перед теоремой, достаточно показать, что $\vec{v} \perp \vec{u}$ тогда и только тогда, когда $\vec{w} \perp \vec{u}$.

Заметим сразу, что из $\vec{n} \perp \alpha$ следует, что $\vec{n} \perp \vec{u}$.

Поэтому если $\vec{v} \perp \vec{u}$, то скалярное произведение

$$(\vec{w}, \vec{u}) = (\vec{v} - \vec{n}, \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{u}) - (\vec{n}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{w} \perp \vec{u}.$$

Аналогично, если $\vec{w} \perp \vec{u}$, то

$$(\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{w} + \vec{n}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}) + (\vec{n}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{u}.$$

■

Упражнения

1. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$. Докажите, что если $\vec{n} \perp \vec{u}$, то $\vec{u} \parallel \alpha$.
2. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$ и $\vec{n}_1 \perp \beta$. Докажите, что $\vec{n} \parallel \beta$ тогда и только тогда, когда $\vec{n}_1 \parallel \alpha$.
3. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис пространства. Докажите, что вектор $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k} \perp \alpha = (A, \vec{i} + 2\vec{j}, 3\vec{i} - \vec{k})$, где A — произвольно выбранная точка и α — плоскость, которая проходит через A и имеет своим базисом векторы $\vec{i} + 2\vec{j}$ и $3\vec{i} - \vec{k}$.
4. Найдите нормаль к плоскости $(A, 3\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.
5. Пусть $\vec{u} \perp (M, \vec{v}, \vec{w})$ и $\vec{v} \perp (N, \vec{u}, \vec{w})$. Докажите, что $\vec{w} \perp (P, \vec{u}, \vec{v})$.
6. Определите, какие из следующих прямых перпендикулярны: $(A, 2\vec{i} - \vec{j})$, $(B, \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $(C, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $(D, \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k})$? При $\vec{u} \neq \vec{0}$ символы $(A, \vec{u})$ обозначают прямую, проходящую через точку A , с базисным вектором $\vec{u}$.



7. Для четырех попарно различных точек A , B , C и D известно, что выполняется $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$. Докажите, что $(BC) \perp (AD)$.

8. Существуют ли четыре попарно перпендикулярные прямые в $\mathbb{P}_3$?

5.4. Координатное уравнение плоскости в ОНБ

В этом и следующих подразделах часто будет использоваться формула скалярного произведения в ортонормированном базисе. Поэтому большинство утверждений справедливы только для этого вида базиса. Единственным исключением в этом параграфе является следующая лемма. Она описывает множество точек плоскости, используя свойства нормального к этой плоскости вектора.

Лемма 4.1. Пусть $M_0 \in \alpha$ и $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\Phi = \{M : \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0\}$. Тогда Φ — это плоскость α , проходящая через точку M_0 и $\vec{n}$ — ее вектор нормали.

Доказательство. По теореме 3.4 существует единственная такая плоскость α , проходящая через точку M_0 и $\vec{n} \perp \alpha$. Докажем, что $\alpha \subseteq \Phi$ и $\Phi \subseteq \alpha$.

Пусть $M \in \alpha$, тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \alpha$. Из определения нормали получаем, что справедливо $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$, откуда следует $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ и $M \in \Phi$.

Пусть теперь $M \in \Phi$. Покажем, что $M \in \alpha$. Предположим от противного, что $M \notin \alpha$ (рис. 250) и обозначим через M' проекцию M на плоскость α . Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M'} + \overrightarrow{M'M}$. Так как $\overrightarrow{M'M} \perp \alpha$, то по теореме 3.2 верно $\overrightarrow{M'M} \parallel \vec{n}$, поэтому существует $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$), что $\overrightarrow{M'M} = \lambda \vec{n}$. Получаем равенство $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M'} + \lambda \vec{n}$. Домножим его скалярно на $\vec{n}$:

$$(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = (\overrightarrow{M_0M'}, \vec{n}) + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) = \lambda|\vec{n}|^2 = 0,$$

отсюда $\lambda = 0$ или $\vec{n} = \vec{0}$. ✕. Следовательно, $M \in \alpha$.

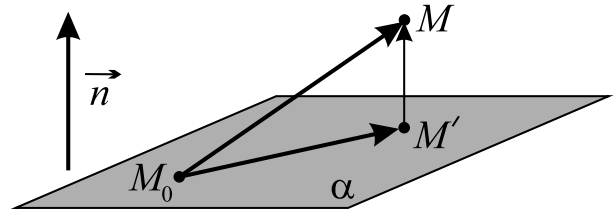


Рис. 250

Зафиксируем некоторый ОНБ пространства $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и начало координат — точку O . В декартовой системе координат координаты вектора нормали $\vec{n}$ традиционно обозначают большими буквами: $\vec{n} = (A, B, C)$.



Следующая теорема состоит из двух утверждений. Первое из них ставит в соответствие каждой плоскости некоторое линейное уравнение; второе, наоборот, утверждает, что всякое линейное уравнение, коэффициенты которого одновременно не равны нулю, задает некоторую плоскость.

Теорема 4.2. 1) пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$ и $\vec{n} = (A, B, C) \perp \alpha$. Тогда

$$M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2) пусть A, B, C одновременно не равны нулю, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ и $D \in \mathbb{R}$. Тогда множество $\Phi = \{M(x, y, z) : Ax + By + Cz + D = 0\}$ является плоскостью, причем вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является нормалью к этой плоскости.

Доказательство. 1) заметим, что $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Используя предыдущую лемму, получим

$$M(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2) пусть $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, тогда множество $\Phi \neq \emptyset$. Действительно, если $A \neq 0$, то точка $M_0(-D/A, 0, 0) \in \Phi$. Итак, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Из равенства $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, получаем, что $M(x, y, z) \in \Phi \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 &\Leftrightarrow (Ax + By + Cz + D) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

По (1) последнее уравнение описывает плоскость с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ и проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. ■

Определение. Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, называется координатным уравнением плоскости, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ своей нормалью.

Легко заметить, что уравнения $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ и $Ax + By + Cz + D = 0$, где свободный коэффициент $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, равносильны. Поэтому уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ также называют уравнением плоскости. По виду этого уравнения сразу можно определить нормаль к этой плоскости — $\vec{n} = (A, B, C)$. В случае необходимости можно найти и координаты некоторой точки этой плоскости — это сделано при доказательстве второго пункта предыдущей теоремы.



Пример 1. Найти координатное уравнение плоскости α , проходящей через точки $E(1, 0, 0)$, $F(0, 1, 0)$ и $G(0, 0, 1)$ (рис. 251).

Решение. Определим координаты нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ к этой плоскости. Для этого найдем координаты двух векторов, составляющих базис α . Так, например, $\vec{EF} = (-1, 1, 0)$ и $\vec{EG} = (-1, 0, 1)$ являются базисом плоскости (легко заметить, что они неколлинеарны). Так как $\vec{n} \perp \alpha$, то должны выполняться два условия: $\vec{EF} \cdot \vec{n} = 0$ и $\vec{EG} \cdot \vec{n} = 0$. По формуле скалярного произведения в ОНБ, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} -A + B = 0, \\ -A + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ A = C. \end{cases}$$

Получилась система двух уравнений с тремя неизвестными. То, что количество неизвестных больше числа уравнений, объясняется просто: координаты каждой из бесконечного множества нормалей должны удовлетворять этой системе. Так как нам достаточно найти координаты одной нормали, зафиксируем одну из переменных. Пусть $A = 1$. Тогда $B = C = 1$. Итак, $\vec{n} = (1, 1, 1)$ — одна из нормалей к α . Поскольку $E(1, 0, 0) \in \alpha$, то получаем следующее координатное уравнение плоскости α :

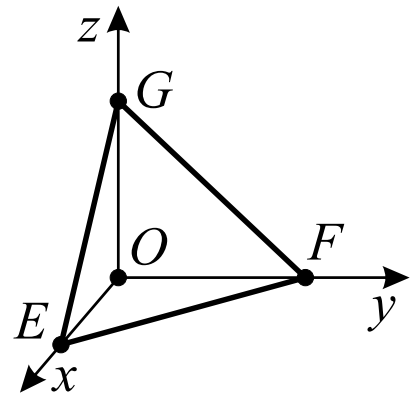


Рис. 251

$$1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \quad \text{или} \quad x + y + z - 1 = 0.$$

Что произойдет, если в качестве A будет выбрано другое число? Оказывается, все коэффициенты нового координатного уравнения могут быть получены из соответствующих коэффициентов старого (т.е. ранее найденного) уравнения умножением на одно и то же число.

Теорема 4.3. Уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ являются координатными уравнениями одной плоскости α тогда и только тогда, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, что $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$, $C_1 = \lambda C$, $D_1 = \lambda D$.

Доказательство. $\Leftarrow$) очевидно, так как

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \alpha &\Leftrightarrow Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow \lambda(Ax + By + Cz + D) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \end{aligned}$$



Следовательно, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ также является координатным уравнением плоскости α .

$\Rightarrow$) пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ задают одну и ту же плоскость α . Тогда $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ — две нормали к плоскости α . По теореме 3.1 четвертой главы $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, поэтому $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$, $C_1 = \lambda C$. Осталось доказать, что $D_1 = \lambda D$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, тогда координаты этой точки одновременно удовлетворяют обоим координатным уравнениям: $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$. Следовательно,

$$D_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) = -\lambda(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \lambda D.$$

■

С помощью координатного уравнения плоскости сравнительно легко определить расстояние от произвольной точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ до этой плоскости. Напомним, что расстояние от точки M^* до плоскости α — это наименьшее из расстояний $|M^*M|$, где $M \in \alpha$. Расстояние от M^* до α обозначается $d(M^*, \alpha)$. Используя тот простой факт, что гипотенуза прямоугольного треугольника длиннее его катета, можно доказать, что $d(M^*, \alpha)$ равно $|M^*M_0|$, где $M_0 = \text{Пр}_\alpha(M^*)$.

Теорема 4.4. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ — координатное уравнение плоскости α и $M^*(x^*, y^*, z^*)$ — произвольная точка. Тогда

$$d(M^*, \alpha) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

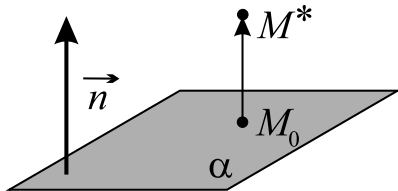


Рис. 252

Доказательство. Пусть $M_0 = \text{Пр}_\alpha(M^*)$ (рис. 252). Поскольку $\overrightarrow{M_0M^*} \parallel \vec{n}$, верно равенство $|\cos \widehat{\overrightarrow{M_0M^*}, \vec{n}}| = 1$. Поэтому модуль скалярного произведения векторов $\overrightarrow{M_0M^*}$ и $\vec{n}$ равен $|(\overrightarrow{M_0M^*}, \vec{n})| = |\overrightarrow{M_0M^*}| \cdot |\vec{n}| \cdot 1$. С другой стороны, по формуле скалярного произведения в ОНБ

$$|(\overrightarrow{M_0M^*}, \vec{n})| = |A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)| = |Ax^* + By^* + Cz^* + D|.$$

Здесь был использован такой факт: если $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$, то справедливо $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ или $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$.



В результате получаем, что $|\overrightarrow{M_0 M^*}| \cdot |\vec{n}| = |Ax^* + By^* + Cz^* + D|$, или

$$d(M^*, \alpha) = |\overrightarrow{M_0 M^*}| = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

■

Определение. Величина

$$\frac{Ax^* + By^* + Cz^* + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

называется отклонением точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$ от плоскости α , которая задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Если отложить вектор нормали $\vec{n} = \overrightarrow{KL}$ от некоторой точки плоскости α (т.е. $K \in \alpha$), то точка L принадлежит некоторому полупространству $\mathbb{P}(\alpha, L)$ с границей α . Назовем его полупространством, в которое направлен вектор $\vec{n}$.

Следствие. 1) отклонение по своей абсолютной величине совпадает с расстоянием от точки до плоскости.

2) отклонение неотрицательно тогда и только тогда, когда точка принадлежит полупространству, в которое направлен вектор $\vec{n}$.

Доказательство. 1) очевидно следует из определения.

2) заметим, что знак отклонения совпадает со знаком $\cos \widehat{\overrightarrow{M_0 M^*}, \vec{n}}$. Поэтому отклонение неотрицательно тогда и только тогда, когда

$$\cos \widehat{\overrightarrow{M_0 M^*}, \vec{n}} \geq 0 \Leftrightarrow \cos \widehat{\overrightarrow{M_0 M^*}, \vec{n}} = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M^*} \uparrow \vec{n}.$$

■

Пример 2. Являются ли точки $M_1(2, -5, 3)$ и $M_2(4, -1, 1)$ симметричными относительно плоскости α , которая задается координатным уравнением $x + 2y - z - 5 = 0$?

Решение. Заметим, что точки M_1 и M_2 симметричны относительно плоскости α тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{n}$ и отклонения M_1 от α и M_2 от α совпадают по абсолютной величине и различны по знаку. Проверим оба эти условия. По правилу КоМиНа находим $\overrightarrow{M_1 M_2} = (2, 4, -2)$. Так как $\vec{n} = (1, 2, -1)$, то $\overrightarrow{M_1 M_2} = (2, 4, -2) = 2\vec{n}$, $\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{n}$ и первое условие выполняется. Отклонение M_1 от α равно $(2 - 10 - 3 + 5)/\sqrt{6} = -6/\sqrt{6}$. Отклонение M_2 от α , в свою очередь, равно $(4 - 2 - 1 + 5)/\sqrt{6}$. Следовательно, и второе условие также выполняется. В результате, точки M_1 и M_2 симметричны относительно α .



Пример 3. Чему равна длина высоты SH пирамиды $EFGS$, где $E(0, 0, 0)$, $F(1, 0, 0)$, $G(0, 1, 1)$, $S(0, 0, 4)$?

Решение. Заметим, что $|SH| = d(S, \alpha)$, где $\alpha = (EFG)$. Поэтому запишем координатное уравнение α и воспользуемся формулой последней теоремы. Быстро находим координаты векторов $\overrightarrow{EF} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{EG} = (0, 1, 1)$. Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$, тогда из условий $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ и $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$ получаем систему

$$\begin{cases} A = 0, \\ B + C = 0. \end{cases}$$

Пусть $B = 1$, тогда $\vec{n} = (0, 1, -1)$. Так как $E(0, 0, 0) \in \alpha$, то координатное уравнение α имеет вид: $0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0$ или $y - z = 0$. Подставляя в формулу координаты S , имеем равенство

$$d(S, \alpha) = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Упражнения

1. Плоскость α проходит через $E(2, -1, 0)$ и $F(-3, 0, -2)$ и имеет $\vec{n} = (-3, k, 1)$ своей нормалью. Определите k и запишите координатное уравнение этой плоскости.

2. При каких k вектор $(2, -3, -1)$ параллелен плоскости $2x - ky + 5z - 7 = 0$?

3. Докажите, что точка $M^* = (3, 1, -2)$ равноудалена от плоскостей $2x + 2y + z - 12 = 0$ и $7x - 4y + 4z - 27 = 0$.

4. Какая из двух точек — $M_1(-3, 0, 2)$ или $M_2(3, 3, -7)$ — расположена ближе к плоскости α , координатным уравнением которой является $x - 3y + 5z + 30 = 0$? Находятся ли они в одном полупространстве, границей которого является данная плоскость?

5. Определите расстояние от точек $E(-1, 9, 3)$, $F(3, 0, -2)$, $G(2, 24, -5)$ до плоскости $3x - y + 7z - 2 = 0$. Как расположены прямые (EF) , (EG) , (FG) относительно этой плоскости?

6. Докажите, что плоскость $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (здесь $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) отсекает от координатных осей (OX) , (OY) и (OZ) отрезки, длины которых соответственно равны $|a|$, $|b|$, $|c|$ (рис. 253). Уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ называется *координатным уравнением плоскости в отрезках*.

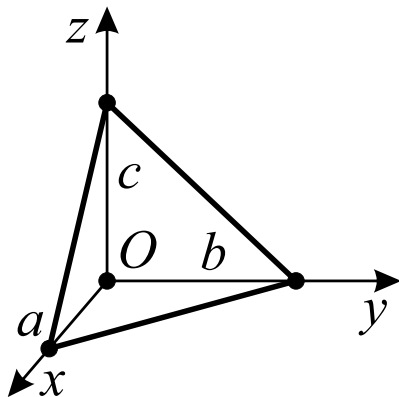


Рис. 253



5.5. Координатное уравнение прямой в плоскости

В этом параграфе большинство утверждений оставлены без доказательства. Каждое из них аналогично некоторому утверждению предыдущего параграфа. Отличие состоит только в том, что вместо плоскости в пространстве, здесь рассматривается прямая в декартовой плоскости. Поэтому зафиксируем некоторую плоскость α и ее ортонормированный репер: $O, \vec{i}, \vec{j}$. Далее будут рассматриваться точки, прямые и векторы этой плоскости. Нормалью к прямой $a \subseteq \alpha$ называется ненулевой вектор $\vec{n}$ этой плоскости α , перпендикулярный каждому параллельному этой прямой вектору. Тот факт, что вектор $\vec{n}$ является нормалью к прямой a , мы обозначаем так: $\vec{n} \perp a$.

Лемма 5.1. Пусть $M_0 \in \alpha$ и $\vec{n} \neq \vec{0}$. Тогда множество

$$\Phi = \{M \in \alpha : \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0\}$$

является прямой a , для которой $M_0 \in a$ и $\vec{n} \perp a$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.1. ■

Теорема 5.2. 1) пусть $M_0(x_0, y_0) \in a$ и $\vec{n} = (A, B) \perp a$. Тогда

$$M(x, y) \in a \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

2) если $A^2 + B^2 \neq 0$ и $C \in \mathbb{R}$, то множество

$$\Phi = \{M(x, y) : Ax + By + C = 0\}$$

является прямой с нормалью $\vec{n} = (A, B)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.2. ■

Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$, называется *координатным уравнением прямой*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей вектор $\vec{n} = (A, B)$ своей нормалью. Переход от уравнения $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ к равносильному уравнению $Ax + By + C = 0$ происходит с помощью замены $C = -(Ax_0 + By_0)$.

Заметим, что координатные уравнения вида $Ax + By + C = 0$ описывают все прямые на плоскости, в то время как уравнения $y = kx + b$ при изменении k и b дают только те прямые, которые не параллельны оси (OY) .



Теорема 5.3. Пусть уравнение $Ax + By + C = 0$ является координатным уравнением прямой a . Тогда расстояние от произвольной точки $M^*(x^*, y^*)$ до этой прямой может быть определено по формуле

$$d(M^*, a) = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.4. ■

Подробнее остановимся на нахождении угла между прямыми a и b , заданными соответственно их координатными уравнениями $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Теорема 5.4. Пусть $\vec{n} \perp a$ и $\vec{n}_1 \perp b$. Тогда $\cos \widehat{a, b} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}|$.

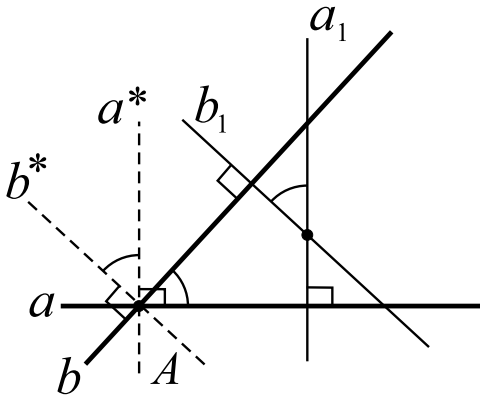


Рис. 254

Доказательство. Сначала докажем, что если $a_1 \perp a$ и $b_1 \perp b$, то $\widehat{a, b} = \widehat{a_1, b_1}$. При $a \parallel b$ это очевидно. Иначе обозначим через A (рис. 254) точку пересечения $a \cap b$ и рассмотрим поворот $f = R_A^{90^\circ}$. Пусть $a^* = f(a)$ и $b^* = f(b)$, тогда $a^* \parallel a_1$, $b^* \parallel b_1$, поэтому $\widehat{a^*, b^*} = \widehat{a_1, b_1}$. Учитывая, что любое движение сохраняет величину угла, имеем $\widehat{a, b} = \widehat{a^*, b^*}$, откуда $\widehat{a, b} = \widehat{a_1, b_1}$.

Два условия $a_1 \perp a$ и $\vec{n} \perp a$ дают $\vec{n} \parallel a_1$. Аналогично $\vec{n}_1 \parallel b_1$. Таким образом, или $\widehat{\vec{n}, \vec{n}_1} = \widehat{a_1, b_1} = \widehat{a, b}$, или $\widehat{\vec{n}, \vec{n}_1} = 180^\circ - \widehat{a, b}$, отсюда $|\cos \widehat{a, b}| = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}|$. Поскольку $\widehat{a, b} \in [0^\circ; 90^\circ]$, выполняется $\cos \widehat{a, b} = |\cos \widehat{a, b}|$. В результате, $\cos \widehat{a, b} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}|$. ■

Следствие 1. Пусть прямая a задается уравнением $Ax + By + C = 0$ и прямая b — уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$. Тогда

$$\cos \widehat{a, b} = \frac{|AA_1 + BB_1|}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

Доказательство. Из равенства $\cos \widehat{a, b} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|}$ имеем

$$\cos \widehat{a, b} = \frac{|AA_1 + BB_1|}{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

■



Следствие 2. В условиях предыдущего следствия прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AA_1 + BB_1 = 0$.

Доказательство. Условие $a \perp b$ равносильно тому, что выполняется $\vec{n} = (A, B) \perp \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$. С помощью скалярного произведения последнее условие переписывается в виде $0 = \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = AA_1 + BB_1$. ■

Следствие 3. Если прямая a задается уравнением $y = k_1x + b_1$, а прямая b — уравнением $y = k_2x + b_2$, тогда

$$\cos \widehat{a, b} = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}\sqrt{k_2^2 + 1}}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что $y = k_1x + b_1$ тогда и только тогда, когда $k_1x - y + b_1 = 0$. Поэтому вектор $\vec{n}_1 = (k_1, -1)$ является нормалью к a . Аналогично, $\vec{n}_2 = (k_2, -1)$ — нормаль к b . Осталось применить формулу первого следствия. ■

Следствие 4. В условиях предыдущего следствия прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

Доказательство. Второе следствие для нормалей $\vec{n}_1 = (k_1, -1)$ и $\vec{n}_2 = (k_2, -1)$ переписывается в виде $k_1k_2 + 1 = 0$ или $k_1k_2 = -1$. ■

Еще одну формулу для нахождения угла между a и b можно получить, используя геометрический смысл коэффициента k в формуле $y = kx + b$, но прежде введем понятие угла наклона прямой к оси (OX) .

Определение. Если a — параллельная оси (OX) прямая, то величина угла наклона a к (OX) равна нулю. Иначе пусть $\{A\} = a \cap (OX)$ и $B(x_0, y_0) \in a$ такая, что $y_0 > 0$, $C \in (OX)$ такая, что $A < C$, то обычный угол $\angle BAC$ называется углом наклона¹ прямой a к оси (OX) (рис. 255).

Теорема 5.5. Если уравнение $y = kx + b$ является координатным уравнением прямой a и φ — величина УНПкПНООх для прямой a , то $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Доказательство. Так как прямые $y = kx + b$ и $y = kx$ параллельны (система $y = kx + b$ & $y = kx$ не имеет решений при $b \neq 0$), то достаточно

¹Будем использовать сокращение УНПкПНООх — угол наклона прямой к положительному направлению оси (OX) .



доказать утверждение для прямой a_1 с координатным уравнением $y = kx$. Пусть $E(1, 0)$ и $F(1, k)$. Заметим, что $F(1, k) \in a_1$. Далее рассмотрим два случая.

1-й случай: $k > 0$ (рис. 256). Из прямоугольного треугольника OEF получим $\operatorname{tg} \varphi = |EF|/|OE| = k$;

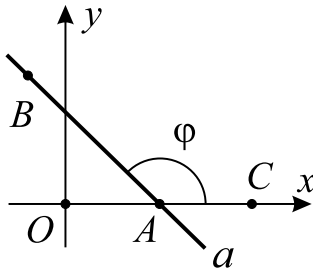


Рис. 255

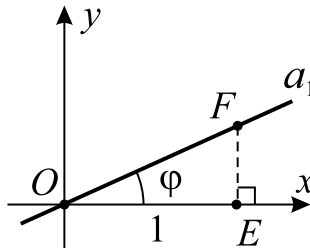


Рис. 256

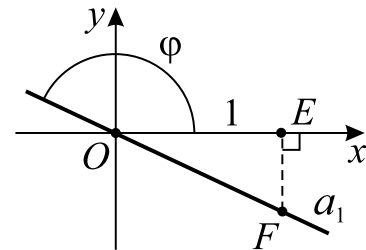


Рис. 257

2-й случай: $k < 0$ (рис. 257). Из прямоугольного треугольника OEF получим $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -|EF|/|OE| = -|EF| = -(-k) = k$.

Следствие. Пусть a задается уравнением $y = k_1x + b_1$, b — уравнением $y = k_2x + b_2$ и $k_1k_2 + 1 \neq 0$, тогда

$$\operatorname{tg} \widehat{a, b} = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|.$$

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение для прямых a_1 и b_1 , уравнения которых $y = k_1x$ и $y = k_2x$. Обозначим через φ — УНПКПНООх для прямой a_1 и ψ — УНПКПНООх для прямой b_1 , тогда $\widehat{a_1, b_1} = |\varphi - \psi|$ или $\widehat{a_1, b_1} = 180^\circ - |\varphi - \psi|$ (если $|\varphi - \psi| < 90^\circ$ или $|\varphi - \psi| > 90^\circ$ соответственно). Используя нечетность тангенса, получим

$$\operatorname{tg} \widehat{a_1, b_1} = \left| \operatorname{tg} |\varphi - \psi| \right| = \left| \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \right| = \left| \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi} \right| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right|.$$

Упражнения

1. Приведите доказательства утверждений этого подраздела.
2. Докажите, что уравнение $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ задает на плоскости некоторую прямую (для любых $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Найдите координаты вектора нормали и определите длины отрезков, которые отсекаются этой прямой от координатных осей.



3. При каких условиях на коэффициенты уравнения $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ описывают одну и ту же прямую?
4. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнений $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, чтобы задаваемые ими прямые были параллельны?
5. Известно, что две различные прямые $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ пересекаются в некоторой точке P . Какой вид имеют координатные формулы тех прямых, которые проходят через точку P ? Подсказка: докажите, что прямая $Dx + Ey + G = 0$ проходит через точку P тогда и только тогда, когда существуют такие $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$), что $Dx + Ey + G = \lambda \cdot (Ax + By + C) + \mu \cdot (A_1x + B_1y + C_1)$.
6. Напишите координатное уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 2)$ и составляющей с прямой $y = x$ угол в 45° .
7. Введите понятие отклонения точки от прямой и выясните, пересекает ли прямая $y = x/13 + 13$ отрезок MN , где $M(1, 13)$ и $N(13, 15)$.

5.6. Нахождение расстояния между фигурами

Прежде чем дать определение расстоянию между произвольными фигурами в пространстве, остановимся на некоторых свойствах числовых множеств.

Определение. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$. Множество S называется *ограниченным снизу*, если существует такое число $m \in \mathbb{R}$, что для всех $s \in S$ выполняется $m \leq s$. При этом m называется *нижней границей* S .

Заметим, что если m — нижняя граница множества S , то любое число $m_1 \leq m$ также является нижней границей S . Поэтому особый интерес представляет наибольшая из нижних границ данного множества.

Определение. Если S ограничено снизу, то наибольшая из нижних границ этого множества называется *точной нижней границей* S и обозначается $\inf S$ (от лат. *infimum* — наинизшее).

Так, например, $\inf[0, 1] = 0$, $\inf(0, \infty) = 0$, $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Вопрос существования точной нижней границы произвольного непустого и ограниченного снизу числового множества решается положительно. Этот результат является одной из основных теорем математического анализа и будет доказан в одиннадцатом классе. Здесь мы рассмотрим только одно важное геометрическое приложение точной нижней границы для определения расстояния между фигурами.



Определение. Пусть Φ_1, Φ_2 — две произвольные непустые фигуры плоскости или пространства. Расстоянием между этими фигурами называется число

$$d(\Phi_1, \Phi_2) = \inf\{|AB| : A \in \Phi_1, B \in \Phi_2\}.$$

Заметим, что числовое множество $S = \{|AB| : A \in \Phi_1, B \in \Phi_2\}$ ограничено снизу (например, нулем), поэтому последнее определение является корректным. Договоримся, что если одна из фигур является точкой, то вместо записи $d(\{A\}, \Phi_2)$ будем использовать $d(A, \Phi_2)$.

Лемма 6.1. 1) если $\emptyset \neq S_1 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ и m — нижняя граница S , то m одновременно является нижней границей и для S_1 .

2) если $S_1 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$, $S_1 \neq \emptyset$ и S ограничено снизу, то $\inf S \leq \inf S_1$.

3) если $\Phi_3 \subseteq \Phi_1 \subseteq \mathbb{P}_3$, $\Phi_4 \subseteq \Phi_2 \subseteq \mathbb{P}_3$ и $\Phi_3 \neq \emptyset$, $\Phi_4 \neq \emptyset$, то выполняется неравенство $d(\Phi_1, \Phi_2) \leq d(\Phi_3, \Phi_4)$.

Доказательство. 1) если $s_1 \in S_1$, то $s_1 \in S$, поэтому $m \leq s_1$. Поэтому для любого $s_1 \in S_1$ имеем $m \leq s_1$. Следовательно, m — нижняя граница множества S_1 .

2) из (1) следует, что множество S_1 также ограничено снизу. Кроме того, каждая нижняя граница множества S (в том числе и точная нижняя граница, т.е. $\inf S$) является некоторой нижней границей множества S_1 . Поэтому справедливо неравенство $\inf S \leq \inf S_1$.

3) рассмотрим два числовых множества: $S = \{|XY| : X \in \Phi_1, Y \in \Phi_2\}$ и $S_1 = \{|X_1Y_1| : X_1 \in \Phi_3, Y_1 \in \Phi_4\}$. Тогда из условия следует, что $S_1 \neq \emptyset$ и $S_1 \subseteq S$. По предыдущему пункту получаем, что $\inf S \leq \inf S_1$, откуда следует, что $d(\Phi_1, \Phi_2) \leq d(\Phi_3, \Phi_4)$. ■

Определение. Расстояние между непустыми фигурами Φ_1, Φ_2 достигается, если найдутся такие точки $A^* \in \Phi_1$ и $B^* \in \Phi_2$, что $d(\Phi_1, \Phi_2) = |A^*B^*|$. В этом случае говорят, что расстояние достигается на паре точек A^* и B^* .

Следствие. Расстояние между непустыми фигурами Φ_1, Φ_2 достигается тогда и только тогда, когда найдутся такие точки $A_0 \in \Phi_1$ и $B_0 \in \Phi_2$, что для любых $A \in \Phi_1$ и $B \in \Phi_2$ верно $|AB| \geq |A_0B_0|$.

Доказательство. $\Rightarrow$) если расстояние достигается на паре точек $A^* \in \Phi_1$ и $B^* \in \Phi_2$, то из $d(\Phi_1, \Phi_2) = |A^*B^*|$ и определения расстояния следует, что $|A^*B^*| \leq |AB|$ для любых $A \in \Phi_1$ и $B \in \Phi_2$, поэтому $A_0 = A^*$ и $B_0 = B^*$ — искомые.



$\Leftarrow$) пусть $\Phi_3 = \{A_0\}$ и $\Phi_4 = \{B_0\}$. Из условия получаем, что $m_0 = d(\Phi_3, \Phi_4) = |A_0B_0|$ — некоторая нижняя граница числового множества $S = \{|XY| : X \in \Phi_1, Y \in \Phi_2\}$, поэтому $m_0 \leq m = \inf S$ (*).

С другой стороны, из $\Phi_3 \subseteq \Phi_1$, $\Phi_4 \subseteq \Phi_2$ и третьего утверждения леммы, получим $m = d(\Phi_1, \Phi_2) \leq d(\Phi_3, \Phi_4) = m_0$ (**).

Из (*) и (**) получаем, что $d(\Phi_1, \Phi_2) = m = m_0 = |A_0B_0|$, поэтому расстояние между фигурами Φ_1 и Φ_2 достигается на паре точек A_0 и B_0 . ■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Докажите, что $d(\{O\}, Sph(O, R)) = R$.

Решение. Это так, поскольку для любой точки $A \in Sph(O, R)$ выполняется $|OA| = R$.

Пример 2. Докажите, что $d(A, a) = |AA'|$, где $A' = \text{Пр}_a(A)$ (рис 258).

Решение. При $A \in a$ утверждение очевидно, а при $A \notin a$ доказательство использует тот факт, что длина гипотенузы AB треугольника ABA' , для любой точки $B \in a \setminus \{A'\}$ больше длины катета AA' , поэтому $|AB| \geq |AA'|$ для всех $B \in a$. По следствию $d(A, a) = \inf\{|AB| : B \in a\} = |AA'|$.

Пример 3. Докажите, что если $a \parallel b$, то $d(a, b) = |BB'|$, где $B \in a$ и $B' = \text{Пр}_b(B)$ (рис. 259).

Решение. Рассмотрим произвольные $X \in a$ и $Y \in b$. По следствию достаточно показать, что $|XY| \geq |BB'|$. Пусть $X' = \text{Пр}_b(X)$, тогда из предыдущего примера получаем, что $|YX| \geq |XX'| = |BB'|$. Последнее равенство следует из условия $a \parallel b$.

Пример 4. Докажите, что если $a \parallel \alpha$, то $d(a, \alpha) = |AA'|$, где $A \in a$ и $A' = \text{Пр}_\alpha(A)$ (рис. 260).

Решение. Доказательство повторяет решение предыдущего примера.

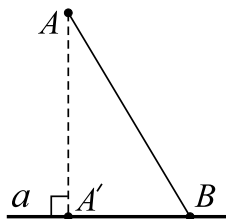


Рис. 258

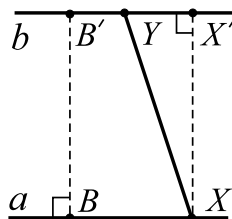


Рис. 259

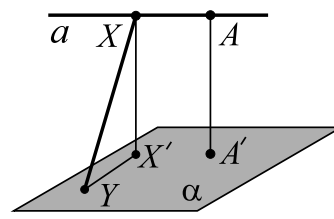


Рис. 260

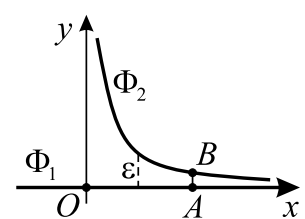


Рис. 261

Общим свойством рассмотренных выше примеров является то, что расстояние $d(\Phi_1, \Phi_2)$ всегда достигалось. В следующем примере приведены две фигуры, расстояние между которыми не достигается.



Пример 5. Пусть Φ_1 — ось абсцисс, Φ_2 — одна из веток гиперболы $y = 1/x$ (рис. 261), тогда расстояние между Φ_1 и Φ_2 не достигается.

Решение. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $A \in \Phi_1$ и $B \in \Phi_2$, что $|AB| < \varepsilon$. Это означает, что ε не является нижней границей для числового множества $\{|XY| : X \in \Phi_1, Y \in \Phi_2\}$. Поэтому $d(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. Но если бы это расстояние достигалось, то нашлась общая точка у Φ_1 и Φ_2 , чего не может быть (так как у уравнения $1/x = 0$ нет корней).

Нашей ближайшей задачей является доказательство того, что между скрещивающимися прямыми расстояние всегда достигается. Напомним, что скрещивающимися называются такие две прямые a и b , которые не пересекаются и не параллельны (обозначаются $a \nparallel b$).

Теорема 6.2. Если $a \nparallel b$, то существует и единственна такая прямая c , что $c \perp a$, $c \perp b$ и одновременно пересекающая обе эти прямые.

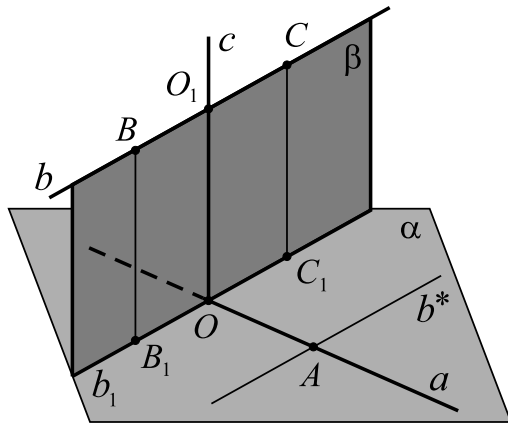


Рис. 262

Доказательство. I. Существование.

Выберем произвольную точку $A \in a$, и проведем через нее прямую b^* так, чтобы $b^* \parallel b$ (рис. 262). Тогда прямые a и b^* пересекаются и не совпадают, следовательно, они определяют плоскость $\alpha = (a, b^*)$. Далее произвольно выберем различные точки $B, C \in b$ и спроектируем их на плоскость α : $B_1 = \text{Пр}_\alpha(B)$, $C_1 = \text{Пр}_\alpha(C)$. Пусть теперь $b_1 = (B_1C_1)$. Обозначим через O точку пересечения $a \cap b_1$ и проведем через эту точку прямую c , перпендикулярную

α . Покажем, что прямая c — искомая. Так как $c \perp \alpha$, то $c \perp a$ и $c \perp b^*$, откуда $c \perp a$ и $c \perp b$. Кроме того, по построению $c \cap a \neq \emptyset$. Осталось доказать, что $c \cap b \neq \emptyset$. Заметим, что $c \parallel (BB_1)$ и $c \parallel (CC_1)$. В плоскости $\beta = (BB_1C_1C)$ также существует прямая с таким свойством, проходящая через O . Но эта прямая (по аксиоме Евклида о параллельных) единственна и в пространстве, поэтому $c \subseteq \beta$. Следовательно, $c \cap b \neq \emptyset$.

II. Единственность. Сохраняя ранее принятые обозначения, предположим противное, т.е. что существует еще одна прямая d с такими же свойствами и $d \neq c$. Так как $d \perp a$ и $d \perp b$, то $d \perp \alpha$, откуда $d \parallel c$ (например, можно использовать теорему 3.2). Пусть $d \cap b = \{D\}$, тогда $D \neq O_1$, где $\{O_1\} = c \cap b$ (иначе из-за $d \parallel c$ следовало бы $d = c$). Поскольку



$d \parallel c$ и $c \subseteq \beta$, получим $d \parallel \beta$, но $D \in d \cap \beta$, поэтому $d \subseteq \beta$. Тогда $d \cap a \subseteq \beta \cap a = \{O\}$, откуда $O \in d \cap c$ и $d = c$. ∇ .

Следствие. Пусть $a \dot{\perp} b$ и c — прямая из предыдущей теоремы. Пусть также $\{O\} = c \cap a$ и $\{O_1\} = c \cap b$. Тогда $d(a, b) = |OO_1|$.

Доказательство. Сохраним обозначения предыдущей теоремы. Из леммы 6.1 получаем, что $d(b, \alpha) \leq d(a, b)$. Так как $b \parallel \alpha$ (поскольку $b \parallel b^*$ и $b^* \subseteq \alpha$), то $d(b, \alpha) = |OO_1|$, поэтому $d(a, b) \geq |OO_1|$. Но, $\{O\} \subseteq a$, $\{O_1\} \subseteq b$ и, снова используя ту же лемму, получаем, что $d(a, b) \leq |OO_1|$. Следовательно, $d(a, b) = |OO_1|$.

Из предыдущего следствия также можно установить следующий результат: если $a \dot{\perp} b$ и плоскость α такая, что $a \subseteq \alpha$ и $b \parallel \alpha$, то выполняются равенства $d(a, b) = d(b, \alpha) = d(B, \alpha)$, где $B \in b$. Таким образом, достаточно найти расстояние от произвольной точки прямой b до плоскости α . Этот факт используется в следующем алгоритме нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

Алгоритм I (для определения расстояния между скрещивающимися прямыми). Пусть прямая a имеет вектор $\vec{u} = (l, m, n)$ своим направляющим вектором и проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть также прямая b проходит через $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и ее направляющий вектор равен $\vec{v} = (l_1, m_1, n_1)$. Тогда для нахождения $d(a, b)$ достаточно:

1. Записать координатное уравнение такой плоскости α , что $a \subseteq \alpha$ и $\alpha \parallel b$. Для этого необходимо:

- (а) найти координаты ненулевого вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярного одновременно и $\vec{u} = (l, m, n)$, и $\vec{v} = (l_1, m_1, n_1)$. Координаты (A, B, C) определяются из системы

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0, \\ A \cdot l_1 + B \cdot m_1 + C \cdot n_1 = 0; \end{cases}$$

- (б) записать уравнение плоскости α с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. Найти расстояние от произвольной точки прямой b , например, от точки



$M_1(x_1, y_1, z_1)$, до плоскости α . В результате получается

$$d(a, b) = d(M_1, \alpha) = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 6. Дан куб $EFGHE_1F_1G_1H_1$, длина ребра которого равна a . Найти расстояние между прямыми (EH_1) и (G_1K) , где K — середина ребра $[HG]$.

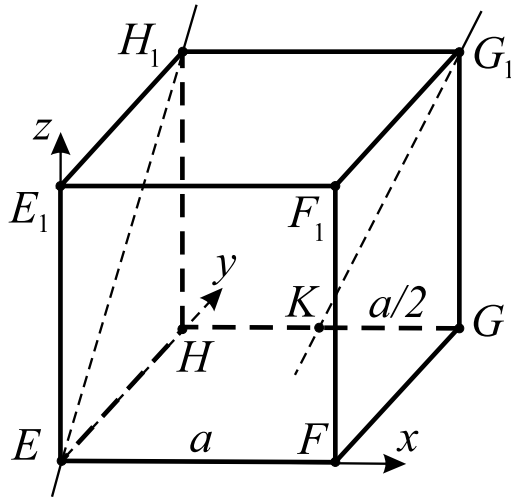


Рис. 263

Решение. Введем декартову систему координат с началом в E и $\vec{i} \parallel \vec{EF}$, $\vec{j} \parallel \vec{EH}$, $\vec{k} \parallel \vec{EE}_1$ (рис. 263). Найдем координаты направляющих векторов прямых EH_1 и G_1K : $\vec{EH}_1 = (0, a, a)$, $\vec{G_1K} = \vec{EK} - \vec{EG_1} = (a/2, a, 0) - (a, a, a) = (-a/2, 0, -a)$. Определим координаты $\vec{n} = (A, B, C)$ — нормали к плоскости α , такой, что $(EH_1) \subseteq \alpha$ и $(G_1K) \parallel \alpha$. Из условий $\vec{n} \cdot \vec{EH}_1 = 0$ и $\vec{n} \cdot \vec{G_1K} = 0$ получаем:

$$\begin{cases} aB + aC = 0, \\ -aA/2 - aC = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 0, \\ A/2 + C = 0. \end{cases}$$

Пусть $A = 2$, тогда $C = -1$ и $B = 1$. Итак, $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Так как $E(0, 0, 0) \in \alpha$, то одно из возможных координатных уравнений плоскости α имеет вид $2x + y - z = 0$. Осталось определить $d(b, \alpha)$ (здесь $b = (G_1K)$):

$$d(b, \alpha) = d(G_1, \alpha) = \frac{|2a + a - a|}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Напомним, что параметрическим заданием прямой a с направляющим вектором $\vec{u} = (l, m, n)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является следующая система:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \\ z = z_0 + \lambda n, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Чтобы найти точку пересечения прямой a с плоскостью α , координатное уравнение которой $Ax + By + Cz + D = 0$, достаточно добавить это уравнение



к системе и получить систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Полученная система легко решается, например, подстановкой x , y , z в добавленное уравнение плоскости, определением λ и обратной подстановкой найденного λ в первые три уравнения.

Это замечание технического характера, а также следующая лемма помогут в определении расстояния от точки до прямой в пространстве.

Лемма 6.3. Пусть $a \perp \alpha$ и $M^* \in \alpha$. Пусть также $\{M_1\} = \alpha \cap a$ (рис. 264), тогда выполняется, что $d(M^*, a) = |M^*M_1|$.

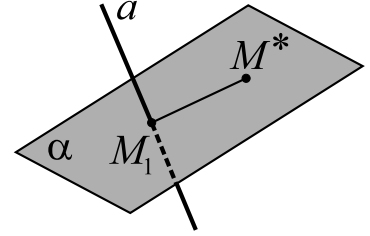


Рис. 264

Доказательство. Так как $a \perp \alpha$, то для любой $b \subseteq \alpha$ следует, что $a \perp b$, отсюда $a \perp (M^*M_1)$. Поэтому $M_1 = \text{Пр}_a(M^*)$ и $d(M^*, a) = |M^*M_1|$.

■

Алгоритм II (для определения расстояния от точки до прямой). Пусть $\vec{u} = (l, m, n)$ — направляющий вектор прямой a , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть также $M^* = (x^*, y^*, z^*)$ — произвольная точка пространства. Тогда для нахождения $d(M^*, a)$ достаточно:

1. Записать координатное уравнение такой плоскости α , что $M^* \in \alpha$ и $\alpha \perp a$. Учитывая, что $\vec{u} \perp \alpha$, получаем одно из возможных уравнений плоскости α : $l(x - x^*) + m(y - y^*) + n(z - z^*) = 0$.
2. Найти координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точки пересечения прямой a и плоскости α . Координаты (x_1, y_1, z_1) определяются из системы

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \\ z = z_0 + \lambda n, \\ l(x - x^*) + m(y - y^*) + n(z - z^*) = 0. \end{cases}$$

3. Найти расстояние $|M^*M_1|$ по формуле

$$|M^*M_1| = \sqrt{(x_1 - x^*)^2 + (y_1 - y^*)^2 + (z_1 - z^*)^2}.$$



Пример 7. Найти расстояние от вершины E куба $EFGHE_1F_1G_1H_1$, длина ребра которого равна a , до прямой H_1M , где M — центр грани FGG_1F_1 (рис. 265).

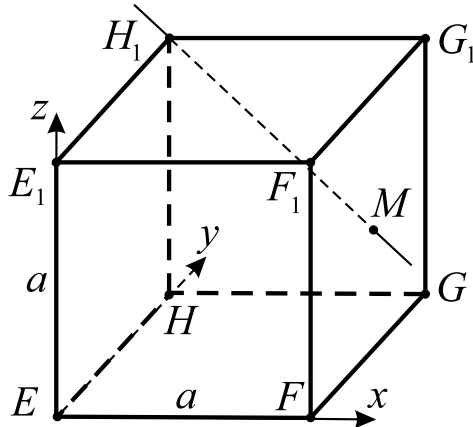


Рис. 265

Решение. Введем такую же координатную систему, как в предыдущем примере. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{H_1M} = \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{EH_1} = (a, a/2, a/2) - (0, a, a) = (a, -a/2, -a/2)$. Заметим, что $\vec{u} = (2, -1, -1) = \frac{a}{2}\overrightarrow{H_1M}$, поэтому $\vec{u}$ также является направляющим для (H_1M) . Уравнение плоскости α , проходящей через $E(0, 0, 0)$ и перпендикулярной $\vec{u}$, имеет вид $2x - y - z = 0$. Найдем координаты точки пересечения (H_1M) и α , для этого решим систему

$$\begin{cases} x = 0 + 2\lambda, \\ y = a - \lambda, \\ z = a - \lambda, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

В этой системе первые три уравнения параметрически задают прямую H_1M . Подставив x, y, z в четвертое уравнение, получим

$$4\lambda - a + \lambda - a + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = a/3 \Rightarrow x = 2a/3, y = z = 2a/3.$$

Определяем наконец расстояние от $E(0, 0, 0)$ до $M_1(2a/3, 2a/3, 2a/3)$:

$$d(E, (H_1M)) = |EM_1| = \sqrt{3 \cdot (2a/3)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Упражнения

1. Обладает ли любое подмножество вещественной прямой точной нижней гранью?
2. Найдите $\inf\{1 + 1/n : n \in \mathbb{N}\}$, $\inf\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Пусть точки M_1 и M_2 имеют координаты $(0, 4, 8)$ и $(1, 3, 7)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через эти точки и касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
4. Найдите длину ребра куба $EFGHE_1F_1G_1H_1$, если расстояние между прямыми (H_1M) и (KL) равно 2, где точки M и L — соответственно центры граней $EFGH$ и EGG_1E_1 , а точка K является серединой ребра G_1H_1 .



5. Найдите длину ребра куба $EFGHE_1F_1G_1H_1$, если расстояние от точки E до прямой KL (сохраняются обозначения предыдущего упражнения) равно 5.
6. Фигура в пространстве называется ограниченной, если она содержится в некотором шаре. Приведите пример двух ограниченных множеств, расстояние между которыми не достигается.
7. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда ε -окрестностью точки X (или окрестностью с радиусом ε) называется множество $O_\varepsilon(X) = \{Y : |XY| < \varepsilon\}$. Точка X называется граничной для множества Φ , если любая ее ε -окрестность одновременно пересекает и Φ , и $\overline{\Phi}$ (напомним, что $\overline{\Phi}$ обозначает дополнение до Φ). Фигура Φ называется замкнутой, если ей принадлежат все ее граничные точки. Попытайтесь доказать, что если Φ_1 и Φ_2 — два ограниченных замкнутых множества, то расстояние между ними всегда достигается.
8. Достигается ли расстояние между многоугольниками на плоскости (многогранниками в пространстве)?

5.7. Двугранный угол. Вычисление углов

Из аксиом порядка легко доказывается, что любая плоскость α разбивает пространство на два открытых полупространства, которые состоят из точек, лежащих по одну сторону от α (точки A и B лежат по одну сторону от α , если $[AB] \cap \alpha = \emptyset$). Теперь *полупространством* называется объединение плоскости α с одним из получившихся множеств, при этом α называется *границей полупространства*. Далее будем использовать обозначение $\mathbb{P}_3(\alpha, A)$ для полупространства с границей α , которое содержит $A \notin \alpha$, эта точка указывает, какое именно из двух полупространств рассматривается. В случае, когда нет необходимости уточнять, какое полупространство выбирается, будем использовать обозначение $\mathbb{P}_3(\alpha)$.

Определение. Пусть $\alpha \nparallel \beta$. Тогда выпуклым двугранным углом называется пересечение двух полупространств $\mathcal{V} = P(\alpha) \cap P(\beta)$ (рис. 266).

Использование термина *выпуклый* в этом определении не случайно, поскольку пересечение выпуклых множеств, какими являются полупространства, — выпуклое множество. Прямая a , по которой пересекаются плоскости α и β , называется *ребром* выпуклого двугранного угла. Кроме того, эта прямая делит каждую из плоскостей α и β на две полуплоскости, и те из них, которые содержатся в $\mathcal{V}$, называются *гранями* этого выпуклого двугранного угла. Полуплоскость с ребром a будем обозначать $\alpha(a)$. Таким образом, если $\alpha(a) \subseteq \mathcal{V}$, то $\alpha(a)$ — одна из двух граней $\mathcal{V}$. Нетрудно



заметить, что, используя другие сочетания полупространств, на которые разбивают всё пространство плоскости α и β , можно получить всего четыре выпуклых двугранных угла.

К выпуклым двугранным углам мы добавим еще два типа углов, которые получаются при условии $\alpha = \beta$. Так, если полуплоскости $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ совпадают, и полупространства $\mathbb{P}_3(\alpha)$ и $\mathbb{P}_3(\beta)$ выбраны различными, то множество $\mathbb{P}_3(\alpha) \cap \mathbb{P}_3(\beta)$ называется *вырожденным* двугранным углом (рис. 267). Легко заметить, что вырожденный двугранный угол совпадает со своими гранями, т.е. $\mathbb{P}_3(\alpha) \cap \mathbb{P}_3(\beta) = \alpha(a) = \beta(a)$. Если $\alpha = \beta$ и $\alpha(a) \neq \beta(a)$, и, кроме того, полупространства $\mathbb{P}_3(\alpha)$ и $\mathbb{P}_3(\beta)$ выбраны одинаковыми, то множество $\mathbb{P}_3(\alpha) \cap \mathbb{P}_3(\beta)$ называется *развернутым* двугранным углом (рис. 268). Вырожденный и развернутый двугранные углы мы также будем называть выпуклыми двугранными углами.

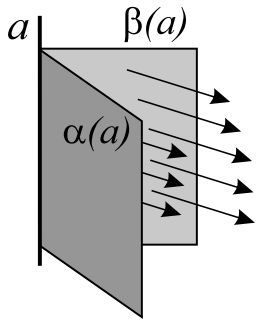


Рис. 266

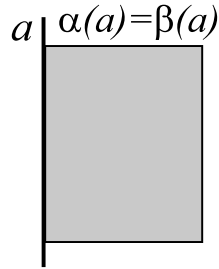


Рис. 267

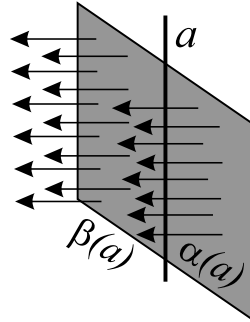


Рис. 268

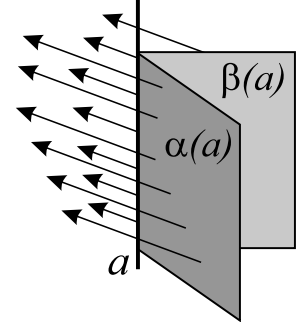


Рис. 269

Определение. Множество всех точек пространства, не принадлежащих выпуклому двугранному углу $\mathcal{V}$, объединенное с гранями $\mathcal{V}$, называется *дополнительным к $\mathcal{V}$ двугранным углом* и обозначается $\mathcal{V}'$ (рис. 269).

Так, если $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ — грани $\mathcal{V}$ и $\mathbb{P}_3$ — все пространство, то $\mathcal{V}' = (\mathbb{P}_3 \setminus \mathcal{V}) \cup (\alpha(a) \cup \beta(a))$. При этом $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ называются *гранями $\mathcal{V}'$* , и прямая $a = \alpha \cap \beta$ называется его *ребром*. Таким образом, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$ пересекаются только по своим граням.

Определение. Двугранным углом $\mathcal{D}$ в пространстве называют или выпуклый двугранный угол, или дополнительный к выпуклому двугранный угол.

Итак, $\mathcal{D} = \mathcal{V}$ или $\mathcal{D} = \mathcal{V}'$. В обоих случаях существуют две полуплоскости $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ — грани $\mathcal{D}$. И прямая a , являющаяся ребром $\mathcal{D}$.

Определение. Пусть a — ребро $\mathcal{D}$, $\alpha(a)$ и $\beta(a)$ — его грани. Пусть также $O \in a$, $A \in \alpha(a)$, $B \in \beta(a)$ — различные точки, такие, что $(OA) \perp a$ и $(OB) \perp a$. Тогда угол, образованный лучами $[OA)$ и $[OB)$ и содержащийся



в $\mathcal{D}$, называется линейным углом двугранного угла $\mathcal{D}$ (рис. 270). Величиной $\mathcal{D}$ называется величина его линейного угла.

Например, величина вырожденного угла равна нулю, развернутого — 180° , величины двугранных углов при ребрах куба равны 90° (если рассматриваются двугранные углы, в которых содержится этот куб).

Величина двугранного угла не зависит от выбора точки $O \in a$. Так, выбрав другие точки $O_1 \in a$, $A_1 \in \alpha(a)$, $B_1 \in \beta(a)$ с условием $(O_1A_1) \perp a$ и $(O_1B_1) \perp a$, получаем, что $[OA) \uparrow [O_1A_1)$ и $[OB) \uparrow [O_1B_1)$, следовательно, $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$.

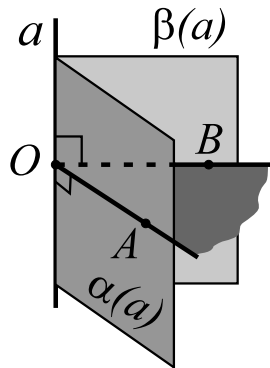


Рис. 270

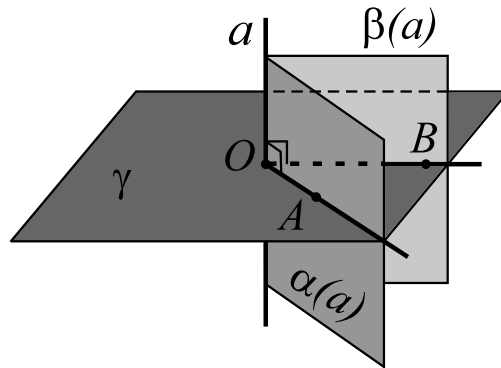


Рис. 271

Теорема 7.1. Пусть a — ребро двугранного угла $\mathcal{D}$ и γ — плоскость, которая перпендикулярна a . Тогда $\mathcal{D} \cap \gamma$ является линейным углом $\mathcal{D}$.

Доказательство. Обозначим грани $\mathcal{D}$ через $\alpha(a)$ и $\beta(a)$, где a — ребро $\mathcal{D}$ (рис. 271). Тогда $\gamma \cap \alpha(a)$ и $\gamma \cap \beta(a)$ — лучи в каждой из граней $\mathcal{D}$. Достаточно показать, что каждый из этих лучей перпендикулярен a . Пусть $[OA) = \gamma \cap \alpha(a)$. Так как $\gamma \perp a$, то любая прямая в плоскости γ перпендикулярна a , следовательно, $(OA) \perp a$. Аналогично $(OB) \perp a$, где $[OB) = \gamma \cap \beta(a)$. То, что $\angle AOB$ содержится в $\mathcal{D}$ сразу следует из его определения. ■

Величина двугранного угла используется для определения величины угла между двумя плоскостями.

Определение. Пусть $\alpha \nparallel \beta$. Тогда углом между α и β (обозначается $\angle \alpha, \beta$) называется наименьший по величине двугранный угол, образованных этими плоскостями. Величина этого двугранного угла называется величиной угла между плоскостями и обозначается $\widehat{\alpha, \beta}$. Если $\alpha \parallel \beta$, будем по определению считать, что $\widehat{\alpha, \beta} = 0^\circ$. Плоскости α и β называются перпендикулярными, если $\widehat{\alpha, \beta} = 90^\circ$ (обозначение: $\alpha \perp \beta$).



Легко заметить, что величина угла между плоскостями изменяется в пределах $0^\circ \leq \widehat{\alpha, \beta} \leq 90^\circ$. Кроме того, угол между плоскостями тесно связан с углом между нормальными к этим плоскостям. Но прежде докажем вспомогательное утверждение о перпендикулярных плоскостях.

Лемма 7.2. 1) пусть $a \subseteq \alpha$ и $a \perp \gamma$, тогда $\alpha \perp \gamma$.
2) пусть $\vec{n}$ — нормаль к α и $\gamma \perp \alpha$. Тогда $\vec{n} \parallel \gamma$.

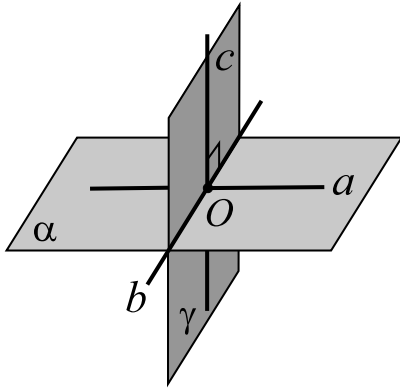


Рис. 272

Доказательство. 1) сразу заметим, что $\alpha \nparallel \gamma$ (иначе $a \parallel \gamma$). Тогда обозначим через b прямую $\alpha \cap \gamma$ (рис. 272). Так как $b \subseteq \gamma$, то $b \perp a$. Пусть также $\{O\} = a \cap b$ (a и b пересекаются, так как содержатся в α и $b \nparallel a$). Выберем прямую $c \subseteq \gamma$ так, чтобы выполнялось $O \in c$ и $c \perp b$, тогда из определения величины двугранного угла получим $\widehat{\alpha, \gamma} = \widehat{a, c}$. Но $c \subseteq \gamma$, поэтому $c \perp a$. Следовательно, $\widehat{\alpha, \gamma} = 90^\circ$.

2) пусть $\gamma \perp \alpha$ и $\vec{n} \perp \alpha$. Сохраним предыдущие обозначения: $b = \gamma \cap \alpha$, $a \subseteq \alpha$ и $a \perp b$, $\{O\} = a \cap b$, $c \subseteq \gamma$ и $O \in c$, $c \perp b$. Так как $\alpha \perp \gamma$, то $c \perp a$. Получаем, что $c \perp b$ и $c \perp a$. Выберем направляющие векторы этих трех прямых: $\vec{u} \parallel a$, $\vec{v} \parallel b$, $\vec{w} \parallel c$. Тогда $\vec{w} \perp \vec{u}$ и $\vec{w} \perp \vec{v}$. Так как $\vec{u}, \vec{v}$ — базис плоскости α , то по теореме 3.1 следует, что $\vec{w}$ — нормаль к α . Так как $\vec{n} \perp \alpha$, то по теореме 3.2 получаем, что $\vec{w} \parallel \vec{n}$, откуда $\vec{n} \parallel c$ и $\vec{n} \parallel \gamma$. ■

Теорема 7.3. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$ и $\vec{n}_1 \perp \beta$. Тогда $\cos \widehat{\alpha, \beta} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}|$.

Доказательство. Если $\alpha \parallel \beta$, то доказательство очевидно. Если $\alpha \nparallel \beta$, обозначим через c пересечение α и β . Пусть $\gamma \perp c$ и $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$. Тогда из теоремы 7.1 и из определения угла между плоскостями следует, что $\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{a, b}$. Так как $\gamma \perp c$, то по предыдущей лемме $\gamma \perp \alpha$ и $\vec{n} \parallel \gamma$. Если $\vec{u}$ — направляющий вектор прямой a , то $\vec{u} \parallel \alpha$ и $\vec{u} \perp \vec{n}$ (так как $\vec{n} \perp \alpha$). Из условий $\vec{u} \perp \vec{n}$ и $\vec{n} \parallel \gamma$ получаем, что $\vec{n}$ является нормалью к a в плоскости γ . Аналогично $\vec{n}_1$ — нормаль к b в плоскости γ . Наконец, из теоремы 5.4 имеем равенство $\cos \widehat{a, b} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}|$. ■

Следствие. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ является координатным



уравнением плоскости α , и $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ — координатное уравнение β , тогда

$$\cos \widehat{\alpha, \beta} = \frac{|AA_1 + BB_1 + CC_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Доказательство. Эта формула следует из равенства

$$\cos \widehat{\alpha, \beta} = |\cos \widehat{\vec{n}, \vec{n}_1}| = \frac{|(\vec{n}, \vec{n}_1)|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|}.$$

В заключительной части этого подраздела введем понятие угла между прямой и плоскостью и укажем способ нахождения его величины, используя координаты нормали к плоскости и направляющего вектора прямой. Напомним, что прямая a , не перпендикулярная плоскости α и не параллельная ей, называется наклонной к этой плоскости. Для такой прямой однозначно определяется ее проекция (или ортогональная проекция) на плоскость α — прямая $a' = \text{Пр}_\alpha(a)$.

Определение. Углом между наклонной a к плоскости α и этой плоскостью называется угол между a и проекцией прямой a на α (обозначается $\angle a, \alpha$). Его величину обозначают через $\widehat{a, \alpha}$. Если $a \parallel \alpha$, то по определению считаем $\widehat{a, \alpha} = 0^\circ$. Если же $a \perp \alpha$, то $\widehat{a, \alpha} = 90^\circ$.

Теорема 7.4. Пусть $\vec{n} \perp \alpha$ и $\vec{u}$ — направляющий вектор прямой a (рис. 273). Тогда

$$\sin \widehat{a, \alpha} = |\cos \widehat{\vec{u}, \vec{n}}|.$$

Доказательство. Если $a \parallel \alpha$ или $a \perp \alpha$, то доказательство очевидно. Иначе, обозначим через $a' = \text{Пр}_\alpha(a)$ и $\beta = (a, a')$. Тогда $\vec{n} \parallel \beta$. Отложив вектор $\vec{n}$ от точки O ($\{O\} = a \cap \alpha$) получаем, что

$$\widehat{a, a'} = \begin{cases} 90^\circ - \widehat{\vec{u}, \vec{n}}, & \text{если } \widehat{\vec{u}, \vec{n}} \leq 90^\circ, \\ \widehat{\vec{u}, \vec{n}} - 90^\circ, & \text{если } \widehat{\vec{u}, \vec{n}} \geq 90^\circ. \end{cases}$$

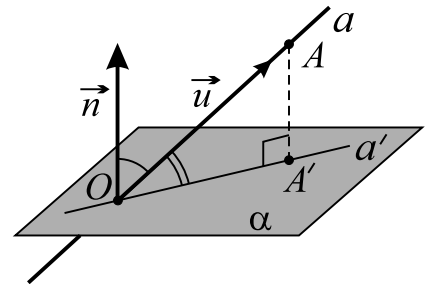


Рис. 273

В первом случае $\sin \widehat{a, a'} = \cos \widehat{\vec{u}, \vec{n}}$, во втором — $\sin \widehat{a, a'} = -\cos \widehat{\vec{u}, \vec{n}}$. Учитывая, что всегда $\sin \widehat{a, a'} \geq 0$, имеем заключительные равенства $\sin \widehat{a, \alpha} = \sin \widehat{a, a'} = |\cos \widehat{\vec{u}, \vec{n}}|$.



Следствие. Если $Ax + By + Cz + D = 0$ является координатным уравнением плоскости α и $\vec{u} = (l, m, n)$ — направляющий вектор прямой a , то

$$\sin \widehat{a, \alpha} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Доказательство. Это следует из равенств

$$\sin \widehat{a, \alpha} = |\cos \widehat{\vec{u}, \vec{n}}| = \frac{|(\vec{u}, \vec{n})|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

■

Упражнения

1. Покажите, что вырожденный и развернутый двугранные углы являются выпуклыми множествами.
2. Докажите, что двугранный угол является выпуклым тогда и только тогда, когда его величина не превосходит 180° .
3. Докажите, что если $\alpha \perp \beta$, то в плоскости α существует прямая a , перпендикулярная β .
4. Найдите угол между плоскостями α и β , координатные уравнения которых $2x + 1 = 0$ и $3x - 4y - 1 = 0$.
5. Какие из следующих плоскостей перпендикулярны друг другу: $3x - 2y + z - 5 = 0$, $2x + 5y + 4z + 7 = 0$, $x - 2y + 2z - 3 = 0$?
6. Пусть $\alpha \nparallel \beta$ и $\widehat{\alpha, \beta} = \varphi$. Докажите, что множество точек пространства, равноудаленных от α и β , состоит из двух плоскостей (они называются *биссекторными* для α и β). Найдите угол между биссекторными плоскостями и между каждой из биссекторных плоскостей и α .
7. Докажите, что если ортогональные проекции отрезка AB на плоскости α и β ($\alpha \nparallel \beta$) совпадают по длине, то прямая (AB) параллельна одной из биссекторных плоскостей.
8. Выпуклый двугранный угол $\mathcal{V}$ имеет величину φ . В каких пределах может изменяться угол между прямой в плоскости одной грани и другой гранью этого угла?

5.8. Координатные формулы движений плоскости

Напомним, что множество всех движений плоскости обозначают через D_2 . Теорема Шаля-Д'Аламбера утверждает, что $f \in D_2$ тогда и только тогда,



когда f является одним из четырех типов движений: параллельным переносом, поворотом, осевой или скользящей симметрией. Образ точки M при движении f будем обозначать через M' , т.е. $M' = f(M)$. Пусть известно, что точка M имеет координаты (x, y) . Как определить координаты образа — точки $M'(x', y')$, зная координаты M и вид движения f ? Ответом будут координатные формулы каждого из четырех типов движений.

Определение. Пусть M имеет координаты (x, y) и $f(M) = M'(x', y')$, тогда уравнения системы

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases}$$

где f_1 и f_2 — некоторые числовые функции, называются координатными формулами движения f .

Наиболее простые координатные формулы имеет параллельный перенос $T_{\vec{u}}$ (напомним, что $T_{\vec{u}}(M) = M'$, если $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$).

Теорема 8.1. Пусть $\vec{u} = (x_0, y_0)$, точки M и M' имеют соответственно координаты (x, y) и (x', y') . Тогда, если $T_{\vec{u}}(M) = M'$, то выполняется:

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно определить координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM'}$, которые и будут по определению координатами точки M' .

Из определения параллельного переноса получаем, что $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, откуда $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \vec{u}$ или $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$ (рис. 274). Переписывая последнее уравнение в координатах, имеем равенство упорядоченных пар $(x', y') = (x, y) + (x_0, y_0)$.

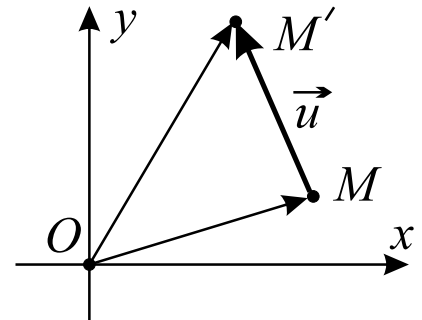


Рис. 274

Поворот с центром O на угол φ обозначим через R_O^φ . Найдем координатные формулы произвольного поворота, центр которого находится в начале координат.

Теорема 8.2. Пусть точки M и M' имеют соответственно координаты (x, y) и (x', y') (рис 275). Если известно, что $M' = R_O^\varphi(M)$, то



координатные формулы R_O^φ имеют вид

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases}$$

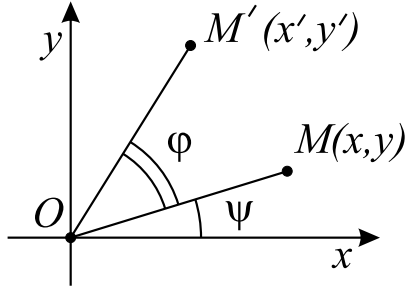


Рис. 275

Доказательство. Обозначим через ψ величину угла $\angle MOX$ (где $X(0, 1)$) и выразим координаты точки M через ψ и длину отрезка OM . Получаем: $x = |OM| \cos \psi$ и $y = |OM| \sin \psi$.

Если $M' = R_O^\varphi(M)$, то $\widehat{M'OX} = \psi + \varphi$. Поэтому координаты точки M' находятся по формулам $x' = |OM'| \cos(\psi + \varphi)$ и $y' = |OM'| \sin(\psi + \varphi)$. Учитывая, что $|OM'| = |OM|$, получаем:

$$x' = |OM'| \cos(\psi + \varphi) = |OM| \cos \psi \cos \varphi - |OM| \sin \psi \sin \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi.$$

Аналогично

$$y' = |OM'| \sin(\psi + \varphi) = |OM| \cos \psi \sin \varphi + |OM| \sin \psi \cos \varphi = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

■

Осевую симметрию относительно прямой a обозначают через S_a . В следующей теореме описываются координатные формулы осевых симметрий, оси которых проходят через начало координат.

Теорема 8.3. Пусть a — прямая, проходящая через начало координат, а точки M и M' имеют координаты (x, y) и (x', y') и $M' = S_a(M)$. Тогда, если $a = (OY)$, то

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Если же a задается координатным уравнением $y = kx$, то

$$\begin{cases} x' = \frac{1-k^2}{1+k^2}x + \frac{2k}{1+k^2}y, \\ y' = \frac{2k}{1+k^2}x + \frac{k^2-1}{1+k^2}y. \end{cases}$$

Доказательство. Первое утверждение (когда прямая a совпадает с осью ординат) очевидно, поэтому докажем только вторую часть теоремы. Пусть K — середина отрезка MM' . Тогда $M' = S_a(M)$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ (где $\vec{u}$ — некоторый направляющий вектор прямой a)



и $K \in a$. Заметим, что точка K имеет координаты $\left(\frac{x'+x}{2}, \frac{y'+y}{2}\right)$. Одним из направляющих векторов прямой a является $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1, k)$, где $A(1, k)$ (легко проверить, что $A \in a$). Из условий $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$ и $K \in a$ получаем систему

$$\begin{cases} x' - x + ky' - ky = 0, \\ (y' + y)/2 = k(x' + x)/2. \end{cases}$$

Осталось получить зависимости x' и y' через x и y . Из второго уравнения выразим $y' = k(x' + x) - y$ и подставим это значение в первое уравнение системы. Находим, что

$$\begin{aligned} x' - x + k(k(x' + x) - y) - ky &= 0 \Leftrightarrow (1 + k^2)x' = (1 - k^2)x + 2ky \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x' &= \frac{1 - k^2}{1 + k^2}x + \frac{2k}{1 + k^2}y. \end{aligned}$$

Подставляя найденное значение x' в выражение для y' , получаем, что

$$y' = k \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}x + \frac{2k}{1 + k^2}y + x \right) - y = \frac{2k}{1 + k^2}x + \frac{k^2 - 1}{1 + k^2}y.$$

■

Следующая теорема по координатным формулам движения f и движения g позволит записать координатные формулы их композиции — $g \circ f$.

Теорема 8.4. Пусть f и g имеют следующие координатные формулы:

$$f \quad \begin{cases} x' = f_1(x, y), \\ y' = f_2(x, y), \end{cases} \quad g \quad \begin{cases} x' = g_1(x, y), \\ y' = g_2(x, y), \end{cases}$$

тогда координатными формулами композиции $g \circ f$ являются

$$\begin{cases} x' = g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)), \\ y' = g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)). \end{cases}$$

Доказательство. Для большей ясности немного изменим обозначения. Пусть точки M , M_1 и M_2 имеют соответственно координаты (x, y) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Пусть также $M_1 = f(M)$ и $M_2 = g(M_1)$. Необходимо выразить координаты M_2 через x и y . Так как $M_2 = g(M_1)$, то

$$\begin{cases} x_2 = g_1(x_1, y_1), \\ y_2 = g_2(x_1, y_1). \end{cases}$$



Из условия $M_1 = f(M)$ и координатных формул f , получаем, что

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x, y), \\ y_1 = f_2(x, y). \end{cases}$$

Подставив теперь x_1 и y_1 в выражения для x_2 и y_2 , окончательно имеем

$$\begin{cases} x_2 = g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)), \\ y_2 = g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)). \end{cases}$$

Осталось вернуться к ранее принятым обозначениям для координат образа: $M'(x', y') = M_2(x_2, y_2) = g(f(M))$. ■

Пример 1. Пусть $f = S_{(OX)}$ и $g = S_{(OY)}$. Записать координатные формулы композиции $g \circ f$.

Решение. Координатные формулы f и g имеют вид

$$f \quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \end{cases} \quad g \quad \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Таким образом, $f_1(x, y) = x$, $f_2(x, y) = -y$, $g_1(x, y) = -x$ и $g_2(x, y) = y$. Получаем, что $g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)) = g_1(x, -y) = -x$ (так как g_1 рассматривает только первую координату точки и меняет у нее знак). Аналогично $g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)) = g_2(x, -y) = -y$ (g_2 берет вторую координату и оставляет ее без изменения). В результате получаем такие координатные формулы для композиции $g \circ f$:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Кстати, результат легко угадывался, ведь композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями — это поворот вокруг точки пересечения на удвоенный угол между прямыми. В итоге получаем $R_O^{180^\circ} = Z_O$ — центральную симметрию относительно начала координат.

Пример 2. Пусть $\vec{u} = (x_0, y_0)$. Найти координатные формулы композиции $T_{\vec{u}} \circ R_O^\varphi$.

Решение. Нам уже известно, что

$$T_{\vec{u}} \quad \begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0, \end{cases} \quad R_O^\varphi \quad \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$



поэтому $f_1(x, y) = x \cos \varphi - y \sin \varphi$, $f_2(x, y) = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, $g_1(x, y) = x + x_0$ и $g_2(x, y) = y + y_0$. Отсюда

$$g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)) = g_1(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) = x \cos \varphi - y \sin \varphi + x_0.$$

Аналогично

$$g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)) = g_2(x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi) = x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0.$$

Поэтому координатные формулы композиции $T_{\vec{u}} \circ R_O^\varphi$ имеют вид

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + x_0, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + y_0. \end{cases}$$

Из теории движений плоскости известно, что $R_{O_1}^\varphi = T_{\vec{u}} \circ R_O^\varphi$ для подходящего вектора $\vec{u}$. Поэтому координатные формулы предыдущего примера описывают координатные формулы всех поворотов плоскости. Аналогично этому для любой прямой b плоскости существует параллельная ей прямая a , проходящая через начало координат, и существует такой вектор $\vec{u}$, что $S_b = T_{\vec{u}} \circ S_a$. Поэтому из теорем 8.4, 8.3 и 8.1 могут быть получены координатные формулы произвольной осевой или скользящей симметрии.

Упражнения

1. Запишите координатные формулы центральной симметрии Z_{O_1} , где $O_1(1, 2)$ (представьте Z_{O_1} в виде $T_{\vec{u}} \circ Z_O$ и воспользуйтесь первым примером).
2. Запишите координатные формулы центральной симметрии Z_{O_1} , где координаты центра O_1 равны (x_0, y_0) .
3. Определите координаты такого вектора $\vec{u}$, что $S_b = T_{\vec{u}} \circ S_a$, где координатные уравнения прямых b и a имеют соответственно вид $y = kx + p$ и $y = kx$.
4. Воспользовавшись результатом предыдущего упражнения, запишите координатные формулы S_b , если прямая b задается координатным уравнением $y = kx + p$.
5. Запишите координатные формулы скользящей симметрии $T_{\vec{u}} \circ S_b$, если $y = kx + p$ — координатное уравнение прямой, и вектор $\vec{u}$ имеет координаты (x_0, y_0) .
6. Определите координаты такого вектора $\vec{u}$, что $R_{O_1}^\varphi = T_{\vec{u}} \circ R_O^\varphi$ и точка O_1 имеет координаты (x_0, y_0) .
7. Найдите координатные формулы поворота $R_{O_1}^\varphi$, если координаты центра равны (x_0, y_0) .



5.9. Скалярное произведение в произвольном базисе

Введение ортонормированного базиса при решении задач нередко приводит к значительным вычислительным трудностям. Их подчас удается избежать с помощью базиса, который естественно связан с условиями задачи. Такой базис должен удовлетворять двум следующим условиям. Во-первых, можно найти попарные скалярные произведения векторов базиса (для этого достаточно знать длины векторов и косинусы углов между ними). И, во-вторых, относительно этого базиса легко определяются координаты векторов, связанных с искомыми значениями. В этом параграфе мы используем свойства скалярного произведения (параграф 1) и результаты предыдущей главы.

Таблица 1

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$	$(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$
$\vec{e}_2$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$	$(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$
$\vec{e}_3$	$(\vec{e}_3, \vec{e}_1)$	$(\vec{e}_3, \vec{e}_2)$	$(\vec{e}_3, \vec{e}_3)$

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис пространства и $a_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда таблицей умножения в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется таблица $T = (a_{ij})$, на пересечении i -й строки и j -го столбца которой находится элемент a_{ij} (табл. 1).

Формула следующей теоремы позволяет вычислить скалярное произведение векторов по их координатам относительно базиса с заданной таблицей умножения.

Теорема 9.1. Пусть для базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задана таблица умножения $T = (a_{ij})$. Если $\vec{u} = (\lambda_1, \mu_1, \eta_1)$ и $\vec{v} = (\lambda_2, \mu_2, \eta_2)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то скалярное произведение векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ вычисляется по формуле

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdot a_{11} + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \cdot a_{12} + \mu_1 \mu_2 \cdot a_{22} +$$

$$+ (\lambda_1 \eta_2 + \lambda_2 \eta_1) \cdot a_{13} + (\mu_1 \eta_2 + \eta_1 \mu_2) \cdot a_{23} + \eta_1 \eta_2 \cdot a_{33}.$$

Доказательство. Из разложения векторов $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3$ и $\vec{v} = \lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \eta_2 \vec{e}_3$ получим

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda_1 \vec{e}_1 + \mu_1 \vec{e}_2 + \eta_1 \vec{e}_3) \cdot (\lambda_2 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 + \eta_2 \vec{e}_3) =$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \cdot a_{11} + \lambda_1 \mu_2 \cdot a_{12} + \lambda_1 \eta_2 \cdot a_{13} + \mu_1 \lambda_2 \cdot a_{21} + \mu_1 \mu_2 \cdot a_{22} + \mu_1 \eta_2 \cdot a_{23} +$$

$$+ \eta_1 \lambda_2 \cdot a_{31} + \eta_1 \mu_2 \cdot a_{32} + \eta_1 \eta_2 \cdot a_{33}.$$



Учитывая, что $a_{ij} = a_{ji}$, получаем требуемый результат. ■

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дан правильный тетраэдр $ABCS$. Точки K , L и N являются соответственно серединами ребер $[CS]$, $[AB]$ и $[AS]$, а точка M — центр основания ABC . Найдём угол между прямыми (KL) и (MN) .

Решение. Будем считать, что длина ребра правильного тетраэдра $ABCS$ равна $6p$ (где $p > 0$). Базис определим следующим образом: $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}/6$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}/6$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AS}/6$ (рис. 276). Тогда длина любого базисного вектора равна p и табл. 2 будет таблицей умножения в этом базисе. Выразим векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{MN}$ через базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = 3\vec{e}_1 - 3(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

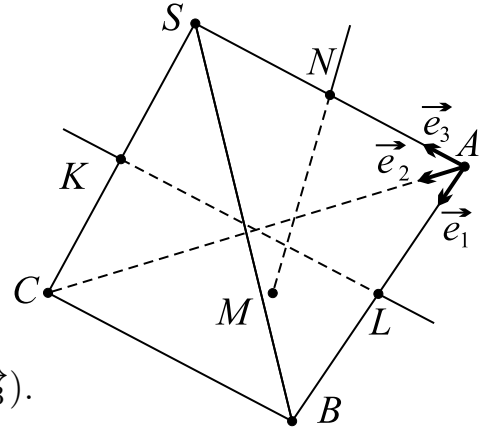


Рис. 276

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = 3\vec{e}_3 - \frac{1}{3}(6\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2) = 3\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2.$$

Обозначим через $\varphi = \widehat{(KL), (MN)}$ и определим косинус этого угла по формуле $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{KL}| \cdot |\overrightarrow{MN}|}$. Используя результат последней теоремы и табл. 2, находим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{MN} &= 3(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3)(3\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = \\ &= 3p^2 \left(\frac{3}{2} - 2 - 1 - \frac{3}{2} + 1 + 2 - 3 + 1 + 1 \right) = -3p^2; \\ |\overrightarrow{KL}| &= 3\sqrt{(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3)^2} = 3\sqrt{3p^2 - p^2 - p^2 + p^2} = 3p\sqrt{2}; \\ |\overrightarrow{MN}| &= \sqrt{(3\vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)^2} = \sqrt{17p^2 - 12p^2 + 4p^2} = 3p. \end{aligned}$$

Последнюю длину можно было определить проще: в прямоугольном треугольнике SMA медиана $[MN]$ равна половине гипотенузы $[SA]$.

Отсюда $\cos \varphi = \frac{3p^2}{3p \cdot 3p\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, т.е. $\varphi = \arccos(\sqrt{2}/6)$.



Таблица 2

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	p^2	$\frac{p^2}{2}$	$\frac{p^2}{2}$
$\vec{e}_2$	$\frac{p^2}{2}$	p^2	$\frac{p^2}{2}$
$\vec{e}_3$	$\frac{p^2}{2}$	$\frac{p^2}{2}$	p^2

Таблица 3

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	1	1/2	0
$\vec{e}_2$	1/2	1	0
$\vec{e}_3$	0	0	x^2

Таблица 4

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	4	2	2
$\vec{e}_2$	2	4	2
$\vec{e}_3$	2	2	4

В некоторых задачах таблица скалярного произведения содержит неизвестную. В таких случаях нужно составить уравнение относительно этой переменной. Разберем пример такой задачи.

Пример 2. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 1, точка K является серединой ребра $[AC]$. Необходимо найти высоту этой призмы, если длина проекции отрезка $[C_1K]$ на прямую (AB_1) также равна 1.

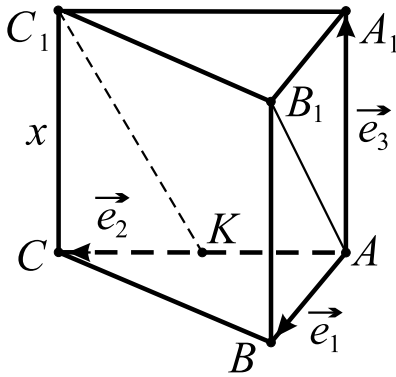


Рис. 277

Решение. Выберем в качестве базиса векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 277). Обозначим через $x = |\vec{e}_3|$, тогда табл. 3 — это таблица умножения в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Ортогональная проекция $[C_1K]$ на (AB_1) равна модулю числа $\text{Пр}_{\overrightarrow{AB_1}}(\overrightarrow{KC_1}) = \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{KC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}|}$. По теореме Пифагора находим $|\overrightarrow{AB_1}| = \sqrt{1 + x^2}$. Теперь разложим векторы $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{KC_1}$ по базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\overrightarrow{AB_1} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \overrightarrow{KC_1} = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Используя табл. 3, находим скалярное произведение

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{KC_1} = \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)(\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + 2x^2 \right) = \frac{1}{4} + x^2.$$

Мы получим уравнение

$$\frac{\frac{1}{4} + x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + x^2 = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x^4 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{15}{16} = 0,$$

откуда $x^2 = 5/4$ или $x^2 = -3/4$. Из этой совокупности находим единственное неотрицательное значение $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$.



Рассмотрим несколько основных типов задач на вычисление расстояний и углов в системе координат с заданной таблицей умножения.

Расстояние от точки до прямой

Предположим, что необходимо определить расстояние от точки P до прямой a с направляющим вектором $\vec{v}$, проходящей через точку A . Будем считать, что найдены разложения векторов $\vec{v}$ и $\vec{u} = \overrightarrow{AP}$ в некотором базисе с известной таблицей умножения. Приведем схему решения этой задачи.

1. Пусть $Q = \text{Pr}_a(P)$ (рис. 278). Тогда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = x \cdot \vec{v} - \vec{u}$. Неизвестную x можно определить из уравнения

$$(x \cdot \vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0.$$

2. Осталось найти расстояние по формуле $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x \cdot \vec{v} - \vec{u})^2}$.

Пример 3. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, длина ребра которого равна 6. Точка M — центр грани ACD , а точка K выбрана на ребре $[AB]$ так, что $|AK| : |KB| = 2 : 1$. Требуется найти расстояние от точки M до прямой (CK) .

Решение. В качестве базиса выберем векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}/3$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}/3$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}/3$ (рис. 279). Быстро заполняем табл. 4 — таблицу скалярного произведения в этом базисе.

Пусть $F = \text{Pr}_{(CK)}(M)$. Ясно, что $\overrightarrow{CK} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$, тогда по векторному уравнению прямой для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$\overrightarrow{AF} = 3\vec{e}_2 + \lambda(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = 2\lambda\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2(1 - \lambda).$$

Будучи центром масс, точка M дает представление $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, поэтому

$$\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AM} = 2\lambda \cdot \vec{e}_1 + (2 - 3\lambda) \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

Условие $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{MF}$ равносильно $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, откуда

$$(2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2)(2\lambda \cdot \vec{e}_1 + (2 - 3\lambda) \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$16\lambda + 8 - 12\lambda - 4 - 12\lambda - 24 + 36\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow 28\lambda = 14 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$



Кстати, мы получили, что F — середина отрезка $[CK]$ и нашли представление по базису вектора $\overrightarrow{MF} = \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. Осталось вычислить длину $\overrightarrow{MF}$:

$$|\overrightarrow{MF}|^2 = \left(\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \right)^2 = 4 + 1 + 4 + 2 - 4 - 2 = 5.$$

В результате получим $|MF| = \sqrt{5}$.

Вторым способом решения этой задачи является многократное применение теоремы косинусов. Сначала находим длины отрезков $|CP| = 3\sqrt{3}$, $|CK| = \sqrt{36 + 4 - 12} = 2\sqrt{7}$ и $|PK| = \sqrt{9 + 16 - 12} = \sqrt{13}$. Обозначив в треугольнике CKP величину угла $\angle KCP$ через φ , получим уравнение $13 = 28 + 27 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{7} \cos \varphi$, откуда $\cos \varphi = \sqrt{21}/6$ и $\sin \varphi = \sqrt{15}/6$. Поэтому $|MF| = \frac{2}{3} \cdot |CP| \sin \varphi = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{6} = \sqrt{5}$.

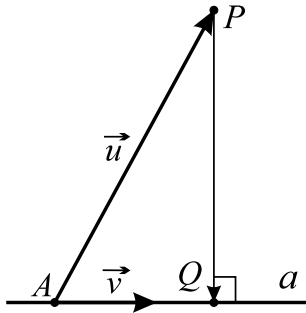


Рис. 278

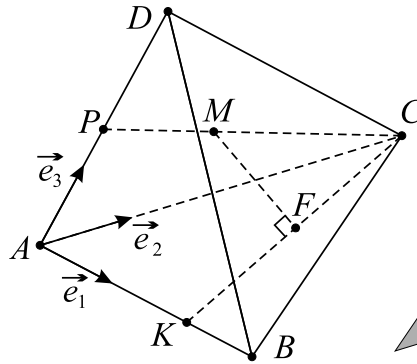


Рис. 279

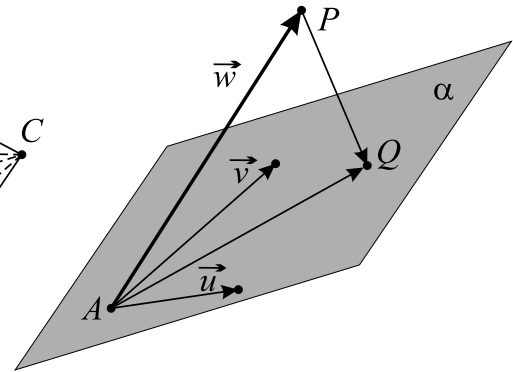


Рис. 280

Расстояние от точки до плоскости.

Угол между прямой и плоскостью

Пусть точки P и A выбраны так, что $P \notin \alpha$ и $A \in \alpha$. Опишем алгоритм нахождения расстояния от точки P до плоскости α и угла между прямой (AP) и плоскостью α . Пусть векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ являются базисом плоскости α , также в пространстве дан базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ с таблицей умножения, и нам удалось разложить по этому базису векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{AP}$.

1. Обозначим через $Q = \text{Pr}_\alpha(P)$ (рис. 280). Тогда $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w}$. Коэффициенты x и y находим из условия перпендикулярности $\overrightarrow{PQ}$ векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\begin{cases} (x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{u} = 0, \\ (x\vec{u} + y\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$



откуда

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3} - x(4\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_3}) - 3y(2\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) = \\ &= (2 - 4x)\overrightarrow{e_1} + (2 - 6y)\overrightarrow{e_2} + (3 + 3x + 3y)\overrightarrow{e_3} \quad (*).\end{aligned}$$

Поскольку вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{LK}$ и $\overrightarrow{LC}$, получаем систему $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{LK} = 0$ & $\overrightarrow{PM} \cdot (\overrightarrow{LC}/3) = 0$, которую с использованием табл. 5 переписываем в виде

$$\begin{cases} 4(2 - 4x) + 4 - 12y - 3(3 + 3x + 3y) = 0, \\ 2 - 4x + 4 - 12y - 3 - 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 21y = 3, \\ 7x + 15y = 3, \end{cases}$$

откуда $x = -3/38$ и $y = 9/38$ (знак коэффициента x указывает на то, что $P \in \alpha \setminus \triangle CKL$ и рис. 281 неверен). Подставляя найденные значения в (*), находим координаты вектора $\overrightarrow{PM}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$: $2 - 4x = \frac{44}{19}$, $2 - 6y = \frac{11}{19}$ и $3 + 3x + 3y = \frac{66}{19}$. Поэтому $\overrightarrow{PM} = \frac{11}{19}(4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3})$, что позволяет найти

$$|\overrightarrow{PM}| = \frac{11}{19} \cdot \sqrt{16 + 1 + 36 + 4} = \frac{11\sqrt{57}}{19} = 11 \cdot \sqrt{\frac{3}{19}}.$$

Остается вычислить $\varphi = \widehat{\alpha, (AM)}$. Мы уже знаем, что $\overrightarrow{PM} \perp \alpha$, что дает возможность по формуле из теоремы 7.4 получить $\sin \varphi = |\cos \widehat{AM, \overrightarrow{PM}}|$. По теореме Пифагора находим $|AM| = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$, поэтому

$$\sin \varphi = \frac{11}{19} \cdot \frac{|(2\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3})(4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 6\overrightarrow{e_3})|}{4\sqrt{3} \cdot 11 \cdot \sqrt{\frac{3}{19}}} = \frac{17}{4\sqrt{19}}.$$

В результате, $\varphi = \arcsin(17\sqrt{19}/76)$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть прямая a проходит через точку A_1 и имеет своим направляющим вектором вектор $\overrightarrow{u}$, а прямая b с направляющим вектором $\overrightarrow{v}$ проходит через точку A_2 . Кроме того, получены разложения векторов $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A_1A_2}$ относительно некоторого базиса с заданной таблицей умножения. Опишем алгоритм нахождения расстояния между a и b .



- Пусть точки $P \in a$ и $Q \in b$ выбраны так, что одновременно выполнено $(PQ) \perp a$ и $(PQ) \perp b$ (рис. 282). Вектор $\overrightarrow{PQ}$ запишем в виде суммы $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2Q} = x\vec{u} + \vec{w} + y\vec{v}$. Неизвестные x и y определяются из условий $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$ и $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$:

$$\begin{cases} (x\vec{u} + y\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = 0, \\ (x\vec{u} + y\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0. \end{cases}$$

- Расстояние $d(a, b)$ (по теореме 6.2) равно

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x\vec{u} + y\vec{v} + \vec{w})^2}.$$

Пример 5. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 4. Точки K и L являются соответственно серединами ребер $[CD]$ и $[AB]$ (рис. 283). Найдем расстояние между прямыми $a = (AK)$ и $b = (CL)$.

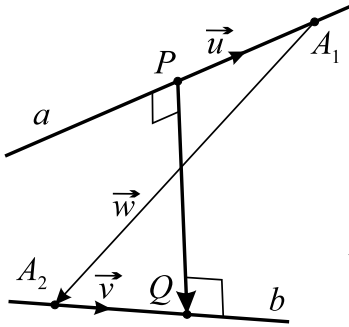


Рис. 282

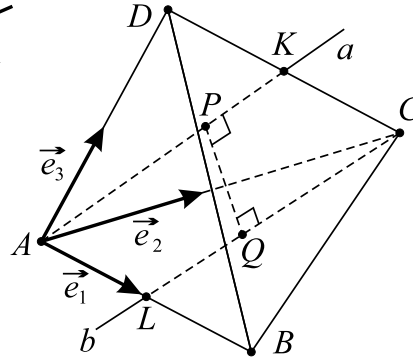


Рис. 283

Таблица 6

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	4	2	2
$\vec{e}_2$	2	4	2
$\vec{e}_3$	2	2	4

Решение. Считаем векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}/2$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}/2$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}/2$ базисом пространства, тогда табл. 6 – таблица умножения в этом базисе. По этому базису легко представляются направляющие векторы прямых a и b : $\vec{u} = \overrightarrow{AK} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ и $\vec{v} = \overrightarrow{CL} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$. Из векторного уравнения прямой (CL) получим $\overrightarrow{AQ} = 2x\vec{e}_2 + (1-x)\vec{e}_1$ для некоторого $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AK} = y\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$ для некоторого $y \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = 2x\vec{e}_2 + (1-x)\vec{e}_1 - y\vec{e}_2 - y\vec{e}_3 = (1-x)\vec{e}_1 + (2x-y)\vec{e}_2 - y\vec{e}_3.$$

Поскольку вектор $\overrightarrow{PQ}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{CL}$, получаем систему $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AK} = 0$ & $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CL} = 0$, которую с использованием табл. 6 переписываем в виде

$$\begin{cases} 2(1-x) + 4(2x-y) - 2y + 2(1-x) + 2(2x-y) - 4y = 0, \\ 4(1-x) + 2(2x-y) - 2y - 4(1-x) - 8(2x-y) + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y = -4, \\ -12x + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -1, \\ y = 3x/2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{3}{5}.$$

Мы выяснили, что точки P и Q делят медианы $[AK]$ и $[CL]$ в отношении $|AP| : |PK| = |CQ| : |QL| = 3 : 2$, а также нашли представление вектора $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{5}(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3)$, откуда

$$|PQ| = \frac{1}{5}\sqrt{(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{36 + 4 + 36 + 12 - 36 - 12} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Угол между плоскостями

Пусть векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ являются базисом плоскости α и известны разложения этих векторов относительно некоторого базиса пространства $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ с заданной таблицей умножения. Представив произвольную нормаль $\vec{n}_1$ к плоскости α в виде $\vec{n}_1 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ из условий $\vec{n}_1 \perp \vec{u}$ и $\vec{n}_1 \perp \vec{v}$ получим систему

$$\begin{cases} (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot \vec{u} = 0, \\ (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot \vec{v} = 0, \end{cases}$$

которая содержит три неизвестных и конечно же имеет бесконечно много решений. Зафиксировав одну из координат, мы можем найти конкретный вектор $\vec{n}_1 \perp \alpha$. Аналогично для плоскости β можно найти ненулевой вектор $\vec{n}_2 \perp \beta$. Остается применить теорему 7.3, чтобы получить искомый угол из равенства $\cos \widehat{\alpha, \beta} = |\cos \widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}|$.

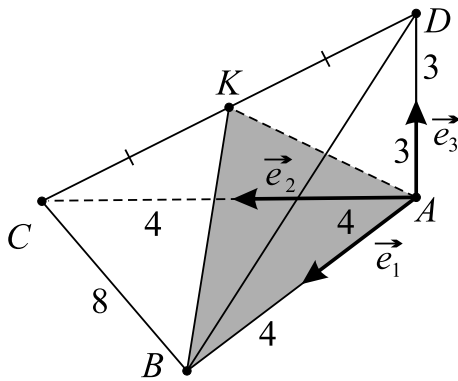


Рис. 284

Таблица 7

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
$\vec{e}_1$	16	8	0
$\vec{e}_2$	8	16	0
$\vec{e}_3$	0	0	9

Пример 6. В основании тетраэдра $ABCD$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 8, боковое ребро $[AD]$ перпендикулярно плоскости основания и $|AD| = 6$. Найдём величину угла между $\alpha = (ABC)$ и $\beta = (ABK)$, где K — середина ребра $[CD]$.



Решение. В качестве базиса выберем векторы $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}/2$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}/2$ и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}/2$ (рис. 284), тогда табл. 7 — таблица умножения для этого базиса.

Сразу заметим, что $\vec{n}_1 = \vec{e}_3$ является нормалью к плоскости α , а векторы $\vec{u} = \vec{e}_1$ и $\vec{v} = \overrightarrow{AK} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ образуют базис плоскости β . Ненулевой вектор $\vec{n}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ является нормалью к плоскости β тогда и только тогда, когда $\vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$ & $\vec{n}_2 \cdot \vec{v} = 0$, что дает

$$\begin{cases} 16x + 8y = 0, \\ 8x + 16y + 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x, \\ z = 8x/3. \end{cases}$$

При $x = 3$ получим одну из нормалей к плоскости β : $\vec{n}_2 = 3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$. Посчитав

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{(3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3)^2} = \sqrt{9 \cdot 16 + 36 \cdot 16 - 36 \cdot 8 + 64 \cdot 9} = 12\sqrt{7},$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{e}_3(3\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3) = 72,$$

найдем $\cos \widehat{\alpha, \beta} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{72}{3 \cdot 12\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, откуда $\widehat{\alpha, \beta} = \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

До эпохи ЕГЭ и централизованного тестирования многие вузы страны проводили вступительные экзамены по математике. Ниже приводится список вступительных задач, которые можно решить методами этого параграфа, а в скобках после каждой задачи указан год экзамена и стандартное сокращение для вуза: МАИ — московский авиационный институт, МФТИ — московский физико-технический институт, МГУ — московский государственный университет, НГУ — новосибирский государственный университет, МИНХ — московский институт народного хозяйства (сейчас — РЭУ им. Г.В. Плеханова).

Упражнения

1. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра $[AD]$, точка O — центр треугольника ABC , точка N — середина ребра $[AB]$ и точка K — середина ребра $[CD]$. Найдите угол между прямыми (MO) и (KN) . (МАИ, 1981).
2. Известно, что сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a , точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка $[AO_1]$ на прямую (B_1O) равна $5a/6$. Определите высоту пирамиды. (МФТИ, 1974).
3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $|SA| = 4$) точка D лежит на ребре $[SC]$, $|CD| = 3$, а расстояние от точки A до прямой (BD) равно 2. Найдите объем пирамиды. (МФТИ, 1984).



4. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом $\widehat{A} = 60^\circ$. Все ребра призмы имеют длину a . Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость $(DA_1 C_1)$, а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость $(DD_1 C_1 C)$. Найдите объем пирамиды $DCLK$. (МФТИ, 1983)
5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро $[SC]$ перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра $[BC]$, а другая проходит через точку C и середину ребра $[AB]$. (МГУ, мех.-мат., 1977).
6. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 1, ребро $[SA]$ пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA| = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым (SB) и (AC) , плоскость β параллельна прямым (SC) и (AB) . Определите величину угла между плоскостями α и β . (НГУ, 1981).
7. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны $[BC]$, а точка M — середина стороны $[CD]$. Найдите $|AD|$, если $|AK| = 6$, $|AM| = 3$ и $\widehat{KAM} = 60^\circ$. (МИНХ, 1977).
8. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок $[MN]$ соединяет середину ребра $[AC]$ с центром грани BDC , а точка E — середина ребра $[AB]$. Найдите угол между прямыми (MN) и (DE) . (МФТИ, 1969).
9. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длины катетов $[AB]$ и $[AC]$ которого равны a . Боковые ребра $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ образуют с плоскостью основания углы в 60° , а диагональ $[BC']$ боковой грани $CBV'C'$ перпендикулярна ребру $[AC]$. Найдите объем призмы, если длина диагонали $[BC']$ равна $a\sqrt{6}$. (НГУ, 1978).
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ длина стороны основания равна a , длина бокового ребра равна $a/2$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра $[A_1 C_1]$ на плоскость $(AB_1 C)$, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость $(AA_1 B_1 B)$. Найдите объем пирамиды $A_1 B_1 DE$. (МФТИ, 1983).
11. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a , боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали $[BD]$ основания и боковом ребре $[SC]$, параллельные плоскости (SAD) :
- а) один из этих отрезков проведен через точку M диагонали $[BD]$ так, что $|DM| : |DB| = 1 : 3$. Найдите его длину;
 - б) найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков. (МФТИ, 1977).



5.10. Модель геометрии

Словам можно придать такой смысл, какой пожелаешь, в крайнем случае, сделать элементы геометрии точными (но смешными), назвав треугольником то, что обычно называют кругом.

Д'Аламбер

В этом параграфе приводятся многие из формул, доказанные в последних двух главах. Но он носит не только справочный характер. Главной целью параграфа является определение сложного, но очень важного понятия — модели, и построение для евклидовой геометрии ее арифметической модели.

Евклидова геометрия, как и многие другие математические теории, имеет строго определенную логическую структуру. В основании теории находятся неопределяемые понятия, неопределяемые отношения и аксиомы. Назначение первых двух составляющих теории достаточно ясно — они являются источником для определения всех других понятий и отношений этой теории. Аксиомы выполняют двойную нагрузку. С одной стороны, они являются замаскированными определениями, которые выражают всю информацию о неопределяемых понятиях и отношениях, необходимую для построения богатой теории. С другой стороны, аксиомы рожают цепочки теорем, доказываемых с помощью правил логического вывода утверждений (такие правила описываются математической логикой — одной из основных математических дисциплин). Многообразие понятий и теорем составляют основное содержание математической теории. Заметим, что все составляющие элементы геометрической теории — неопределяемые понятия и отношения, аксиомы, теоремы — не зависят от того, что мы конкретно понимаем под точкой, прямой или плоскостью. Такая независимость теории от образов нашего воображения и нашей интуиции придает теории необыкновенную устойчивость. Так, например, тот факт, что идеальных точек, прямых и плоскостей не существует в реальном мире, для геометрии не имеет никакого значения. Однако значение интерпретаций, или моделей, теории становится важным при изучении вопросов непротиворечивости данной теории. Начнем с определения.

Определение. *Моделью теории T называется некоторое множество M , такое, что существует соответствие между неопределяемыми понятиями и отношениями теории T — с одной стороны, и конкретными, т.е. определенными, подмножествами и отношениями на множестве M — с другой. При*



этом для этих подмножеств и отношений на множестве M можно проверить (т.е. доказать) все аксиомы теории T .

Зачем для теории необходимо строить ее модель? Дело в том, что главным свойством аксиоматической системы и теории вообще, является ее непротиворечивость. При этом аксиоматическая система называется *противоречивой*, если из нее может быть выведено одновременно некоторое утверждение P и его отрицание (обозначается $\neg P$, т.е. *не P*). Противоречивую систему аксиом получить легко — достаточно в качестве аксиом взять два утверждения: P и $\neg P$. Ценность такой аксиоматической системы равна нулю, так как из результатов математической логики следует, что с помощью такой системы можно доказать любое утверждение.

Как установить непротиворечивость данной аксиоматической системы? Конечно, тот факт, что до сих пор в геометрии не были доказаны два противоречащих друг другу утверждения, вовсе не доказывает ее непротиворечивость. Ситуация резко усложняется еще в связи с результатом Гёделя², полученным в 1931 году: внутри достаточно сложной теории (например, в которой можно реализовать арифметику на $\mathbb{N}$) нельзя доказать ее непротиворечивость, или, другими словами, утверждение о непротиворечивости теории не может быть доказано средствами этой теории. Возможным выходом из такого трудного положения является построение модели. В случае, если существует модель теории, теория является непротиворечивой (еще один результат математической логики). Поскольку внутри геометрии построить модель не удастся, то она будет построена с использованием теории действительных чисел (т.е. мы установим непротиворечивость геометрии относительно непротиворечивости теории действительных чисел).

Ниже приводятся две таблицы: первая устанавливает соответствие между понятиями планиметрии и подмножествами $\mathbb{R}^2$, вторая — между понятиями стереометрии и подмножествами $\mathbb{R}^3$.

² Курт Гёдель (1906–1978) — американский математик; сформулировал и доказал теоремы о неполноте, оказавшие огромное влияние на основания математики; в 1948 году, во время собеседования на получение американского гражданства, он попытался доказать, что Конституция США формально-логически неполна и не гарантирует от установления диктатуры, но был вежливо остановлен; считается одним из выдающихся мыслителей XX века.



Таблица соответствий для понятий планиметрии

Понятия и отношения теории	Подмножества и отношения $\mathbb{R}^2$
Плоскость — неопределяемое понятие	Плоскость — это множество $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
Точка — неопределяемое понятие	Точка — упорядоченная пара $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Прямая a — неопределяемое понятие	Прямая a — это множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0\}$, где $A^2 + B^2 \neq 0$
Точка M принадлежит прямой a — неопределяемое отношение	Точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит прямой $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C = 0\}$, если выполняется равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$
Вектор $\vec{u}$ — класс эквивалентности направленных отрезков	$\vec{u} = (x, y)$, где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ — конец вектора, а $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ — его начало
Точка M лежит между точками N и K — неопределяемое отношение	Точка $M(x_0, y_0)$ лежит между точками $N(x_1, y_1)$ и $K(x_2, y_2)$, если выполняется равенство $(x_0, y_0) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$ для некоторого $\lambda \in [0; 1]$
Отрезок $[NK]$ — это множество точек, лежащих между N и K	Отрезок $[N(x_1, y_1)K(x_2, y_2)]$ — это множество точек $M(x_0, y_0)$, лежащих между $N(x_1, y_1)$ и $K(x_2, y_2)$
Расстояние между точками M и N — длина отрезка $[MN]$	Расстояние между точками $M(x_0, y_0)$ и $N(x_1, y_1)$ — это число $ MN $, равное $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$
Равенство отрезков $[MN]$ и $[KL]$ — неопределяемое отношение	Отрезки равны, если равны два числа: $ MN $ и $ KL $
Прямая разбивает плоскость на два выпуклых множества, каждое из которых вместе с этой прямой называется полуплоскостью	Полуплоскость — это каждое из двух множеств: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C \geq 0\}$ и $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By + C \leq 0\}$ (обязательно $A^2 + B^2 \neq 0$)



Расстояние от точки M до прямой a — это длина отрезка $[MN]$, где N — проекция точки M на прямую a	Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ — это число, равное $d(M, a) = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
Величина угла между прямыми a и b — величина наименьшего из углов, образованных этими прямыми	Косинус угла между прямыми $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ — это число $\cos \widehat{a, b} = \frac{ AA_1 + BB_1 }{\sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$

**Таблица соответствий
для понятий стереометрии**

Понятия и отношения теории	Подмножества и отношения $\mathbb{R}^3$
Пространство — неопределяемое понятие	Пространство — это множество $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$
Плоскость — неопределяемое понятие	Плоскость — это множество $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
Точка — неопределяемое понятие	Точка — упорядоченная тройка чисел $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
Точка M принадлежит плоскости α — неопределяемое отношение	Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит плоскости $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}$, если выполняется равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
Вектор $\vec{u}$ — класс эквивалентности направленных отрезков	$\vec{u} = (x, y, z)$, где $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ — конец вектора, а $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ — его начало
Прямая a — неопределяемое понятие	Прямой a , проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей ненулевой вектор $\vec{u} = (l, m, n)$ своим направляющим вектором называется множество $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 + \lambda l, y = y_0 + \lambda m, z = z_0 + \lambda n, \lambda \in \mathbb{R}\}$



Точка M лежит между точками N и K — неопределяемое отношение	Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит между точками $N(x_1, y_1, z_1)$ и $K(x_2, y_2, z_2)$, если выполняется $(x_0, y_0, z_0) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2)$ для некоторого $\lambda \in [0; 1]$
Отрезок $[NK]$ — это множество точек, лежащих между N и K	Отрезок $[N(x_1, y_1, z_1)K(x_2, y_2, z_2)]$ — это множество точек $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащих между $N(x_1, y_1, z_1)$ и $K(x_2, y_2, z_2)$
Расстояние между точками M и N — длина отрезка $[MN]$	Расстояние между точками $M(x_0, y_0, z_0)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$ — это число $ MN $, равное $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$
Равенство отрезков $[MN]$ и $[KL]$ — неопределяемое отношение	Отрезки равны, если равны два числа: $ MN $ и $ KL $
Плоскость разбивает пространство на два выпуклых множества, каждое из которых вместе с этой плоскостью, называется полупространствами	Полупространством называются каждое из двух множеств: $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D \geq 0\}$ и $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz + D \leq 0\}$ (здесь $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)
Расстояние от точки M до плоскости α — это длина отрезка $[MN]$, где N — проекция точки M на плоскость α	Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ — это число, равное $d(M, \alpha) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Величина угла между плоскостями α и β — величина наименьшего из двугранных углов, образованных этими плоскостями	Косинус угла между двумя плоскостями $Ax + By + Cz + D = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ — это число $\cos \widehat{\alpha, \beta} = \frac{ AA_1 + BB_1 + CC_1 }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$

С указанием соответствия построение модели не заканчивается. Необходимо еще проверить истинность всех первоначальных утверждений об основ-



ных понятиях и отношениях, т.е. доказать истинность всех геометрических аксиом. Мы приводим доказательство только двух из двадцати аксиом гильбертовской системы.

Теорема 10.1. Пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) — две различные точки. Тогда существует единственная прямая, проходящая через эти две точки.

Доказательство. I. Существование. Необходимо найти линейное уравнение $Ax + By + C = 0$, которому удовлетворяют обе эти точки. Заметим, что $\vec{u} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ является направляющим вектором искомой прямой и $\vec{n} = (y_0 - y_1, x_1 - x_0)$ перпендикулярен $\vec{u}$. Действительно, $\vec{n} \cdot \vec{u} = -(y_1 - y_0)(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)(x_1 - x_0) = 0$. Поэтому уравнение $(y_0 - y_1)(x - x_0) + (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$ является искомым. Легко проверить, что ему удовлетворяют обе эти точки и что оба коэффициента не обращаются одновременно в нуль.

II. Единственность. Докажем несколько более общее утверждение о количестве точек пересечения двух прямых. Рассмотрим два уравнения $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ и $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$. Количество точек пересечения совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1-й случай: $A_1B - AB_1 \neq 0$. Сначала домножим первое уравнение системы на A_1 и вычтем из него второе, умноженное на A . В результате получится уравнение, не содержащее x . Аналогично умножив первое уравнение на B_1 и вычитая второе, умноженное на B , получаем уравнение, не содержащее уже переменной y . Получаем цепочку равносильных систем³:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} BA_1y + CA_1 - B_1Ay - C_1A = 0, \\ B_1Ax + CB_1 - A_1Bx - C_1B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = (CA_1 - AC_1)/(A_1B - AB_1), \\ x = (CB_1 - BC_1)/(B_1A - BA_1). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, если $A_1B - AB_1 \neq 0$, то прямые пересекаются в единственной точке.

2-й случай: $A_1B - AB_1 = 0$. Предположим, что A_1 и B_1 отличны от нуля (случай, когда один из коэффициентов обращается в нуль легко исследуется). Тогда $A/A_1 = B/B_1 = k \neq 0$. Если теперь $C/C_1 = k$, то уравнения

³В курсе Алгебра 10 доказывается равносильность такого способа преобразования систем.



$Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ описывают одно и то же множество, так как $A_1x + B_1y + C_1 = 0 \Leftrightarrow k(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$. Итак, прямые совпадают и поэтому имеют бесконечное множество точек пересечения.

3-й случай: $A_1B - AB_1 = 0$, но $C/C_1 \neq k$ (сохраняем обозначения предыдущего пункта). Умножая второе уравнение системы на k и вычитая его из первого уравнения, получаем

$$Ax + By + C - k(A_1x + B_1y + C_1) = 0 \Leftrightarrow C - kC_1 = 0.$$

Но так как $C/C_1 \neq k$, то в левой части последнего уравнения стоит ненулевое число. Поскольку следствие системы решений не имеет, то и сама система не имеет решений. Итак, в этом случае прямые не пересекаются.

Теперь легко доказать единственность прямой, проходящей через две различные точки. Так, если таких прямых две, то из случаев (1), (2), (3) следует, что коэффициенты этих уравнений могут удовлетворять только второму случаю, следовательно, прямые совпадают.



Упражнения

1. Проверьте аксиомы порядка.
2. Проверьте выполнение всех остальных аксиом.

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Сергей Александрович Ануфриенко

ГЕОМЕТРИЯ 10

Учебное пособие

Редактор

Корректор

Компьютерный набор и верстка С. А. Ануфриенко

Подписано в печать .12.2025. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Уч.-изд.л. . Бумага офсетная.

Тираж экз. Заказ № .

Издательство

Отпечатано

Тел.:

Факс:

E-mail:

http: