СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 8 математико-информационный класс

Часть 1

1. *(2 балла)* У Светы была полная корзина пончиков. Сначала она встретила Сережу и дала ему половину своих пончиков и еще полпончика. Потом она встретила Зину и отдала ей половину оставшихся пончиков и еще полпончика. После того, как она встретила Тамару и снова отдала ей половину пончиков и еще полпончика, корзина опустела. Сколько пончиков было у Светы вначале?

Решение.

Заметим, что перед встречей с Тамарой у Светы остался один пончик, так как полпончика составляли половину этого количества. Перед встречей с Зиной у Светы было 3 пончика, так как половину этого количества составляли один и еще полпончика, то есть полтора. Аналогично получаем, что изначально было 7 пончиков.

Ответ: 7.

2. *(2 балла)* Кирилл вычеркнул из числа 10401 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 3. Запишите полученное число.

Решение.

Число делится на 3, если сумма цифр делится на 3. Сумма цифр числа 10401 равна шести. Вычеркиваем цифры так, чтобы сумма оставшихся цифр тоже делилась на 3. Единственно возможный вариант — вычеркнуть два нуля и получить число 141.

Ответ: 141.

3. *(2 балла)* Пусть точка C является серединой отрезка AB. На отрезке CB дана точка D такая, что $5CD = 4DB$. Найдите длину отрезка, концами которого являются середины отрезков AC и DB, если $CD = 12$.

Решение.

Из условия следует, что $CD : DB = 4 : 5$. Обозначим длины отрезков CD и DB через $4x$ и $5x$ соответственно. Тогда $AC = 9x$. Так как $CD = 12 = 4x$, то $DB = 15, AC = 27$.

Пусть M — середина AC, N — середина DB. Получим

$$MN = MC + CD + DN = \frac{1}{2}AC + CD + \frac{1}{2}DB = \frac{27}{2} + 12 + \frac{15}{2} = 33.$$

Ответ: 33.

4. *(2 балла)* Вычислите $\dfrac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{12^2 \cdot 49^{19}}$.

Решение.

$$\frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{12^2 \cdot 49^{19}} = \frac{7^{38}(7^2 + 1 - 2 \cdot 7)}{12^2 \cdot 7^{2 \cdot 19}} = \frac{(7^2 + 1 - 2 \cdot 7)}{12^2} = \frac{36}{12^2} = \frac{3}{12} = 0,25.$$

Ответ: $0,25$.

5. *(2 балла)* Биссектриса AD треугольника ABC равна отрезку DC, $AC = 2AB$. Найдите величину угла ADB.

Решение.

Пусть M — середина AC, тогда $AM = MC = \frac{1}{2}AC = AB$. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle AMD$. Для них выполняется: $\angle BAD = \angle DAC$ (т.к. AD — биссектриса), $AM = AB$ и AD — общая. Значит, треугольники равны.

Заметим, что $\triangle ADC$ равнобедренный, в нем $\angle DAC = \angle DCA$ и DM — медиана . Значит, отрезок DM является высотой и $\angle ABD = \angle DMA = 90°$.

Рассмотрим $\triangle ABC$, в нем $\angle B = 90°$, $\angle BAC = 2\angle DAC = 2\angle DCA$. Тогда $\angle BAC + \angle DCA = 90°$, т.е. $2\angle DCA + \angle DCA = 90°$. Получаем, что $\angle DCA = \angle DAC = 30°$.

Таким образом, $\angle ADM = \angle ADB = 60°$.

Ответ: $60°$.

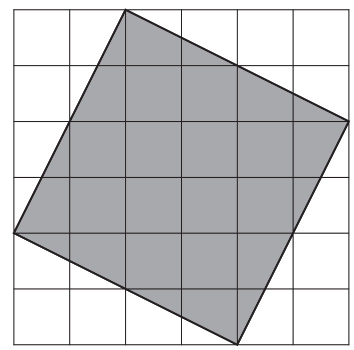
6. *(2 балла)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x + 4y = 1, \\ 5x - y = -6. \end{cases}$ В ответе укажите произведение xy.

Решение.

Выразим из второго уравнения $y = 5x + 6$. Подставим в первое уравнение: $3x + 4(5x + 6) = 1$. Откуда $x = -1$, $y = 1$ и $xy = -1$.

Ответ: -1.

7. *(2 балла)* Найдите площадь закрашенного четырехугольника, если площадь одного маленького квадратика равна 1.



Решение.

Выделим четыре центральные клетки. Тогда оставшуюся часть закрашенного четырехугольника можно разбить на 4 одинаковых треугольника, равных незакрашенным треугольникам. Заметим, что площадь всех четырех закрашенных треугольников равна $4 \cdot 4$. Площадь выделенных центральных клеток равна 4. Значит, площадь закрашенного четырехугольника равна $4 \cdot 4 + 4 = 20$.

Ответ: 20.

8. *(2 балла)* Свежий арбуз весил 10 кг и на 99% состоял из воды. На базе арбуз подсох (часть воды испарилась) и в нем стало 98% воды. Сколько кг он теперь весит?

Решение.

До высыхания сухое вещество в арбузе составляют 1% всего веса, а после высыхания будет составлять 2%. Это значит, что общий вес арбуза уменьшится в два раза и станет равным 5 кг.

Ответ: 5.

9. *(2 балла)* График функции $y = kx + b$ перпендикулярен прямой $y = x$ и проходит через точку с координатами $(-2, 3)$. Найдите коэффициенты k и b. В ответе укажите сумму $k + b$.

Решение.

График функции $y = kx + b$ перпендикулярен прямой $y = x$. Значит, $k = -1$. Тогда функция примет вид $y = -x + b$ и проходит через точку с координатами $(-2, 3)$. Подставляя координаты этой точки, получим $3 = -(-2) + b$ и $b = 1$. Тогда $k + b = -1 + 1 = 0$.

Ответ: 0.

10. *(2 балла)* В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CD — высота треугольника. Найдите длину AD, если $AB = 16, AC = 8$.

Решение.

Треугольник BAC — прямоугольный, в нем гипотенуза $AB = 16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot AC$. Значит $\angle ABC = 30°$ и $\angle BAC = 60°$. Рассмотрим треугольник ADC, в нем $\angle D = 90°, \angle A = 60°$. Тогда $\angle ACD = 30°$, что означает, что $AC = 2 \cdot AD$. Найдем длину $AD = AC : 2 = 8 : 2 = 4$.

Ответ: 4.

Часть 2

11. *(6 баллов)* Упростите выражение $\left(\dfrac{a-3}{a+1}+\dfrac{4}{a^2+2a+1}\right)\cdot\left(\dfrac{a(a+3)}{1-3a+3a^2-a^3}+\dfrac{1}{a^2-2a+1}\right)$.

Решение.

Рассмотрим первую скобку

$$\frac{a-3}{a+1}+\frac{4}{a^2+2a+1}=\frac{a-3}{a+1}+\frac{4}{(a+1)^2}=\frac{(a-3)(a+1)+4}{(a+1)^2}=\frac{a^2-2a+1}{(a+1)^2}=\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2}.$$

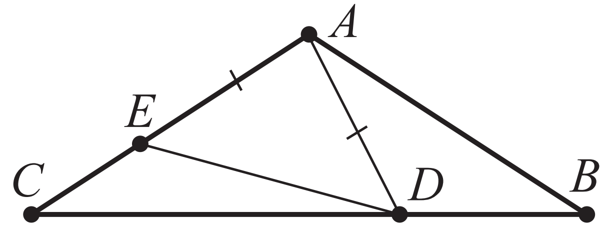
Рассмотрим вторую скобку

$$\frac{a(a+3)}{1-3a+3a^2-a^3}+\frac{1}{a^2-2a+1}=\frac{a(a+3)}{(1-a)^3}+\frac{1}{(a-1)^2}=\frac{a(a+3)+(1-a)}{(1-a)^3}=\frac{a^2+2a+1}{(1-a)^3}=\frac{(a+1)^2}{(1-a)^3}.$$

Тогда все выражение равно $\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)^2}\cdot\dfrac{(a+1)^2}{(1-a)^3}=\dfrac{1}{1-a}$.

Ответ: $\dfrac{1}{1-a}$.

12. *(7 баллов)* На основании BC равнобедренного треугольника ABC, отмечена точка D, а на его боковой стороне AC — точка E так, что $AE = AD$. Зная, что $\angle BAD = 30^\circ$, найдите величину угла CDE.



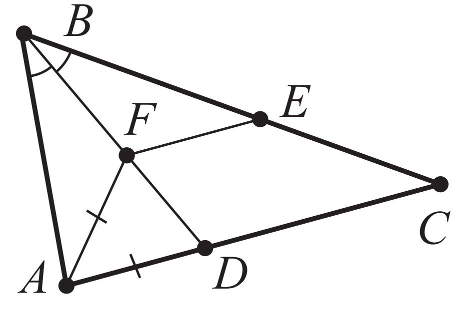
Решение.

Пусть $DAE = 2\alpha$, тогда выполняется следующие равенства $\angle AED = \angle ADE = (180^\circ - 2\alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha$ и $\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 2\alpha - 30^\circ) : 2 = 75^\circ - \alpha$. Для треугольника CDE угол AED является внешним, поэтому он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним.

Получаем $90^\circ - \alpha = \angle CDE + 75^\circ - \alpha$. Откуда $\angle CDE = 15^\circ$.

Ответ: 15°.

13. *(8 баллов)* В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка E, а на биссектрисе BD — точка F так, что $(EF)\|(AC)$ и $AF = AD$. Докажите, что $AB = BE$.



Решение.

По условию, BD — биссектриса, поэтому $\angle ABF = \angle FBE$.

Рассмотрим треугольник AFD, в нем $AF = AD$. Обозначим через $\alpha = \angle AFD = \angle ADF$. Угол FDC — смежный с углом ADF. Значит, $\angle FDC = 180^\circ - \alpha$.

Поскольку $(EF)\|(AC)$, выполняется равенство соответственных углов: $\angle FDC = \angle BFE = 180^\circ - \alpha$. Заметим, что угол AFB — смежный с углом AFD. Значит, $\angle AFB = 180^\circ - \alpha$.

Таким образом, $\angle ABF = \angle FBE$, $\angle AFB = 180^\circ - \alpha = \angle BFE$ и BF — общая. Это означает, что $\triangle AFB = \triangle BFE$ и $AB = BE$.

14. *(9 баллов)* Паша выбрал натуральное число $m \geqslant 10$, а Света хочет найти $n > 1$ подряд идущих натуральных чисел, чтобы их сумма была равна m.

1) *(2 балла)* Докажите, что если m — нечетное число, то Света сможет найти два таких числа.

2) *(2 балла)* Докажите, что если m — четное число, то Свете потребуется не менее трех чисел.

3) *(5 баллов)* Докажите, что если m делится на 4, но не делится на 12, то Свете потребуется по крайней мере пять чисел.

Решение.

1. Пусть m — нечетное число, тогда $m-1$ — четное и $\frac{m-1}{2}$ — натуральное. Тогда числа $\frac{m-1}{2}$ и $\frac{m-1}{2}+1$ — два подряд идущие натуральные числа, их сумма равна

$$\frac{m-1}{2}+\left(\frac{m-1}{2}+1\right)=\frac{m-1+m-1+2}{2}=m.$$

2. Если m — четное число, то его нельзя представить в виде суммы двух подряд идущих натуральных чисел, так как одно из них — четное, второе — нечетное. Значит сумма этих чисел — нечетна. Это означает, что потребуется не менее трех чисел.

3. Если m делится на 4, но не делится на 12, то m не делится на 3 и четно. Тогда, по доказанному выше, требуется не меньше трех подряд идущих натуральных чисел. Пусть сушествуют три таких числа: $x, x+1, x+2$, что $x+x+1+x+2=m$. Тогда $m=3x+3$ и m делится на 3, что противоречит условию. Следовательно, чисел должно быть не менее четырех. Рассмотрим сумму четырех подряд идущих натуральных чисел:

$$m=x+x+1+x+2+x+3=4x+6.$$

Тогда получаем, что $4x$ делится на 4, число 6 — не делится на 4, т.е. $m=4x+6$ не делится на 4. Это опять противоречит условию. Значит, таких чисел нужно не менее пяти.