

СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 8 физико-математический класс

Часть 1 (продолжительность 1,5 часа)

1. (2 балла) Света раскладывала конфеты в вазочки. В первую вазочку Света положила половину конфет и еще полконфеты. В каждой следующей вазочке Света оставляла половину из оставшихся у нее конфет и еще полконфеты. Всего было семь вазочек. Сколько было конфет?

Решение.

Света в каждой вазочке оставляла половину из оставшихся у нее конфет и еще полконфеты, тогда в последнюю вазочку Света положила $(1 - 1/2) \cdot 2 = 1$ конфету. Теперь подсчитаем сколько конфет в шестой вазочке. В седьмой лежит 1 конфета. Это половина того, что лежало в шестой вазочке минус полконфеты. Значит, в шестую вазочку Света положила $(1 + 1/2) \cdot 2 = 3$ конфеты. Тогда в пятой — $(3 + 1/2) \cdot 2 = 7$ конфет, в четвертой — $(7 + 1/2) \cdot 2 = 15$ конфет, в третьей — $(15 + 1/2) \cdot 2 = 31$ конфета, во второй — $(31 + 1/2) \cdot 2 = 63$ конфеты. Наконец, в начале было $(63 + 1/2) \cdot 2 = 127$ конфет.

Ответ: 127.

2. (2 балла) Зина вычеркнула из числа 1234567 две цифры так, чтобы полученное число делилось на 12. Запишите полученное число.

Решение.

Число должно делиться на 2, значит последняя цифра должна быть четной. Вычеркиваем 7, получим 123456. Полученное число должно делиться на 3, значит сумма цифр числа должна делиться на 3. Сумма цифр числа 123456 равна 21. Нам нужно вычеркнуть еще одну цифру. Так как 21 делится на 3, то нужно вычеркнуть цифру, делящуюся на 3. Значит, вычеркиваем 3. Получим 12456. Проверим, делится ли полученное число 12456 на 3 и на 4. На 3 делится, так как сумма цифр равна 18. Число 12456 делится на 4, так как последние две цифры образуют число 56, которое делится на 4.

Ответ: 12456.

3. (2 балла) На плоскости отмечены три точки A , B и C таким образом, что $AB = 6$ и $BC = 9$. Чему равны наименьшая возможная и наибольшая возможная длина отрезка AC ?

Решение.

Отрезок AC достигает наибольшей длины, если точки A , B и C лежат на одной прямой и точка B лежит между A и C . Тогда $AC = AB + BC = 6 + 9 = 15$.

Отрезок AC достигает наименьшей длины, если точки A , B и C лежат на одной прямой и точка A лежит между B и C . Тогда $AC = BC - AB = 9 - 6 = 3$.

Ответ: 3 и 15.

4. (2 балла) Вычислите $\frac{(67^2 - 58^2)6^5}{25 \cdot 6^7}$.

Решение.

Воспользуемся формулой разности квадратов

$$\frac{(67^2 - 58^2)6^5}{25 \cdot 6^7} = \frac{(67 - 58)(67 + 58)6^5}{25 \cdot 6^7} = \frac{9 \cdot 125 \cdot 6^5}{25 \cdot 6^7}. \text{ Сокращая дробь, получим: } \frac{9 \cdot 5}{6^2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Ответ: 1,25.

5. (2 балла) Угол B треугольнике ABC равен 48° . На продолжении стороны AC за точку A отложен отрезок AD , равный AB . На продолжении стороны AC за точку C отложен отрезок CE , равный CB . Найдите величину угла DBE .

Решение.

Угол BAC — это внешний угол равнобедренного треугольника BAD . Тогда $\angle DBA = \frac{\angle BAC}{2}$. Аналогично, $\angle CBE = \frac{\angle BCA}{2}$. Таким образом,

$$\angle DBE = \angle DBA + \angle ABC + \angle CBE = \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC + \frac{\angle BCA}{2}.$$

Кроме того, из треугольника ABC получаем, что $\frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$. Поэтому выполняется $\angle DBE = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} + \angle ABC = \frac{180^\circ - 48^\circ}{2} + 48^\circ = 114^\circ$.

Ответ: 114° .

6. (2 балла) Укажите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a+3)x + y = a, \\ (1-a)x + y = a+1 \end{cases}$ не имеет решений. Если таких значений несколько, то в ответе запишите их сумму.

Решение.

Каждое уравнение системы $\begin{cases} (a+3)x + y = a, \\ (1-a)x + y = a+1 \end{cases}$ задает прямую: $y = -(a+3)x + a$ и $y = -(1-a)x + a+1$ соответственно. Система уравнений не имеет решений, если эти прямые параллельны. Это выполняется, если $-(a+3) = -(1-a)$ и $a \neq a+1$. Тогда $a = -1$.

Ответ: -1 .

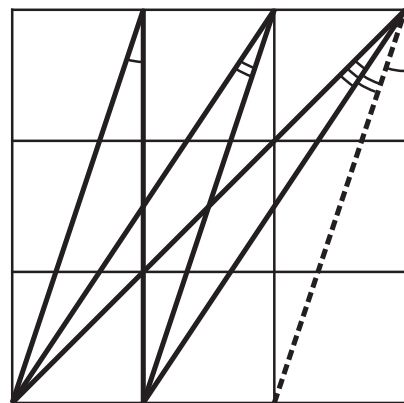
7. (2 балла) Найдите сумму величин трех углов, нарисованных на клетчатой бумаге (см. рисунок).

Решение.

Рассматриваемые углы равны двум другим углам и составляют в сумме 45° (см. рисунок).

Ответ: 45° .

8. (2 балла) Леспромхоз ведет вырубку леса. Известно, что в лесу 99% сосен. Будут вырубаться только сосны, и после вырубок процент сосен останется почти неизменным — сосен будет 98%. Сколько процентов леса отведено под вырубку?



Решение.

До вырубки деревья, не являющиеся соснами, составляют 1% всех деревьев, а после вырубки будут составлять 2%. Это значит, что общее число деревьев уменьшится в два раза.

Ответ: 50%.

9. (2 балла) Света выбирает произвольное число b и говорит его Тамаре. Какое число k (в зависимости от b) должна выбрать Тамара, чтобы k было на 3 больше b , и график прямой $y = kx + b$ проходил через точку с координатами $(1, 5)$?

Решение.

График прямой $y = kx + b$ проходит через точку с координатами $(1, 5)$. Значит, $5 = k \cdot 1 + b$. Откуда, $b = 5 - k$. Нам известно, что k было на 3 больше b , то есть $b = 5 - k = 5 - (b + 3)$. Получаем, $2b = 5 - 3, b = 1$. Следовательно, $k = b + 3 = 1 + 3 = 4$.

Ответ: 4.

10. (2 балла) В треугольнике ABC угол C равен 90° , CD — высота треугольника. Найдите длину AD , если $BC = 4$, $BD = 2$.

Решение.

Треугольник BDC — прямоугольный, в нем гипотенуза $BC = 4 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot BD$. Значит $\angle DCB = 30^\circ$ и $\angle DBC = 60^\circ$. Рассмотрим треугольник ABC , в нем $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Тогда $\angle A = 30^\circ$, что означает, что $AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot 4 = 8$. Найдём длину $AD = AB - DB = 8 - 2 = 6$.

Ответ: 6.

Часть 2 (продолжительность 1,5 часа)

11. (6 баллов) Упростите выражение $\frac{a^2}{a^2 + 4a + 4} \cdot \frac{8a^2 - 32}{a^3 - 2a^2} + \frac{a^5 - 8a^2}{a} : (a^2 - 4)$.

Решение.

Вынесем общие множители:

$$\frac{a^2}{a^2 + 4a + 4} \cdot \frac{8a^2 - 32}{a^3 - 2a^2} + \frac{a^5 - 8a^2}{a} : (a^2 - 4) = \frac{a^2}{a^2 + 4a + 4} \cdot \frac{8(a^2 - 4)}{a^2(a - 2)} + \frac{a^2(a^3 - 8)}{a(a^2 - 4)}.$$

Применим формулы сокращенного умножения и сократим дроби:

$$\frac{a^2}{(a + 2)^2} \cdot \frac{8(a - 2)(a + 2)}{a^2(a - 2)} + \frac{a^2(a - 2)(a^2 + 2a + 4)}{a(a - 2)(a + 2)} = \frac{8}{(a + 2)} + \frac{a(a^2 + 2a + 4)}{(a + 2)}.$$

Далее получаем

$$\begin{aligned} \frac{8}{(a + 2)} + \frac{a(a^2 + 2a + 4)}{(a + 2)} &= \frac{a^3 + 2a^2 + 4a + 8}{(a + 2)} = \frac{(a^3 + 2a^2) + (4a + 8)}{(a + 2)} = \\ &= \frac{a^2(a + 2) + 4(a + 2)}{(a + 2)} = \frac{(a + 2)(a^2 + 4)}{(a + 2)} = a^2 + 4. \end{aligned}$$

Ответ: $a^2 + 4$.

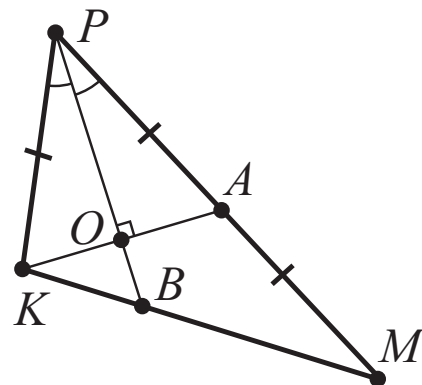
12. (7 баллов) В треугольнике MPK биссектриса PB перпендикулярна медиане KA , $MP = 4$. Периметр треугольника MPK равен 9. Найдите MK .

Решение.

Пусть O — точка пересечения биссектрисы PB и медианы KA . Тогда $\triangle KPO = \triangle POA$. У них общая сторона PO , $\angle KPO = \angle OPA$, $\angle POK = \angle POA = 90^\circ$. Следовательно, $KP = PA$.

По условию, AK — медиана. Это означает, что $KP = PA = AM = 2$. Периметр — это сумма длин всех сторон. Получаем: $9 = MK + 2 + 4$. Откуда $MK = 3$.

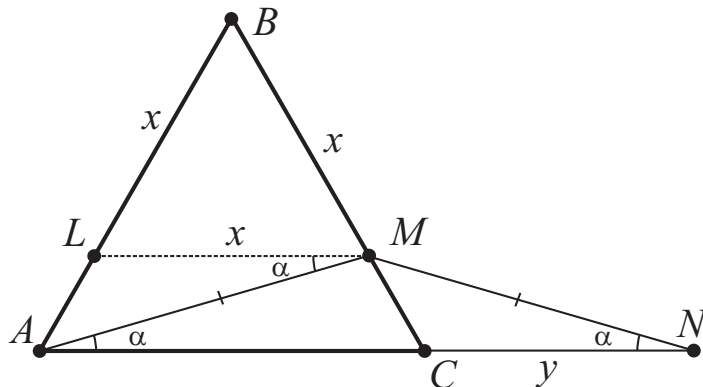
Ответ: 3.



13. (8 баллов) В равностороннем треугольнике ABC на стороне BC отметили точку M , а на продолжении стороны AC за точку C отмечена точка N так, что $AM = MN$. Докажите, что $BM = CN$.

Решение.

Пусть $BM = x$, $CN = y$ и докажем, что $x = y$. Для этого на стороне AB отметим точку L так, чтобы $BL = x$, тогда треугольник BLM равносторонний, и выполняются равенства $LM = x$, $AL = AB - x = MC$. Обозначим величину угла AML через α , тогда из-за параллельности прямых AC и ML угол MAC также равен α , а из равнобедренного треугольника ANM получим, что величина угла ANM также равна α .



Нетрудно заметить, что $\angle ALM = \angle NCM = 120^\circ$. Поэтому

$$\angle LAM = 180^\circ - 120^\circ - \alpha = \angle CMN.$$

Таким образом, в треугольниках ALM и MCN выполняется: $AL = MC$, $AM = MN$ и $\angle LAM = \angle CMN$. Значит эти треугольники равны и $x = LM = CN = y$.

14. (9 баллов) Паша выбрал натуральное число $m \geq 10$, а Света хочет найти $n > 1$ подряд идущих натуральных чисел, чтобы их сумма была равна m .

- 1) (2 балла) Докажите, что если m — нечетное число, то Света сможет найти два таких числа.
- 2) (2 балла) Докажите, что если m — четное число, то Свете потребуется не менее трех чисел.
- 3) (5 баллов) Докажите, что если m делится на 4, но не делится на 12, то Свете потребуется по крайней мере пять чисел.

Решение.

1. Пусть m — нечетное число, тогда $m - 1$ — четное и $\frac{m-1}{2}$ — натуральное. Тогда числа $\frac{m-1}{2}$ и $\frac{m-1}{2} + 1$ — два подряд идущие натуральные числа, их сумма равна $\frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m-1+m-1+2}{2} = m$.

2. Если m — четное число, то его нельзя представить в виде суммы двух подряд идущих натуральных чисел, т.к. одно из них — четное, второе — нечетное. Значит сумма этих чисел — нечетна. Это означает, что потребуется не менее трех чисел.

3. Если m делится на 4, но не делится на 12, то m не делится на 3 и четно. Тогда, по доказанному выше требуется не меньше трех подряд идущих натуральных чисел. Пусть существуют три таких числа: $x, x+1, x+2$, что $x+x+1+x+2 = m$. Тогда $m = 3x+3$ и m делится на 3, что противоречит условию. Следовательно, чисел должно быть не менее четырех. Рассмотрим четыре таких числа: $m = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 4x + 6$. Тогда получаем, что $4x$ делится на 4, 6 — не делится на 4, т.е. $m = 4x + 6$ не делится на 4. Это опять противоречит условию. Значит, таких чисел нужно не менее пяти.