Сборник задач
по геометрии

Екатеринбург 2008

УДК 51(075.3)

Подготовлено на кафедре математики
СУНЦ УрГУ

Печатается по решению Ученого Совета СУНЦ УрГУ: протокол №04 от 23.01.2008г

Сборник задач по геометрии. Составители: **Ануфриенко С.А., Гольдин А.М., Гулика С.В., Кремешкова С.А., Расин В.В., Смирнова Е.В.** Екатеринбург, 2008. 117с.

В сборник включены задачи по основным темам программы по математике физико-математических, математико-информационных и математико-экономических классов СУНЦ УрГУ. Сборник предназначен для учащихся СУНЦ УрГУ, старшеклассников и учителей математики.

Оглавление

Введение

Настоящая книга является второй частью сборника задач, соответствующего программе обучения по геометрии в математических классах СУНЦ УрГУ.

Задачи почти каждой главы сборника разделены на две группы (**А** и **Б**) по нарастанию их сложности. Ясно, что такое деление условно. Но у составителей сборника есть некоторое убеждение в том, что задачи первой группы (**А**) составляют необходимый (или базовый) уровень обучения. Вторая группа (**Б**) позволяет достигнуть достаточный уровень совершенства в решении задач данной темы. Кроме того, отмеченные звездочкой задачи этой группы носят исследовательский характер или встречались на математических олимпиадах.

Отзывы, критические замечания и добрые пожелания просим направлять по адресу: 620173, г. Екатеринбург, ул. Д.Зверева, 30. СУНЦ УрГУ, кафедра математики или sbornikfm@mail.ru.

Глава 1

Сечения многогранников

1.1. Основные способы построения сечений

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Точки пересечения плоскости сечения с ребрами многогранника будут вершинами, а отрезки, принадлежащие граням, — сторонами многоугольника, получающегося в сечении многогранника плоскостью.

Рассмотрим следующие методы построения сечений многогранников.

Метод следов. В общем случае секущая плоскость пересекает плоскость каждой грани многогранника и каждую из прямых, на которых лежат ребра многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют следом секущей плоскости на плоскости этой грани, а точку, в которой секущая плоскость пересекает прямую, содержащую какое-нибудь ребро, называют следом секущей плоскости на этой прямой. Если секущая плоскость пересекает непосредственно грань многогранника, то можно также говорить о следе секущей плоскости на грани и аналогично говорить о следе на ребре.

След секущей плоскости на плоскости нижнего основания условимся ради краткости речи называть просто следом секущей плоскости. С построения именно этого следа чаще всего начинают построение сечения многогранника.

Способы задания сечения весьма разнообразны. Наиболее распространенным из них является способ задания секущей плоскости тремя точками, не лежащими на одной прямой.

В тех случаях, когда сечение строится с помощью следа на плоскости нижнего основания, задавая три точки, принадлежащие непосредственно секущей плоскости, следует указать их таким образом, чтобы проекции этих точек на плоскость нижнего основания строились однозначно. Сделать это можно, например, если указать, на каком ребре лежит заданная точка или в какой грани и т.д.

При этом, если многогранником, сечение которого строится, является призма, то проектирование на плоскость нижнего основания выполняется параллельное. Его направление определяется боковым ребром призмы. Если же многогранником является пирамида, то выполняется центральное проектирование на плоскость основания. Центром проектирования является вершина пирамиды, в которой сходятся все боковые ребра.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. На ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить след секущей плоскости PQR (рис. 1).

Решение. Так как требуется построить след плоскости PQR на плоскость нижнего основания, то спроектируем точки P, Q и R на плоскость нижнего основания. Боковое ребро призмы определяет направление проектирования.

Поскольку точка P задана на ребре BB_1, точка P' — проекция точки P — совпадает с точкой B. Аналогично точка Q' совпадает с точкой C, а точка R' — с точкой D. Прямые PP' и QQ' параллельны, поэтому точки P, Q, P' и Q' лежат в одной плоскости. Построим точку S_1 - точку пересечения прямых PQ и $P'Q'$. Точка S_1 лежит на прямой PQ и поэтому лежит и в секущей плоскости. Кроме того, точка S_1 лежит на прямой $P'Q'$, т.е. лежит и в плоскости нижнего основания призмы. Таким образом, точка S_1 лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания, т.е. точка S_1 лежит на следе секущей плоскости PQR.

Аналогично находим точку S_2 — точку пересечения прямых PR и $P'R'$. Точка S_2 также лежит на следе секущей плоскости. Итак, искомым следом секущей плоскости является прямая S_1S_2.

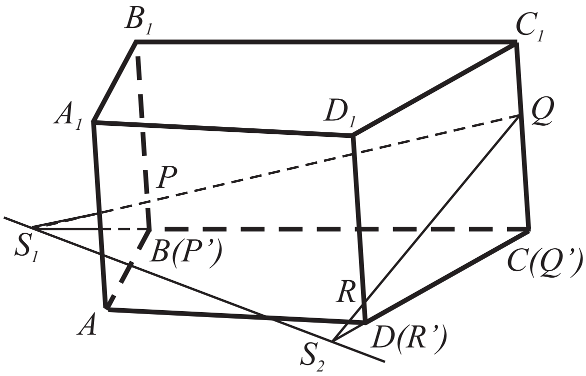

Рис. 1

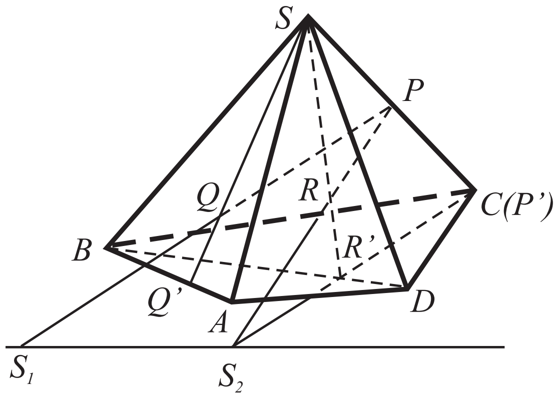

Рис. 2

Пример 2. На ребре SC пирамиды $SABCD$ задана точка P, в грани SAB — точка Q, а внутри пирамиды, в плоскости SBD, задана точка R. Построить след секущей плоскости PQR.

Решение. Выполним проектирование точек P, Q и R на плоскость ABC, приняв вершину S за центр проектирования. Получим точку P' совпадающую с точкой C, точку Q' — на ребре AB и точку R' — на диагонали BD.

Так как прямые PP' и QQ' пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Тогда в одной плоскости лежат также прямые PQ и $P'Q'$. Найдем точку S_1 — точку пересечения этих прямых. Точка S_1 по построению лежит на прямой PQ, т.е. лежит и в секущей плоскости. Вместе с тем точка S_1 лежит и на прямой $P'Q'$, т.е. лежит и в плоскости основания. Таким образом, точка S_1 лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания, т.е. на следе секущей плоскости. Аналогично строится точка S_2 — точка пересечения прямых PR и $P'R'$. Точка S_2 также лежит на следе секущей плоскости. Итак, следом секущей плоскости является прямая S_1S_2.

Пример 3. На ребрах AA_1, CC_1 и EE_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ заданы соответственно точки P, Q, и R. Построить сечение призмы плоскостью PQR (рис. 3).

Решение. 1. Находим проекции точек P, Q и R на плоскость нижнего основания в направлении, параллельном боковому ребру призмы.

Получаем соответственно точки P' (совпадает с точкой A), Q' (совпадает с точкой C) и R' (совпадает с точкой E). Затем строим след S_1S_2 секущей плоскости. В точке S_1 пересекаются прямые PR и AE, а в точке S_2 — прямые QR и QE.

2. Найдем далее точку V — след секущей плоскости на прямой DD_1. Для этого найдем сначала точку S_3, в которой прямая DE пересекает след S_1S_2, а затем найдем и точку V как точку пересечения прямых S_3R и DD_1.

3. Осталось найти след секущей плоскости на прямой BB_1. Найдем его так же, как и след V. А именно найдем точку S_4, в которой пересекаются прямые BE и S_1S_2, а затем искомый на прямой BB_1 след — точку T как точку пересечения прямых S_4R и BB_1.

4. Убедимся, что построенные точки V и T лежат в плоскости PQR. Действительно, точка S_3 лежит на следе секущей плоскости и поэтому лежит в плоскости PQR, а точка R лежит в плоскости PQR по условию. Таким образом, и точка V, лежащая на прямой S_3R, лежит в плоскости PQR. Аналогично можно показать, что и точка T лежит в плоскости PQR. Итак, многоугольник $PRVQT$ — искомое сечение.

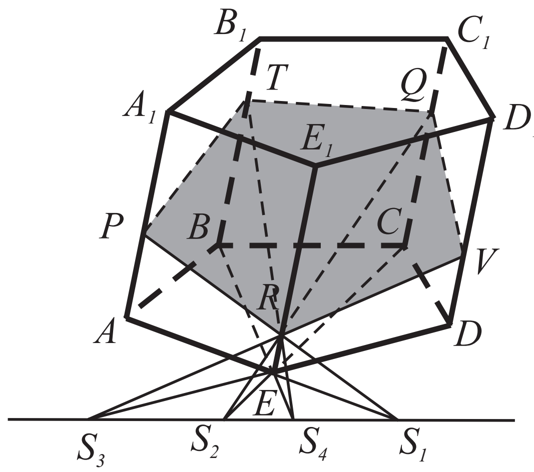

Рис. 3

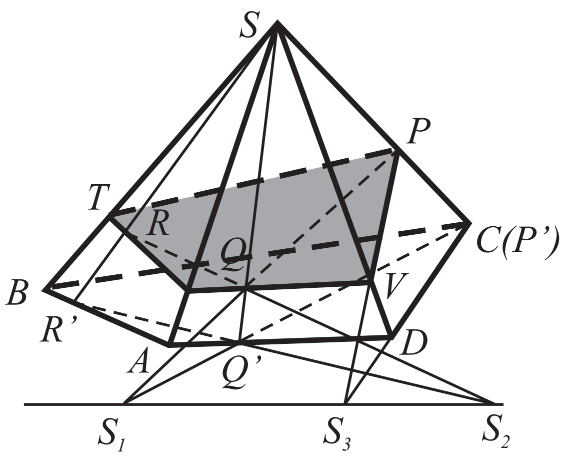

Рис. 4

Пример 4. На ребре SC пирамиды $SABCD$ задана точка P, а в гранях SAB и SAD заданы соответственно точки R и Q. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR (рис.4).

Решение. 1. Построим след секущей плоскости PQR. Для этого спроектируем точки P, Q и R на плоскость $ABCD$ из точки S. Получим точку P' (совпадает с точкой C) и точки Q' и R'. Затем найдем две точки следа — плоскости PQR, например точку S_1 — точку пересечения прямых PQ и CQ' и точку S_2 — точку пересечения прямых RQ и $R'Q'$. Прямая S_1S_2 — след секущей плоскости.

2. Построим далее след секущей плоскости на прямой SD. Для этого найдем точку S_3, в которой прямая CD пересекает след S_1S_2, и проведем прямую S_3P. Точка V, в которой прямая S_3P пересекает прямую SD, и является следом секущей плоскости на прямой SD.

3. Дальнейшие построения можно выполнить уже не пользуясь следом S_1S_2. Так как точки V и Q обе лежат и в секущей плоскости, и в плоскости SAD, то прямая VQ является линией пересечения этих плоскостей. На прямой SA строим теперь точку W, в которой пересекаются прямые VQ и SA.

4. Рассуждая аналогично, получаем далее WT — след секущей плоскости на грани SAB и TP — след секущей плоскости на грани SBC.

5. Многоугольник $PVWT$ — искомое сечение (доказательство того, что построенные точки V, W и T лежат в секущей плоскости, вполне понятно).

Метод вспомогательных сечений (метод внутреннего проектирования). Этот метод в достаточной мере является универсальным и имеет определенные преимущества по сравнению с методом следов в тех случаях, когда нужный след секущей плоскости оказывается за пределами чертежа. Вместе с тем построения при использовании этого метода получаются “скученными”, т.к. все они выполняются внутри многогранника (это обстоятельство послужило причиной называть рассматриваемый метод также методом внутреннего проектирования).

Рассмотрим примеры применения этого метода. Вернемся к примеру № 3. Выполним построение методом вспомогательных сечений (рис. 5).

Решение. 1. Построим первое вспомогательное сечение призмы — ее сечение плоскостью, которая проходит через какие-нибудь две из трех заданных прямых PP', QQ' и RR', например через прямые PP' и QQ'. Этим сечением является четырехугольник AA_1C_1C.

2. Будем искать теперь след секущей плоскости PQR на прямой BB_1. Для этого построим второе вспомогательное сечение призмы плоскостью. Это сечение проведем через третью заданную прямую RR' и боковое

ребро BB_1, на котором мы хотим найти след плоскости PQR. Этим сечением является фигура BB_1E_1E.

3. Находим прямую OO_1, по которой пересекаются плоскости вспомогательных сечений AA_1C_1C и BB_1E_1E, а затем точку O_2, в которой пересекаются прямые PQ и OO_1.

4. Так как точка O_2 лежит на прямой PQ, то она лежит и в плоскости PQR. Тогда и прямая RO_2 лежит в плоскости PQR. Это значит, что точка T, в которой пересекаются прямые RQ_2 и BB_1, также лежит в секущей плоскости. Точка T и является следом плоскости PQR на прямой BB_1.

5. Аналогично найдем след плоскости PQR на прямой DD_1. Для этого построим прямую FF_1, по которой пересекаются плоскости BB_1E_1E и AA_1D_1D, а затем точку F_2 — точку пересечения прямых RT и FF_1. Проводя далее прямую PF_2, получим на прямой DD_1 след V плоскости PQR.

6. Соединяя, наконец, заданные и построенные точки в соответствии с порядком следования ребер призмы, получим многоугольник $PRVQT$ — искомое сечение.

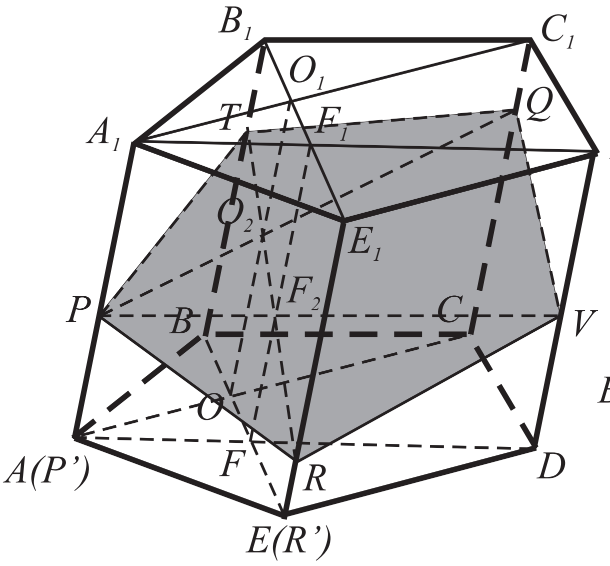

Рис. 5

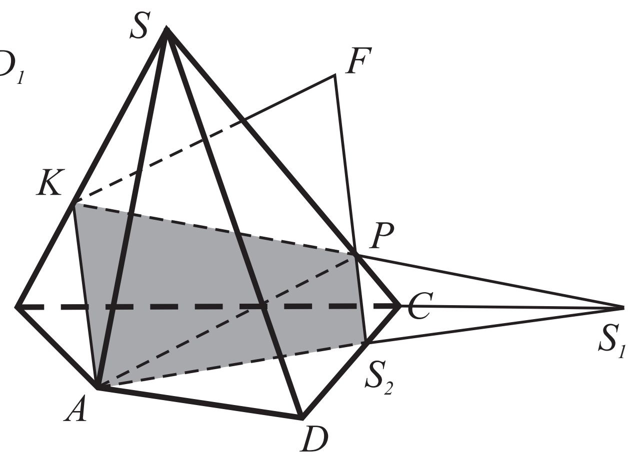

Рис. 6

Комбинированный метод. Суть этого метода состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в сочетании с методом следов, или с методом вспомогательных сечений, или с обоими этими методами. При построении сечения используются следующие теоремы:

1) Если две плоскости параллельны и пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны между собой.

2) Если две пересекающиеся плоскости параллельны одной и той же прямой, то линия их пересечения параллельна этой прямой.

3) Если плоскость и прямая параллельны и через эту прямую проведена некоторая плоскость, пересекающая данную плоскость, то линия пересечения этих двух плоскостей параллельна данной прямой.

Рассмотрим решение вспомогательной задачи.

Пример 5. На ребрах SB и SC пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки K и P. Построить прямую, проходящую через точку K, параллельно прямой AP (рис. 6).

Решение. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и прямую AP, т.е. плоскостью, заданной тремя точками K, A и P. Для этого, как обычно, строим след секущей плоскости. В рассматриваемом примере это прямая S_1A. Строим далее сечение $AKPS_2$ и в плоскости этого сечения через точку K проводим прямую KF, параллельную прямой AP. Прямая KF - искомая прямая.

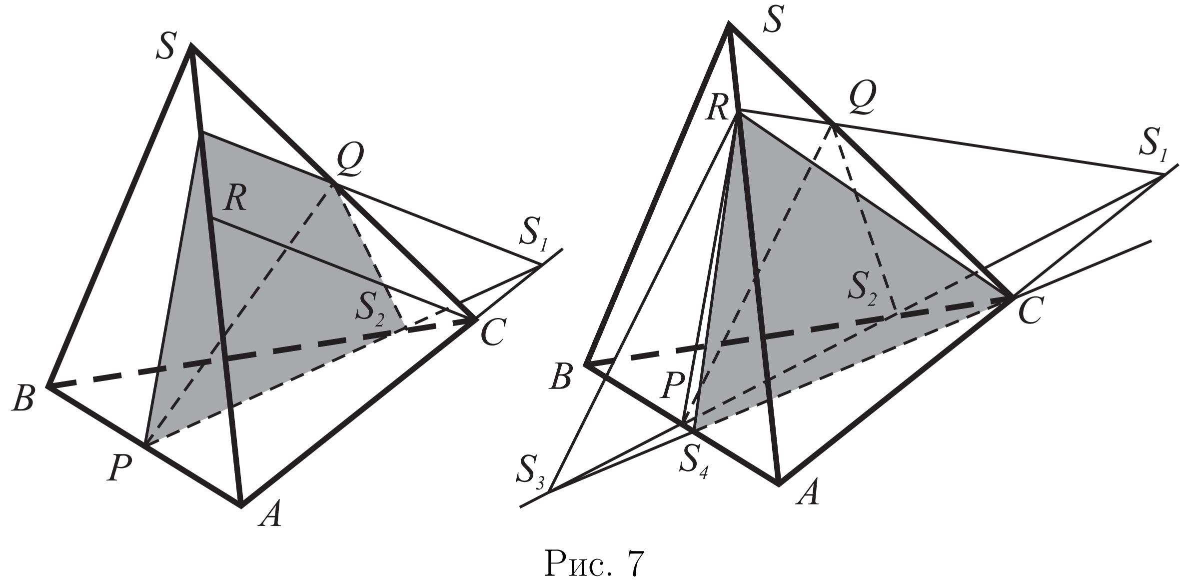

Рис. 7

Пример 6. На ребрах AB, SC и SA пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой CR; б) плоскостью, проходящей через прямую CR, параллельно прямой PQ (рис. 7).

Решение. а) В плоскости SAC, проходящей через прямую CR и точку Q, проведем прямую $QV \| CR$, а затем построим сечение пирамиды плоскостью PQV (следом этой плоскости является прямая S_1P) Плоскость PQV проходит через прямую PQ и параллельна прямой CR, поэтому многоугольник $PVQS_2$ — искомое сечение.

б) Построим вспомогательное сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую PQ и точку R (прямая S_1P — след этой плоскости, многоугольник RQS_2P — сечение), а затем в плоскости этого сечения через точку R проведем прямую $RS_3 \| PQ$. Прямыми CR и RS_3 определится тогда искомая секущая плоскость. Следом искомой секущей плоскости является прямая S_3C, а треугольник CRS_4 — искомое сечение.

Пример 7. На ребрах BB_1, CD и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P, Q и R, а на ребре AA_1 — точка K. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку K, параллельно плоскости PQR (рис. 8).

Решение. 1) Построим сначала сечение PS_2QR призмы заданной плоскостью PQR (например, с помощью следа S_1Q).

2) Так как искомая секущая плоскость параллельна плоскости PQR, то плоскости граней призмы пересекаются искомой секущей плоскостью и плоскостью PQR по параллельным прямым. Проведем в плоскости AA_1B через точку K прямую $KB_2 \| PS_2$, затем в плоскости BB_1C_1 через точку B_2 прямую $B_2C_2 \| PR$, затем в плоскости CC_1D_1 через точку C_2 прямую $C_2D_2 \| RQ$ и, наконец, соединим точки D_2 и K.

3) Соединив далее полученные в процессе построения точки E_1 и F_1, найдем многогранник $KB_2E_1F_1D_2$ — искомое сечение.

Пример 8. Высота правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна стороне основания. На ребрах BB_1 и A_1C_1 взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C, D и E, и найдем площадь полученного сечения, ели сторона основания равна a (рис. 9).

Решение. Построим заданное сечение призмы плоскостью CDE.

1) Проведем прямую CE и найдем точку M, в которой прямая CE

пересекает прямую AA_1.

2) Проведем прямую MD и найдем точку K, в которой эта прямая пересекает прямую A_1B_1.

3) Точку K соединим с точкой E и точку D — с точкой C. Четырехугольник $CDKE$ — искомое сечение.

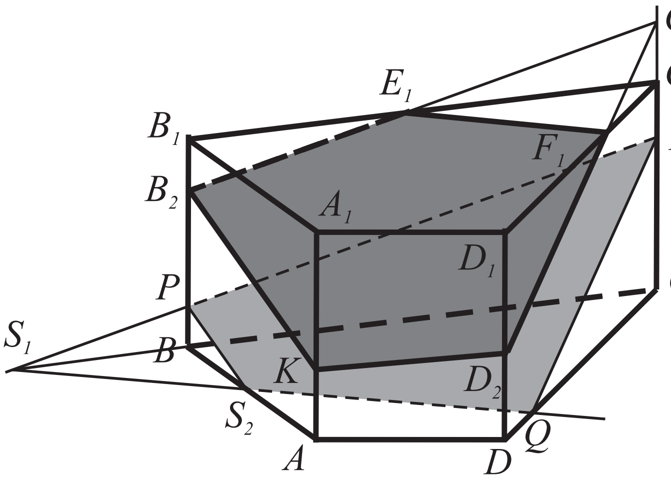

Рис. 8

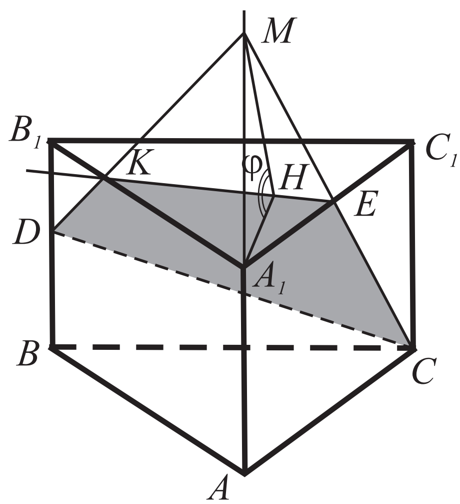

Рис. 9

4) Найдем теперь площадь сечения $CDKE$, пользуясь формулой

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\varphi},$$

где φ — угол между плоскостью CDE и плоскостью $A_1B_1C_1$. Найдем $\cos\varphi$. Прямая KE - линия пересечения плоскостей CDE и $A_1B_1C_1$, т.е. она является следом секущей плоскости на плоскости $A_1B_1C_1$. Проведем $A_1H \perp KE$, то так как прямая $MA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, A_1H будет проекцией наклонной MH, и, значит, $MH \perp KE$. Следовательно, угол MHA_1 образован двумя перпендикулярами к прямой KE. Так как он является острым углом (как угол между наклонной и ее проекцией), то угол MHA_1 и есть угол между плоскостями CDE и $A_1B_1C_1$, т.е. $\angle MHA_1 = \varphi$.

5) Из подобия треугольников MA_1E и MAC находим, что $MA_1 = a$, а из подобия треугольников DB_1K и MA_1K находим, что $A_1K = \frac{2}{3}a$. Тогда в треугольнике A_1KE $KE^2 = A_1K^2 + A_1E^2 - 2A_1K \cdot A_1E \cdot \cos 60^\circ$, откуда $KE = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, и, выражая двумя способами площадь треугольника A_1KE, получаем $\frac{1}{2}A_1H \cdot KE = \frac{1}{2}A_1K \cdot A_1E \cdot \sin 60^\circ$, откуда $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Теперь из прямоугольного треугольника MA_1H $\operatorname{tg}\varphi = \frac{MA_1}{A_1H} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Так как $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$

б) Ясно, что четырехугольник C_1B_1KE является проекция сечения $CDKE$ на плоскость $A_1B_1C_1$, поэтому $S_{\text{пр}} = S_{C_1B_1KE} = S_{A_1B_1C_1} - S_{A_1KE}$. $S_{A_1B_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S_{A_1KE} = \frac{1}{2}A_1K \cdot A_1E \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Итак, $S_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Теперь получаем $S_{\text{сеч}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2}{3}$.

1.2. Сечения призм

Группа А

1.1. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, заданными следующими точками Р, Q и R: а) P лежит на ребре BB_1, Q лежит на ребре AC, R лежит на продолжении ребра CC_1, причем точка C_1 лежит между точками C и R; б) P лежит в грани AA_1B_1B, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани BB_1C_1C; в) P лежит на ребре A_1B_1, Q — точка отрезка DC_1, где точка D лежит на ребре AB, R лежит на продолжении ребра BC, причем C лежит между точками B и R.

1.2. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KLM, где $K \in (A_1B_1C_1)$, $L \in (A_1B_1C_1)$ и $M \in (AA_1B)$.

1.3. Построить сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре A_1B_1, Q лежит в грани $ABCD$, R лежит на ребре DD_1; б) P лежит в грани AA_1B_1B, Q лежит в грани AA_1D_1D, R лежит в грани CC_1D_1D; в) P лежит на диагонали AC_1, Q лежит на диагонали B_1D, R лежит на ребре C_1D_1.

1.4. Построить сечения шестиугольной призмы $ABC\ldots D_1E_1F_1$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре DD_1, Q лежит на ребре AB, R лежит на ребре AF; б) P лежит в грани BB_1C_1C, Q лежит на ребре E_1F_1, R лежит на ребре AF; в)

P лежит на диагонали BD_1, Q лежит на диагонали AЕ, R лежит на ребре BC.

1.5. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре CC_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани $A_1B_1C_1$; б) P лежит на прямой C_1M, где точка M лежит на ребре A_1B_1 и находится между точками C_1 и P; в) P лежит на отрезке C_1K, где точка K лежит на ребре AB.

1.6. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре B_1C_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на отрезке KL, где точка K лежит на ребре A_1B_1, а точка L — на ребре AC; б) P лежит на прямой CN, где точка N лежит в грани AA_1B_1B и находится между точками C и P; в) P лежит на прямой AM, где точка M лежит на ребре B_1C_1 и находится между точками B_1 и C_1.

1.7. Построить сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, проходящими через прямую DQ, где точка Q лежит на ребре CC_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани AA_1B_1B, б) P лежит на продолжении ребра A_1B_1, причем точка A_1 находится между B_1 и P; в) P лежит на диагонали AC_1.

1.8. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана точка P. Построить прямые, параллельные прямой DP, и проходящие через следующие точки: а) A; б) K, взятую на ребре AA_1; в) L, взятую в грани AA_1D_1D.

1.9. В грани BB_1C_1C призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана точка P. Построить прямые, параллельные прямой AР и проходящие через точки K, L и M, взятые соответственно на следующих ребрах: а) AD; б) AB; в) BB_1.

1.10. На ребрах BB_1 и DD_1 пятиугольной призмы $ABC...D_1E_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить прямые параллельные прямой PQ и проходящие через следующие точки: а) E; б) K, взятую на ребре AA_1; в) L, взятую в грани AA_1BB_1.

Группа Б

1.11. На ребрах BB_1 и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой AP; б) плоскостью, проходящей через прямую C_1P, параллельно прямой AQ; в) плоскостью, проходящей через прямую AQ, параллельно прямой CP и плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой AQ.

1.12. На ребре BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ задана точка P, а в грани ABC — точка Q. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую C_1Q, параллельно прямой AP и плоскостью, проходящей через прямую AP, параллельно прямой C_1Q; б) плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой C_1Q и плоскостью, проходящей через прямую C_1Q, параллельно прямой CP; в) плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой B_1Q и плоскостью, проходящей через прямую B_1Q, параллельно прямой CP.

1.13. В грани $ABCD$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ задана точка P. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую D_1P, параллельно прямой B_1D и плоскостью, проходящей через прямую B_1D, параллельно прямой D_1P; б) плоскостью, проходящей через прямую A_1P, параллельно прямой DB_1 и плоскостью, проходящей через прямую DB_1 параллельно прямой A_1P; в) плоскостью, проходящей через прямую B_1P, параллельно прямой A_1C и плоскостью, проходящей через прямую A_1C параллельно прямой B_1P.

1.14. На ребрах AC, BC и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки Q, R и S. Построить сечения призмы плоскостями, параллельными плоскости QRS и проходящими через точку P, заданную на следующих ребрах: а) CC_1; б) BB_1; в) A_1B_1.

1.15. На ребрах AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения призмы плоскостями, параллельными прямым B_1P и A_1Q и проходящими через точки K, L и M, взятым соответственно на следующих отрезках: а) C_1P; б) BQ; в) PQ.

1.3. Сечения пирамид

Группа А

1.16. На ребрах AB, BD и AC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K, L и M соответственно. Построить сечение тетраэдра плоскостью KLM.

1.17. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L принадлежат грани ABC, а точка M — грани ACD. Построить сечение тетраэдра плоскостью KLM.

1.18. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре SB, Q лежит на ребре AD, R лежит в грани SCD; б) P лежит в грани SAB, R лежит в грани SCD; Q — лежит в грани SAD; в) P лежит на отрезке SM, где точка M лежит в грани $ABCD$, Q лежит в грани SBC, R лежит на ребре CD.

1.19. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре SB, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани ABC; б) P лежит на продолжении ребра SB, причем точка B лежит между точками S и P, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани SBC; в) P лежит на отрезке SM, где точка M лежит в грани ABC, Q лежит на ребре SB, R лежит в грани ABC.

1.20. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, проходящими через прямую RQ, где точка R лежит на ребре AB, а точка Q — на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на прямой BK, где точка K лежит на ребре SA и находится между точками B и P; б) P лежит на отрезке CL, где точка L лежит в грани ABC; в) P лежит на прямой BM, где точка M лежит в грани SAC и находится между точками B и P.

1.21. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на прямой BK, где точка K лежит на ребре SA и находится между точками B и P; б) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани ABC; в) P лежит на прямой

CM, где точка M лежит в грани SAB и находится между точками C и P.

1.22. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, проходящими через прямую QR, где точка Q лежит на ребре SB, а точка R — на ребре AD, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани SCD; б) P лежит на прямой AK, где точка K лежит в грани SBC и находится между точками A и P; в) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани $ABCD$.

1.23. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, проходящими через прямую DQ, где точка Q лежит на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани SAB; б) P лежит на прямой CK, где точка K лежит в грани SAB и находится между точками C и P; б) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани $ABCD$.

Группа Б

1.24. На ребрах SA и SD пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q. Построить прямые, параллельные прямой PQ и проходящие через следующие точки: а) D; б) K, взятую на ребре SC; в) L, взятую в грани SAB.

1.25. На ребрах AC, SC и AB пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую SB, параллельно прямой PQ и плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой SB; б) плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой CR и плоскостью, проходящей через прямую CR параллельно прямой BQ; в) плоскостью, проходящей через прямую QR, параллельно прямой SP и плоскостью, проходящей через прямую SP параллельно прямой QR.

1.26. На ребрах SC и SA пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани ABC — точка R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую CQ, параллельно прямой SR и плоскостью, проходящей через прямую SR

параллельно прямой CQ; б) плоскостью, проходящей через прямую BP, параллельно прямой CQ и плоскостью, проходящей через прямую CQ параллельно прямой BP; в) плоскостью, проходящей через прямую PQ, параллельно прямой SR и плоскостью, проходящей через прямую SR параллельно прямой PQ.

1.27. На ребрах SB и SD пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ – точка R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую AC, параллельно прямой DP и плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой AC; б) плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой BQ и плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой DP; в) плоскостью, проходящей через прямую PR, параллельно прямой BQ и плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой PR.

1.28. На ребрах SC и SB пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ — точка R — точка пересечения диагоналей AC и BD. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую DQ, параллельно прямой PR и плоскостью, проходящей через прямую PR параллельно прямой DQ; б) плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой QR и плоскостью, проходящей через прямую QR параллельно прямой DP; в) плоскостью, проходящей через прямую DR, параллельно прямой PQ и плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой DR.

1.29. На ребрах CD, BC и SC пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки Q, R и T. Построить сечения пирамиды плоскостями, параллельными плоскости QRT и проходящими через точку P, заданную следующим образом: а) на ребре AD; б) на ребре SA; в) грани SAB.

1.30. На ребрах SA и SC пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения пирамиды плоскостями, параллельными прямым BP и AQ и проходящими через точки K, L и M, взятым соответственно на следующих ребрах: а) SA; б) SB; в) BC.

1.4. Задачи на нахождение отношений и площадей

Группа А

1.31. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер B_1C_1 и AB соответственно, точка P лежит на ребре A_1B_1 так, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$. Построить сечение призмы плоскостью (CNP) и найти отношение, в котором оно делит отрезок AM.

1.32. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. На ребре SD взята точка L так, что $SL : LD = 2 : 1$, точка K – середина ребра SB. Построить сечение пирамиды плоскостью (AKL) и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC.

1.33. В тетраэдре $ABCD$ O — точка пересечения медиан грани ABC, M – середина ребра AD. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и вершину C параллельно прямой DO. Найти отношение, в котором это сечение делит ребро AB.

1.34. На ребрах A_1B_1, AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки M, N и P так, что $A_1M : MB_1 = BN : NA = C_1P : PC = 1 : 2$. Построить сечение призмы плоскостью (MNP) и найти отношение $C_1Q : B_1C_1$, где Q — точка пересечения плоскости (MNP) с прямой B_1C_1.

1.35. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N – середины ребер AB и B_1C_1, точка P лежит на ребре AD так, что $AP : PD = 3 : 1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью (MNP) и найти отношение, в котором сечение делит ребро BB_1.

1.36. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины отрезков AB и AD проведена плоскость, параллельная ребру SA. Найти площадь сечения, если $AB = a$, $SA = d$.

1.37. Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N и P лежащих соответственно на ребрах BC, BD и AD так, что $MC = 2MB$, $DN = 2NB$ и $DP = 2AP$. Определить в каком отношении эта плоскость делит площадь треугольника ADC.

1.38. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Построить сечение плоскостью, содержащей диагональ AB_1 и проходящую через середину ребра DD_1. Найти площадь полученного сечения.

1.39. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки M, N и K являются центрами трех граней с вершиной D_1. Найти площадь сечения куба плоскостью (MNK).

1.40. Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1, A_1D_1, если длина ребра куба равна a.

1.41. На ребрах AA_1 и AB параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно выбраны точки M и N так, что $AM = 3MA_1$ и $AN = NB$. Найти отношение, в котором плоскость C_1MN делит ребро BC.

1.42. Точки M и N являются серединами ребер AD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а P — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ (т.е. точка пересечения диагоналей этой грани). Найти отношение, в котором плоскость PMN делит ребро AB.

1.43. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани прямоугольники, $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра DC параллельно плоскости (AB_1C_1) и найти его периметр.

Группа Б

1.44. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны a. Точка M — середина ребра DB, точка N лежит на ребре BC так, что $BN : NC = 2 : 1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно прямой AB, и найти его площадь.

1.45. Точка O — центр основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Через середины отрезков AB, BC и SO проведена плоскость. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки A и C параллельно ребру SB равна q.

1.46. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. Найти площадь этого сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания равна $16\sqrt{2}$.

1.47. Точка O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M - середина ребра AD. Построить сечение куба плоскостью проходящей через точку M, параллельно прямым AO и C_1D и найти площадь сечения, если ребро куба равно 4.

1.48. На диагоналях AB_1 и BC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M и N так, что отрезок MN параллелен плоскости $ABCD$. Найти отношение $AM : AB_1$, если $MN : AB = \sqrt{5}/3$.

1.49. Точки M и N — середины ребер AD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $MN = a$, а диагонали грани $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P параллельно прямой MN, пересекает грань AA_1D_1D в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

1.50. Пусть точки O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке OO_1 взята точка S так, что $O_1S : OS = 1 : 3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найти площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

1.51. Среди всех сечений куба, проходящих через его диагональ, указать то, которое имеет наименьшую площадь. Найти эту площадь, если ребро куба равно a.

1.52. Секущая плоскость треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проходит через точки A_1, C параллельно прямой BC_1. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB.

1.53. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы основания ABC пересекаются в точке M, а диагонали граней AA_1C_1C и BB_1C_1C в точках N и P соответственно. Плоскость MNP пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Найти отношение $B_1K : B_1C_1$.

1.54. Каждое ребро тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребрах AD, DC и BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $AM = 2a/3$, $CN = a/2$, $CP = a/4$. Плоскость MNP пересекает ребро AB в точке Q. Найти BQ.

1.55. В основании правильной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат, а боковые грани — правильные треугольники. Точки P и N лежат на сторонах основания AD и CD соответственно. Точки M и K лежат на боковых ребрах AS и CS соответственно. Известно, что $AP : DP = 2 : 1$, $CN = DN$ и $AM = MS$. Через точки M и N, P и K проведены две пересекающиеся между собой прямые MN и KP. Определить $CK : KS$.

1.56. На ребре AB тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M так, что $AM : AB = x$. Через точку M проведено сечение плоскостью, параллельной AD и BC. При каком x сечение этой плоскостью будет ромбом, если $AD = 3BC$.

1.57. Длины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$ равны соответственно a и b, угол между прямыми AC и BD равен ϕ. Найти наибольшую площадь сечения тетраэдра, параллельного прямым AC и BD.

1.58. Пусть $SABCD$ – четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M лежат на ребрах SB, SA, AD соответственно, причем $AL = 2LS$, $AM = MD$, $KB = 3SK$. На прямой (LM) выбрана точка X, а на прямой (SC) — точка Y так, что $(XY)\|(AK)$. Найти $LX : XM$.

1.59. Пусть $SABCD$ – четырехугольная пирамида, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ ($BC\|AD$), причем $AD = 2BC$. Точки K, L лежат на ребрах SA, AB соответственно, причем $SK = 2KA$, $AL = 3LB$. На прямой (KL) выбрана точка X, а на прямой (AC) — точка Y так, что $(XY)\|(SD)$. Найти $LX : XK$.

Сборник задач по геометрии

Компьютерный набор и верстка С.А. Ануфриенко, А.М. Гольдин, С.А. Кремешкова, С.Э. Нохрин, Е.В. Смирнова, С.Б. Шишеморова.

Подписано в печать 25.01.2008. Формат 60×84 1/16 .
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд.л. 7,4. Усл. печ. л. 7,5. Зак.   . Тираж 210 экз.
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького

Отпечатано на ризографе в СУНЦ УрГУ.

Екатеринбург, ул. Н. Зверева, 30.