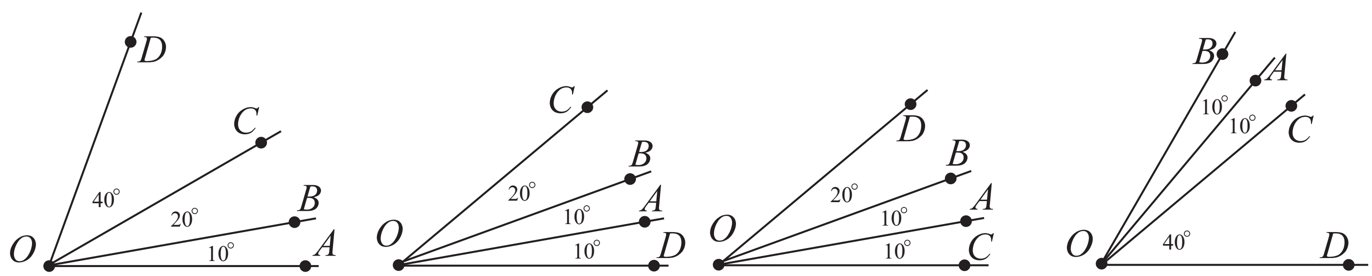
СУНЦ УрФУ, 2020 год
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 физико-математический класс
и 9 математико-информационный класс

Часть 1 (продолжительность 1,5 часа)

1. *(2 балла)* Из одной точки проведены четыре луча OA, OB, OC и OD. Известны величины углов: $\angle AOB = 10°, \angle BOC = 20°, \angle COD = 40°$. Найдите сумму всевозможных значений углов AOD (в градусах).

Решение.

Рассмотрим угол AOB. Прямая OB делит плоскость на две полуплоскости, одна из которых содержит точку A, вторая не содержит.



1. Рассмотрим случай, когда точка C не лежит в полуплоскости, содержащей A. Тогда $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 30°$. Если точка D лежит по ту же сторону от прямой OC, что и точки A и B, то $\angle AOD = \angle DOC - \angle AOC = 10°$. Если по другую, то выполняется $\angle AOD = \angle DOC + \angle AOC = 70°$.

2. Во втором случае точка C лежит в полуплоскости, содержащей A. В этом случае верно $\angle AOC = \angle COB - \angle BOA = 10°$. Если точка D лежит по ту же сторону от прямой OC, что и точки A и B, то $\angle AOD = \angle DOC - \angle AOC = 30°$. Если по другую, то выполняется равенство $\angle AOD = \angle DOC + \angle AOC = 50°$.

Получили четыре возможных значения $10°, 30°, 50°, 70°$, сумма которых $160°$.

Ответ. 160.

2. *(2 балла)* В школе 9 класс закончили более 300 учеников. Только 40% из них решили пойти в 10 класс. Их осталось менее двухсот. Из не бросивших школу 20% были мальчики, и лишь 15% девочек выбрали физико-математический класс. Сколько всего учеников закончили 9 класс?

Решение. Пусть x учеников закончили 9 класс. Из них 40%, то есть $x \cdot \frac{40}{100}$ решили пойти в 10 класс. Оставшихся девочек было 80%, то есть $x \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100}$. И физико-математический класс выбрали лишь 15%:

$$x \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{15}{100} = x \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{20} = \frac{6x}{125}.$$

Количество девочек, выбравших физико-математический класс целое, поэтому x должен делиться на 125. Заметим также, что из условия $0,4x < 200$ следует, что $x < 500$. Единственное число от 300 до 500, которое делится на 125 это 375.

Ответ. 375.

3. *(2 балла)* Найдите периметр трапеции, если ее диагональ равна 17, боковые стороны равны 10, а одно основание на 12 меньше другого.

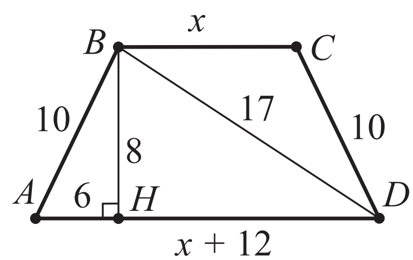
Решение.

Обозначим $BC = x,\ AD = 12 + x, AB = CD = 10$. Опустим высоту BH из вершины B на сторону AD. Тогда

$$AH = \frac{AD - BC}{2} = \frac{x + 12 - x}{2} = 6, \quad DH = AD - AH = x + 12 - 6 = x + 6.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABH

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$$



откуда по теореме Пифагора для треугольника DBH

$$17^2 = (x+6)^2+8^2 \ \Leftrightarrow\ (x+6)^2 = 17^2-8^2 \ \Leftrightarrow\ (x+6)^2 = 15^2 \ \Leftrightarrow\ x = 9.$$

Периметр трапеции равен $P = AB + BC + CD + DA = 10 + 9 + 10 + 21 = 50$.

Ответ. 50.

4. *(3 балла)* При каком значении a наименьшее значение выражения $x^2 - 8x - 2a - 1$, равно 7?

Решение. Графиком квадратного трехчлена $x^2 - 8x - 2a - 1$ является парабола, ветви которой (в силу положительности старшего коэффициента) направлены вверх. Значит ее наименьшее значение достигается в вершине. Найдем координаты этой вершины:

$$x_0 = \frac{-(-8)}{2} = 4, \quad y_0 = 4^2 - 8 \cdot 4 - 2a - 1 = -17 - 2a.$$

По условию $-17 - 2a = 7$, откуда $a = -12$.

Ответ. -12.

5. *(3 балла)* Вычислите

$$\left(\frac{12}{\sqrt{13} - 1} + \frac{6}{\sqrt{13} - 2} + \frac{4}{\sqrt{13} - 3}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{13} + 2}.$$

Решение. Рассмотрим первую скобку и в каждом слагаемом умножим числитель и знаменатель на сопряженное

$$\frac{12}{\sqrt{13} - 1} + \frac{6}{\sqrt{13} - 2} + \frac{4}{\sqrt{13} - 3} = \frac{12(\sqrt{13} + 1)}{(\sqrt{13} - 1)(\sqrt{13} + 1)} + \frac{6(\sqrt{13} + 2)}{(\sqrt{13} - 2)(\sqrt{13} + 2)} + \frac{4(\sqrt{13} + 3)}{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{13} + 3)} =$$

$$= \frac{12(\sqrt{13} + 1)}{13 - 1} + \frac{6(\sqrt{13} + 2)}{13 - 2^2} + \frac{4(\sqrt{13} + 3)}{13 - 3^2} = (\sqrt{13} + 1) + \frac{6}{9}(\sqrt{13} + 2) + (\sqrt{13} + 3) = \frac{8}{3}(\sqrt{13} + 2).$$

И хорошо видно, что ответ 8.

Ответ. 8.

6. *(3 балла)* На n карточках написали все натуральные числа от 1 до n. После этого карточки перевернули и на обратной стороне написали разность n и числа на противоположной стороне. Оказалось что сумма цифр на обеих сторонах каждой карточки равна 12. Найдите n.

Решение. Несложно проверить, что 39 подходит.

Если $n > 39$, то обязательно есть карточка, на одной из сторон которой написано число 39, а на обратной стороне не 0. Но тогда сумма цифр на обеих сторонах больше 12. Значит $n \leqslant 39$.

Пусть $n < 39$. Возьмем карточку на одной стороне которой написано число n, а на обратной 0. Значит сумма цифр числа n равна 12. Но среди чисел меньших 39 нет ни одного с суммой цифр 12.

Доказали, что единственный возможный случай 39.

Ответ. 39.

7. *(3 балла)* Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\sqrt{x+8} \cdot (x^2+5x-6) \leqslant 0.$$

Решение. Возможны 2 случая.

1. Выражение под корнем $x+8$ равно 0, тогда $x=-8$ решение неравенства.

2. Выражение под корнем $x+8$ больше 0. Тогда неравенство равносильно $x^2+5x-6 \leqslant 0$. Раскладывая на множители $(x-1)(x+6) \leqslant 0$, находим целые решения: $-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1$. Складывая полученные решения, получаем

$$(-8)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1=-28.$$

Ответ. -28.

8. *(3 балла)* Сколько чисел x, делящихся на 7, удовлетворяют неравенству

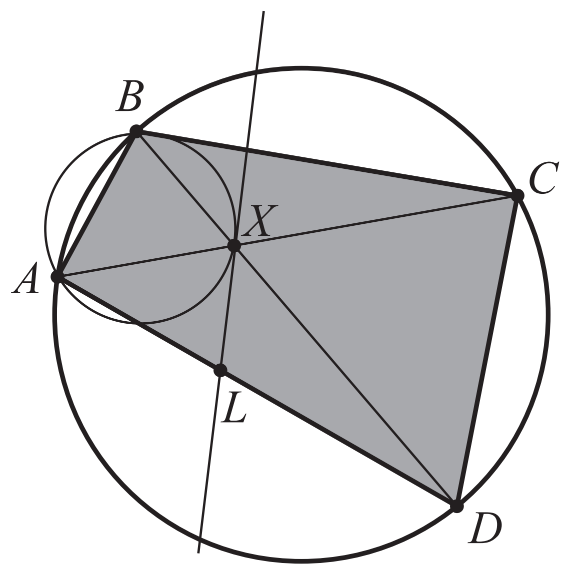
$$|x+1|+|x+90| \leqslant 89?$$

Решение. Геометрический смысл решения неравенства - множество точек, сумма расстояний которых до точек -1 и -90 не превосходит 89. Конечно же, это в точности отрезок соединяющий точки -90 и -1. На этом отрезке ровно 12 целых чисел, которые делятся на 7:

$$-7; -14; -21; -28; -35; -42; -49; -56; -63; -70; -77; -84.$$

Ответ. 12.

9. *(4 балла)* Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются в точке X. Вокруг треугольника ABX описали окружность. Через точку X провели касательную к этой окружности, которая пересекает AD в точке L. Найдите сумму (в градусах) углов LXC и XCD, если $\angle ABD = 55°$, $\angle BAC = 44°$.



Решение.

Вписанный угол ABX опирается на дугу AX, заключенную между касательной XL и хордой AX. Значит $\angle ABX = \angle AXL$. Кроме того вписанные углы $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на одну дугу AD, значит равны. Получили

$$\angle LXC + \angle XCD = 180° - \angle AXL + \angle XCD = 180°.$$

Ответ. 180.

Часть 2

10. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a точка пересечения прямых $y = x - 4$ и $y = -x + a$ расположена выше оси абсцисс, но ниже прямой $y = -2x + 15$?

Решение. Найдем координаты точки пересечения прямых $y = x - 4$ и $y = -x + a$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases} y = x - 4, \\ y = -x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + a = x - 4, \\ y = -x + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{a+4}{2}, \\ y_0 = \dfrac{a-4}{2}. \end{cases}$$

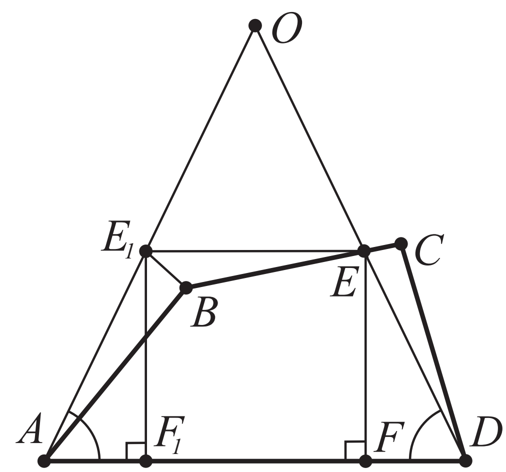
Для того чтобы точка пересечения лежала выше оси абсцисс необходимо и достаточно условия $y_0 > 0$, а чтобы ниже прямой $y = -2x + 15$, условия $y_0 < -2x_0 + 15$. Запишем соответствующую систему неравенств и решим:

$$\begin{cases} \dfrac{a-4}{2} > 0, \\ \dfrac{a-4}{2} < -2\dfrac{a+4}{2} + 15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 > 0, \\ a - 4 < -2(a+4) + 30, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ 3a < 26, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ a < \dfrac{26}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $\left(4; \dfrac{26}{3}\right)$.

11. *(6 баллов)* Вступительный экзамен состоит из двух частей. Даша наугад расставила ответы. Затем Маша проверила ответы и часть неправильных изменила. После исправлений Маши количество неверных ошибок в первой части оказалось в пределах от $15,5$ до 18% от числа неправильных ответов в первой части изначально. При этом количество неправильных ответов во второй части уменьшилось втрое и составило 25% от числа неправильных ответов в первой части до исправления. Какое наименьшее число неправильных ответов могла дать Даша?

Решение. Пусть количество неправильных ответов во второй части после исправления x. Тогда до исправления в первой части было $4x$ ошибок, во второй $3x$, после исправления ошибок в первой части стало от $0,62x$ до $0,72x$. Всего Даша допустила $7x$ ошибок, значит нужно найти наименьшее возможное натуральное x, чтобы промежуток $[0,62x; 0,72x]$ содержал хотя бы одно целое число.



При $x = 1$ отрезок $[0,62; 0,72]$ не содержит целых чисел.

При $x = 2$ отрезок $[0,62 \cdot 2; 0,72 \cdot 2]$ не содержит целых чисел.

При $x = 3$ отрезок $[0,62 \cdot 3; 0,72 \cdot 3]$ содержит целое число. Это x наименьшее и в этом случае Даша допустила $3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 21$ ошибку.

Ответ. 21.

12. *(6 баллов)*

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. На стороне BC отмечена такая точка E, что $\angle BAD + \angle CDE = \angle EDA$. Из точки E на сторону AD опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $BC + FD \geqslant AF$.

Решение. Проведем прямую AO так, чтобы угол OAD равнялся углу EDA. На прямой AO отложим отрезок $AE_1 = DE$. Тогда треугольник CDE равен треугольнику ABE_1 (по двум сторонам и углу между ними). Отсюда $BE_1 = CE$. Треугольник ADO равнобедренный, так как углы при основании равны, а значит AE_1ED — равнобедренная трапеция. Поскольку E_1F_1 и EF высоты, $AF_1 = FD$, $F_1F = E_1E$. По неравенству треугольника $EB + BE_1 \geqslant EE_1$. Отсюда следует доказываемое неравенство:

$$BC + FD = BE + EC + FD = BE + BE_1 + FD \geqslant EE_1 + FD = FF_1 + F_1A = FA.$$

13. *(8 баллов)* Найти наибольшее возможное значение суммы $x + y$, если x и y целые и выполнено неравенство

$$4|4x + 5y - 2| \leqslant 3 - 2\sqrt{3x + 4y - 3}.$$

Решение. Корень всегда неотрицателен, поэтому

$$4|4x + 5y - 2| \leqslant 3 \Leftrightarrow |4x + 5y - 2| \leqslant \frac{3}{4}.$$

Если x и y целые, то и выражение $4x + 5y - 2$ целое. Но единственное целое число, по модулю не превосходящее $3/4$, это 0. Значит, если x и y целые решения неравенства, то $4x + 5y - 2 = 0$. Все целочисленные решения этого уравнения описываются системой

$$\begin{cases} x = 5t - 2, \\ y = -4t + 2, \end{cases}$$

когда t пробегает все целочисленные значения. Заметим также, что сумма $x + y$ в точности равна t. Значит нам достаточно найти наибольшее возможное целое t.

Вернемся к исходному неравенству и подставим в него найденные значения x и y.

$$0 \leqslant 3 - 2\sqrt{3(5t-2) + 4(-4t+2) - 3} \Leftrightarrow \sqrt{-t-1} \leqslant 1,5 \Leftrightarrow 0 \leqslant -t - 1 \leqslant 2,25 \Leftrightarrow -3,25 \leqslant t \leqslant -1.$$

Из этого неравенства находим, что наибольшее возможное целое значение $x + y$ равно -1.

Ответ. -1.