Сборник задач по геометрии

Екатеринбург 2019

УДК 51(075.3)

Подготовлено на кафедре математики
СУНЦ УрФУ

Печатается по решению Ученого Совета СУНЦ УрФУ: протокол № 04 от 23.01.2008г

Сборник задач по геометрии. Составители: **Ануфриенко С.А., Гольдин А.М., Гулика С.В., Кремешкова С.А., Расин В.В., Смирнова Е.В.** Екатеринбург, 2019. 200с.

В сборник включены задачи по основным темам программы по математике физико-математических, математико-информационных, физико-технических и математико-экономических классов СУНЦ УрФУ. Сборник предназначен для учащихся СУНЦ УрФУ, старшеклассников и учителей математики.

Рецензенты: зав. сектором топологии
ОАиТ ИММ УрО РАН,
д.ф.-м.н. **А.В. Осипов**;
ст. научный сотрудник
ИММ УрО РАН,
к.ф.-м.н. **С.С. Кумков**

Оглавление

Введение

Настоящая книга является второй частью сборника задач, соответствующего программе обучения по геометрии в математических классах СУНЦ УрФУ.

Задачи почти каждой главы сборника разделены на две группы (**А** и **Б**) по нарастанию их сложности. Ясно, что такое деление условно. Но у составителей сборника есть некоторое убеждение в том, что задачи первой группы (**А**) составляют необходимый (или базовый) уровень обучения. Вторая группа (**Б**) позволяет достигнуть достаточный уровень совершенства в решении задач данной темы. Кроме того, отмеченные звездочкой задачи этой группы носят исследовательский характер или встречались на математических олимпиадах.

Отзывы, критические замечания и добрые пожелания просим направлять по адресу: 620173, г. Екатеринбург, ул. Д.Зверева, 30. СУНЦ УрФУ, кафедра математики или sbornikfm2019@mail.ru.

Глава 1

Планиметрия

1.1. Равенство и подобие треугольников

Группа А

1.1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH. Доказать, что $AC^2 = AB \cdot AH$ и $CH^2 = AH \cdot BH$.

1.2. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). а) Найти длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии. б) Найти длину отрезка, высекаемого боковыми сторонами трапеции на прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям. в) Найти длину отрезка MN, концы которого делят боковые стороны AB и CD в отношении $AM : MB = DN : NC = p : q$.

1.3. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

1.4. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

1.5. Точки A_1 и B_1 делят стороны BC и AC треугольника ABC в отношениях $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$. В каком отношении отрезок AA_1 делится отрезком BB_1?

1.6. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне

BC. Выразить длину стороны квадрата через $a = BC$ и h_a — длину высоты треугольника, проведенной из вершины A.

1.7. Биссектриса AD треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке P. Доказать, что треугольники ABP и BDP подобны.

1.8. Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

1.9. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60°. На этой дуге взята точка M. Доказать, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

1.10. На одной из сторон угла расположены два отрезка длиной 3 и 4. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Длина наибольшего равна 6. Найти длину другого отрезка.

1.11. Основания трапеции равны 4 и 3, а боковые стороны пересекаются под прямым углом. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

1.12. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M так, что $\angle ABM = \angle BCM$. Известно, что $AM = 1$, $MC = 3$. Найти длину стороны AB.

1.13. Все стороны треугольника различны. Один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит треугольник на два треугольника, один из которых подобен исходному. Найти наибольший угол исходного треугольника.

1.14. У двух неравных, но подобных между собой треугольников имеются две пары соответственно равных между собой сторон, длины которых 12 и 18. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

1.15. Диагональ трапеции делит ее на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найти отношение оснований трапеции.

1.16. В трапеции известны основания: $AD = 7$, $BC = 3$. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны AB и CD в точках K и M. Известно, что $AK : KB = 7 : 3$. Найти KM.

1.17. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка P так, что $AP : AD = 1 : n$; Q — точка пересечения прямых AC и BP. Доказать, что $AQ : AC = 1 : (n+1)$.

1.18. Вершины параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ лежат на сторонах параллелограмма $ABCD$ (точка A_1 лежит на стороне AB, точка B_1 — на стороне BC и т.д.). Доказать, что центры обоих параллелограммов совпадают.

1.19. Одна из диагоналей вписанного в окружность четырехугольника является диаметром. Доказать, что проекции противоположных сторон на другую диагональ равны.

1.20. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD внутреннего или внешнего угла. Доказать, что $AD : DC = AB : BC$.

1.21. Доказать, что центр O вписанной окружности треугольника ABC делит биссектрису AA_1 в отношении $AO : OA_1 = (b+c) : a$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

1.22. Длины двух сторон треугольника равны a, а длина третьей стороны равна b. Вычислить радиус его описанной окружности.

1.23. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

1.24. Доказать, что площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника площади S, равна $3S/4$.

1.25. а) Доказать, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$. б) Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

1.26. Точка O, лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади S, отражается симметрично относительно середин его сторон. Найти площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках.

1.27. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Доказать, что $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$. Чему равен коэффициент подобия?

1.28. Из вершины C остроугольного треугольника ABC опущена высота CH, а из точки H опущены перпендикуляры HM и HN на стороны BC и AC соответственно. Доказать, что $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

1.29. Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. а) Доказать, что касательная в точке A к описанной окружности параллельна прямой B_1C_1. б) Доказать, что $B_1C_1 \perp OA$, где O — центр описанной окружности.

1.30. В равнобедренном треугольнике ABC из середины основания BC опущен перпендикуляр HE на боковую сторону AC; O — середина отрезка HE. Доказать, что прямые AO и BE перпендикулярны.

1.31. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Доказать, что произведение длин оснований трапеции равно сумме произведений длин отрезков одной диагонали и длин отрезков другой диагонали, но которые они делятся точкой пересечения.

1.32. Сторона квадрата равна 1. Через его центр проведена прямая. Вычислить сумму квадратов расстояний от четырех вершин квадрата до этой прямой.

Группа Б

1.33. Прямая, соединяющая точку P пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ с точкой Q пересечения прямых AB и CD, делит сторону AD пополам. Доказать, что она делит пополам и сторону BC.

1.34. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Доказать, что расстояние от любой точки M отрезка A_1B_1 до прямой AB равно сумме расстояний от M до прямых AC и BC.

1.35. На продолжении оснований AD и BC трапеции $ABCD$ за точки A и C взяты точки K и L. Отрезок KL пересекает стороны AB и CD в точках M и N, а диагонали AC и BD в точках O и P. Доказать, что если $KM = NL$, то $KO = PL$.

1.36. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса R с центром O, причем $AB = CD = EF = R$. Доказать, что точки попарного пересечения описанных окружностей треугольников BOC, DOE и FOA, отличные от точки O, являются вершинами правильного треугольника со стороной R.

1.37. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCK и DCL. Доказать, что треугольник AKL правильный.

1.38. На сторонах параллелограмма внешним образом построены квадраты. Доказать, что их центры образуют квадрат.

1.39. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Доказать, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

1.40. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены внешним образом правильные треугольники. Доказать, что их центры образуют правильный треугольник, причем его центр совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

1.41. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC и острым углом при вершине B, CD — биссектриса угла C. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе CD. Эта прямая пересекает продолжение основания AC в точке E. Докажите, что $AD = EC/2$.

1.42. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Доказать, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

1.43. На стороне BC равностороннего треугольника ABC как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, на которой взяты точки K и L, делящие полуокружность на равные дуги. Докажите, что прямые AK и AL делят отрезок BC на равные части.

1.44. а) Доказать, что высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы $A_1B_1C_1$ пополам. б) На сторонах AB, BC и

CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Доказать, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.45. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Доказать, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC, лежит на прямой B_1C_1.

1.46. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Доказать, что если $A_1B_1 \| AB$ и $B_1C_1 \| BC$, то $A_1C_1 \| AC$.

1.47. Пусть p — полупериметр остроугольного треугольника ABC, q — полупериметр треугольника, образованного основаниями его высот. Доказать, что $p : q = R : r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

1.48. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны центру описанной окружности треугольника ABC относительно его сторон. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1.49. Доказать, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

1.50. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и средняя линия A_1C_1. Прямые AD и A_1C_1 пересекаются в точке K. Доказать, что $2A_1K = |b - c|$.

1.51. Три прямые, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три треугольника, причем остается правильный шестиугольник. Найти длину стороны этого шестиугольника, если длины сторон треугольника равны a, b и c.

1.52. Прямая, проходящая через точку пересечения медиан треугольника ABC, пересекает стороны BA и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $AB = 1$, $BC = 2$ и $BP \cdot BQ = 8/9$. Найти длину отрезка BP.

1.2. Чевианы в треугольнике

Группа А

1.53. Основание треугольника равно 20, а медианы к боковым сторонам равны 18 и 24. Найти площадь треугольника.

1.54. Через середину M медианы CC_1 треугольника ABC проведена прямая (AN), пересекающая сторону BC в точке N. Найти отношение $AM : MN$.

1.55. Основание треугольника равно 26, медианы, проведенные к боковым сторонам, составляют 36 и 15. Найти площадь треугольника и третью медиану.

1.56. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$ проведена биссектриса CC_1. Доказать, что

$$a)\quad \frac{S_{CBC_1}}{S_{ACC_1}} = \frac{a}{b}, \qquad b)\quad \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}.$$

1.57. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$ проведена биссектриса CC_1, длина которой равна l_c. Доказать, что

$$l_c = \frac{2ab\cos\left(\widehat{C}/2\right)}{a+b}.$$

1.58. В треугольнике ABC со сторонами $BC = a$ и $AC = b$ проведена биссектриса CC_1, длина которой равна l_c. Пусть также $BC_1 = a_c$ и $AC_1 = b_c$. Доказать, что $l_c = \sqrt{ab - a_c b_c}$.

1.59. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Определить площадь треугольника.

1.60. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне треугольника. Найти отрезки, на которые центр окружности делит бóльшую сторону треугольника.

1.61. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Отрезок, соединяющий ее основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найти углы треугольника.

1.62. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18.

1.63. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$, $BC = 12$ и $AC = 18$. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C.

1.64. Дан равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b. Найти в каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании треугольника.

1.65. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

1.66. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $72°$, а биссектриса этого угла равна m. Найти длины сторон этого треугольника.

1.67. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

1.68. Найти величину $\cos 36°$.

1.69. В прямоугольном треугольнике с катетами 6 и 8 из вершины прямого угла проведена биссектриса CM. Окружности, вписанные в треугольники ACM и BCM, касаются отрезка CM в точках K и L. Найти длину отрезка KL.

1.70. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке L, проходит через вершину C и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AB и AC, если известно, что $CQ = 9$, $QB = 3$, $AP = 4$ и CL является биссектрисой угла C.

1.71. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, окружность, проходящая через вершину C, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $BQ = 2$ и CL — биссектриса угла C.

1.72. Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен исходному треугольнику.

1.73. Пусть h — длина высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, a_c, b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу c. Доказать, что $h^2 = a_c \cdot b_c$, $a^2 = c \cdot a_c$, и $b^2 = c \cdot b_c$.

1.74. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

1.75. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит его на два треугольника с площадями Q и q. Найти катеты.

1.76. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Доказать, что отношение площадей треугольников AOB и AOC равно BA_1/CA_1.

1.77. На отрезке AB выбраны точки X и Y так, что $AX : XB = AY : YB$. Доказать, что $X = Y$.

1.78. (Теорема Чевы). На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

1.79. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

1.80. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

1.81. Доказать, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

1.82. В треугольнике проведены три отрезка, каждый из которых соединяет вершину треугольника с точкой касания вписанной в треугольник окружности с противоположной стороной. Доказать, что эти отрезки пересекаются в одной точке.

1.83. Пусть точки X и Y лежат на прямой (AB), но не принадлежат отрезку $[AB]$. Доказать, что если $BX : XA = BY : YA$, то $X = Y$.

1.84. (Теорема Менелая). На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и C_1, а на продолжении стороны AC выбрана точка B_1. Доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

1.85. На сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и B_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$ и $AB_1 : B_1C = 2 : 1$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. а) Найти отношение $B_1O : OB$. б) Найти площадь треугольника AOB_1, если площадь треугольника ABC равна 6.

1.86. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1 и C_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 3$ и $AC_1 : C_1B = 1 : 2$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. а) Найти отношение $AO : OA_1$. б) Найти площадь четырехугольника BC_1OA_1, если площадь треугольника ABC равна 1.

1.87. Отрезок BM является медианой треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 2 : 5$ и $BQ : QC = 10 : 1$. Отрезок PQ пересекает BM в точке R. Найти отношение $BR : RM$.

1.88. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны $AC = 4$ и $BC = 3$. В треугольнике проведены биссектриса CD и медиана AM. Они пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника CEM.

Группа Б

1.89. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 2$. Точки P, Q, R являются попарным пересечением отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Найти отношение площадей треугольников ABC и PQR.

1.90. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Доказать, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

1.91. На прямых BC, CA и AB взяты точки A_1, B_1 и C_1, причем точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Прямые, симметричные прямым AA_1, BB_1 и CC_1 относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC, пересекают прямые BC, CA и AB в точках A_2, B_2 и C_2. Доказать, что точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

1.92. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Доказать, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой (теорема Дезарга).

1.93. На одной прямой взяты точки A_1, B_1 и C_1, а на другой — точки A_2, B_2 и C_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, A_2C_1 и A_1C_2 пересекаются в точках C, A и B соответственно. Доказать, что точки C, A и B лежат на одной прямой (теорема Паппа).

1.94. На сторонах AB, BC и CD четырехугольника $ABCD$ (или на их продолжениях) взяты точки K, L и M. Прямые KL и AC пересекаются в точке P, LM и BD — в точке Q. Доказать, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD.

1.95. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны треугольника ABC (или их продолжения) в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что: а) прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP пересекаются в одной точке; б) прямые, соединяющие середины сторон BC, CA и AB с серединами отрезков AA_1, BB_1 и CC_1, пересекаются в одной точке.

1.96. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Доказать, что $AB_2 = AC_2$.

1.97. а) Пусть α, β и γ — произвольные углы, причем сумма любых двух из них меньше 180°. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, имеющие при вершинах A, B и C углы α, β и γ. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. б) Доказать аналогичное утверждение для треугольников, построенных на сторонах треугольника ABC внутренним образом.

1.98. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC касаются окружности с центром O в точках A_1, B_1 и C_1. На лучах OA_1, OB_1 и OC_1 отложены равные отрезки OA_2, OB_2 и OC_2. Доказать, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

1.99. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Доказать, что прямые AA_2, BB_2 и CC_2, симметричные этим прямым относительно соответствующих биссектрис, тоже пересекаются в одной точке Q (такие точки P и Q называют *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC).

1.100. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника попарно параллельны. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

1.101. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Доказать, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

1.102. Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в точке S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, AB и CD — в точке Q. Доказать, что прямая PQ проходит через точку S.

1.103. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекают отрезки C_1B_1 и B_1A_1 в точках M и N. Доказать, что $\angle MBB_1 = \angle NBB_1$.

1.104. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$ проведены медиана AA_1, биссектриса BB_1 и высота CC_1. Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых: а) AB, AA_1, BB_1; б) AA_1, BB_1, CC_1.

1.105. Через середину стороны AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке K и продолжение стороны AC за точку C — в точке P. Найти площадь треугольника ABC, если $BK = 2$, $AP = 5$ и $\angle ACB = \arccos(1/4)$.

1.106. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, медиана $AD = \sqrt{97}/2$. На биссектрисе CE выбрана точка F такая, что $CF = CE/5$. Через точку F проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до прямой l.

1.107. Дан треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, а радиус описанной окружности равен $25/8$. На высоте CD выбрана точка E такая, что $CE = CD/4$ и через точку E проведена прямая l, параллельная BC. Найти расстояние от центра окружности, вписанной в треугольник ABC, до прямой l.

1.108. В треугольнике ABC на сторонах AC и BC расположены точки D и E соответственно так, что BD — биссектриса треугольника ABC, $DC = CE = 4/3$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle ADB$. Найти BC и площадь треугольника ABC.

1.3. Окружность

Группа A

1.109. Из точки B, лежащей вне окружности, выходят лучи BA и BC, пересекающие эту окружность. Выразить величину угла ABC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

1.110. Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Выразить величину угла BAC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричному ему относительно вершины A.

1.111. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Доказать, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

1.112. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Доказать, что CO — биссектриса угла ACB.

1.113. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найти углы треугольника ABC.

1.114. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

1.115. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

1.116. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

1.117. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность. Прямая l касается этой полуокружности в точке C. Из точек A и B на прямую l опущены перпендикуляры AM и BN. Пусть D — проекция точки C на AB. Доказать, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

1.118. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Доказать, что AC параллельна BD.

1.119. Доказать, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

1.120. Через середину C дуги AB проводят две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D, E и хорду AB — в точках F и G. Доказать, что четырехугольник $DEGF$ может быть вписан в окружность.

1.121. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. AB — общая касательная этих окружностей, не проходящая через M (A и B — точки касания). Доказать, что M лежит на окружности с диаметром AB.

1.122. Через точку O проведены три прямые, попарные углы между которыми равны 60°. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые, служат вершинами правильного треугольника.

1.123. N диаметров делят окружность на равные дуги. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M внутри окружности на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

1.124. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle BAC$ — прямой) двигается по плоскости таким образом, что вершины B и C скользят по сторонам заданного прямого угла. Доказать, что геометрическим местом точек A является некоторый отрезок и найти его длину.

1.125. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. A_1, B_1, C_1, D_1 — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Найти угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.

1.126. AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Доказать, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

1.127. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Доказать, что длины отрезков касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

1.128. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т.е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найти длину общей касательной к этим окружностям.

1.129. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. а) Доказать, что радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $(a+b-c)/2$. б) Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $(a+b+c)/2$.

1.130. Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром в точке O (B и C — точки касания). Выбирается произвольная точка X дуги BC. Через X проведена касательная, пересекающая отрезки AB

и AC в точках M и N. Доказать, что периметр треугольника AMN не зависит от выбора точки X.

1.131. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол.
а) К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Обозначим точки пересечения этой касательной со сторонами угла через A_1 и A_2, а точки касания — через B_1 и B_2. Доказать, что $A_1B_1 = A_2B_2$.
б) Через две точки касания окружностей со сторонами угла, лежащие на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Доказать, что эта прямая высекает на окружностях хорды равной длины.

1.132. В треугольник ABC вписана окружность. Она касается стороны AB в точке K. Доказать, что $AK = p - a$, где $a = BC$ и p — полупериметр треугольника ABC.

1.133. Доказать, что длина отрезка AL, где L — точка касания с лучом $[AB)$ вневписанной окружности треугольника ABC, равна p, где p — полупериметр треугольника ABC.

1.134. Пусть $BC = a$, r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_a касается стороны BC), p — его полупериметр. Доказать, что $pr = r_a(p - a)$.

1.135. Пусть $AC = b$, $AB = c$, r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_a касается стороны BC), p — полупериметр треугольника ABC. Доказать, что $rr_a = (p - b)(p - c)$.

1.136. Доказать формулу Герона для треугольника ABC ($AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $p = (a + b + c)/2$): $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1.137. Пусть r и r_a, r_b, r_c — радиусы вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Доказать, что $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

1.138. Пусть r и h_a, h_b, h_c — радиус вписанной окружности и длины трех высот треугольника ABC. Доказать, что $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

1.139. Пусть O_A, O_B, и O_C — центры трех вневписанных окружностей треугольника ABC (окружность с центром в O_A касается стороны BC, с центром в O_B — стороны AC, с центром в O_C — стороны AB).
а) Доказать, что $B \in [O_AO_C]$. б) Доказать, что $(AO_A) \perp (O_BO_C)$.

1.140. Пусть $BC = a$, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC (окружность радиуса r_b касается стороны AC, радиуса r_c — стороны AB), p — полупериметр треугольника ABC. Доказать, что $r_b r_c = p(p-a)$.

1.141. Пусть r и r_a, r_b, r_c — радиусы вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Доказать, что $S_{ABC} = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

1.142. На окружности взяты точки A, B, C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$.

1.143. Центр O данной окружности радиуса R соединен с точкой C, произвольно взятой на хорде AB. Доказать, что $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$.

1.144. На плоскости даны окружность S и точка P. Прямая, проведенная через точку P, пересекает окружность в точках A и B. Доказать, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой. (Эта величина, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется *степенью точки* P *относительно окружности* S.)

1.145. Три окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Доказать, что прямые, соединяющие точку касания S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

1.146. Доказать, что для точки P, лежащей вне окружности S, ее степень относительно S равна квадрату длины касательной, проведенной из этой точки.

1.147. Доказать, что степень точки P относительно окружности S равна $d^2 - R^2$, где R — радиус S, d — расстояние от точки P до центра окружности S.

1.148. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Доказать, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2, является прямая. (Эту прямую называют *радикальной осью окружностей* S_1 *и* S_2.)

1.149. Доказать, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

1.150. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Доказать, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке. (Эту точку называют *радикальным центром* трех окружностей.)

1.151. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

1.152. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Доказать, что множество центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом, является их радикальной осью, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена общая хорда.

1.153. а) Доказать, что середины четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой. б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Доказать, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

1.154. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найти периметр треугольника OO_1O_2.

1.155. В окружность радиуса 17 вписан четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны и находятся на расстоянии 8 и 9 от центра окружности. Найти длины сторон четырехугольника.

1.156. В равнобедренную трапецию $ABCD$ (AD, BC — основания) вписана окружность с центром в точке O, $OC = 3$, $OD = 4$. Чему равен периметр трапеции?

Группа Б

1.157. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

1.158. Доказать, что во всяком треугольнике точки, симметричные с точкой пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

1.159. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B, окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

1.160. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

1.161. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны $40°$: BD – биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

1.162. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

1.163. Через точку M, лежащую внутри окружности S, проведена хорда AB; из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на касательные, проходящие через точки A и B. Докажите, что величина $1/PM+1/QM$ не зависит от выбора хорды, проходящей через точку M.

1.164. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P на прямой BM, Q на прямой BN). Доказать, что отрезки MP и NQ равны.

1.165. Доказать, что если через одну из точек пересечения двух окружностей провести диаметр в каждой окружности, то прямая, соединяющая другие концы этих диаметров, пройдет через вторую точку пересечения этих окружностей.

1.166. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Доказать, что MT — биссектриса угла AMB.

1.167. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

1.168. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Доказать, что длина отрезка AK не зависит от выбора точки D.

1.169. Дана окружность и точки P, K вне ее. Через точку P проведена секущая PAB (A, B — точки на окружности) и построена окружность, проходящая через точки K, A, B. Доказать, что все такие окружности походят, кроме K, еще через одну общую точку, не зависящую от выбора секущей PAB.

1.170. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD — в точке E. Доказать, что окружности с диаметрами AC, BD и EF имеют общую радикальную ось, причем на ней лежат ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF.

1.171. Доказать, что диагонали AD, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке (теорема Брианшона).

1.172. В треугольник вписана окружность радиуса r. Касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника, отсекают от него три маленьких треугольника. Пусть r_1, r_2, r_3 — радиусы вписанных в эти треугольники окружностей. Докажите, что $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

1.173. В треугольнике ABC угол A равен 60°, а длина высоты, опущенной из вершины C, равна $5\sqrt{3}$. Найти длины сторон треугольника ABC, если радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $2\sqrt{3}$.

1.174. Через точку O — центр окружности радиуса 15 см, описанной около равнобедренного треугольника ABC, проведен диаметр, который пересекает боковые стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найти длины отрезков BM и BN, если известно, что длины отрезков MO и NO соответственно равны 4 и 15/4 см.

1.175. Через вершины A и C треугольника ABC, площадь которого равна $10\sqrt{3}$, проведена окружность, пересекающая стороны $[AB]$ и $[BC]$ в точках M и N соответственно. Центр окружности, описанной около треугольника ABC лежит на отрезке $[MN]$. Найти длину $[MN]$, если известно, что $|BC| = 5$, а $\angle ABC = 60^\circ$.

1.176. Около треугольника ABC с периметром 15 и $\angle ABC = 120°$ описана окружность радиуса $7/\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC и биссектрису BK.

1.177. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность. Диаметр AD этой окружности пересекает сторону BC в точке K, $BK : KC = 5 : 6$. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 32.

1.178. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность ω_1, вписанная в треугольник ABD, касается отрезка BD в точке M; окружность ω_2, вписанная в треугольник BCD — в точке N. Отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2 равно $7/4$. Известно, что $BM = 3$, $MN = ND = 1$. Найти длины сторон треугольника ABC.

1.179. На окружности по разные стороны от диаметра AC расположены точки B и D. Известно, что $AB = \sqrt{6}$ и $CD = 1$, а площадь треугольника ABC втрое больше площади треугольника BCD. Найти радиус окружности.

1.180. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A, B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D. Найти радиус окружности, если $CD = 4$ и $BD = 5$.

1.181. Окружности ω_1 и ω_2 внешне касаются в точке A. Прямая l касается окружности ω_1 в точке B, а окружности ω_2 — в точке C. Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B, а другая касается окружностей ω_1 и ω_2 и пересекает прямую l в точке D. Найти радиусы окружностей ω_1 и ω_2, если $AD = 3$ и $AC = 2\sqrt{3}$.

1.182. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D так, что точка D лежит на отрезке AC. Найти длины отрезков AB и CD и радиус окружности, если $BC = 4$, $BD = 3$, $\angle BAC = \arccos(1/3)$.

1.183. Один из углов треугольника равен $\pi/4$, радиус вписанной в него окружности равен $2(2-\sqrt{2})$, а радиус описанной около него окружности равен 3. Найти площадь этого треугольника.

1.184. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) проходит через точку A, пересекает отрезок AC в точке F, касается отрезка BC в точке G и пересекает отрезок AB в точке E, причем $GC = BG$, $FC = a$. Найти радиус окружности.

1.185. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$, $BC = 9$. Сравнить площади треугольников ABC и ABF.

1.186. Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояние он нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найти расстояние от точки K до прямой AB.

1.187. Окружность с центром на стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается сторон AB и BC. Найти радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 25, а отношение высоты BD к стороне AC равно $3/8$.

1.188. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Доказать, что: а) $d^2 = R^2 - 2Rr$, где $d = OI$ и R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC (формула Эйлера); б) $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$, где $d_a = OI_a$ и R и r_a — радиусы описанной и вневписанной окружностей (последняя — с центром в точке I_a) треугольника ABC.

1.4. Четырехугольники

Группа А

1.189. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

1.190. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ — $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

1.191. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

1.192. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 3 : 1$, $BL : LC = 2 : 3$, $CM : MD = 1 : 2$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

1.193. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

1.194. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

1.195. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

1.196. Точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна $100\,\text{см}^2$.

1.197. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 2, а угол CAD равен 30°. Прямая CD является касательной к окружности, описанной около треугольника ABD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

1.198. Доказать, что трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

1.199. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

1.200. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

1.201. Найти длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

1.202. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

1.203. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

1.204. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

1.205. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найти отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

1.206. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

1.207. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

1.208. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны 4 и 12 см.

1.209. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции, если основания трапеции равны a и b.

1.210. Найти площадь трапеции, если ее диагонали равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

1.211. Основания трапеции равны a и b. Определить длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

1.212. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

1.213. Длина основания AD трапеции $ABCD$ равна 5, а длина боковой стороны CD — 3. Известно, что диагональ AC перпендикулярна CD, а диагональ BD делит угол D пополам. Найти площадь трапеции.

1.214. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из боковых сторон и перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой.

1.215. Отрезок AE является биссектрисой угла A трапеции $ABCD$ ($AD\|BC$ и точка E лежит на прямой BC). Окружность, вписанная в треугольник ABE касается сторон AB и BE в точках K и L. Найти величину угла $\angle BAD$, если $KL = 1$ а боковая сторона AB равна 2.

1.216. В трапеции $PQRN$ ($PN\|QR$) проведена высота RH. Известно, что $PH = 8$, $QR = 4$, $PQ = \sqrt{28}$, $\angle PNR = 60^\circ$. На основании PN выбрана точка M так, что отрезок RM делит площадь трапеции пополам. Найти длину отрезка RM.

1.217. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = a$ и $BC = b$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM отсекает от площади трапеции $1/4$ ее часть. Найти длину отрезка CM.

1.218. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка CM.

1.219. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

1.220. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 5/11. Найти длины оснований трапеции.

1.221. В выпуклом четырехугольнике диагонали равны 1 и 2, а длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны. Найти площадь четырехугольника.

1.222. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если длины оснований трапеции $AB = 30$, $CD = 24$, боковой стороны $AD = 3$, и угол $DAB = 60°$.

1.223. В трапецию $ABCD$ с основаниями BC и AD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, $OC = 3$ и $OD = 4$.

1.224. Около четырехугольника $ABCD$ описана окружность, продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке K, $BC : AD = 1 : 3$, $KC = CD$. Чему равно отношение $AB : CD$?

1.225. В трапеции $ABCD$ основание AB вдвое больше основания CD и вдвое больше стороны AD. Диагональ AC равна p, а сторона BC — q. Найти площадь трапеции.

Группа Б

1.226. Около окружности радиуса R описана трапеция $ABCD$, длина меньшего основания BC которой равна a. Пусть E — точка касания окружности со стороной AB и длина отрезка BE равна b. Найти площадь трапеции.

1.227. Косинус угла между боковыми сторонами AB и CD трапеции $ABCD$ равен $4/5$. В трапецию вписана окружность, причем сторона AB делится точкой касания на отрезки длины 4 и 1, считая от вершины B. Найти длину стороны CD.

1.228. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника. Известно, что окружность, описанная около треугольника CKD, касается прямых AD и BC. Найти CD, если $AB = a$, $CK = b$.

1.229. Трапеция $ABCD$ прямоугольная, $(AD)\|(BC)$, $(CD)\perp(AD)$, $\angle CAD = 45^\circ$, $AD = 2$. Окружность, построенная на стороне AD как на диаметре, пересекает сторону AB в точке L, $AL = AB\sqrt{3}/4$. Найти: а) площадь трапеции; б) площадь части круга, заключенной внутри трапеции.

1.230. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол ADB в два раза меньше угла ACB, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найти площадь трапеции и длину боковой стороны.

1.231. В равнобедренной трапеции $ABCD$ окружность касается меньшего основания BC, боковых сторон AB и CD и проходит через точку пересечения диагоналей. Найти радиус окружности, если $BC : AD = 4 : 5$ и площадь трапеции равна 3.

1.232. В окружность вписан выпуклый 4-х угольник $ABCD$ со сторонами a, b, c и d. а) Доказать, что площадь его равна $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр $ABCD$. б) Доказать, что если в этот четырехугольник еще можно и вписать окружность, то $S_{ABCD} = \sqrt{abcd}$.

1.233. В ромбе $ABCD$ из вершины D опущен перпендикуляр DK на сторону BC. Найти длину стороны ромба, если $AC = 2\sqrt{6}$ и $AK = \sqrt{14}$.

1.234. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса R, касающаяся основания AD в точке P и пересекающая отрезок BP в точке S такой, что $PS = 3BS$. Найти углы и площадь трапеции.

1.235. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найти длину отрезка AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

1.236. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников AOD и COD, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника AOB, равен 5. Найти сторону AB.

1.237. Вершины A и C параллелограмма $ABCD$ лежат на одной окружности, а вершины B и D — на другой, пересекающей первую, причем центры окружностей лежат в плоскости параллелограмма. Расстояние между центрами окружностей равно 10. Диагонали параллелограмма равны 26 и 6 соответственно. Найти расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма до прямой, содержащей общую хорду окружностей.

1.238. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ проходит через вершины A, B, C и касается прямой CD в точке C. Найти площадь трапеции, если $BC = 4$, $CD = 3\sqrt{13}$.

1.239. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O и перпендикулярны друг другу, $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K лежит на стороне BC, причем $BK : KC = 1 : 2$. Треугольник AKD — правильный. Найти его площадь.

1.240. В трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием BC и площадью, равной $4\sqrt{3}$, прямые BC и AD касаются окружности диаметра 2 в точках B и D соответственно. Боковые стороны AB и CD пересекают окружность в точках M и N соответственно. Длина MN равна $\sqrt{3}$. Найти величину угла MDN и длину основания BC.

1.241. Точка E лежит на стороне CD равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC. Известно, что $AE = BE = 5\sqrt{2}$, $AB = 10$, $DE = DC/3$. Найти углы и площадь трапеции.

1.242. Четырехугольник, один из углов которого равен $\operatorname{arctg}(4/3)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{6}$ и описан около окружности радиуса 1. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

1.243. Четырехугольник, один из углов которого равен $\arcsin(4/5)$, вписан в окружность радиуса $\sqrt{15}$ и описан около окружности радиуса 2. Найти площадь четырехугольника и угол между его диагоналями.

1.244. Сторона ромба $ABCD$ равна 6. Расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равно 8. Найти радиусы этих окружностей.

1.245. Около окружности радиуса 1 описаны ромб и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 5. Найти сторону ромба.

1.246. Вокруг окружности с центром O описана трапеция $ABCD$, в которой BC — меньшее основание. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, если $MB = BC$, $OB = \sqrt{5}$, $OC = \sqrt{2}$.

1.247. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D. Найти стороны параллелограмма, если его площадь равна $2\sqrt{5}$ и $\angle BAC = \operatorname{arctg}(2/\sqrt{5})$.

1.248. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раза больше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если $AC = 3$, $BD = \sqrt{59/3}$.

1.249. В параллелограмме $ABCD$ прямые l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и C соответственно, а прямые m_1 и m_2 — биссектрисами углов B и D соответственно. Расстояние между l_1 и l_2 в $\sqrt{3}$ раза меньше расстояния между m_1 и m_2. Найти угол BAD и радиус окружности, вписанной в треугольник ABD, если $AC = \sqrt{41/3}$, $BD = 3$.

1.250. В выпуклом четырехугольнике $PQRS$ диагонали PR и QS перпендикулярны соответственно сторонам RS и QP, а длина стороны PS равна 4. На стороне PS взята точка K такая, что $\angle QKP = \angle SKR$. Известно, что $\angle RPS - \angle PSQ = 45^\circ$. Найти длину ломаной QKR и площадь четырехугольника $PQRS$, если $QK : RK = \sqrt{3} : 3$.

Глава 2

Преобразования плоскости

2.1. Осевая симметрия

Группа А

2.1. Каким движением является композиция двух осевых симметрий с параллельными осями?

2.2. Каким движением является композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями?

2.3. Две окружности с равными радиусами пересекаются в точках A и B. Доказать, что (AB) — ось симметрии фигуры, являющейся объединением данных окружностей.

2.4. На разных сторонах данного острого угла выбраны точки A и B. Построить равнобедренный треугольник ABC так, чтобы все его вершины принадлежали сторонам данного угла.

2.5. Дана прямая a и отрезок AB. Построить равнобедренный треугольник с основанием AB так, чтобы его вершина лежала бы на a.

2.6. Известно, что $S_a(A) = A'$. Как построить точку, симметричную произвольной точке B, с помощью одной линейки (даны точки A, A', прямая a и $A \notin a$)?

2.7. С помощью осевой симметрии построить разность сторон AB и BC треугольника ABC.

2.8. С помощью осевой симметрии построить сумму сторон AB и BC треугольника ABC.

2.9. Можно ли с помощью осевой симметрии построить разность двух углов треугольника ABC?

2.10. Даны прямая l и две точки A, B по одну сторону от нее. Найти на прямой l точку X так, чтобы длина ломаной AXB была минимальна.

2.11. Точки A, B, C принадлежат внутренней области полосы с краями l_1 и l_2 ($l_1 \| l_2$). Построить замкнутую ломаную $AKBCLA$ наименьшей длины ($K \in l_1$, $L \in l_2$).

2.12. Даны точки A и B и окружность с известным центром O и радиусом r. С помощью циркуля найти точки пересечения этой окружности и прямой AB.

2.13. В окружности, центр которой не указан, проведены две параллельные, но не равные хорды. Пользуясь только одной линейкой, разделить эти хорды пополам.

2.14. Даны точки A и B и прямая l, разделяющая их (т.е. точки лежат по разные стороны от этой прямой). Провести прямые a и b так, чтобы угол между ними делился прямой l пополам и $A \in a$, $B \in b$.

Группа Б

2.15. Внутри острого угла ABC выбрана некоторая точка X. На лучах $[BA)$ и $[BC)$ найти такие точки M и N, чтобы периметр треугольника XMN был минимальным.

2.16. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и разности боковой стороны и основания.

2.17. Построить треугольник ABC, если даны точки A и B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C.

2.18. Даны три прямые l_1, l_2, l_3, пересекающиеся в одной точке, и точка A на прямой l_1. Построить треугольник ABC так, чтобы точка A была его вершиной, а биссектрисы треугольника лежали на прямых l_1, l_2, l_3.

2.19. Построить треугольник по серединам двух сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

2.20. Построить четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.

2.21. Построить четырехугольник $ABCD$, в который можно вписать окружность, зная длины двух соседних сторон AB и AD и углы при вершинах B и D.

2.22. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра.

2.23. Известно, что $\overrightarrow{AB} \perp a$. Какими движениями являются $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a$ и $S_a \circ T_{\overrightarrow{AB}}$?

2.24. Известно, что $\overrightarrow{AB} \| a$. Доказать, что $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a = S_a \circ T_{\overrightarrow{AB}}$.

2.25. Известно, что прямые a, b и c пересекаются в одной точке. Доказать, что композиция $S_c \circ S_b \circ S_a$ является осевой симметрией.

2.26. Доказать, что $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_a$ — скользящая симметрия. Найти ось симметрии и вектор переноса.

2.27. Каким движением является композиция двух скользящих симметрий с перпендикулярными осями?

2.28. Доказать, что движение f — скользящая симметрия тогда и только тогда, когда f имеет единственную неподвижную прямую.

2.29. Доказать, что если плоская фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

2.30. Доказать, что если многоугольник имеет несколько (больше двух) осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

2.31. Доказать, что если плоский многоугольник имеет четное число осей симметрии, то он имеет центр симметрии.

2.2. Центральная симметрия. Поворот

2.32. Движение f имеет единственную неподвижную точку. Доказать, что f — поворот.

2.33. Дан угол с вершиной в точке A и точка M, принадлежащая одной из его сторон. Найти на другой стороне этого угла такую точку P, сто сумма расстояний от точки P до точек M и A равна длине данного отрезка.

2.34. Дана точка O внутри данного угла. На сторонах этого угла найти такие две точки M и N, чтобы O была бы серединой отрезка MN.

2.35. Через данную точку A проведите прямую так, чтобы отрезок, заключенный между точками пересечения ее с данной прямой и данной окружностью, делился точкой A пополам.

2.36. Пусть A — одна из точек пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Найти такие точки $X \in \omega_1$ и $Y \in \omega_2$, чтобы A была бы серединой отрезка XY.

2.37. Доказать, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда он имеет центр симметрии.

2.38. Даны угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого точки A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

2.39. Построить треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне. В каких пределах может изменяться длина медианы, если длины сторон треугольника равны a и b?

2.40. Каким движением является композиция центральной симметрии и параллельного переноса?

2.41. Построить треугольник, зная середины его сторон.

Группа Б

2.42. Построить пятиугольник, зная середины его сторон.

2.43. Даны $m = 2n + 1$ точек — середины сторон m-угольника. Постройте его вершины.

2.44. Постройте треугольник по медианам m_a, m_b и углу C.

2.45. Каким движением является композиция центральной и осевой симметрий, если центр симметрии лежит на оси симметрии?

2.46. Верно ли, что $Z_{O_2} \circ Z_{O_1} \circ Z_O = Z_O \circ Z_{O_1} \circ Z_{O_2}$?

2.47. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный стол пятаки. Монету разрешается класть только на свободное место. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.

2.48. Может ли многоугольник иметь ровно один центр и одну ось симметрии?

2.49. Доказать, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

2.50. Доказать, что никакая фигура не может иметь ровно двух центров симметрии.

2.51. Дана точка, лежащая внутри треугольника, образованного средними линиями данного треугольника. Сколько существует отрезков с концами на сторонах данного треугольника, делящихся этой точкой пополам?

2.52. Пусть даны точка O, прямая a и угол величины ϕ ($O \in a$). Найти прямую b, если $S_a \circ R_O^{\phi} = S_b$.

2.53. Постройте равносторонний треугольник так, чтобы его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

2.54. Постройте квадрат так, чтобы три его вершины принадлежали трем данным параллельным прямым.

2.55. Пусть O — центр квадрата $ABCD$, $a \perp b$, $O \in a \cap b$. Доказать, что точки пересечения прямых a и b со сторонами данного квадрата также являются вершинами некоторого квадрата.

2.56. Через центр равностороннего треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60° и которые не содержат вершин треугольника. Доказать, что отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треугольника, равны между собой.

2.57. Отрезки, концами которых служат внутренние точки противоположных сторон квадрата, перпендикулярны. Доказать, что эти отрезки равны.

2.58. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились четыре столба на сторонах квадрата. Восстановить границу участка.

2.59. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных квадратов, равносторонний.

2.60. Каким движением является композиция двух поворотов?

2.61. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с вершиной квадрата, а две другие принадлежали сторонам квадрата.

2.62. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABNM$ и $ACQP$. Доказать, что $|MC| = |BP|$ и $(MC)\perp(BP)$.

2.63. Хорды одной и той же окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности. Доказать, что они равны.

2.64. Дан равносторонний треугольник ABC и точка M. Доказать, что длина любого из трех отрезков MA, MB и MC не больше суммы длин двух других отрезков. В каком случае длина отрезка равна сумме длин двух других отрезков?

2.65. Дан остроугольный треугольник ABC. Найти такую точку P внутри этого треугольника, что сумма $|PA| + |PB| + |PC|$ минимальна (указать способ построения такой точки).

2.66. Пусть N, M, L и K являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Доказать, что пересечение полос $NCLA$ и $BMDK$ является квадратом.

2.67. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных треугольников, равносторонний.

2.68. Доказать, что $f = Z_O$ тогда и только тогда, когда O — единственная неподвижная точка движения f и $f \circ f = \epsilon$.

2.3. Параллельный перенос

2.69. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, на другой — точка B, причем $\angle AKB$ — прямой. Доказать, что $|AB| = 2R$.

2.70. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B — точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Доказать, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

2.71. В каком месте следует построить мост MN, разделяющий деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из A в B был кратчайшим? (Берега реки считаются параллельными прямыми, мост перпендикулярен берегам.)

2.72. Дан треугольник ABC. Точка M, расположенная внутри треугольника, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно AB до пересечения с AB и т.д. Доказать, что через некоторое число шагов траектория движения точки замкнется.

2.73. Пусть K, L, M и N соответственно являются серединами сторон AB, BC CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $KM \leqslant (BC + AD)/2$, причем равенство достигается только если $(BC)\|(AD)$.

Группа Б

2.74. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая l. Провести прямую l_1, параллельную прямой l так, чтобы ω_1 и ω_2 высекали на l_1 равные хорды.

2.75. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и длинам сторон $AB = a$ и $CD = b$.

2.76. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и диагоналям.

2.77. Найти геометрическое место точек, что сумма расстояний от которых до двух данных прямых имеет данную величину.

2.78. Дан угол ABC и прямая l. Построить прямую, параллельную прямой l, на которой стороны угла ABC высекают отрезок длины a.

2.79. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка A. Провести через A прямую l так, чтобы ω_1 и ω_2 высекали на ней равные хорды.

2.80. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Провести через точку P прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекали на ней равные отрезки.

2.81. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Доказать, что $BM + KD = AK$.

2.82. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найти величину угла MAK.

2.83. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BK и BH. Известно, что $KH = a$ и $BD = b$. Найти расстояние от точки B до точки пересечения высот треугольника BKH.

2.84. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты. Доказать, что треугольник, вершинами которого являются центры построенных квадратов и середина отрезка AC, прямоугольный и равнобедренный.

2.85. Доказать, что $f = T_{\overrightarrow{AB}}$ тогда и только тогда, когда движение f не имеет неподвижных точек, но через каждую точку плоскости проходит неподвижная прямая.

2.4. Гомотетия. Преобразования подобия

2.86. Даны две различные точки A и B. Найти такую точку O, что а) $H_O^2(A) = B$; б) $H_O^{-2}(A) = B$.

2.87. Доказать, что при гомотетии а) прямая отображается в параллельную прямую; б) угол отображается в равный угол.

2.88. Известно, что при гомотетия с центром в данной точке O отображает точку A ($A \neq O$) в точку A'. Построить образ произвольной точки M при этой гомотетии, используя только циркуль и линейку.

2.89. Отрезок $A'B'$ является образом отрезка AB при некоторой гомотетии, центр которой не задан. Построить образ произвольной точки M при этой гомотетии, используя только циркуль и линейку.

2.90. Точка пересечения прямых a и b «недоступна». Для произвольной точки M построить прямую, проходящую через M и «недоступную» точку пересечения прямых a и b.

2.91. Известно, что $H_O^k(A) = A'$ и $H_O^k(B) = B'$. Построить точку O.

2.92. Даны два параллельных отрезка разной длины. Сколько существует гомотетий, отображающих один из этих отрезков на другой?

2.93. Даны две окружности разного радиуса. Сколько существует гомотетий, отображающих одну из этих окружностей на другую? При каких условиях центры этих гомотетий совпадают?

2.94. Записать координаты образа точки $A(a, b)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом k.

2.95. *a*) Записать уравнение прямой, на которую отображается прямая $y = -2x + 1$ гомотетией с центром в начале координат и $k = 3$. *b*) Записать уравнение окружности, на которую отображается окружность $x^2 + y^2 = 16x - 8y - 64$ гомотетией с центром в начале координат и $k = -3$.

2.96. Записать координаты точки пересечения прямой $y = -5x + 1,5$ и образа прямой $y = x - 1$ при гомотетии с центром в начале координат и $k = -2/3$.

2.97. На прямых $y = 3x + 2$ и $y = -2x + 4$ найти соответственно точки A и B такие, что $H_O^{-2}(A) = B$. Решить задачу аналитически.

2.98. Гомотетичны ли параболы $y = x^2$ и $y = 8x^2$? Если да, то чему равен коэффициент гомотетии?

2.99. Можно ли гомотетией отобразить график функции $y = 4/x$ на график функции $y = 1/x$? Если да, то определить коэффициент гомотетий.

2.100. Вписать в данный треугольник квадрат, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

2.101. Построить треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

2.102. Построить треугольник по углу, противолежащей ему стороне и отношению $2 : 3$ длин двух других сторон.

2.103. Дан угол $\angle ABC$ и точка P внутри этого угла. Провести через точку P прямую a, для точек M и N пересечения этой прямой со сторонами угла выполняется соотношение $MP : PN = 1 : 2$.

2.104. Даны две окружности и точка M. Найти на разных окружностях такие точки A и B, что $M \in [AB]$ и $AM : MB = 2 : 3$.

2.105. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает первую и вторую окружности в точках A и B соответственно. Доказать, что прямые O_1A и O_2B параллельны.

2.106. Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Доказать, что касательные к окружностям, проведенные через точки A и B, параллельны.

2.107. Две окружности касаются в точке K. Через точку K проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D. Доказать, что $(AB)\|(CD)$.

2.108. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке O. Точки E и F — середины оснований трапеции. Доказать, что точки O, E и F лежат на одной прямой.

2.109. Доказать, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2.110. На плоскости даны точки A, B и прямая l. По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC, если точка C движется по прямой l?

2.111. Внутри угла выбрана точка M. Построить окружность, проходящую через эту точку и касающуюся сторон данного угла.

2.112. На одной из двух данных параллельных прямых лежит отрезок AB. Пользуясь только линейкой а) разделить AB пополам; б) удвоить отрезок AB.

2.113. Вписать в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

2.114. Вписать в данный треугольник ABC треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника KLM.

Группа Б

2.115. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты $BCMN$ и $ADEF$. Доказать, что прямые NE и MF проходят через точку пересечения диагоналей трапеции.

2.116. Около окружности описана трапеция $ABCD$, меньшее основание BC которой касается ее в точке F. Прямая MF, где M — точка пересечения продолжений боковых сторон данной трапеции, пересекает AD в точке K. Доказать, что K — точка касания отрезка AD и окружности, вписанной в фигуру, являющуюся объединением основания AD и продолжений сторон BA и CD.

2.117. Найти геометрическое место точек (ГМТ), из которых данный отрезок виден под углом γ. Построить треугольник по медианам m_a, m_b и углу $\angle C$.

2.118. Чему равна композиция гомотетии и параллельного переноса?

2.119. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, на которых лежат боковые стороны. Доказать, что трапеция равнобедренная.

2.120. Точки K и L являются серединами диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, O — середина отрезка KL. Доказать, что точка $M = H_O^{-1/3}(A)$ есть центр масс треугольника BCD.

2.121. На плоскости дана прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

2.122. Известно, что H — ортоцентр (т.е. точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, а O — центр его описанной окружности. Пусть A_1 — середина стороны BC. Доказать, что $|AH| = 2|OA_1|$.

2.123. На плоскости дана окружность ω и пересекающий ее угол ABC. Вписать в данный угол окружность так, чтобы она касалась данной окружности.

2.124. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Доказать, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

2.125. Доказать, что любой выпуклый многоугольник Φ содержит два выпуклых многоугольника Φ_1 и Φ_2, не имеющих общих внутренних точек и подобных данному многоугольнику с коэффициентом $1/2$.

2.126. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найти геометрическое место точек, являющихся точками пересечения медиан треугольников ABC.

2.127. Две окружности касаются в точке P. Через точку P проведены две секущие, пересекающие первую окружность в точках A_1 и B_1, вторую окружность — в точках A_2 и B_2. Доказать, что треугольник PA_1B_1 подобен треугольнику PA_2B_2.

2.128. Внутри окружности S даны две точки A и B. Доказать, что существует окружность, проходящая через точки A и B, целиком лежащая внутри окружности S.

2.129. На отрезке между центрами двух касающихся внешним образом окружностей как на диаметре построена окружность. Доказать, что все три окружности касаются одной прямой.

2.130. Окружность ω касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K, а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC. Доказать, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC.

2.131. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Доказать, что $AK = DC$.

2.132. Дан остроугольный треугольник ABC. Построить точки X и Y на сторонах AB и BC так, что а) $AX = XY = YC$; б) $BX = XY = YC$.

2.133. Построить треугольник ABC по сторонам AB и AC и биссектрисе AD.

2.134. На плоскости даны точки A и E. Построить ромб $ABCD$ с заданной высотой, для которого E — середина стороны BC.

2.135. Даны острый угол AOB и внутри его точка C. Найти на стороне OB точку M, равноудаленную от стороны OA и от точки C.

Глава 3

Сечения многогранников

3.1. Основные способы построения сечений

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Точки пересечения плоскости сечения с ребрами многогранника будут вершинами, а отрезки, принадлежащие граням, — сторонами многоугольника, получающегося в сечении многогранника плоскостью.

Рассмотрим следующие методы построения сечений многогранников.

Метод следов. В общем случае секущая плоскость пересекает плоскость каждой грани многогранника и каждую из прямых, на которых лежат ребра многогранника. Прямую, по которой секущая плоскость пересекает плоскость какой-либо грани многогранника, называют следом секущей плоскости на плоскости этой грани, а точку, в которой секущая плоскость пересекает прямую, содержащую какое-нибудь ребро, называют следом секущей плоскости на этой прямой. Если секущая плоскость пересекает непосредственно грань многогранника, то можно также говорить о следе секущей плоскости на грани и аналогично говорить о следе на ребре.

След секущей плоскости на плоскости нижнего основания условимся ради краткости речи называть просто следом секущей плоскости. С построения именно этого следа чаще всего начинают построение сечения многогранника.

Способы задания сечения весьма разнообразны. Наиболее распространенным из них является способ задания секущей плоскости тремя точками, не лежащими на одной прямой.

В тех случаях, когда сечение строится с помощью следа на плоскости нижнего основания, задавая три точки, принадлежащие непосредственно секущей плоскости, следует указать их таким образом, чтобы проекции этих точек на плоскость нижнего основания строились однозначно. Сделать это можно, например, если указать, на каком ребре лежит заданная точка или в какой грани и т.д.

При этом, если многогранником, сечение которого строится, является призма, то проектирование на плоскость нижнего основания выполняется параллельное. Его направление определяется боковым ребром призмы. Если же многогранником является пирамида, то выполняется центральное проектирование на плоскость основания. Центром проектирования является вершина пирамиды, в которой сходятся все боковые ребра.

Перейдем к рассмотрению примеров.

Пример 1. На ребрах BB_1, CC_1 и DD_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить след секущей плоскости PQR (рис. 1).

Решение. Так как требуется построить след плоскости PQR на плоскость нижнего основания, то спроектируем точки P, Q и R на плоскость нижнего основания. Боковое ребро призмы определяет направление проектирования.

Поскольку точка P задана на ребре BB_1, точка P' — проекция точки P — совпадает с точкой B. Аналогично точка Q' совпадает с точкой C, а точка R' — с точкой D. Прямые PP' и QQ' параллельны, поэтому точки P, Q, P' и Q' лежат в одной плоскости. Построим точку S_1 — точку пересечения прямых PQ и $P'Q'$. Точка S_1 лежит на прямой PQ и поэтому лежит и в секущей плоскости. Кроме того, точка S_1 лежит на прямой $P'Q'$, т.е. лежит и в плоскости нижнего основания призмы. Таким образом, точка S_1 лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания, т.е. точка S_1 лежит на следе секущей плоскости PQR.

Аналогично находим точку S_2 — точку пересечения прямых PR и $P'R'$. Точка S_2 также лежит на следе секущей плоскости. Итак, искомым следом секущей плоскости является прямая S_1S_2.

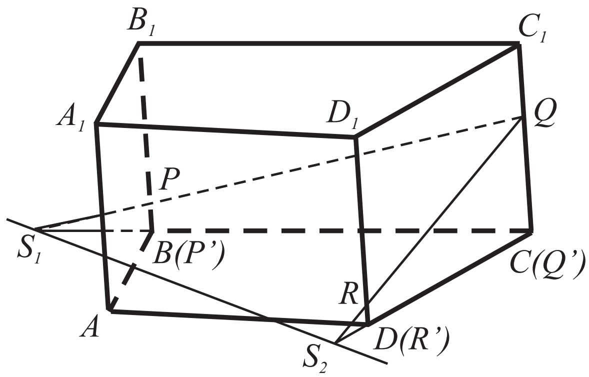

Рис. 1

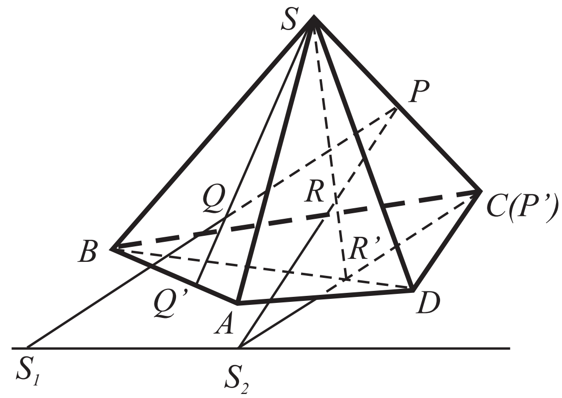

Рис. 2

Пример 2. На ребре SC пирамиды $SABCD$ задана точка P, в грани SAB — точка Q, а внутри пирамиды, в плоскости SBD, задана точка R. Построить след секущей плоскости PQR.

Решение. Выполним проектирование точек P, Q и R на плоскость ABC, приняв вершину S за центр проектирования. Получим точку P' совпадающую с точкой C, точку Q' — на ребре AB и точку R' — на диагонали BD.

Так как прямые PP' и QQ' пересекаются, то они лежат в одной плоскости. Тогда в одной плоскости лежат также прямые PQ и $P'Q'$. Найдем точку S_1 — точку пересечения этих прямых. Точка S_1 по построению лежит на прямой PQ, т.е. лежит и в секущей плоскости. Вместе с тем точка S_1 лежит и на прямой $P'Q'$, т.е. лежит и в плоскости основания. Таким образом, точка S_1 лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания, т.е. на следе секущей плоскости. Аналогично строится точка S_2 — точка пересечения прямых PR и $P'R'$. Точка S_2 также лежит на следе секущей плоскости. Итак, следом секущей плоскости является прямая S_1S_2.

Пример 3. На ребрах AA_1, CC_1 и EE_1 призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ заданы соответственно точки P, Q, и R. Построить сечение призмы плоскостью PQR (рис. 3).

Решение. 1. Находим проекции точек P, Q и R на плоскость нижнего основания в направлении, параллельном боковому ребру призмы.

Получаем соответственно точки P' (совпадает с точкой A), Q' (совпадает с точкой C) и R' (совпадает с точкой E). Затем строим след S_1S_2 секущей плоскости. В точке S_1 пересекаются прямые PR и AE, а в точке S_2 — прямые QR и QE.

2. Найдем далее точку V — след секущей плоскости на прямой DD_1. Для этого найдем сначала точку S_3, в которой прямая DE пересекает след S_1S_2, а затем найдем и точку V как точку пересечения прямых S_3R и DD_1.

3. Осталось найти след секущей плоскости на прямой BB_1. Найдем его так же, как и след V. А именно найдем точку S_4, в которой пересекаются прямые BE и S_1S_2, а затем искомый на прямой BB_1 след — точку T как точку пересечения прямых S_4R и BB_1.

4. Убедимся, что построенные точки V и T лежат в плоскости PQR. Действительно, точка S_3 лежит на следе секущей плоскости и поэтому лежит в плоскости PQR, а точка R лежит в плоскости PQR по условию. Таким образом, и точка V, лежащая на прямой S_3R, лежит в плоскости PQR. Аналогично можно показать, что и точка T лежит в плоскости PQR. Итак, многоугольник $PRVQT$ — искомое сечение.

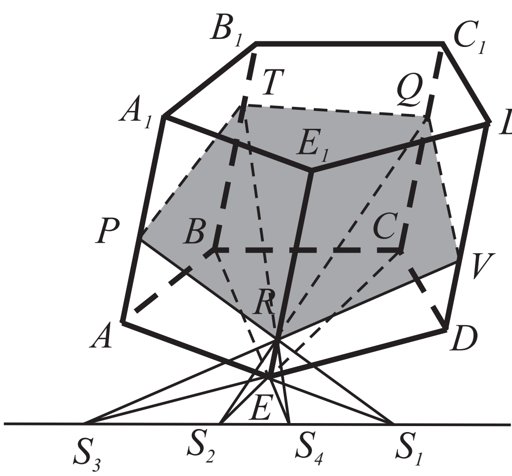

Рис. 3

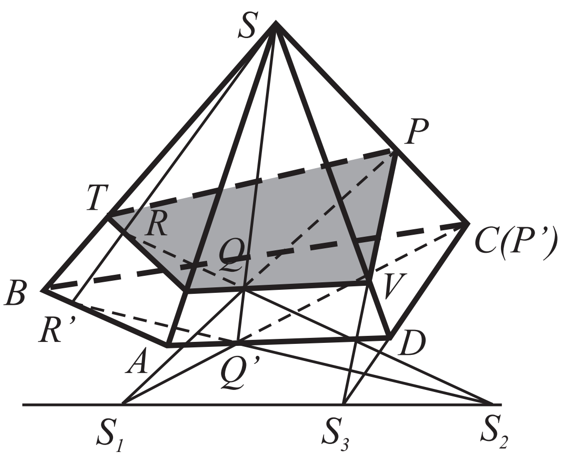

Рис. 4

Пример 4. На ребре SC пирамиды $SABCD$ задана точка P, а в гранях SAB и SAD заданы соответственно точки R и Q. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR (рис.4).

Решение. 1. Построим след секущей плоскости PQR. Для этого спроектируем точки P, Q и R на плоскость $ABCD$ из точки S. Получим точку P' (совпадает с точкой C) и точки Q' и R'. Затем найдем две точки следа — плоскости PQR, например точку S_1 — точку пересечения прямых PQ и CQ' и точку S_2 — точку пересечения прямых RQ и $R'Q'$. Прямая S_1S_2 — след секущей плоскости.

2. Построим далее след секущей плоскости на прямой SD. Для этого найдем точку S_3, в которой прямая CD пересекает след S_1S_2, и проведем прямую S_3P. Точка V, в которой прямая S_3P пересекает прямую SD, и является следом секущей плоскости на прямой SD.

3. Дальнейшие построения можно выполнить уже не пользуясь следом S_1S_2. Так как точки V и Q обе лежат и в секущей плоскости, и в плоскости SAD, то прямая VQ является линией пересечения этих плоскостей. На прямой SA строим теперь точку W, в которой пересекаются прямые VQ и SA.

4. Рассуждая аналогично, получаем далее WT — след секущей плоскости на грани SAB и TP — след секущей плоскости на грани SBC.

5. Многоугольник $PVWT$ — искомое сечение (доказательство того, что построенные точки V, W и T лежат в секущей плоскости, вполне понятно).

Метод вспомогательных сечений (метод внутреннего проектирования). Этот метод в достаточной мере является универсальным и имеет определенные преимущества по сравнению с методом следов в тех случаях, когда нужный след секущей плоскости оказывается за пределами чертежа. Вместе с тем построения при использовании этого метода получаются “скученными”, т.к. все они выполняются внутри многогранника (это обстоятельство послужило причиной называть рассматриваемый метод также методом внутреннего проектирования).

Рассмотрим примеры применения этого метода. Вернемся к примеру № 3. Выполним построение методом вспомогательных сечений (рис. 5).

Решение. 1. Построим первое вспомогательное сечение призмы — ее сечение плоскостью, которая проходит через какие-нибудь две из трех заданных прямых PP', QQ' и RR', например через прямые PP' и QQ'. Этим сечением является четырехугольник AA_1C_1C.

2. Будем искать теперь след секущей плоскости PQR на прямой BB_1. Для этого построим второе вспомогательное сечение призмы плоскостью. Это сечение проведем через третью заданную прямую RR' и боковое

ребро BB_1, на котором мы хотим найти след плоскости PQR. Этим сечением является фигура BB_1E_1E.

3. Находим прямую OO_1, по которой пересекаются плоскости вспомогательных сечений AA_1C_1C и BB_1E_1E, а затем точку O_2, в которой пересекаются прямые PQ и OO_1.

4. Так как точка O_2 лежит на прямой PQ, то она лежит и в плоскости PQR. Тогда и прямая RO_2 лежит в плоскости PQR. Это значит, что точка T, в которой пересекаются прямые RQ_2 и BB_1, также лежит в секущей плоскости. Точка T и является следом плоскости PQR на прямой BB_1.

5. Аналогично найдем след плоскости PQR на прямой DD_1. Для этого построим прямую FF_1, по которой пересекаются плоскости BB_1E_1E и AA_1D_1D, а затем точку F_2 — точку пересечения прямых RT и FF_1. Проводя далее прямую PF_2, получим на прямой DD_1 след V плоскости PQR.

6. Соединяя, наконец, заданные и построенные точки в соответствии с порядком следования ребер призмы, получим многоугольник $PRVQT$ — искомое сечение.

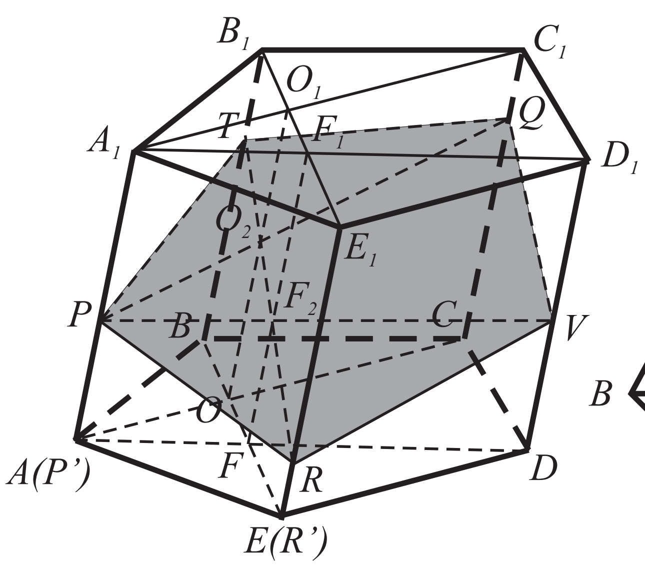

Рис. 5

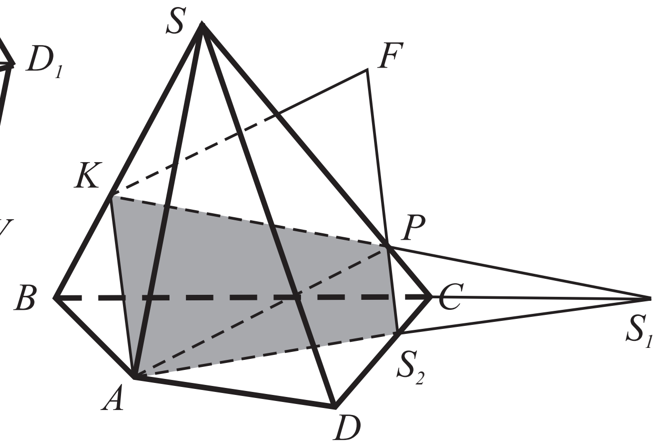

Рис. 6

Комбинированный метод. Суть этого метода состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в сочетании с методом следов, или с методом вспомогательных сечений, или с обоими этими методами. При построении сечения используются следующие теоремы:

1) Если две плоскости параллельны и пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны между собой.

2) Если две пересекающиеся плоскости параллельны одной и той же прямой, то линия их пересечения параллельна этой прямой.

3) Если плоскость и прямая параллельны и через эту прямую проведена некоторая плоскость, пересекающая данную плоскость, то линия пересечения этих двух плоскостей параллельна данной прямой.

Рассмотрим решение вспомогательной задачи.

Пример 5. На ребрах SB и SC пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки K и P. Построить прямую, проходящую через точку K, параллельно прямой AP (рис. 6).

Решение. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и прямую AP, т.е. плоскостью, заданной тремя точками K, A и P. Для этого, как обычно, строим след секущей плоскости. В рассматриваемом примере это прямая S_1A. Строим далее сечение $AKPS_2$ и в плоскости этого сечения через точку K проводим прямую KF, параллельную прямой AP. Прямая KF - искомая прямая.

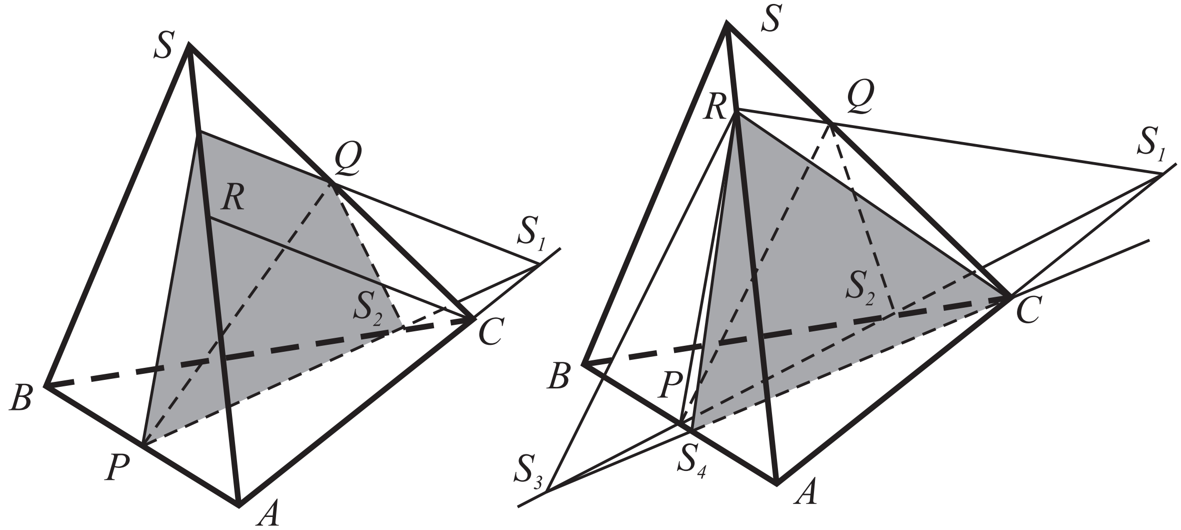

Рис. 7

Пример 6. На ребрах AB, SC и SA пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой CR; б) плоскостью, проходящей через прямую CR, параллельно прямой PQ (рис. 7).

Решение. а) В плоскости SAC, проходящей через прямую CR и точку Q, проведем прямую $QV \| CR$, а затем построим сечение пирамиды плоскостью PQV (следом этой плоскости является прямая S_1P) Плоскость PQV проходит через прямую PQ и параллельна прямой CR, поэтому многоугольник $PVQS_2$ — искомое сечение.

б) Построим вспомогательное сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую PQ и точку R (прямая S_1P — след этой плоскости, многоугольник RQS_2P — сечение), а затем в плоскости этого сечения через точку R проведем прямую $RS_3 \| PQ$. Прямыми CR и RS_3 определится тогда искомая секущая плоскость. Следом искомой секущей плоскости является прямая S_3C, а треугольник CRS_4 — искомое сечение.

Пример 7. На ребрах BB_1, CD и CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы соответственно точки P, Q и R, а на ребре AA_1 — точка K. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точку K, параллельно плоскости PQR (рис. 8).

Решение. 1) Построим начала сечение PS_2QR призмы заданной плоскостью PQR (например, с помощью следа S_1Q).

2) Так как искомая секущая плоскость параллельна плоскости PQR, то плоскости граней призмы пересекаются искомой секущей плоскостью и плоскостью PQR по параллельным прямым. Проведем в плоскости AA_1B через точку K прямую $KB_2 \| PS_2$, затем в плоскости BB_1C_1 через точку B_2 прямую $B_2C_2 \| PR$, затем в плоскости CC_1D_1 через точку C_2 прямую $C_2D_2 \| RQ$ и, наконец, соединим точки D_2 и K.

3) Соединив далее полученные в процессе построения точки E_1 и F_1, найдем многогранник $KB_2E_1F_1D_2$ — искомое сечение.

Пример 8. Высота правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна стороне основания. На ребрах BB_1 и A_1C_1 взяты соответственно точки D и E — середины этих ребер. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки C, D и E, и найти площадь полученного сечения, если сторона основания равна a (рис. 9).

Решение. Построим заданное сечение призмы плоскостью CDE.

1) Проведем прямую CE и найдем точку M, в которой прямая CE пересекает прямую AA_1.

2) Проведем прямую MD и найдем точку K, в которой эта прямая пересекает прямую A_1B_1.

3) Точку K соединим с точкой E и точку D — с точкой C. Четырехугольник $CDKE$ — искомое сечение.

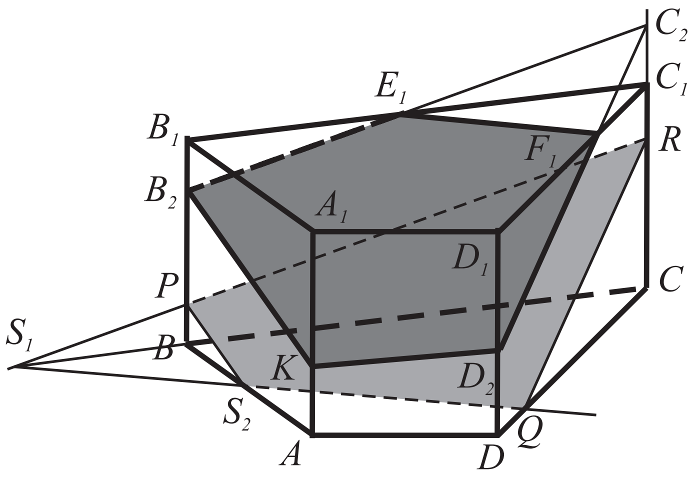

Рис. 8

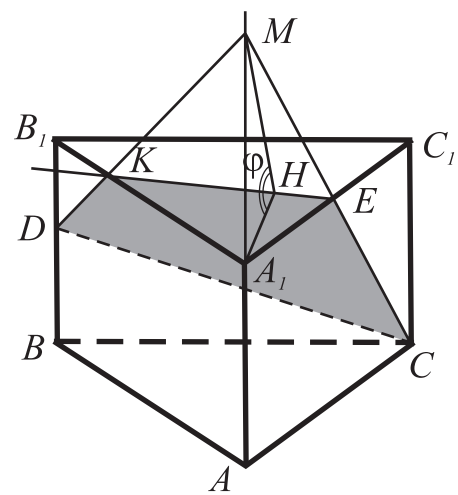

Рис. 9

4) Найдем теперь площадь сечения $CDKE$, пользуясь формулой

$$S_{\text{сеч}} = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos\varphi},$$

где φ — угол между плоскостью CDE и плоскостью $A_1B_1C_1$. Найдем $\cos\varphi$. Прямая KE - линия пересечения плоскостей CDE и $A_1B_1C_1$, т.е. она является следом секущей плоскости на плоскости $A_1B_1C_1$. Проведем $A_1H \perp KE$, то так как прямая $MA_1 \perp (A_1B_1C_1)$, A_1H будет проекцией наклонной MH, и, значит, $MH \perp KE$. Следовательно, угол MHA_1 образован двумя перпендикулярами к прямой KE. Так как он является острым углом (как угол между наклонной и ее проекцией), то угол MHA_1 и есть угол между плоскостями CDE и $A_1B_1C_1$, т.е. $\angle MHA_1 = \varphi$.

5) Из подобия треугольников MA_1E и MAC находим, что $MA_1 = a$, а из подобия треугольников DB_1K и MA_1K находим, что $A_1K = \frac{2}{3}a$. Тогда в треугольнике A_1KE $\;KE^2 = A_1K^2 + A_1E^2 - 2A_1K \cdot A_1E \cdot \cos 60^\circ$, откуда $KE = \frac{a\sqrt{13}}{6}$, и, выражая двумя способами площадь треугольника A_1KE, получаем $\frac{1}{2}A_1H \cdot KE = \frac{1}{2}A_1K \cdot A_1E \cdot \sin 60^\circ$, откуда $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. Теперь из прямоугольного треугольника MA_1H $\;\operatorname{tg}\varphi = \frac{MA_1}{A_1H} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Так как $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$

б) Ясно, что четырехугольник C_1B_1KE является проекция сечения $CDKE$ на плоскость $A_1B_1C_1$, поэтому $S_{\text{пр}} = S_{C_1B_1KE} = S_{A_1B_1C_1} - S_{A_1KE}$. $S_{A_1B_1C_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S_{A_1KE} = \frac{1}{2}A_1K \cdot A_1E \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Итак, $S_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Теперь получаем $S_{\text{сеч}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} : \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2}{3}$.

3.2. Сечения призм

Группа А

3.1. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре BB_1, Q лежит на ребре AC, R лежит на продолжении ребра CC_1, причем точка C_1 лежит между точками C и R; б) P лежит в грани AA_1B_1B, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани BB_1C_1C; в) P лежит на ребре A_1B_1, Q — точка отрезка DC_1, где точка D лежит на ребре AB, R лежит на продолжении ребра BC, причем C лежит между точками B и R.

3.2. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KLM, где $K \in (A_1B_1C_1)$, $L \in (A_1B_1C_1)$ и $M \in (AA_1B)$.

3.3. Построить сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре A_1B_1. Q лежит в грани $ABCD$. R лежит на ребре DD_1; б) P лежит в грани AA_1B_1B, Q лежит в грани AA_1D_1D, R лежит в грани CC_1D_1D; в) P лежит на диагонали AC_1, Q лежит на диагонали B_1D, R лежит на ребре C_1D_1.

3.4. Построить сечения шестиугольной призмы $ABC\ldots D_1E_1F_1$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре DD_1, Q лежит на ребре AB, R лежит на ребре AF; б) P лежит в грани BB_1C_1C, Q лежит на ребре E_1F_1, R лежит на ребре AF; в) P лежит на диагонали BD_1, Q лежит на диагонали AE, R лежит на ребре BC.

3.5. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре CC_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани $A_1B_1C_1$; б) P лежит на прямой C_1M, где точка M лежит на ребре A_1B_1 и находится между точками C_1 и P; в) P лежит на отрезке C_1K, где точка K лежит на ребре AB.

3.6. Построить сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре B_1C_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на отрезке KL, где точка K лежит на ребре A_1B_1, а точка L — на ребре AC; б) P лежит на прямой CN, где точка N лежит в грани AA_1B_1B и находится между точками C и P; в) P лежит на прямой AM, где точка M лежит на ребре B_1C_1 и находится между точками B_1 и C_1.

3.7. Построить сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, проходящими через прямую DQ, где точка Q лежит на ребре CC_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани AA_1B_1B, б) P лежит на продолжении ребра A_1B_1, причем точка A_1 находится между B_1 и P; в) P лежит на диагонали AC_1.

3.8. Построить сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостями, проходящими через прямую DQ, где точка Q лежит на ребре A_1B_1, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани BB_1C_1C; б) P лежит на продолжении ребра BC, причем точка C лежит между точками B и P; в) P лежит на диагонали A_1C.

3.9. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана точка P. Построить прямые, параллельные прямой DP, и проходящие через следующие точки: а) A; б) K, взятую на ребре AA_1; в) L, взятую в грани AA_1D_1D.

3.10. В грани BB_1C_1C призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задана точка P. Построить прямые, параллельные прямой AP и проходящие через точки K, L и M, взятые соответственно на следующих ребрах: а) AD; б) AB; в) BB_1.

3.11. На ребрах BB_1 и DD_1 пятиугольной призмы $ABC...D_1E_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить прямые параллельные прямой PQ и проходящие через следующие точки: а) E; б) K, взятую на ребре AA_1; в) L, взятую в грани AA_1BB_1.

Группа Б

3.12. На ребрах BB_1 и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой AP; б) плоскостью, проходящей через прямую C_1P, параллельно прямой AQ; в) плоскостью, проходящей через прямую AQ, параллельно прямой CP и плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой AQ.

3.13. На ребре BB_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ задана точка P, а в грани ABC — точка Q. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую C_1Q, параллельно прямой AP и плоскостью, проходящей через прямую AP, параллельно прямой C_1Q; б) плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой C_1Q и плоскостью, проходящей через прямую C_1Q, параллельно прямой CP; в) плоскостью, проходящей через прямую CP, параллельно прямой B_1Q и плоскостью, проходящей через прямую B_1Q, параллельно прямой CP.

3.14. В грани $ABCD$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ задана точка P. Построить сечения призмы следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую D_1P, параллельно прямой B_1D и плоскостью, проходящей через прямую B_1D, параллельно прямой D_1P; б) плоскостью, проходящей через прямую A_1P, параллельно прямой DB_1 и плоскостью, проходящей через прямую DB_1 параллельно прямой A_1P; в) плоскостью, проходящей через прямую B_1P, параллельно прямой A_1C и плоскостью, проходящей через прямую A_1C параллельно прямой B_1P.

3.15. На ребрах AC, BC и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки Q, R и S. Построить сечения призмы плоскостями, параллельными плоскости QRS и проходящими через точку P, заданную на следующих ребрах: а) CC_1; б) BB_1; в) A_1B_1.

3.16. На ребрах AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения призмы плоскостями, параллельными прямых B_1P и A_1Q и проходящими через точки K, L и M, взятые соответственно на следующих отрезках: а) C_1P; б) BQ; в) PQ.

3.3. Сечения пирамид

Группа А

3.17. На ребрах AB, BD и AC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K, L и M соответственно. Построить сечение тетраэдра плоскостью KLM.

3.18. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L принадлежат грани ABC, а точка M — грани ACD. Построить сечение тетраэдра плоскостью.

3.19. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре SB, Q лежит на ребре AD_1, R лежит в грани SCD, Q лежит в грани SAD; б) P лежит в грани SAB, R лежит в грани SCD; Q — лежит в грани SAD; в) P лежит на отрезке SM, где точка M лежит в грани $ABCD$, Q лежит в грани SBC, R лежит на ребре CD.

3.20. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, заданными следующими точками P, Q и R: а) P лежит на ребре SB, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани ABC; б) P лежит на продолжении ребра SB, причем точка B лежит между точками S и P, Q лежит на ребре AC, R лежит в грани SBC; в) P лежит на отрезке SM, где точка M лежит в грани ABC, Q лежит на ребре SB, R лежит в грани ABC.

3.21. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, проходящими через прямую RQ, где точка R лежит на ребре AB, а точка Q — на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на прямой BK, где точка K лежит на ребре SA и находится между точками B и P; б) P лежит на отрезке CL, где точка L лежит в грани ABC; в) P лежит на прямой BM, где точка M лежит в грани SAC и находится между точками B и P.

3.22. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, проходящими через прямую QR, где точка Q лежит на ребре SB, а точка R — на ребре AD, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани SCD; б) P лежит на прямой AK, где точка K лежит в грани SBC и находится между точками A и P; в) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани $ABCD$.

3.23. Построить сечения пирамиды $SABCD$ плоскостями, проходящими через прямую DQ, где точка Q лежит на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит в грани SAB; б) P лежит на прямой CK, где точка K лежит в грани SAB и находится между точками C и P; б) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани $ABCD$.

3.24. Построить сечения пирамиды $SABC$ плоскостями, проходящими через прямую AQ, где точка Q лежит на ребре SC, и точку P, заданную следующим образом: а) P лежит на прямой BK, где точка K лежит на ребре SA и находится между точками B и P; б) P лежит на отрезке SL, где точка L лежит в грани ABC; в) P лежит на прямой CM, где точка M лежит в грани SAB и находится между точками C и P.

Группа Б

3.25. На ребрах SA и SD пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q. Построить прямые, параллельные прямой PQ и проходящие через следующие точки: а) D; б) K, взятую на ребре SC; в) L, взятую в грани SAB.

3.26. На ребрах AC, SC и AB пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P, Q и R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую SB, параллельно прямой PQ и плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой SB; б) плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой CR и плоскостью, проходящей через прямую CR параллельно прямой BQ; в) плоскостью, проходящей через прямую QR, параллельно прямой SP и плоскостью, проходящей через прямую SP параллельно прямой QR.

3.27. На ребрах SC и SA пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани ABC — точка R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую CQ, параллельно прямой SR и плоскостью, проходящей через прямую SR параллельно прямой CQ; б) плоскостью, проходящей через прямую BP, параллельно прямой CQ и плоскостью, проходящей через прямую CQ

параллельно прямой BP; в) плоскостью, проходящей через прямую PQ, параллельно прямой SR и плоскостью, проходящей через прямую SR параллельно прямой PQ.

3.28. На ребрах SB и SD пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ – точка R. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую AC, параллельно прямой DP и плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой AC; б) плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой BQ и плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой DP; в) плоскостью, проходящей через прямую PR, параллельно прямой BQ и плоскостью, проходящей через прямую BQ, параллельно прямой PR.

3.29. На ребрах SC и SB пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки P и Q, а в грани $ABCD$ — точка R — точка пересечения диагоналей AC и BD. Построить сечения пирамиды следующими плоскостями: а) плоскостью, проходящей через прямую DQ, параллельно прямой PR и плоскостью, проходящей через прямую PR параллельно прямой DQ; б) плоскостью, проходящей через прямую DP, параллельно прямой QR и плоскостью, проходящей через прямую QR параллельно прямой DP; в) плоскостью, проходящей через прямую DR, параллельно прямой PQ и плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой DR.

3.30. На ребрах CD, BC и SC пирамиды $SABCD$ заданы соответственно точки Q, R и T. Построить сечения пирамиды плоскостями, параллельными плоскости QRT и проходящими через точку P, заданную следующим образом: а) на ребре AD; б) на ребре SA; в) грани SAB.

3.31. На ребрах SA и SC пирамиды $SABC$ заданы соответственно точки P и Q. Построить сечения пирамиды плоскостями, параллельными прямым BP и AQ и проходящими через точки K, L и M, взятые соответственно на следующих ребрах: а) SA; б) SB; в) BC.

3.4. Задачи на нахождение отношений и площадей

Группа А

3.32. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины ребер B_1C_1 и AB соответственно, точка P лежит на ребре A_1B_1 так, что $A_1P : PB_1 = 1 : 3$. Построить сечение призмы плоскостью (CNP) и найти отношение, в котором оно делит отрезок AM.

3.33. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На ребре SD взята точка L так, что $SL : LD = 2 : 1$, точка K — середина ребра SB. Построить сечение пирамиды плоскостью (AKL) и определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC.

3.34. В тетраэдре $ABCD$ O — точка пересечения медиан грани ABC, M – середина ребра AD. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M и вершину C параллельно прямой DO. Найти отношение, в котором это сечение делит ребро AB.

3.35. На ребрах A_1B_1, AB и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны соответственно точки M, N и P так, что $A_1M : MB_1 = BN : NA = C_1P : PC = 1 : 2$. Построить сечение призмы плоскостью (MNP) и найти отношение $C_1Q : B_1C_1$, где Q — точка пересечения плоскости (MNP) с прямой B_1C_1.

3.36. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1, точка P лежит на ребре AD так, что $AP : PD = 3 : 1$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью (MNP) и найти отношение, в котором сечение делит ребро BB_1.

3.37. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины отрезков AB и AD проведена плоскость, параллельная ребру SA. Найти площадь сечения, если $AB = a$, $SA = d$.

3.38. Построить сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, N и P лежащих соответственно на ребрах BC, BD и AD так, что $MC = 2MB$, $DN = 2NB$ и $DP = 2AP$. Определить в каком отношении эта плоскость делит площадь треугольника ADC.

3.39. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Построить сечение плоскостью, содержащей диагональ AB_1 и проходящую через середину ребра DD_1. Найти площадь полученного сечения.

3.40. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки M, N и K являются центрами трех граней с вершиной D_1. Найти площадь сечения куба плоскостью (MNK).

3.41. Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AA_1, A_1D_1, если длина ребра куба равна a.

3.42. На ребрах AA_1 и AB параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно выбраны точки M и N так, что $AM = 3MA_1$ и $AN = NB$. Найти отношение, в котором плоскость C_1MN делит ребро BC.

3.43. Точки M и N являются серединами ребер AD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а P — центр грани $A_1B_1C_1D_1$ (т.е. точка пересечения диагоналей этой грани). Найти отношение, в котором плоскость PMN делит ребро AB.

3.44. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани прямоугольники, $AD = 4$, $DC = 8$, $CC_1 = 6$. Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра DC параллельно плоскости (AB_1C_1) и найти его периметр.

Группа Б

3.45. Все ребра тетраэдра $ABCD$ равны a. Точка M — середина ребра DB, точка N лежит на ребре BC так, что $BN : NC = 2 : 1$. Построить сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно прямой AB, и найти его площадь.

3.46. Точка O — центр основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Через середины отрезков AB, BC и SO проведена плоскость. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки A и C параллельно ребру SB равна q.

3.47. В правильной четырехугольной пирамиде проведено сечение, проходящее через середины двух смежных боковых ребер параллельно высоте пирамиды. Найти площадь этого сечения, если боковое ребро равно 18, а диагональ основания равна $16\sqrt{2}$.

3.48. Точка O — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра AD. Построить сечение куба плоскостью проходящей через точку M, параллельно прямым AO и C_1D и найти площадь сечения, если ребро куба равно 4.

3.49. На диагоналях AB_1 и BC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены соответственно точки M и N так, что отрезок MN параллелен плоскости $ABCD$. Найти отношение $AM : AB_1$, если $MN : AB = \sqrt{5}/3$.

3.50. Точки M и N — середины ребер AD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $MN = a$, а диагонали грани $A_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через точку P параллельно прямой MN, пересекает грань AA_1D_1D в точке Q. Найти длину отрезка PQ.

3.51. Пусть точки O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На отрезке OO_1 выбрана точка S так, что $O_1S : OS = 1 : 3$. Через эту точку проведено сечение куба, параллельное его диагонали AC_1 и диагонали BD основания. Найти площадь этого сечения, если ребро куба равно a.

3.52. Среди всех сечений куба, проходящих через его диагональ, указать то, которое имеет наименьшую площадь. Найти эту площадь, если ребро куба равно a.

3.53. Секущая плоскость треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проходит через точки A_1, C параллельно прямой BC_1. Определить, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB.

3.54. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы основания ABC пересекаются в точке M, а диагонали граней AA_1C_1C и BB_1C_1C в точках N и P соответственно. Плоскость MNP пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Найти отношение $B_1K : B_1C_1$.

3.55. Каждое ребро тетраэдра $ABCD$ равно a. На ребрах AD, DC и BC расположены соответственно точки M, N и P так, что $AM = 2a/3$, $CN = a/2$, $CP = a/4$. Плоскость MNP пересекает ребро AB в точке Q. Найти BQ.

3.56. В основании правильной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат, а боковые грани — правильные треугольники. Точки P и N лежат на сторонах основания AD и CD соответственно. Точки M и K лежат на боковых ребрах AS и CS соответственно. Известно, что $AP : DP = 2 : 1$, $CN = DN$ и $AM = MS$. Через точки M и N, P и K проведены две пересекающиеся между собой прямые MN и KP. Определить $CK : KS$.

3.57. На ребре AB тетраэдра $ABCD$ выбрана точка M так, что $AM : AB = x$. Через точку M проведено сечение плоскостью, параллельной AD и BC. При каком x сечение этой плоскостью будет ромбом, если $AD = 3BC$.

3.58. Длины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$ равны соответственно a и b, угол между прямыми AC и BD равен φ. Найти наибольшую площадь сечения тетраэдра, параллельного прямым AC и BD.

3.59. Пусть $SABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M лежат на ребрах SB, SA, AD соответственно, причем $AL = 2LS$, $AM = MD$, $KB = 3SK$. На прямой (LM) выбрана точка X, а на прямой (SC) — точка Y так, что $(XY)\|(AK)$. Найти $LX : XM$.

3.60. Пусть $SABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ ($BC\|AD$), причем $AD = 2BC$. Точки K, L лежат на ребрах SA, AB соответственно, причем $SK = 2KA$, $AL = 3LB$. На прямой (KL) выбрана точка X, а на прямой (AC) — точка Y так, что $(XY)\|(SD)$. Найти $LX : XK$.

Глава 4

Векторы

4.1. Алгебра векторов

Группа А

4.1. Доказать, что сложение n векторов, где $n > 2$, можно выполнять по правилу многоугольника: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

4.2. Доказать, что различные точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существует такое число $\lambda \in \mathbf{R}$, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

4.3. Доказать, что точка B является серединой отрезка AC тогда и только тогда, когда для произвольной точки O выполняется $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$.

4.4. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Доказать, что точка B лежит на отрезке AC тогда и только тогда, когда $\lambda \in [0; 1]$.

4.5. Доказать, что $B \in [AC]$ тогда и только тогда, когда для любой точки O найдется такое число $\lambda \in [0; 1]$, что $\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OC}$. Доказать, что при этом $\lambda = \frac{|AB|}{|AC|}$.

4.6. Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда для любой точки O найдется такое $\lambda \in \mathbf{R}$, что выполняется равенство $\overrightarrow{OB} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OC}$. Доказать, что тогда $|\lambda| = \frac{|AB|}{|AC|}$.

4.7. Даны точки $A(-1, -4, 3)$, $B(3, -2, 8)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(11, x, y)$. При каких x и y векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются коллинеарными?

4.8. Даны точки $A(3,2,5)$, $B(5,4,8)$, $C(-3,x,y)$. При каких x и y точка C лежит на прямой AB?

4.9. Даны точки $A(-1,2,-3)$ и $B(17,-13,9)$. Найти координаты такой точки C отрезка AB, что $|AC|:|CB| = 2:1$.

4.10. Пусть точка C лежит на отрезке AB и $|AC|:|CB| = 1:3$. Разложить вектор $\overrightarrow{OC}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

4.11. Пусть точка O – центр правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Доказать, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$.

4.12. Пусть $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ и $|OA| = |OB| = |OC|$. Доказать, что ABC — правильный треугольник.

4.13. Пусть M и N — середины отрезков AB и CD. Доказать, что $\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})/2$.

4.14. Доказать, что середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

4.15. Даны три точки A, B, C. Для произвольной точки X пространства выбрана точка O так, что $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$. Доказать, что: a) расположение точки O не зависит от выбора точки X; b) точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

4.16. Даны точки A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Для произвольной точки X пространства выбрана точка M так, что $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \ldots + \overrightarrow{XA_n})$. Доказать, что расположение точки M не зависит от выбора точки X. (Точка M называется *центром масс* системы материальных точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n равной массы.)

4.17. Доказать, что точка M является центром масс системы материальных точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n равной массы тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \cdots + \overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

4.18. Доказать, что центр масс системы материальных точек равной массы, расположенных в вершинах произвольного четырехугольника, совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей этого четырехугольника.

4.19. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины с центрами масс противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $3:1$, считая от вершины.

4.20. Пусть $ABCD$ — произвольный тетраэдр. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

4.21. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с центрами тяжести M и M_1 соответственно. Доказать, что $\overrightarrow{MM_1} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})/3$.

4.22. Назовем *средней линией* произвольного четырехугольника отрезок, соединяющий середины несмежных сторон. Доказать, что: a) средние линии четырехугольника точкой пересечения делятся пополам; b) центр масс системы материальных точек равной массы, расположенных в вершинах четырехугольника, совпадает с серединой средней линии этого четырехугольника; c) две средние линии и две диагонали четырехугольника (всего четыре отрезка) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда этот четырехугольник является параллелограммом; d) середины средних линий произвольного четырехугольника и середина отрезка, соединяющего середины диагоналей (всего три точки), совпадают.

4.23. *Медиатрисой* выпуклого четырехугольника называется отрезок, соединяющий одну из вершин этого четырехугольника с точкой пересечения медиан треугольника, образованного остальными тремя вершинами четырехугольника. a) Доказать, что четыре медиатрисы выпуклого четырехугольника пересекаются в одной точке. b) В каком отношении точка пересечения медиатрис делит каждую из них?

4.24. Дан треугольник ABC. Точки A_1 и B_1 выбраны так, что $A_1 \in [BC]$, $B_1 \in [AC]$, причем $|BA_1| : |A_1C| = |AB_1| : |B_1C| = 1 : 2$. Точка O является пересечением отрезков $[AA_1]$ и $[BB_1]$. a) Разложить вектор $\overrightarrow{AO}$ по базису $\vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{v} = \overrightarrow{AB}$; b) определить, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

4.25. Дан треугольник ABC. На отрезках BC и AC соответственно выбраны точки A_1 и B_1 так, что $|BA_1| : |A_1C| = 3 : 1$ и $|AB_1| : |B_1C| = 1 : 2$. Точка O является пересечением отрезков $[AA_1]$ и $[BB_1]$. a) Разложить вектор $\overrightarrow{AO}$ по базису $\vec{u} = \overrightarrow{AC}, \vec{v} = \overrightarrow{AB}$; b) определить, в каком отношении точка O делит отрезки AA_1 и BB_1.

4.26. Даны четыре некомпланарных вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$. Вычислить сумму этих векторов, если известно, что для некоторых чисел x и y выполняются равенства: $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=x\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=y\overrightarrow{a}$.

4.27. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Найти k, если векторы $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+k\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, $k\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ компланарны.

4.28. Для трех произвольных векторов $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ Доказать, что векторы $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w},\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u}$ компланарны.

4.29. Известно, что векторы $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ не компланарны. Найти все значения $p,q\in R$, при которых векторы $p\overrightarrow{u}+q\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ и $\overrightarrow{u}+p\overrightarrow{v}+q\overrightarrow{w}$ коллинеарны.

4.30. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, M — точка пространства, не лежащая в его плоскости. Принимая в качестве базисных векторов $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{MC}$, разложить по этому базису векторы $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{DF}$.

4.31. Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, M — точка пространства, не лежащая в его плоскости. Принимая в качестве базисных векторов $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{AM}$, разложить по этому базису векторы $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MF}$.

4.32. Пусть $ABCDEF$ – правильный восьмиугольник, M — точка пространства, не лежащая в его плоскости. Принимая в качестве базисных векторов $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{MC}$, найти в этом базисе выражения для векторов a) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{MG}$; b) $\overrightarrow{CY}$, где Y — середина MF.

4.33. Даны две тройки коллинеарных точек: A_1,A_2,A_3 и B_1,B_2,B_3, причем $(A_1A_2)\|(B_1B_2)$. Известно, что для любого $i\in\{1,2,3\}$ точка C_i лежит на отрезке A_iB_i и при этом выполняется равенство $|A_iC_i|=\alpha|A_iB_i|$, где α — некоторое положительное вещественное число. Доказать, что точки C_1, C_2, C_3 коллинеарны.

4.34. На каждой из прямых a и b последовательно отмечены по n точек: $A_1,\ A_2,\dots,\ A_n\in a$ и $B_1,\dots,B_n\in b$ так, что $|A_iA_{i+1}|=p$ и $|B_iB_{i+1}|=q$ при всех $i\leqslant n-1$. Пусть C_i — середина отрезка A_iB_i при всех $i\leqslant n$. Доказать, что точки $C_1,\dots,C_n$ лежат на одной прямой.

4.35. При каком x векторы $\overrightarrow{v}=(1,2,5)$, $\overrightarrow{u}=(-1,3,13)$ и $\overrightarrow{w}=(5,x,-29)$ компланарны?

4.36. Лежит ли точка $M(1,1,1)$ в плоскости, проходящей через точки $A(2,0,4)$, $B(-3,-27,5)$ и $C(4,-2,10)$?

4.37. Даны точки $A(4,-2,3)$, $B(7,-12,8)$ и $C(1,1,3)$. При каком значении x точка $D(15,-36,x)$ лежит в плоскости ABC?

4.38. Даны точки $A(1,2,3)$, $B(7,4,9)$, $C(1,1,1)$ и $D(3,8,6)$. Определить взаимное расположение прямых AB и CD.

4.39. Даны точки $A(11,-4,8)$, $B(6,-3,4)$, $C(0,-1,0)$ и $D(-1,0,4)$. Пересекаются ли прямые AB и CD? Если да, то найти координаты точки их пересечения.

4.40. Даны точки $A(1,1,1)$, $B(2,0,-1)$, $C(3,2,z)$ и $O(0,0,0)$. При каких значениях z отрезки AB и OC пересекаются?

4.41. Известно, что плоскость α проходит через точки $A(2,1,2)$, $B(0,1,4)$, $C(4,1,10)$. На прямой a лежат точки $E(11,-4,8)$ и $F(6,-3,4)$. Пересекаются ли a и α? Если да, то найти координаты точки их пересечения.

4.42. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P является серединой диагонали BC_1. Выразить вектор $\overrightarrow{AP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

4.43. Даны точки $A(1,2,3)$, $B(12,-4,6)$, $C(7,2,4)$. Известно, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом. Найти координаты точки D.

4.44. Даны точки $A(3,2,1)$, $B(-12,3,5)$, $C(6,7,3)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника ABC (т. е. его центра масс).

4.45. Найти расстояние от начала координат до центра окружности, описанной около треугольника с вершинами $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ (систему координат считать декартовой).

4.46. Даны координаты двух вершин треугольника $A(2,-1)$, $B(-3,5)$ и координаты точки пересечения медиан этого треугольника $M(1,1)$. Найти координаты вершины C.

4.47. Даны четыре вектора, сумма которых равна $\overrightarrow{0}$, а длина каждого равна единице. Доказать, что среди этих векторов можно выбрать два, которые будут противоположны друг другу, причем два оставшихся вектора также будут противоположны друг другу.

4.48. Через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, проведена плоскость. Определить, в каком отношении она делит диагональ параллелепипеда, выходящую из той же вершины.

Группа Б

4.49. Пусть M_1 — центр масс системы материальных точек A_1, $A_2, \ldots, A_n$, M_2 — центр масс системы материальных точек A_{n+1}, A_{n+2}, $\ldots$, A_{n+m} (массы всех $n+m$ точек одинаковы), M — центр масс системы всех этих $n+m$ точек. Доказать, что выполняются два соотношения: $a)$ $M \in [M_1M_2]$; $b)$ $|M_1M| : |MM_2| = m : n$.

4.50. Доказать, что из медиан треугольника можно составить треугольник.

4.51. Из медиан треугольника ABC составлен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан треугольника $A_1B_1C_1$ составлен треугольник $A_2B_2C_2$. Доказать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, причем коэффициент подобия равен $3/4$.

4.52. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, не лежащие в одной плоскости, M, N — середины сторон AC, BC, а M_1, N_1 — середины сторон A_1C_1, B_1C_1. Доказать, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{NN_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ коллинеарны.

4.53. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Доказать, что если A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно, то прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

4.54. Даны два подобных четырехугольника $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ с общей вершиной, лежащие в различных плоскостях. Доказать, что прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1) параллельны одной плоскости.

4.55. Прямая a пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$, а также его диагональ AC в точках B_1, D_1 и C_1 соответственно. Пусть $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_b\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_c\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_d\overrightarrow{AD}$. Доказать, что λ_c — *среднее гармоническое* чисел λ_b и λ_d, т. е. $\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_d}$.

4.56. Доказать, что если O — центр описанной около треугольника ABC окружности, а H — точка пересечения высот этого треугольника, то $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

4.57. В пространстве даны точки O, A, B, C. Доказать, что точка M принадлежит треугольнику ABC тогда и только тогда, когда найдется такая тройка таких неотрицательных чисел x, y, z, что $x + y + z = 1$ и $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

4.58. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину M ребра BC проведена прямая, пересекающая прямые AC_1 и DD_1 соответственно в точках N и P. Найти отношение $|MN| : |NP|$.

4.59. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка P — середина ребра AD. На прямых PB_1 и BC_1 взяты точки M, N так, что $(MN)\|(A_1C_1)$. Найти $|A_1C_1| : |MN|$.

4.60. Пусть $SABCD$ – четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точка M – середина ребра AD, точка N является точкой пересечения медиан грани SBC. Известно, что точки $P \in (AD)$, $Q \in (SB)$ выбраны так, что $(PQ)\|(MN)$. Найти $|PA| : |AD|$ и $|SQ| : |QB|$.

4.61. Пусть $SABCD$ – четырехугольная пирамида, в основании которой лежит трапеция $ABCD$ ($(AB)\|(CD)$), причем $2|BC| = |AD|$. a) Выразить векторы $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$; b) Пусть N — середина ребра SC; найти точки $P \in (AD)$, $Q \in (SB)$ так, чтобы $(PQ) \| (DN)$.

4.62. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. На диагоналях AC и DC_1 выбраны соответственно точки M и N так, что $(MN)\|(BD_1)$. Найти $|MN| : |BD_1|$.

4.63. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, взята точка M, а на прямой B_1C точка N так, что $(MN)\|(BD)$. Найти $|BD| : |MN|$.

4.64. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Точки P и Q расположены на ребрах AD и BC так, что отрезки MN и PQ пересекаются, а $|AP| : |AD| = 2 : 3$. Найти $|BQ| : |BC|$.

4.65. Точки M, N, и P соответственно — середины ребер AB, CD и BC тетраэдра $ABCD$. Через точку P проведена плоскость, параллельная прямым DM и AN. В каком отношении эта плоскость разделит ребро AD?

4.66. Все ребра правильной треугольной призмы имеют длину a. Точка M лежит на диагонали BC_1 так, что $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$. На диагонали CA_1 выбрана точка N так, что $(MN) \| (ABB_1A_1)$. Найти длину отрезка MN.

4.67. Дана шестиугольная пирамида $SABCDEF$, в основании которой лежит правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки P, Q, R — середины ребер DE, EF, AS. Найти отношения, в которых секущая плоскость делит боковые ребра.

4.68. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ADB, и на этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что $(EF) \| (BC)$. Найти отношение $|EF| : |BC|$.

4.69. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1. Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $|CA_1| = a$.

4.70. Основание пирамиды $ABCDS$ — параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Через середину отрезка SO проведена прямая, параллельная медиане BM грани SAB. Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри пирамиды, если $|BM| = a$.

4.71. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Проведена прямая, пересекающая прямые AA_1, BC и C_1D_1 соответственно в точках M, N и P так, что $|MN| : |MP| = 2$. Найти $|CN| : |BC|$ (найти все решения).

4.72. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки K, L лежат на ребрах AD и CC_1 соответственно, причем $|KD| : |AK| = 3$, $|CL| : |C_1L| = 2$. Через точки K, L параллельно диагонали AC_1 проведена плоскость. *a*) В каком отношении эта плоскость делит ребро BC? *b*) В каком отношении она делит объем параллелепипеда?

4.73. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину a. На прямой BC_1 взята точка M так, что прямые DA_1, AB_1 и D_1M параллельны одной плоскости. Найти длину отрезка D_1M.

4.74. Соответственно на ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $|AM|:|AD| = 1:5$. Найти $|CN|:|CA_1|$.

4.75. Пусть $ABCDS$ — правильная четырехугольная пирамида. На ребрах AS и BS соответственно выбраны точки K и L так, что $|AK|:|KS| = |SL|:|LB| = 1:3$, а точка M — середина ребра SC. Точка N выбрана на прямой CD так, что прямые KL и NM пересекаются. Найти $|DN|:|NC|$.

4.76. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра CD, $N \in [BC_1]$, $P \in [AB_1)$, при этом точки M, N, P лежат на одной прямой. Найти $|PN|:|MN|$.

4.77. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра CD, $P \in [BC_1]$, $N \in [AB_1)$, при этом точки M, N, P лежат на одной прямой. Найти отношения $|NP|:|PM|$, $|BP|:|PC_1|$ и $|AB_1|:|AN|$.

4.78. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. На прямой m даны точки P, Q, R, а на прямой m — точки P_1, Q_1, R_1, причем $|PQ| = k|PR|$, $|P_1Q_1| = k|P_1R_1|$. Доказать, что прямые (PP_1), (QQ_1), (RR_1) параллельны одной плоскости.

4.79*. Даны два четырехугольника $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в различных плоскостях, O, O_1 — точки пересечения их диагоналей. Доказать, что если $|AO|:|OC| = |A_1O_1|:|O_1C_1|$ и $|BO|:|OD| = |B_1O_1|:|O_1D_1|$, то прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1) параллельны одной плоскости.

4.80*. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка M. Через эту точку и точки пересечения медиан граней A_1, B_1, C_1, D_1 проведены прямые a_1, b_1, c_1, d_1. Доказать, что прямые a_2, b_2, c_2, d_2, проведенные через вершины A, B, C, D, параллельно прямым a_1, b_1, c_1, d_1, пересекаются в одной точке.

4.81*. Даны два треугольника. Доказать, что если медианы одного из них параллельны сторонам другого, то и медианы второго из них параллельны сторонам первого.

4.82*. Дан треугольник ABC. Прямая l пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1}$ коллинеарны.

4.83. Найти сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α (определите в каком отношении плоскость делит ребра параллелепипеда), проходящей через вершину A, точку P – середину ребра A_1B_1 и точку Q на ребре C_1C такую, что $|CQ| = |QC_1|/3$. Определить, в каком отношении плоскость α делит диагональ параллелепипеда.

4.84. Доказать, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

4.85. Дан трехгранный угол. Доказать, что биссектрисы трех углов, смежных с его плоскими углами, лежат в оной плоскости.

4.86. Доказать, что три плоскости, каждая из которых проходит через биссектрису одного из плоских углов трехгранного угла и противолежащее этому плоскому углу ребро, пересекаются по некоторой прямой.

4.87. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l пересекает прямые (AB), (AC), (AD) в точках B_1, C_1, D_1 соответственно. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC_1}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB_1}} + \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD_1}}.$$

4.88. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость π пересекает прямые (AB), (AD), (AA_1), (AC_1) в точках B_0, D_0, A_0, C_0 соответственно. Доказать, что

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{AC_0}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB_0}} + \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{AD_0}} + \frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_0}}.$$

4.2. Скалярное произведение векторов. Разные задачи

Группа А

4.89. Длина вектора $\overrightarrow{a}$ равна 3, длина вектора $\overrightarrow{b}$ равна 4, а угол между этими векторами равен $2\pi/3$. Вычислить $(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$.

4.90. Длина вектора $\overrightarrow{a}$ равна 2, длина вектора $\overrightarrow{b}$ равна 3. Известно, что $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2+(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})^2=56$. Найти угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

4.91. Длины векторов $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ равны 3, 1 и 4 соответственно, а сумма этих векторов равна $\overrightarrow{0}$. Вычислить $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}$.

4.92. Какому условию должны удовлетворять векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, чтобы выполнялось равенство $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$?

4.93. Доказать, что вектор $(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{a}$.

4.94. Даны векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$, причем $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$ не перпендикулярны. Существует ли такое число k, что векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}+k\overrightarrow{c}$ перпендикулярны?

4.95. Даны три произвольных вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Доказать, что векторы $(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ перпендикулярны.

4.96. Доказать, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ каковы бы ни были точки A, B, C, D.

4.97. Используя векторы, доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

4.98. Используя векторы, доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

4.99. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, $\overrightarrow{AB}=$ $=(6,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(3,4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AH}$.

4.100. Пусть O — начало координат. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $N(3,5,2)$ и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{ON}$.

4.101. Плоскости α и β заданы уравнениями $x + 2y - z + 1 = 0$ и $2x + 4y - 2z - 7 = 0$ соответственно. Записать уравнение плоскости, параллельной обеим заданным плоскостям и находящейся от них на равных расстояниях.

4.102. Найти координаты точки, симметричной началу координат относительно плоскости, заданной уравнением $3x - 2y + z + 1 = 0$.

4.103. Являются ли точки $(2, -5, 3)$ и $(4, -1, 1)$ симметричными относительно плоскости, заданной уравнением $x + 2y - z - 5 = 0$?

4.104. Найти угол между плоскостями MNK и MND, если $M(0, 0, 0)$, $N(1, 1, 1)$, $K(3, 2, 1)$, $D(3, 1, 2)$.

4.105. Найти угол между плоскостями ABC и PQR, если $A(-1, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, -1)$, $P(2, 1, 2)$, $Q(0, 1, 4)$, $R(4, 0, 0)$.

4.106. Найти координаты точки пересечения прямой AB с плоскостью, задаваемой уравнением $2x + 2y - z + 4 = 0$, если $A(2, 1, 1)$, $B(-3, 4, 0)$.

4.107. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 1. Точки E и F лежат на ребрах BC и C_1D_1 соответственно, причем $|BE| = \frac{1}{4}$, $|FD_1| = \frac{2}{5}$. Точка M — центр куба. Найти расстояние от точки A_1 до плоскости EFM.

4.108. Ребро куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ имеет длину 1. Точки A и B лежат на ребрах KL и MM_1 соответственно, причем $|KA| = \frac{1}{4}$, $|BM_1| = \frac{2}{5}$. Точка O — центр куба, точка P — проекция точки K_1 на плоскость (ABO). Найти $|AP|$.

4.109. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 2. Точки L и K — середины ребер AD и CC_1 соответственно. Найти расстояние от точки A_1 до плоскости BLK.

4.110. Найти угол между плоскостями, которые заданы уравнениями $x - y + 3z = 2$ и $-x - 3y + z = 2$.

4.111. Найти координаты точек пересечения сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, и прямой, проходящей через точку $(2, 1, 1)$ параллельно вектору $(2, -4, -1)$.

4.112. Найти расстояние от плоскости до сферы, если они соответственно заданы уравнениями $2x + 2y - z + 15 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

4.113. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка M — середина ребра $[CC_1]$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$.

4.114. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Используя векторы, найти угол между прямыми DA_1 и AB_1.

4.115. Тройка векторов $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{e_3}$ имеющих длины 1, 2 и 3 соответственно, образует базис пространства. Известно, что $\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}} = 30^\circ$, $\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}} = \widehat{\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}} = 60^\circ$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$ и $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$.

4.116. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра $[CC_1]$. Найти: *a*) угол между прямыми BM и DC_1; *b*) расстояние от точки M до плоскости, проходящей через прямую DC_1 параллельно прямой BM, если длина ребра куба равна a.

4.117. Используя векторы, найти угол и расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба с ребром 1.

4.118. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1, точка M — центр грани CC_1D_1D. Найти расстояние от точки A до прямой BM.

4.119. Найти координаты точки, симметричной точке $(0,1,0)$ относительно прямой, проходящей через точки $(1,0,0)$ и $(1,2,1)$.

4.120. *a*) Найти координаты точки, симметричной точке $(1,2,1)$ относительно прямой, проходящей через точки $(0,0,1)$ и $(1,1,0)$. *b*) Найти расстояние от точки $(1,2,1)$ до этой прямой.

4.121. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 2. Точки E, F и G — середины ребер D_1C_1, B_1C_1 и AB соответственно; $\alpha = (EFG)$, $\beta = (BB_1D_1)$. *a*) Найти расстояние от точки A_1 до плоскости α. *b*) Найти координаты точки, симметричной точке A_1 относительно плоскости α. *c*) Найти угол между плоскостями α и β. *d*) Точка X получена симметричным отражением точки A_1 относительно α, а затем отражением результата относительно β; точка Y получена симметричным отражением точки A_1 относительно β, а затем отражением результата относительно α. Сравнить $|A_1X|$ и $|A_1Y|$.

4.122. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки: K — середина ребра AA_1, $H \in [AD]$, M — центр грани CC_1D_1D, $(KM)\perp(B_1H)$. В каком отношении точка H делит отрезок AD?

4.123. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, объем которой равен 3. Известно, что $A(1,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,1,0)$. Найти координаты точки A_1. *Для тех, кто забыл:* объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на длину бокового ребра.

4.124. Плоскость, заданная уравнением $x+y+z+D=0$, касается сферы, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2=2x+2y+2z$. Найти число D и координаты точки касания.

Группа Б

4.125. Используя векторы, доказать *теорему Лейбница*: если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то для любой точки X выполняется равенство

$$|XA|^2+|XB|^2+|XC|^2=3|XM|^2+|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2.$$

4.126. Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника минимальна.

4.127. Известно, что O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения высот этого треугольника, R — радиус описанной около него окружности. Доказать, что выполняется равенство $|OH|^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$ (где a,b,c — длины сторон данного треугольника).

4.128. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Доказать, что $|BC|\cdot\overrightarrow{IA}+|CA|\cdot\overrightarrow{IB}+|AB|\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$.

4.129. Дан треугольник ABC, H – ортоцентр треугольника. Доказать, что $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}=k$. Выразить k через стороны треугольника.

4.130. Даны две различные точки A, B. Найти геометрическое место точек M, для которых $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k^2$, $k\neq 0$.

4.131. Даны две различные точки A, B. Найти геометрическое место точек M, для которых $|MA|=k\cdot|MB|$, $k>0$.

4.132. Дан параллелограмм $ABCD$. Около треугольника ABC описана окружность с центром O радиуса R. Доказать, что выполняется равенство $|OD|^2=R^2+a^2+c^2-b^2$.

4.133. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, а m_a и m_b — длины медиан, проведенных к соответствующим сторонам. Доказать, что эти медианы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=5c^2$.

4.134. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{OA}\cdot\sin 2\alpha+\overrightarrow{OB}\cdot\sin 2\beta+\overrightarrow{OC}\cdot\sin 2\gamma=\overrightarrow{0}$ (здесь α,β,γ — соответственно величины углов A, B и C данного треугольника).

4.135. В правильном тетраэдре $DABC$ точка M — центр грани BCD, а точка K — середина ребра AC. Найти угол между прямыми AM и BK.

4.136. В правильном тетраэдре $DABC$ точка O — центр грани ABC, а точки N, K и M — середины ребер AB, CD и AD соответственно. Найти угол между прямыми MO и KN.

4.137. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с длиной ребра основания 1; O и O_1 — центры треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Известно, что длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}$. Найти длину бокового ребра призмы.

4.138. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с длиной ребра основания 1; O — центр треугольника ABC. a) Известно, что длина проекции отрезка A_1O на прямую CB_1 равна 1. Найти длину бокового ребра призмы. b) Найти расстояние от точки A_1 до прямой OM, где M — центр грани BCC_1B_1.

4.139. $DABC$ — правильный тетраэдр с длиной ребра 2, M, N и K — середины ребер AD, AB и DC соответственно, O — центр треугольника ABC. Найти: a) угол между прямыми MO и KN; b) расстояние от точки N до плоскости MKB; c) расстояние между прямыми BO и KN.

4.140. $DABC$ — правильный тетраэдр, $[AK]$ и $[DL]$ — медианы граней ADC и DCB соответственно. Найти угол и расстояние между прямыми AK и DL, если $AB=2a$.

4.141. В основании тетраэдра $SABC$ лежит правильный треугольник ABC с длиной стороны $2\sqrt{2}$. Боковое ребро AS имеет длину 1 и перпендикулярно плоскости основания. Точки K и M — середины ребер

SB и CB соответственно. Найти: *a*) расстояние от точки A до плоскости SCB; *b*) угол между плоскостями ABS и CBS; *c*) угол между прямыми AK и SM; *d*) расстояние между прямыми AK и SM.

4.142. Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Ребро SC перпендикулярно плоскости ABC, $|SC| = 2$, точки E и D — середины ребер BC и AB соответственно. Найти угол и расстояние между прямыми SE и CD.

4.143. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Квадрат $A_1B_1C_1D_1$ является основанием правильной пирамиды $SA_1B_1C_1D_1$ (точка S лежит вне куба), боковое ребро которой также равно a. Найти угол между прямыми AB и SC_1.

4.144. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 2, точка P — центр грани CDD_1C_1. *a*) Ввести декартову систему координат с началом в точке A, направив оси вдоль ребер куба, и найти координаты точки X — ортогональной проекции точки B_1 на плоскость DA_1C_1. *b*) Найти расстояние от точки X до прямой AP.

4.145. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину 2, точка P — центр грани CDD_1C_1, точка K лежит на луче $[BB_1)$ так, что $|BK| = 4$. Жуки Вася и Петя таковы, что их размерами можно пренебречь, однако каждый из них имеет одну лапу длины $\frac{1}{13}$. Вася ползает по прямой AP, а Петя — по прямой DK. *a*) Смогут ли Вася и Петя обменяться лапопожатием? *b*) Если да, то найти координаты точки, в которой встретятся лапы Васи и Пети в тот момент, когда расстояние между ними будет наименьшим.

4.146. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $|AD| = 4$, $|AB| = 1$, $|AA_1| = 2$. Плоскость α такова, что она перпендикулярна прямой AC_1 и содержит точку B_1. *a*) В каком отношении плоскость α делит отрезок AD? *b*) Построить сечение параллелепипеда плоскостью α. *c*) Найти расстояние от точки C_1 до плоскости α. *d*) Построить точку M, симметричную точке C_1 относительно α.

4.147. Доказать, что из равенства длин отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, вытекает перпендикулярность пар противоположных ребер.

4.148. Известно, что в тетраэдре суммы квадратов противоположных ребер попарно равны. Доказать, что противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

4.149. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой является прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды проходит через вершину A. Найти величину двугранного угла между плоскостями SBC и SCD, если $|AD| = |SA| = 2a$, $|AB| = a$.

4.150. Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $|AD| : |AB| = \sqrt{3}$. Прямоугольник перегнули по диагонали AC так, что угол между плоскостями ABC и ADC стал равным 30°. Какой угол будет образовывать прямая AB с плоскостью ADC?

4.151. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция. Ее большее основание равно a, острый угол равен 60°, а меньшее основание равно боковой стороне. Трапецию согнули по диагонали AC так, что угол между плоскостями ABC и ACD стал равным 45°. Найти расстояние между точками B и D.

4.152. В грани двугранного угла, равного 120°, проведена прямая, образующая угол 60° с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

4.153. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, прямые AC_1 и BA_1 перпендикулярны. Найти объем призмы.

4.154. a) Доказать, что сумма квадратов проекций всех ребер единичного куба на произвольную прямую не зависит от выбора этой прямой. b) Найти эту сумму.

4.155. В единичный куб вписана сфера. a) Доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до всех вершин куба не зависит от выбора этой точки. b) Найти эту сумму.

4.156. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, длины всех ребер которой равны a. Точки M и K выбраны так, что $M \in [BC_1]$, $K \in [CA_1]$, причем $(MK) \| (ABB_1A_1)$. a) Найти $|MK|$, если $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$. b) Найти минимально возможную длину отрезка MK.

4.157. Дана пирамида $DABC$ с основанием ABC, грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники. Ребро AD перпендикулярно медиане AK основания пирамиды. Известно, что $|AD| = |AK|$, точка E — середина отрезка BD, а точка G лежит на отрезке AC так, что $|AG| = 3|GC|$. Кроме того, в пространстве взята точка H так, что $EFGH$ — равнобедренная трапеция с основаниями EF и GH, причем плоскость $EFGH$ не проходит через середины отрезков AD и BC. Найти отношение площадей трапеции $EFGH$ и треугольника BCD.

4.158. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют одинаковую длину. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB и точка K — середина ребра CD. Найти угол между прямыми MO и KN.

4.159. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина, $|SA| = 4$) точка D лежит на ребре SC, $|CD| = 3$, а расстояние от точки A до прямой BD равно 2. Найти объем пирамиды.

4.160. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом $\widehat{A} = 60^\circ$. Все ребра призмы имеют длину a. Точка K является ортогональной проекцией точки B_1 на плоскость (DA_1C_1), а точка L — ортогональной проекцией точки K на плоскость (DD_1C_1C). Найти объем пирамиды $DCLK$.

4.161. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти $|AD|$, если $|AK| = 6$, $|AM| = 3$ и $\angle KAM = 60^\circ$.

4.162. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E — середина ребра AB. Найти угол между прямыми MN и DE.

4.163. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания углы в 60°, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

4.164. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна a, длина бокового ребра равна $a/2$. Точка D является ортогональной проекцией середины ребра A_1C_1 на плоскость AB_1C, а точка E — ортогональной проекцией точки D на плоскость AA_1B_1B. Найти объем пирамиды A_1B_1DE.

4.165. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости (SAD). *a*) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD так, что $|DM| : |DB| = 1 : 3$. Найти его длину. *b*) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4.166. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA| = \sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определить величину угла между плоскостями α и β.

Глава 5

Задачи на построение

5.1. Введение. Схема решения задач на построение

Сначала обсудим набор данных нам инструментов. Если в условии задачи не говорится о том, какими инструментами нужно выполнять построение, это означает, что в нашем распоряжении есть **только** циркуль и линейка. Также сразу договоримся, что все точки, отрезки и другие геометрические фигуры, о которых будет идти речь в этой главе, лежат в некоторой фиксированной плоскости.

Циркуль. Этот инструмент позволяет выполнять только две операции. По данному отрезку AB и точке O с помощью циркуля мы можем провести окружность с центром в точке O радиуса AB. Кроме того, циркуль позволяет найти пересечение этой окружности с любой ранее построенной фигурой (может случиться, что это пересечение будет пустым множеством).

Линейка. С помощью линейки можно провести прямую через любые две выбранные точки, а также найти пересечение этой прямой с любой другой ранее построенной фигурой. Таким образом, под линейкой мы понимаем одностороннюю линейку без делений.

Обычно решение задачи на построение содержит следующие четыре этапа: **анализ** задачи, **выполнение построения**, **доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи и, наконец, **исследование** задачи. На примере решения следующей задачи выясним, в чем суть каждого из этих этапов.

Пример 1. Построить треугольник ABC по сторонам $AB = c$, $BC = a$ и углу $\angle BAC = \alpha$.

Решение. 1. Поскольку нам дана сторона AB, решение задачи сводится к построению точки C. Определим, каким свойствам должна удовлетворять точка C. Для этого предположим, что искомый треугольник уже построен (рис. 1). Во-первых, точка C лежит на окружности радиуса a с центром в точке B. Во-вторых, точка C принадлежит лучу $[AX)$, составляющему с лучом $[AB)$ угол α. На этом анализ задачи завершен.

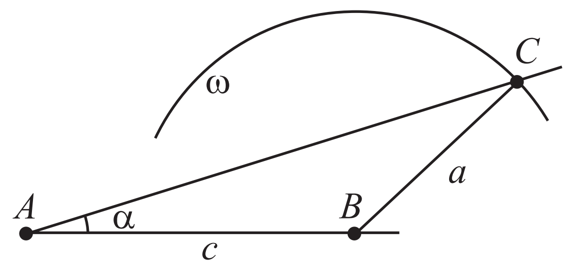

Рис. 1

Итак, *анализ* задачи состоит в определении геометрических свойств, которым должна удовлетворять точка (или последовательность точек), которую нам необходимо построить. При этом мы считаем, что искомая фигура уже построена.

2. Через произвольную точку A проведем произвольную прямую, на которой отметим отрезок AB длины c. Построим окружность ω с центром в точке B радиуса a. Проведем луч $[AX)$, составляющим с лучом $[AB)$ угол α (тем, кто забыл как от данного луча отложить данный угол, следует посмотреть начало третьего параграфа этой главы). В пересечении луча $[AX)$ с окружностью ω мы найдем искомую точку C. Построение завершено.

Построение является описанием конечной цепочкой шагов, достаточной для нахождения искомой точки (или нескольких искомых точек). Формально каждый из этих шагов является одной из четырех элементарных операций, которые мы можем проделать с помощь циркуля и линейки. На самом деле, к этим элементарным операциям мы также будем относить несколько таких хорошо известных задач на построение, как откладывание данного угла, построение серединного перпендикуляра к данному отрезку и т.д. (см. начало третьего параграфа).

3. Поскольку для треугольника ABC выполняются равенства $AB = c$, $BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$, найденный треугольник искомый.

Находясь на этапе *доказательства*, мы проверяем, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

4. Число решений данной задачи зависит от количества точек пере-

сечения луча $[AX)$ с окружностью ω. Первый случай: $a = c \cdot \sin\alpha$. В этом случае окружность ω касается луча $[AX)$ (рис. 2) и решением будет прямоугольный треугольник. Второй случай: $a < c \cdot \sin\alpha$. В этом случае окружность ω не пересекает луча $[AX)$ (рис. 3) и задача решений не имеет. Третий случай: $c \cdot \sin\alpha < a < \text{c}$ (рис. 4). При таких числовых данных окружность ω пересекает луч $[AX)$ в двух точках и задача имеет два решения. И, наконец, последний случай: $a \geqslant c$ (рис. 5). Окружность ω пересекает луч $[AX)$ в единственной точке и задача имеет единственное решение. Подведем итоги: при $a = c \cdot \sin\alpha$ и при $a \geqslant c$ задача имеет единственное решение; при $a < c \cdot \sin\alpha$ задача решений не имеет; во всех остальных случаях задача имеет два решения.

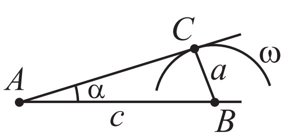

Рис. 2

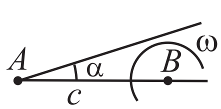

Рис. 3

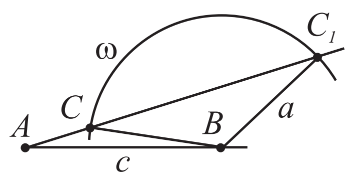

Рис. 4

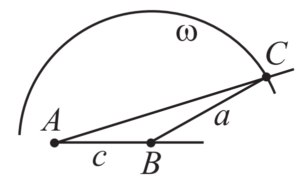

Рис. 5

Исследование задачи состоит в определении количества различных решений задачи в зависимости от данных числовых значений.

О подсчете числа решений надо поговорить особо. Существуют несколько типов задач на построение. *Тип первый:* по заданным отрезкам и углам надо построить некоторый n-угольник. Построение в этом случае можно начинать от произвольной точки плоскости и получать при этом бесконечно много одинаковых n-угольников. В таких задачах равные фигуры (т.е. переводящиеся друг в друга некоторым движением) считаются за **одно решение**. Так в предыдущем примере мы могли построить еще один луч $[AY)$, также составляющий с лучом $[AB)$ угол α. Но этот луч приводит к нахождению треугольников, которые равны уже построенным. *Второй тип:* на плоскости задано некоторое множество точек и фигур. В задаче требуют построить фигуру, специальным образом расположенную относительно заданного множества точек и фигур. В таких задачах если найденные фигуры не совпадают между собой, они считаются **различными решениями**. Типичный пример — надо провести касательную к окружности $\omega(O, R)$ из точки A, расположенной вне этой окружности. Очевидно, что эта задача имеет два различных решения, хотя искомые касательные и переводятся друг в друга осевой симметрией с осью OA.

5.2. Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ) называется фигура Φ, состоящая из всех точек, удовлетворяющих некоторому свойству $\mathcal{P}$ (т.е. $\Phi = \{A : \mathcal{P}(A)\}$). Таким образом, решение задачи на ГМТ сводится к тому, что по данному геометрическому свойству $\mathcal{P}$ нам необходимо найти конкретную геометрическую фигуру Φ (например, отрезок или дугу окружности), для которой выполняется: а) все точки фигуры Φ удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$; б) все точки плоскости, удовлетворяющие свойству $\mathcal{P}$, принадлежат фигуре Φ. Вместо условия (б) в некоторых задачах проще проверять условие б*) все точки плоскости, не лежащие в фигуре Φ, не удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$.

Если в задаче на ГМТ сформулированы сразу два геометрических свойства — $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, для которых уже найдены фигуры $\Phi_1 = \{A : \mathcal{P}_1(A)\}$ и $\Phi_2 = \{A : \mathcal{P}_2(A)\}$, то ГМТ, одновременно удовлетворяющих и $\mathcal{P}_1$, и $\mathcal{P}_2$, является пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 (т.е. искомая фигура $\Phi = \Phi_1 \cap \Phi_2$). Поэтому для решения сложных задач на определение ГМТ важно знать следующие простые, но очень важные частные случаи.

ГМТ1. *ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка AB ($A \neq B$), является серединный перпендикуляр к этому отрезку.*

Здесь условие $\mathcal{P}$ — быть равноудаленной точкой от концов отрезка AB, фигура Φ — серединный перпендикуляр к этому отрезку. Проверка выполнения условий (а) и (б) для серединного перпендикуляра к отрезку AB не составляет труда.

ГМТ2. *ГМТ, удаленных от данной точки O на расстояние $r > 0$, является окружностью радиуса r с центром в точке O.*

Доказательство в данном случае очевидно, поскольку свойство $\mathcal{P}$ является определением окружности.

ГМТ3. *ГМТ, принадлежащих данному углу $\angle BAC$ и равноудаленных от прямых AB и AC, является биссектриса этого угла.*

Как и в случае ГМТ1, выполнение условий (а) и (б) для биссектрисы угла $\angle BAC$ легко сводится к одному из признаков равенства прямоугольных треугольников.

ГМТ4. *ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых (AB) и (AC), является парой взаимно перпендикулярных прямых, которые* *содержат биссектрисы углов, образованных прямыми* (AB) *и* (AC).

Последнее утверждение легко следует из ГМТ3 и очевидного факта, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

ГМТ5. *ГМТ, из которых данный отрезок* AB *виден под прямым углом, является окружностью* ω, *построенной на этом отрезке как на диаметре, из которой исключены точки* A *и* B *(рис. 6).*

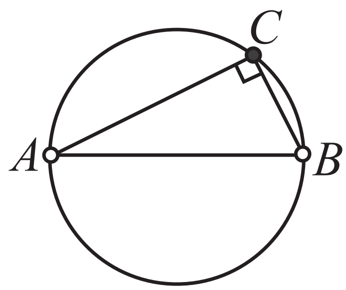

Рис. 6

ГМТ5 является частным случаем (поэтому проверка условий (а) и (б*)не проводится) следующего важного ГМТ.

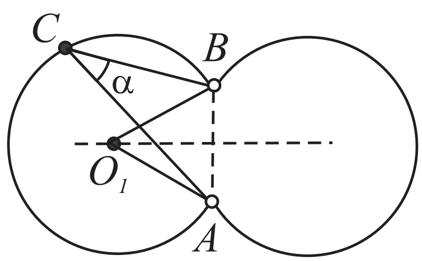

Рис. 7

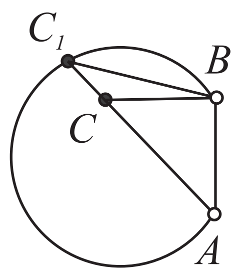

Рис. 8

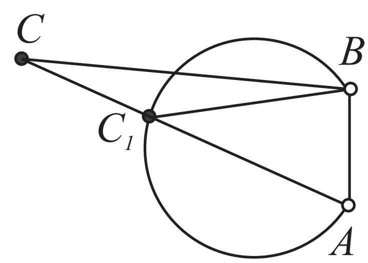

Рис. 9

ГМТ6. *ГМТ, из которых данный отрезок* AB *виден под данным углом* α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$, *является объединением двух равных дуг (рис. 7) с общей хордой* AB, *причем точки* A *и* B *из дуг исключены.*

Убедимся в выполнении свойств (а) и (б*). Сначала заметим, что искомое ГМТ симметрично относительно прямой AB, поэтому достаточно рассмотреть только одну из полуплоскостей с границей (AB). На серединном перпендикуляре к отрезку AB в фиксированной полуплоскости найдем такую точку O_1 (рис. 7), что $\angle AO_1B = 2\alpha$ (о построении такой точке написано в начале следующего параграфа). Пусть ω_1 — это окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A и Φ_1 — дуга этой окружности, лежащая в выбранной полуплоскости, за исключением точек A и B. Проверка свойства (а) для Φ_1 следует из теоремы о вписанном и центральном углах, опирающихся на одну дугу. Для доказательства свойства (б*) возьмем произвольную точку C выбранной полуплоскости и не лежащую на прямой AB. По крайней мере один из лучей — $[AC)$ или $[BC)$ — пересечет Φ_1 в некоторой точке C_1. Уже доказано, что $\angle AC_1B = \alpha$. Отсюда, а также из свойства внешнего угла треугольника имеем: для точек выбранной полуплоскости, расположенных внутри окружности ω_1 (рис. 8), данный отрезок виден под углом больше α; для точек вне ω_1 — меньше α (рис. 9).

Чуть позже (в четвертом параграфе этой главы) мы рассмотрим еще два важных ГМТ — радикальную ось дух окружностей и окружность Аполлония.

Переходим к решению задач. Обычно в решении этих задач данное в условии геометрическое свойство $\mathcal{Q}$ удается заменить эквивалентным свойством $\mathcal{P}$ (используя теоремы первых двух глав, простые геометрические или алгебраические соотношения), которое является одним из разобранных нами ГМТ1–ГМТ6. В этом случае достаточно привести доказательство эквивалентности свойств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ и использовать фигуру, соответствующую ГМТ для свойства $\mathcal{P}$.

Пример 1. Найти ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых a и b.

Решение. Если $a = b$, то искомым ГМТ будет, очевидно, вся плоскость. Пусть теперь $a \neq b$. Выберем точки $A \in a$ и $B \in b$ так, что $(AB) \perp a$. Осталось доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку AB и является искомым ГМТ. Действительно, для произвольной точки X (рис. 10) опустим перпендикуляры XY и XZ на прямые a и b соответственно ($Y \in a$, $Z \in b$) и сразу заметим, что $YA = ZB$. Поэтому точка X принадлежит искомому ГМТ (т.е. $XY = XZ$) тогда и только тогда, когда $\triangle XYA = \triangle XZB$, что равносильно $XA = XB$. Используя ГМТ1 получаем, что серединный перпендикуляр к отрезку AB является искомым ГМТ.

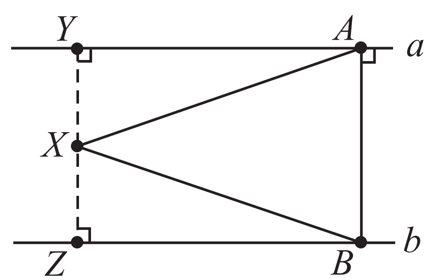

Рис. 10

Пример 2. Дан треугольник ABC. Найти ГМТ X, удовлетворяющих неравенствам $AX \leqslant BX \leqslant CX$.

Решение. Пусть a — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Согласно ГМТ1 для точек этой прямой и только для них выполняется равенство $XA = XB$. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из которой выполняется неравенство $XA \leqslant XB$, а в другой — обратное неравенство. Итак, ГМТ удовлетворяющих неравенству $AX \leqslant BX$, является полуплоскость с границей a, в которой содержится точка A. Аналогично построим серединный перпендикуляр к отрезку BC (на рис. 11 это прямая b) и выберем полуплоскость, в которой содержится точка B. Эта полуплоскость соответствует ГМТ, удовлетворяющих второму неравенству $BX \leqslant CX$. Поскольку искомое ГМТ должно одновременно удовлетворять обеим неравенствам, остается пересечь две найденные полуплоскости. В результате получится угол, изображенный на рис. 11.

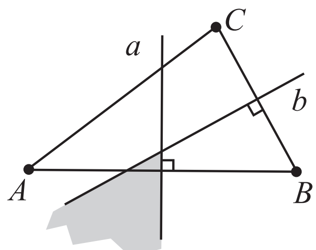

Рис. 11

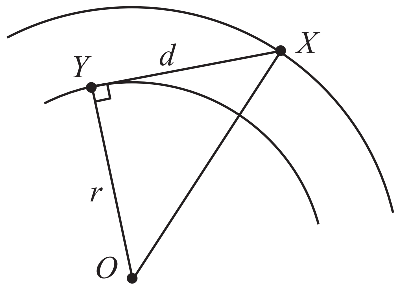

Рис. 12

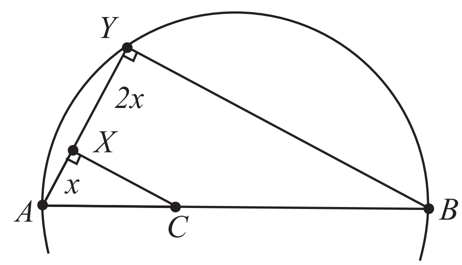

Рис. 13

Пример 3. Найти геометрическое место таких точек X, что касательные, проведенные из X к данной окружности, имеют данную длину d.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, r — ее радиус. Обозначим также через Y точку касания (рис. 12) и из прямоугольного треугольника OXY сразу найдем $OX = \sqrt{r^2 + d^2}$. Таким образом, используя ГМТ2, получаем, что искомой фигурой является окружность радиуса $\sqrt{r^2 + d^2}$ с центром в точке O.

Пример 4. На окружности фиксирована точка A. Найти ГМТ X, делящих хорды с концом в точке A в соотношении $1:2$, считая от точки A.

Решение. Пусть $[AB]$ — диаметр данной окружности, а точка C выбрана на луче $[AB)$ так, что $AC : CB = 1 : 2$ (рис. 13). Сразу замечаем, что C принадлежит искомому ГМТ. Предположим теперь, что точка X делит хорду AY в данном отношении, тогда треугольники AXC и AYB подобны (есть пропорциональность двух пар сторон и общий угол между ними). Отсюда $\angle AXC = \angle AYB = 90^\circ$ и, согласно ГМТ5, точка X

лежит на окружности ω, построенной на отрезке AC как на диаметре. Исключим из этой окружности точку A (эта точка не может принадлежать искомому ГМТ, из-за невозможности деления на ноль) и докажем, что $\omega\backslash\{A\}$ — искомое ГМТ. Мы уже проверили свойство (а) (свойство (а) определяется в начале этого параграфа) для этой фигуры. Для проверки свойства (б) выберем произвольную точку $X \in \omega\backslash\{A\}$ и заметим, что $(XC)\|(YB)$. По теореме Фалеса получим $AX : XY = AC : CB = 1 : 2$, что и доказывает свойство (б) для фигуры $\omega\backslash\{A\}$.

Пример 5. Дан квадрат $ABCD$. Найти все такие точки X плоскости, что сумма расстояний от точки X до прямых, содержащих две противоположные стороны квадрата равна сумме расстояний до двух прямых, содержащих оставшиеся две стороны.

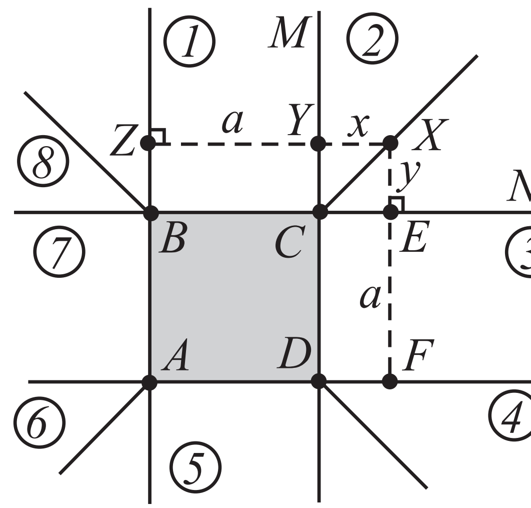

Рис. 14

Решение. Для удобства обозначим длину стороны квадрата через a. Тогда для каждой точки квадрата $ABCD$ (включая его внутренние точки) обе суммы, о которых идет речь в условии задачи, равны a. Следовательно весь квадрат содержится в искомом ГМТ. Далее будем рассматривать точки вне данного квадрата. Прямые, содержащие стороны квадрата разбивают плоскость на несколько частей, занумеруем их так, как это сделано на рис. 14. В областях 1 и 5 сумма расстояний до прямых (AB) и (CD) равна a, а другая сумма больше, чем a. По схожей причине не подходят точки областей с номерами 3 и 7. Для точек прямого угла MCN (номер области — 2) сумма расстояний до прямых (AB) и (CD) равна $a + 2x$, где x — расстояние от точки до луча $[CM)$; сумма же расстояний до прямых (AD) и (BC) равна $a + 2y$, где x — расстояние от точки до луча $[CN)$. Таким образом, эти суммы равны только в случае $x = y$, что, согласно ГМТ3, дает нам биссектрису угла MCN. Аналогично получаются биссектрисы углов 4, 6 и 8. Итак, искомое ГМТ — это объединение квадрата и четырех биссектрис.

Пример 6. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла ABC. По какой траектории движется середина этого отрезка?

Решение. Пусть длина данного отрезка равна $2r$ и точки X и Y перемещаются соответственно по лучам $[BA)$ и $[BC)$. Определим ГМТ M, где M — середина отрезка XY. В крайних положениях отрезок XY целиком лежит на одном из лучей $[BA)$ или $[BC)$, что дает нам две точки этих лучей, удаленных от точки B на расстояние r. Во всех остальных случаях треугольник XBY прямоугольный, и точка M, будучи серединой гипотенузы этого треугольника, удалена от точки B на расстояние r. Обозначим через Φ ту четверть окружности $\omega(B, r)$, которая содержится в угле ABC (рис. 15). Уже доказано, что всякая точка искомого ГМТ принадлежит Φ, т.е. для Φ проверено свойство (а). Выберем теперь произвольную точку $M_1 \in \Phi$ и проведем окружность радиуса r с центром в точке M_1 (рис. 16). Эта окружность пересечет стороны данного угла в точках X_1, B, Y_1. Треугольник X_1BY_1 прямоугольный (случай, когда M_1 лежит на одной из сторон угла рассмотрите сами) и M_1 — центр его описанной окружности. Отсюда $M_1 \in [X_1Y_1]$ и $X_1Y_1 = 2r$. Тем самым доказано свойство (б) для фигуры Φ.

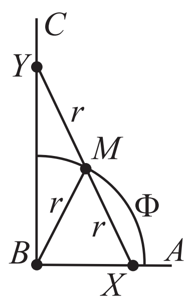

Рис. 15

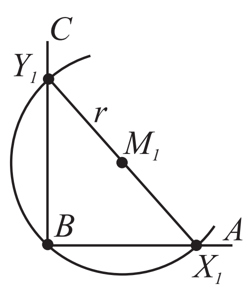

Рис. 16

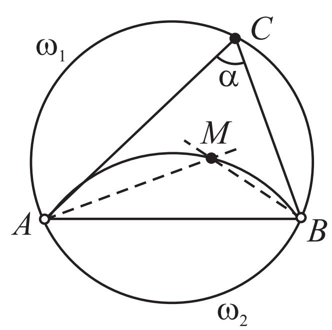

Рис. 17

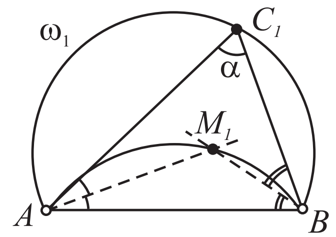

Рис. 18

Пример 7. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найти геометрическое множество точек пересечения биссектрис треугольника ABC.

Решение. Пусть ω — данная окружность с центром в точке O и M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Точки A и B делят ω на две дуги ω_1 и ω_2. Будем читать, что ω_2 меньшая из двух дуг и имеет величину 2α. Начнем со случая, когда $C \in \omega_1$ (рис. 17). Тогда, по свойству вписанного угла $\angle C = \alpha$. Отсюда $\angle AMB = 180^\circ - \angle A/2 - \angle B/2 =$

$= 90^\circ + \angle C/2 = 90^\circ + \alpha/2$. Это означает, по ГМТ6, что точка M лежит на некоторой дуге Φ_1, состоящей из точек рассматриваемой полуплоскости, из которых отрезок AB виден под углом $90^\circ + \alpha/2$. Точки A и B в Φ_1 не входят, поскольку при $C = A$ или $C = B$ треугольник вырождается. Также необходимо проверить, что всякая точка $M_1 \in \Phi_1$ будет точкой пересечения биссектрис одного из рассматриваемых треугольников. Удваивая углы M_1AB и M_1BA (рис. 18) мы получим точку C_1 со свойствами: M_1 является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC_1 и $\angle AC_1B = \alpha$. Учитывая, что события разворачиваются в полуплоскости с границей (AB), в которой находится дуга ω_1, мы получаем $C_1 \in \omega_1$ и Φ_1 удовлетворяет свойству (б). Аналогично рассматривается оставшаяся полуплоскость (случай, когда $C \in \omega_2$). Здесь мы получим вторую дугу, состоящую из точек этой полуплоскости, из которых отрезок AB виден под углом $180^\circ - \alpha/2$.

Группа А

5.1. Найти ГМТ середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

5.2. Найти ГМТ, удаленных от данного отрезка AB на расстояние $r > 0$ (расстояние от точки X до отрезка AB — это наименьшее из расстояний от точки X до всех точек отрезка AB).

5.3. Найти ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под углом 60°.

5.4. На данной прямой или окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под данным углом.

5.5. Найти ГМТ середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

5.6. Найти ГМТ, из которых граница данного квадрата $ABCD$ видна под углом 45°.

5.7. Даны две параллельные прямые a и b и перпендикулярная к ним прямая c. Найти ГМТ плоскости, равноудаленных от этих трех прямых.

5.8. Найти ГМТ плоскости, равноудаленных от трех данных попарно пересекающихся прямых.

5.9. Найти ГМТ плоскости, для которых сумма расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку.

5.10. Найти ГМТ плоскости, для которых разность расстояний от двух данных параллельных прямых равна данному отрезку. Рассмотреть три возможных случая.

5.11. Найти ГМТ, расположенных внутри данного угла $\angle AOB$, которые вдвое дальше отстоят от стороны OA, чем от стороны OB.

5.12. Найти геометрическое место центров окружностей данного радиуса, пересекающих данную окружность под прямым углом.

5.13. Две окружности, касающиеся одна другой, касаются данной прямой в двух данных точках A и B. Найти геометрическое место точек касания всех пар окружностей, удовлетворяющих этому условию.

5.14. Дан остроугольный треугольник. Найти геометрическое место центров прямоугольников, вписанных в этот треугольник так, что основания прямоугольников лежат на основании треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника.

5.15. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найти площадь ГМТ, удаленных от границы этого треугольника на расстояние не больше, чем $a\sqrt{3}/12$.

5.16. Найти ГМТ, сумма расстояний которых от сторон данного равностороннего треугольника равна его высоте.

5.17. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти ГМТ X, для которых выполняется равенство $AX + BX = CX + DX$.

5.18. Два колеса радиусов r_1 и r_2 катаются по прямой l. Найти множество точек пересечения M их общих внутренних касательных.

5.19. Даны две точки A и B. Две окружности касаются прямой AB (одна — в точке A, другая — в точке B) и касаются друг друга в точке M. Найти ГМТ M.

5.20. Точка P перемещается по описанной окружности квадрата $ABCD$. Прямые AP и BD пересекаются в точке Q, а прямая, проходящая через точку Q параллельно AC, пересекает прямую BP в точке X. Найти ГМТ X.

5.21. а) На окружности фиксированы точки A и B, а точки A_1 и B_1 движутся по той же окружности так, что величина дуги A_1B_1 остается постоянной; M — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Найти ГМТ M. б) В окружность вписаны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем треугольник ABC неподвижен, а треугольник $A_1B_1C_1$ вращается. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке не более чем при одном положении треугольника $A_1B_1C_1$.

5.22. Пусть D и E — середины сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC, а точка M лежит на стороне AC. Доказать, что если $MD < AD$, то $ME > EC$.

5.23. Внутри выпуклого многоугольника взяты точки P и Q. Доказать, что существует вершина многоугольника, менее удаленная от Q, чем от P.

5.24. Точки A, B и C таковы, что для любой четвертой точки M либо $MA \leqslant MB$, либо $MA \leqslant MC$. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

5.25. Дан четырехугольник $ABCD$, причем $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Доказать, что $AM < MC$.

5.26. Найти ГМТ X, из которых можно провести касательные к данной дуге AB окружности.

5.27. Пусть O — центр правильного треугольника ABC. Найти ГМТ M, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку M, пересекает либо отрезок AB, либо отрезок CO.

5.28. На плоскости даны два непересекающихся круга. Обязательно ли найдется точка M, лежащая вне этих кругов, удовлетворяющая такому условию: каждая прямая, проходящая через точку M, пересекает хотя бы один из этих кругов? Найти ГМТ M, удовлетворяющих такому условию.

5.29. На сторонах AB и BC треугольника ABC берутся точки D и E. Найти геометрическое место середин отрезков DE.

5.30. Две окружности касаются данной прямой в двух данных точках A и B и касаются друг друга. Пусть C и D — точки касания этих окружностей с другой внешней касательной. Найти геометрическое место середин отрезков CD.

5.31. В треугольнике ABC найти точки X и Y (точки Брокара) так, чтобы углы $\angle XAB$, $\angle XBC$ и $\angle XCA$, точно так же, как и углы $\angle YAC$, $\angle YCB$ и $\angle YBA$, были равны между собой.

Группа Б

5.32. Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Найти ГМТ M, для которых $AM \geqslant OM$, $BM \geqslant OM$, $CM \geqslant OM$ и $DM \geqslant OM$.

5.33. На плоскости даны четыре точки. Найти множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

5.34. Найти ГМТ X, лежащих внутри правильного треугольника ABC и обладающих тем свойством, что $\angle XAB+\angle XBC+\angle XCA = 90^\circ$.

5.35. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника имеет внутри треугольника общую точку с перпендикуляром, восставленным из середины противоположной стороны, то треугольник равнобедренный.

5.36. Дан треугольник ABC. Найти множество всех точек M этого треугольника, для которых выполнено условие $AM \geqslant BM \geqslant CM$. Когда полученное множество есть а) пятиугольник; б) треугольник?

5.37. Дан квадрат $ABCD$. Найти геометрическое место середин сторон квадратов, вписанных в данный квадрат.

5.38. Дан равносторонний треугольник ABC. Найти ГМТ M таких, что треугольники AMB и BCM равнобедренные.

5.39. Найти геометрическое место середин отрезков длины $2/\sqrt{3}$, концы которых лежат на сторонах единичного квадрата.

5.40. На сторонах AB, BC и CA данного треугольника ABC выбираются такие точки P, Q и R, что $(PQ)\|(AC)$ и $(PR)\|(BC)$. Найти геометрическое место середин отрезков QR.

5.41. Дан треугольник ABC. На его сторонах AB, BC и CA выбираются точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Найти ГМТ пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C.

5.42. Дана полуокружность с диаметром AB. Для любой точки X этой полуокружности на луче XA строится точка Y так, что $XY = XB$. Найти ГМТ Y.

5.43. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки X, лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проводится касающийся полуокружности луч и на нем откладывается отрезок XM, равный отрезку XO. Найти ГМТ M, полученных таким образом.

5.44. Пусть A и B — фиксированные точки плоскости. Найти ГМТ C, обладающих следующим свойством: высота h_b треугольника ABC равна b.

5.45. Даны окружность и точка P внутри ее. Через каждую точку Q окружности проведем касательную. Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на прямую PQ, и касательная пересекаются в точке M. Найти ГМТ M.

5.46. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке O. Доказать, что отрезки, соединяющие точку O с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.

5.3. Задачи на построение

К четырем операциям, которые мы можем выполнить с помощью циркуля и линейки (см. первый параграф этой главы) добавим еще несколько элементарных операций, которые мы будем часто использовать при решении задач на построение. Эти операции должны быть хорошо известны каждому школьнику, поэтому напомним только цепочку построений, с помощью которых можно получить ту или иную фигуру. Анализ в силу простоты задач не приводится, доказательство и исследование в этих задачах (далее они называются базовыми задачами, сокращенно БЗ) выполните самостоятельно.

БЗ1. *Построить серединный перпендикуляр к данному отрезку AB.*

Для решения задачи достаточно провести две окружности одинакового радиуса $r = AB$ с центрами в точках A и B соответственно, а затем через две точки пересечения этих окружностей провести прямую.

БЗ2. *Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.*

С центром в точке O строим произвольную окружность ω, пересекающую прямую a. Если A и B — точки пересечения ω и прямой a, то останется только (используя БЗ1) построить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Заметьте, что указанное построение проходит и в случае, когда $O \in a$.

БЗ3. *Через данную точку O провести прямую, параллельную данной прямой a.*

Сначала строим прямую b, проходящую через точку O и перпендикулярную прямой a (используем БЗ2). Точно также через точку O проводим прямую c, перпендикулярную уже прямой b. Прямая c будет искомой.

БЗ4. *Разделить данный отрезок AB на n равных частей ($n \in N$).*

Через произвольную точку C, не лежащую на прямой AB, проведем луч $[AC)$. На этом луче с помощью циркуля от точки A откладываем n равных отрезков (можно, например, откладывать сам отрезок AB), получая попарно различные точки A_1, A_2, $\ldots, A_n$. Останется соединить точки A_n и B и через каждую точку A_i провести прямую параллельно прямой A_nB (по БЗ3). Из теоремы Фалеса следует, что эти прямые разделят отрезок AB на n равных частей.

БЗ5. *Разделить данный угол BAC пополам.*

Начнем со случая, когда $\angle BAC < 180^\circ$. Проведем окружность с центром в точке A и найдем точки пересечения этой окружности со сторонами угла — точки K и L. Не изменяя радиус окружности проводим теперь пару окружностей с центрами в точках K и L. Пересечение этих окружностей — пара точек A и M. Поскольку отрезок AM является диагональю ромба $AKML$, луч $[AM)$ искомый. Очевидно, что в случае $\angle BAC = 180^\circ$ можно использовать БЗ2, если же $\angle BAC > 180^\circ$, надо сначала построить биссектрису дополнительного угла, а затем выбрать противоположный этой биссектрисе луч.

БЗ6. *От луча* $[XY)$ *отложить угол, равный данному углу* BAC.

Снова начнем со случая, когда $\angle BAC < 180^\circ$. С центром в точке A проведем окружность ненулевого радиуса и найдем точки пересечения этой окружности со сторонами угла — точки K и L. Окружность того же радиуса проведем с центром в X и обозначим через M точку пересечения этой окружности ω с лучом XY. Теперь проводим окружность ω_1 с центром в M радиуса KL. Если обозначить через P и Q точки пересечения окружностей ω и ω_1, имеем равенство равнобедренных треугольников AKL, XMP и XMQ. Отсюда $\angle PXM$ и $\angle QXM$ — искомые. Случай $\angle BAC = 180^\circ$ очевиден, а случай $\angle BAC > 180^\circ$ легко сводится к ранее рассмотренному.

БЗ7. *Дан угол величины* α $(0 < \alpha < 180^\circ)$ *и некоторый отрезок* AB $(A \neq B)$. *Построить множество точек, из которых данный отрезок виден под углом* α.

В случае $\alpha = 90^\circ$ с центром в точке P, середине отрезка AB (которую можно найти по БЗ4), строим окружность радиуса $AB/2$. Останется из этой окружности исключить точки A и B (см. ГМТ5). Пусть теперь $\alpha \neq 90^\circ$ и a — серединный перпендикуляр к отрезку AB. На прямой a выберем произвольную точку M, отличную от точки P. От луча $[MP)$ в полуплоскости, в которой находится, например, точка B откладываем угол, равный α (по БЗ6), и получаем луч $[MQ)$ (рис. 19). Через точки B и A проводим прямые, параллельные прямой MQ (по БЗ3), получаем точки O_1 и O_2. Строим две равные окружности радиуса O_1A с центрами в точках O_1 и O_2. Выбираем те дуги этих окружностей, которые соответствуют углу α (на рис. 19 выбраны дуги для $\alpha < 90^\circ$, а на рис. 20 — $\alpha > 90^\circ$).

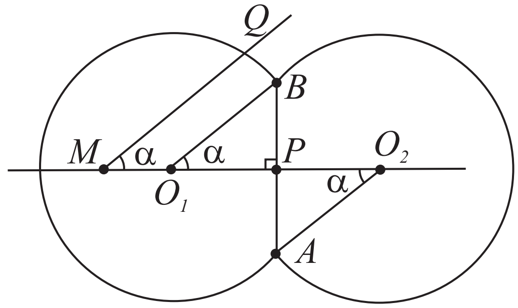

Рис. 19

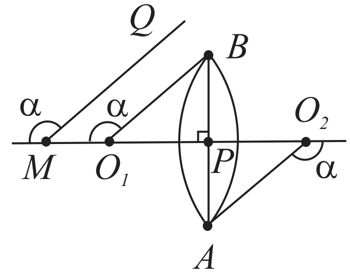

Рис. 20

Рассмотрим несколько примеров. В записи решения мы будем стараться следовать общей схеме из первого параграфа и активно использовать ГМТ1-6 и БЗ1-7. Совет: не спешите сразу читать решения задач, пытайтесь решить задачи самостоятельно.

Пример 1. Построить треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и углу $\alpha = \angle A$.

Решение. Анализ. Предположим, что такой треугольник уже построен. Посмотрим, какими свойствами должна обладать точка A. Во-первых, она удалена от прямой BC на расстояние h_a и, во-вторых, из этой точки отрезок BC виден под углом α (рис. 21). *Построение.* На произвольной прямой откладываем отрезок $BC = a$. Строим ГМТ, удаленных от прямой BC на расстояние h_a. Получаем пару параллельных прямых l и m (несколько раз используем БЗ1). Затем строим ГМТ, из которых отрезок BC виден под углом α (ГМТ6, БЗ7). В пересечении этих двух ГМТ получаем недостающую вершину треугольника. *Доказательство.* Сразу следует из построения. *Исследование.* Можно заметить, что даже если прямые l и m пересекают дуги окружностей в четырех точках, все четыре треугольника будут равны между собой. Поэтому решение единственно, если такое пересечение непусто. Во всех остальных случаях решений нет.

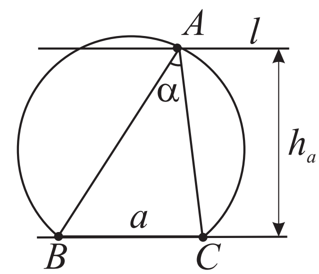

Рис. 21

Замечание. В предыдущем примере при исследовании не было приведено алгебраическое соотношение между числовыми данными, гарантирующее непустоту пересечения двух ГМТ (как это сделано в примере 1 первого параграфа). Договоримся, что в случае, если вывод таких соотношений требует непростых тригонометрических преобразований (в предыдущем примере для острых α надо было получить соотношение $0 < h_a < a(\cos\alpha + 1)/(2\sin\alpha)$), мы будем заменять их геометрическими свойствами типа «если прямые l и m пересекают дуги окружностей в четырех точках».

Пример 2. Построить прямую, проходящую через данную точку A и касающуюся данной окружности $\omega(O, r)$.

Решение. Анализ. Предположим, что такая прямая уже построена, и выделим два свойства, которыми обладает точка B — точка касания прямой и окружности. Во-первых, точка B удалена от точки O на расстояние r; во-вторых, отрезок OA виден из точки B под прямым углом. *Построение.* Строим на отрезке OA как на диаметре окружность и пересекаем ее с данной окружностью ω. Получаем в результате две точки касания. Остается соединить их с точкой A. *Доказательство.* Следует из того факта, что прямая, удаленная от центра окружности $\omega(O, r)$ на расстояние r, является касательной к этой окружности. *Исследование.* Существуют две касательные, если $OA > r$; одна, если $OA = r$; во всех остальных случаях касательную провести нельзя (точка A находится внутри окружности).

Пример 3. Даны прямая a и окружность $\omega(O, R)$, не имеющие общих точек. Постройте окружность данного радиуса r, касающуюся их.

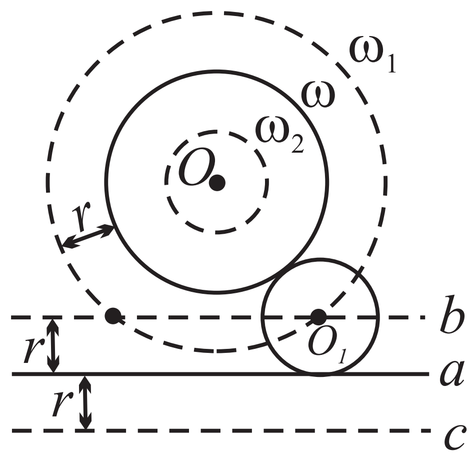

Рис. 22

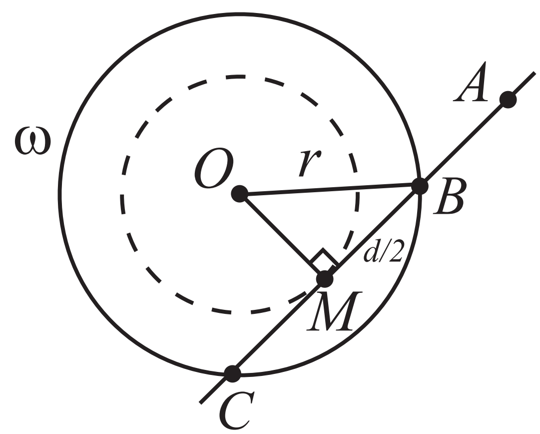

Рис. 23

Решение. *Анализ.* Снова предполагаем, что такая окружность уже построена (рис. 22) и определим свойства, которым обладает точка O_1 — центр искомой окружности. Точка O_1 одновременно удалена на расстояние r и от окружности $\omega(O, R)$, и от прямой a. *Построение.* Проводим пару окружностей $\omega_1 = \omega(O, R+r)$, $\omega_2 = \omega(O, R-r)$ (вторая существует только в случае $R-r > 0$). Строим параллельные прямые b и c, каждая из которых удалена от прямой a на расстояние r. Точки пересечения этих прямых с окружностями дают нам центры искомых окружностей. *Доказательство.* Следует из построения. *Исследование.* Пусть прямая b и точка O расположены по одну сторону от прямой a. Тогда прямая c не может пересечь ни ω_1, ни ω_2, а прямая b не пересекается с ω_2 (по условию ω и a не пересекаются, поэтому точки ω_2 удалены от a на расстояние больше r). Поэтому число решений совпадает с количеством точек пересечения прямой b и окружности ω_1 (на рис. 22 две точки пересечения дают две окружности). Если обозначить через h расстояние от точки O до прямой a, то количество искомых окружностей равно двум, если $h < R + 2r$; одному — если $h = R + 2r$; нулю — во всех остальных случаях.

Пример 4. Даны точка A и окружность $\omega(O, r)$. Провести через точку A прямую так, чтобы хорда, высекаемая данной окружностью на этой прямой, имела данную длину d.

Решение. Анализ. Предположим, что такая прямая уже построена и она высекает на окружности $\omega(O, r)$ хорду BC длины d. Обозначим через M середину хорды BC (рис. 23). Тогда в прямоугольном треугольнике OBM нам известна гипотенуза и катет (он равен $d/2$). Этот прямоугольный треугольник мы можем построить, т.е. длина отрезка OM определяется, а искомая прямая оказывается касательной из точки A к окружности $\omega(O, OM)$. *Построение.* Строим прямоугольный треугольник по гипотенузе r и катету $d/2$ и находим длину второго катета. Теперь к окружности с центром в точке O и только что найденным радиусом проводим касательную (см. пример 2). *Доказательство.* Следует из построения. *Исследование.* Ясно, что при $d > 2r$ решений нет. В остальных случаях число решений совпадает с количеством касательных из точки A к окружности $\omega(O, \sqrt{r^2 - d^2/4})$ (см. исследование в примере 2).

Пример 5. Постройте треугольник по медиане m, биссектрисе l и высоте h, проведенными из одной вершины.

Решение. Пусть $AM = m$, $AL = l$, $AH = h$. Сразу отметим, что в случае равенства каких-либо двух из данных отрезков, мы сразу получаем $AB = AC$, $m = l = h$, и бесконечное множество различных треугольников удовлетворяют условию задачи. Поэтому далее считаем, что $BA \neq AC$, для определенности, $BA < AC$. Тогда по основному свойству биссектрисы $BL < LC$ и поэтому L расположена между точками H и M (здесь мы еще используем, что из $BA < AC$ следует, что $\angle B > \angle C$, а из последнего неравенства следует $\angle BAH < \angle HAC$). Таким образом, при $BA \neq AC$ биссектриса AL всегда лежит между высотой AH и медианой AM и поэтому $h < l < m$.

Анализ. Считаем треугольник ABC уже построенным и рассмотрим точку P — середину дуги BC описанной около $\triangle ABC$ окружности (рис. 24). Тогда P определяется двумя условиями: $P \in [AL)$ и P лежит на перпендикуляре к прямой HM, проведенному из точки M. Треугольники AHL и AHM строятся без труда (в каждом из них нам известен катет и гипотенуза). После определения точки P можно найти точку O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AP и на прямой PM. Точки B и C определяются как точки пересечения прямой MH и окружности $\omega(O, OA)$.

Построение. На произвольной прямой a отмечаем точку H, строим перпендикуляр к a в точке H и отмечаем на нем точку A так, что $HA = h$. На прямой a по одну сторону от точки H находим такие точки L и M, что $AL = l$ и $AM = m$. Затем через M проводим перпендикуляр к прямой a и пересекаем его с прямой AL. Точка P найдена. Затем последовательно находим точки O, B и C, как это описано выше. *Доказательство.* Очевидно, что отрезки AH и AM будут соответственно высотой и медианой. Отрезок AL будет являться биссектрисой построенного треугольника, поскольку продолжение этого отрезка пересечет дугу BC в ее середине. *Исследование.* Как уже отмечалось, при $m = l = h$ существует бесконечное множество различных треугольников, удовлетворяющих условию задачи. При $h < l < m$ решение единственно, поскольку из анализа следует однозначность в определении точек B и C. Во всех остальных случаях решения не существует.

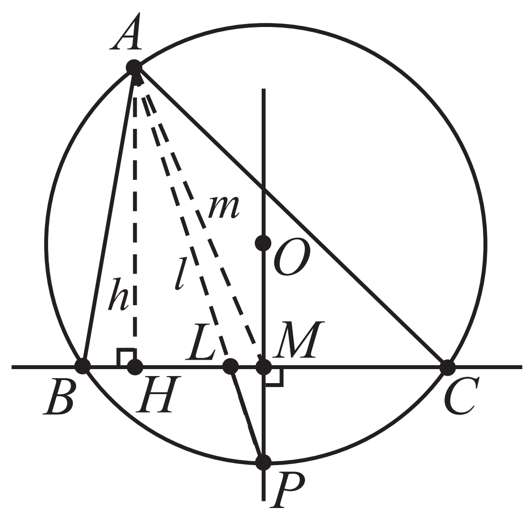

Рис. 24

Группа А

5.47. Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

5.48. Построить трапецию по основаниям и боковым сторонам.

5.49. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.

5.50. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

5.51. Построить параллелограмм по данным стороне, углу и диагонали.

5.52. Построить треугольник, зная расстояния от центра вписанной окружности до концов основания и основание.

5.53. Даны окружность и две точки A и B внутри ее. Вписать в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

5.54. Продолжения сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ пересекают некоторую прямую в точках M и N, а продолжения сторон AD и BC пересекают ту же прямую в точках P и Q. Построить прямоугольник $ABCD$, если даны точки M, N, P, Q и длина a стороны AB.

В задачах 5.55–5.62 требуется построить треугольник по указанным в условии элементам.

5.55. c, m_a и m_b. **5.56.** a, b и h_a.

5.57. $\angle A$, h_b и h_c. **5.58.** a, h_b и m_b.

5.59. m_a, h_a и h_b. **5.60.** a, b и m_c.

5.61. a, h_a и R. **5.62.** a, m_c и $\angle A$.

5.63. Построить равнобедренный треугольник, если заданы основания его биссектрис.

5.64. Построить треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1, C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

5.65. Внутри угла даны две точки A и B. Построить окружность, проходящую через эти точки и высекающую на сторонах угла равные отрезки.

5.66. Даны три точки A, B и C. Построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

5.67. а) На параллельных прямых a и b даны точки A и B. Провести через данную точку C прямую l, пересекающую прямые a и b в таких точках A_1 и B_1, что $AA_1 = BB_1$. б) Провести через точку C прямую, равноудаленную от данных точек A и B.

5.68. С помощью циркуля и линейки разделить угол 19° на 19 равных частей.

5.69. Построить прямую, касающуюся двух данных окружностей (разобрать все возможные случаи).

5.70. Построить треугольник, если известны отрезки, на которые высота делит основание, и медиана, проведенная к боковой стороне.

5.71. Построить параллелограмм $ABCD$ по вершине A и серединам сторон BC и CD.

5.72. Построить четырехугольник по двум смежным сторонам, углу между ними, по данной диагонали, выходящей из вершины данного угла и углу между диагоналями.

5.73. Построить четырехугольник, зная три стороны и радиус описанной окружности.

5.74. Построить ромб по данным высоте и диагонали.

5.75. Построить ромб так, чтобы две противоположные его вершины были в двух данных точках, а третья на данной окружности.

5.76. Построить параллелограмм по двум данным сторонам и высоте.

5.77. Найти точку, из которой две данные окружности видны под данными углами.

Группа Б

5.78. Дан четырехугольник $ABCD$. Вписать в него параллелограмм с заданными направлениями сторон.

В задачах 5.79–5.84 требуется построить треугольник по указанным в условии элементам.

5.79. m_a, m_b и m_c. **5.80.** m_a, h_b и h_c.

5.81. m_a, h_a и $\angle A$. **5.82.** h_a, p и $\angle A$.

5.83. a, r и $\angle A$. **5.84.** a, b и $\angle A = 3\angle B$.

5.85. Построить треугольник ABC, если дана прямая l, на которой лежит сторона AB, и точки A_1, B_1 — основания высот, опущенных на стороны BC и AC.

5.86. Построить треугольник ABC по основаниям его высот.

5.87. а) Построить треугольник ABC, зная три точки A_0, B_0, C_0, в которых биссектрисы его углов пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные). б) Построить треугольник ABC, зная три точки A_0, B_0, C_0, в которых высоты треугольника пересекают описанную окружность (оба треугольника остроугольные).

5.88. Построить треугольник ABC, зная три точки A_0, B_0, C_0, симметричные центру O описанной окружности этого треугольника относительно сторон BC, CA, AB.

5.89. Построить треугольник ABC, зная три точки A_0, B_0, C_0, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно сторон BC, CA, AB (оба треугольника остроугольные).

5.90. Построить треугольник ABC, зная три точки P, Q, R, в которых высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины C, пересекают описанную окружность.

5.91. Построить треугольник ABC по центру описанной окружности O, точке пересечения медиан M и основанию H высоты CH.

5.92. Построить треугольник ABC по центрам вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей.

5.93. Построить точки X и Y на сторонах AB и BC треугольника ABC так, что $AX = BY$ и $(XY)\|(AC)$.

5.94. Вписать в данный треугольник ABC прямоугольник $PQRS$ (вершины R и Q лежат на сторонах AB и BC, P и S — на стороне AC) так, чтобы его диагональ имела данную длину.

5.95. Провести через данную точку M прямую так, чтобы она отсекала от данного угла с вершиной A треугольник ABC данного периметра $2p$.

5.96. Построить квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

5.97. Построить ромб, две стороны которого лежат на двух данных параллельных прямых, а две другие проходят через две данные точки.

5.98. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам и углу между (AB) и (CD).

5.99. Через вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести прямую, делящую его на две равновеликие части.

5.100. Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Построить этот четырехугольник.

5.101. Даны три вершины вписанного и описанного четырехугольника. Построить его четвертую вершину.

5.102. Построить выпуклый четырехугольник, если даны длины всех его сторон и одной средней линии.

5.103. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы построенные окружности были взаимно ортогональны.

5.104. а) Даны две точки A, B и прямая l. Построить окружность, проходящую через точки A, B и касающуюся прямой l. б) Даны две точки A и B и окружность S. Построить окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся окружности S.

5.105. Построить окружность, равноудаленную от четырех данных точек.

5.106. Доказать, что угол величиной n°, где n — целое число, не делящееся на 3, можно разделить на n равных частей с помощью циркуля и линейки.

5.107. Построить трапецию, боковые стороны которой лежат на данных прямых, диагонали пересекаются в данной точке, а одно из оснований имеет данную длину.

5.108. Даны две окружности. Повести прямую так, чтобы она касалась одной окружности, а вторая окружность высекала на ней хорду данной длины.

5.109. Даны две концентрические окружности и еще окружность. Провести окружность, касательную ко всем трем окружностям.

5.110. Провести через вершину C треугольника ABC прямую l так, чтобы площади треугольников AA_1C и BB_1C, где A_1 и B_1 — проекции точек A и B на прямую l, были равны.

5.111. Построить треугольник ABC по сторонам AB и AC, зная, что биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке.

5.112. Даны точки A_1, B_1 и C_1, делящие стороны BC, CA и AB треугольника ABC в отношении $1:2$. Восстановить по ним треугольник ABC.

5.113. В данной окружности провести хорду, которая была бы видна из данных трех точек под равными углами.

5.114. Трапецию разделить на 5 равновеликих частей прямыми, параллельными данной прямой, которая пересекается с основаниями трапеции.

5.4. Алгебраический подход

В этом параграфе речь пойдет о том, как алгебраические методы помогают в решении задач на построение и в описании различных ГМТ.

Предварительные алгебраические вычисления. Предположим, что в задаче по числовым значениям a_1, a_2, $\ldots$, a_n (которые обозначают, например, длины отрезков или величины углов) требуют построить некоторую фигуру. Ключевым в этом построении может оказаться неизвестная сторона длины x. Используя известные формулы и геометрические теоремы, зачастую можно найти алгебраическое выражение x через a_1, a_2, $\ldots$, a_n, т.е. $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Возникает вопрос: какие алгебраические выражения $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ могут быть построены с помощью циркуля и линейки по известным a_1, a_2, $\ldots$, a_n? Об этом пойдет речь в следующих задачах (назовем их *задачами алгебраического метода* — сокращенно ЗАМ).

ЗАМ1. *По данному отрезку длины a построить отрезок длины $\frac{m}{n}\cdot a$, где $m, n \in N$.*

Сначала увеличиваем данный отрезок в m раз, а затем делим полученный отрезок на n равных частей (по БЗ4).

ЗАМ2. *По данным трем отрезкам, длины которых равны* a, b *и* c, *построить отрезок длины* $\frac{ab}{c}$.

Для построения подойдет произвольный острый угол BAC ненулевой величины (рис. 25). На одной стороне угла от точки A последовательно откладываем отрезки AK и KL длины c и b соответственно, а на другой стороне угла откладываем отрезок AM длины a. Проведем через точку L прямую параллельно (KM) и в пересечении с лучом $[AM)$ получим точку N. Отрезок MN имеет искомую длину. Действительно, обозначив его длину через x, по теореме Фалеса имеем $x/a = b/c$ или $x = \frac{ab}{c}$.

ЗАМ3. *По двум данным отрезкам, длины которых равны* a *и* b, *построить отрезок длины* $\sqrt{ab}$ *(среднее геометрическое* a *и* b*).*

На произвольной прямой l от произвольной точки $H \in l$ в разные стороны от H откладываем отрезки HA и HB, длины которых равны a и b соответственно (рис. 26). На отрезке AB как на диаметре строим окружность ω. Пусть C — одна из точек пересечения этой окружности с перпендикуляром, проведенном из точки H к прямой l. Тогда отрезок CH искомой длины. Действительно, $\angle C = 90^\circ$ и по свойству высоты прямоугольного треугольника $CH^2 = ab$ или $CH = \sqrt{ab}$.

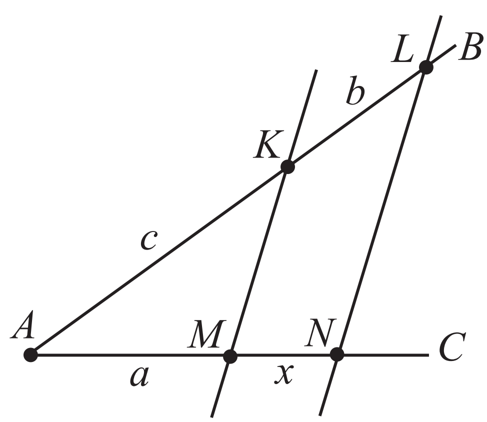

Рис. 25

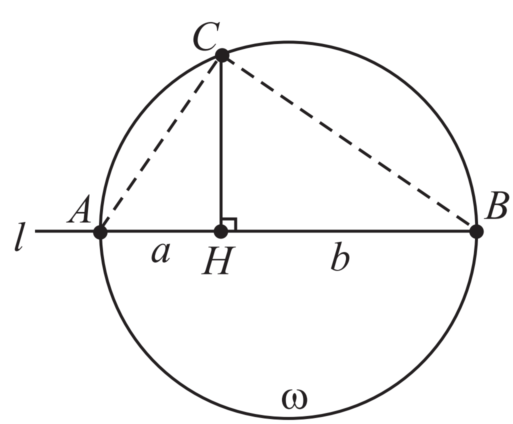

Рис. 26

ЗАМ4. *По двум данным отрезкам, длины которых равны* x *и* y, *построить отрезок длины* $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Достаточно построить прямоугольный треугольник с катетами длины x и y, тогда гипотенуза будет иметь искомую длину.

ЗАМ5. *По отрезку длины* a *построить отрезок длины* $a\sqrt{n}$, *где* $n \in N$, $n \geqslant 2$.

Выбрав в предыдущей задаче $x = y = a$, получаем отрезок длины $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$. Если же $x = a$ и $y = a\sqrt{2}$, то по ЗАМ4 получаем отрезок длины $a\sqrt{3}$. В общем случае применение ЗАМ4 к отрезкам $x = a$ и $y = a\sqrt{n}$ позволяет получить отрезок длины $a\sqrt{n+1}$.

ЗАМ6. *По отрезку длины a и острому углу α построить отрезки длины $a\sin\alpha$, $a\cos\alpha$, $a/\sin\alpha$ и $a/\cos\alpha$.*

Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой длины a и острым углом α, тогда его катеты имеют длины $a\sin\alpha$ и $a\cos\alpha$. Для нахождения отрезка длины $a/\sin\alpha$ надо построить прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом величины α (ГМТ6, БЗ7), тогда его гипотенуза будет иметь искомую длину. Построение отрезка длины $a/\cos\alpha$ очевидно.

Теперь рассмотрим несколько более сложных задач.

Пример 1. Построить правильный десятиугольник, зная его сторону.

Решение. *Анализ.* Предположим, что такой десятиугольник $A_1 \ldots A_{10}$ уже построен и O — центр описанной около него окружности. Тогда величина угла A_1OA_2 равна 36°. Поэтому задача сводится к построению равнобедренного треугольника с известным основанием A_1A_2 и величиной угла при вершине (сам угол пока не дан, нам еще предстоит его построить). Величина угла при основании такого треугольника равна 72° и поэтому биссектриса этого угла делит $\triangle A_1OA_2$ на два равнобедренных треугольника. Из свойства биссектрисы делить противоположную сторону пропорционально прилежащим ей сторонам можно найти выражение для длины боковой стороны через a: $A_1O = a \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. *Построение.* По заданной стороне длины a находим отрезки длины $a/2$ и $a\sqrt{5}/2$ (по ЗАМ1 и ЗАМ5). Сумма двух найденных отрезков даст радиус описанной окружности около искомого десятиугольника, что делает дальнейшее построение очевидным. *Доказательство.* Следует из анализа. *Исследование.* Задача, очевидно, всегда имеет единственное решение.

Разобранный пример имеет несколько полезных приложений.

Пример 2. Построить правильный пятиугольник, зная его сторону.

Решение. Строим произвольный десятиугольник, затем, соединяя его вершины через одну, получаем правильный пятиугольник, подобный искомому. Зная теперь угол при вершине правильного пятиугольника и его сторону, получаем искомую фигуру.

Пример 3. Построить угол величины 3°.

Решение. Напомним, что у нас уже есть угол, величина которого равна 36°, а значит и угол величины 18°. Проводя биссектрисы в равностороннем треугольнике, можно получить угол величины 15°. Разность углов 18° и 15° дает нам угол искомой величины.

Пример 4. Даны прямая a и не пересекающий ее отрезок AB. Построить окружность, касающуюся прямой a и проходящей через точки A и B.

Решение. Анализ. Для решения задачи достаточно найти точку C — точку касания искомой окружности с данной прямой. Рассмотрим два случая: $(AB)\|a$ и $(AB)\cap a\neq\varnothing$. В случае $(AB)\|a$ точка C находится без труда — это пересечение серединного перпендикуляра к отрезку AB с прямой a. В случае непараллельности прямых AB и a обозначим через L точку их пересечения (рис. 27). Из теоремы о касательной и секущей получаем $LC^2 = LA\cdot LB$ или $LC=\sqrt{LA\cdot LB}$.

Построение. Если прямые AB и a параллельны, построение очевидно. Во всех остальных случаях сначала находим точку L — точку пересечения этих прямых. Затем находим отрезок длины $\sqrt{LA\cdot LB}$ (по ЗАМ3) и откладываем его от точки L в обе стороны на прямой a. Получившиеся точки касания дают нам две искомых окружности. *Доказательство.* Остановимся только на случае, когда $(AB)\cap a\neq\varnothing$. Нам необходимо доказать, что точка C будет единственной токой пересечения прямой и построенной окружности. Предположим, что в этом пересечении есть еще одна точка D, отличная от точки C. Тогда $LC\cdot LD = LA\cdot LB = LC^2$. Откуда $LD = LC$, что противоречит предположению (так как обе точки — B и C — должны лежать на одном луче с вершиной в точке L). *Исследование.* Решение единственно в случае $(AB)\|a$. Во всех остальных случаях существует два различных решения.

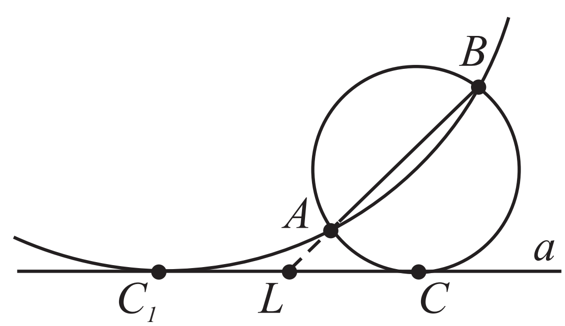

Рис. 27

Пример 5. Построить вписанный четырехугольник, зная все его стороны (задача Брахмагупты).

Решение. *Анализ.* Пусть длины сторон AB, BC, CD, DA искомого четырехугольника соответственно равны a, b, c и d (известные нам числа). Ясно, что для построения достаточно найти хотя бы одну диагональ четырехугольника $ABCD$. Обозначим через x, y и R соответственно длины диагоналей BD, AC и радиус описанной около $ABCD$ окружности. Из теоремы Птолемея получаем первое соотношение:

$$xy = ac + bd. \tag{1}$$

Каждая диагональ разбивает четырехугольник на пару треугольников, поэтому, используя известную формулу площади треугольника через радиус описанной окружности и через его стороны, легко можно придти к

$$S_{ABCD} = \frac{adx}{4R} + \frac{bcx}{4R} = \frac{aby}{4R} + \frac{cdy}{4R},$$

откуда получаем второе соотношение

$$\frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем систему из двух уравнений

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \quad \text{и} \quad y = \frac{ac+bd}{x}. \tag{3}$$

Преобразуем первое из уравнений системы (3) к виду

$$x = \sqrt{\frac{\frac{ac+bd}{a}\cdot\frac{ab+cd}{a}}{\frac{ad+bc}{a}}\cdot a} = \sqrt{\frac{k\cdot l}{m}\cdot a} = \sqrt{p\cdot a}, \quad \text{где}$$

$$p = \frac{k\cdot l}{m}, \quad k = \frac{ac+bd}{a}, \quad l = \frac{ab+cd}{a}, \quad m = \frac{ad+bc}{a}.$$

Построение. По известным отрезкам, используя ЗАМ2, последовательно находим отрезки длины k, l, m, p (обозначения см. выше). Затем (по ЗАМ3) находим диагональ длины x. Дальнейшее построение очевидно. *Доказательство.* Как это видно из системы (3) условие вписанности четырехугольника однозначно по сторонам позволяет найти длины диагоналей. Это означает, что если вписанный четырехугольник с известными сторонами существует, то он единственен и построенный нами четырехугольник является искомым. Осталось только доказать, что если существует четырехугольник со сторонами a, b, c и d, то обязательно существует и вписанный четырехугольник с такими же длинами сторон. Это следует из простого замечания: при достаточном увеличении диагонали BD сумма $\angle A + \angle C$ будет больше 180°, а при достаточном уменьшении диагонали BD сумма $\angle A + \angle C$ будет меньше 180°. Поэтому при некотором значении длины диагонали BD эта сумма будет равна 180° (здесь мы используем непрерывность изменения рассматриваемой суммы) и четырехугольник будет вписанным. *Исследование.* Почти полностью проведено в доказательстве. Остается только отметить, что четырехугольник со сторонами a, b, c и d существует тогда и только тогда, когда его наибольшая сторона меньше суммы остальных сторон (аналог хорошо известного неравенства для треугольника).

Координатный метод. Напомним, в чем суть координатного метода. На плоскости вводится декартова система координат, при этом каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара ее координат — (x, y) (точку с ее координатами обычно записывают в виде $M(x, y)$). Появляется возможность некоторые фигуры на плоскости описать с помощью алгебраических уравнений. Напомним, что уравнение $f(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* фигуры Φ, если

$$M(x, y) \in \Phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ координаты точки } M \text{ удовлетворяют уравнению } f(x, y) = 0,$$

или, что то же самое, $\Phi = \{M(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Хорошо известны координатные уравнения прямых и окружностей. Любая прямая на плоскости имеет своим координатным уравнением уравнение вида $y = k \cdot x + b$, если она не параллельна оси Oy, и $x = x_0$ — в противном случае. Верно и обратное, любое уравнение вида $y = k \cdot x + b$ или $x = x_0$ является координатным уравнением некоторой прямой. Координатным уравнением окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ является уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Верно также, что любое такое уравнение задает на плоскости окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$.

Рассмотрим несколько задач, в которых поиск ГМТ осуществляется с использованием координатного метода.

Пример 6. На плоскости даны точки A и B ($A \neq B$). Найти ГМТ M, для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна и рана некоторому числу d^2 (где d — длина некоторого известного отрезка).

Решение. Введем систему координат так, что точки A и B лежат на оси Ox, и пусть их первые координаты равны соответственно a и b (можно считать, что $b > a$). Точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$d^2 = (x-a)^2 + y^2 - (x-b)^2 - y^2 = 2(b-a)x - b^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2(b-a)}.$$

Последнее уравнение задает перпендикулярную к (AB) прямую вида $x = x_0$, причем отрезок длины x_0 может быть построен с помощью ЗАМ2.

Пример 7. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, причем ни одна из них не расположена внутри другой. Найти ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой (радикальная ось двух окружностей).

Решение. Выберем систему координат так, что ось Ox проходит через центры данных окружностей и начало координат совпадает с центром одной из них. Пусть, например, $\omega_1 = \omega(O, r)$, $\omega_2 = \omega(O_1, R)$, $O_1(x_1, 0)$ и $x_1 > 0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$. Квадрат касательной из точки M к первой окружности равен $MO^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$. Квадрат касательной из точки M ко второй окружности равен $MO_1^2 - R^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2$. Таким образом, точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 - r^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1^2 + r^2 - R^2}{2x_1}.$$

Последнее уравнение задает перпендикулярную к (OO_1) прямую вида $x = x_0$, причем причем отрезок длины x_0 может быть построен с помощью ЗАМ2 (заметьте, что из условий задачи следует, что $x_0 > 0$).

Добавим радикальную ось двух окружностей к шести основным ГМТ (ГМТ1–ГМТ6), рассмотренных во втором параграфе.

ГМТ7. *Пусть даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, причем ни одна из них не расположена внутри другой. Тогда ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой, является прямой, перпендикулярной линии центров данных окружностей.*

Замечание. Предыдущую задачу можно сформулировать для любых двух произвольно расположенных, но неконцентрических (т.е. центры которых не совпадают) окружностей ω_1 и ω_2. Прямая, уравнение которой было выведено в предыдущем примере, называется *радикальной осью* этих окружностей. Если обозначить через $[AB]$ максимальный по длине отрезок, по которому окружности ω_1 и ω_2 пересекают их радикальную ось, то рассуждения предыдущего примера дают нам, что ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой является радикальная ось, из которой выброшен отрезок AB (точки искомого ГМТ должны быть расположены вне окружностей ω_1 и ω_2, этим и объясняется исключение отрезка AB).

Пример 8. На плоскости выбраны точки A и B ($A \neq B$) и задано число $k > 0$ ($k \neq 1$). Найти ГМТ M, для которых $AM : MB = k$ (окружность Аполлония[1]).

Решение. Введем систему координат так, что $B = O$, $A \in Ox$, причем $A(a, 0)$ и $a > 0$. Точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$\frac{AM^2}{MB^2} = k^2 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = k^2 \Leftrightarrow (1-k^2)x^2 - 2ax + a^2 + (1-k^2)y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2a}{1-k^2} \cdot x + \frac{a^2}{(1-k^2)^2} + y^2 = \frac{a^2}{(1-k^2)^2} - \frac{a^2}{1-k^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

[1]Аполлоний(2-я половина 3 в.– 1-я половина 2 в. до н.э.). Родился в Перге (Малая Азия). Главный его труд “Конические сечения” сохранился не полностью (первые четыре книги) в оригинале, частично (три последующие книги) в арабском переводе, восьмая книга утеряна. Исследуя свойства конических сечений, их диаметров, фокусов, нормалей и касательных, пользовался проективно-геометрическими методами.

Последнее уравнение задает на плоскости окружность с центром в точке $\left(\dfrac{a}{1-k^2}, 0\right)$ радиуса $\dfrac{ak}{|1-k^2|}$.

ГМТ8. *Пусть на плоскости выбраны точки A и B ($A \neq B$) и задано число $k > 0$ ($k \neq 1$). Тогда ГМТ M, для которых $AM : MB = k$ является окружностью, центр которой лежит на прямой (AB).*

Группа А

5.115. По отрезку длины a и острому углу α построить отрезки длины $a \operatorname{tg} \alpha$, $a \operatorname{ctg} \alpha$.

В задачах 5.116–5.146 по известным отрезкам длины a, b, c и d и натуральным числам m и n построить отрезок длины (или угол величины) x (все разности в этих задачах считать положительными).

5.116. $x = \frac{(a+d)c}{a}$.

5.117. $y = \frac{a(c-d)}{b}$.

5.118. $x = a^2/d$.

5.119. $x = (a+c)^2/a$.

5.120. $x = \sqrt{\dfrac{a^2 d}{b}}$.

5.121. $x = a\sqrt{\dfrac{d}{c}}$.

5.122. $x = a\sqrt{3}$.

5.123. $x = a\sqrt{5}$.

5.124. $x = a/\sqrt{3}$.

5.125. $x = a/\sqrt{m}$.

5.126. $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$.

5.127. $x = \sqrt{ad - c^2}$.

5.128. $x = \sqrt{ma^2 - nb^2}$.

5.129. $x = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

5.130. $x = \dfrac{ad^2}{c\sqrt{4a^2 - 9d^2}}$.

5.131. $x = \sqrt[4]{abcd}$.

5.132. $\operatorname{tg} x = \dfrac{a}{b}$.

5.133. $\sin x = a^2/b^2$.

5.134. $\cos x = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

5.135. $\operatorname{tg} x = \dfrac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^4 - b^4}}$.

5.136. $\cos x = \dfrac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4}$.

5.137. $\operatorname{tg} x = \dfrac{a^3 - cb^2}{\sqrt{a^3 + cb^2}}$.

5.138. $\sin x = 1 : \left(2 - \dfrac{b}{a}\right)$.

5.139. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

5.140. Построить корни уравнения $x^2 \pm ax + b^2 = 0$, полагая $a \geqslant 2b$.

5.141. Построить корни уравнения $x^2 \pm ax - b^2 = 0$.

5.142. Построить корни уравнения $x^4 - 4c^2x^2 - c^4 = 0$.

5.143. Построить корни уравнения $x^4 - 2adx^2 + 2a^2d^2 = 0$.

5.144. Построить угол величины x, если $a\sin^2 x + 2a\sin x - b = 0$.

5.145. Построить угол величины x, если $b\cos^2 x - 2a\cos x + b = 0$.

5.146. Построить угол величины x, если $a\operatorname{tg}^2 x - 2b\operatorname{tg} x + a = 0$.

5.147. Вписать в данную окружность треугольник, зная середины дуг, стягиваемых сторонами.

5.148. Провести окружность через две точки A и B так, чтобы касательная к ней из точки C равнялась данной длине a.

5.149. На горизонтальном отрезке AB вправо от точки B найти точку M, для которой выполнено равенство $BM^2 = AM \cdot AB$.

5.150. Разделить пополам периметр и площадь данного треугольника ABC отрезком XY, лежащим внутри угла B.

5.151. Построить три отрезка или три угла, зная их сумму s и разности a и b между большим и каждым из двух меньших.

5.152. Построить два отрезка, зная их произведение k^2 и отношение $2:3$.

5.153. Построить прямоугольный треугольник по данной сумме (или разности) его катетов s и высоте h, опущенной из прямого угла.

5.154. Данный отрезок разделить на две части так, чтобы одна из них была средней пропорциональной между другой частью и другим данным отрезком.

5.155. Через вершину A данного квадрата $ABCD$ провести прямую так, чтобы ее отрезок между CD и продолжением BC был данной длины.

5.156. Через точки A и B провести окружность, отсекающую от данной прямой хорду данной длины.

5.157. В данную окружность вписать многоугольник, зная середины дуг, стягивающих его стороны.

5.158. На диаметре AB данной окружности выбрана точка C. Параллельно (AB) провести хорду XY так, чтобы $\angle XCY$ был прямым.

5.159. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник, зная медиану, выходящую из конца основания.

5.160. Начертить r, зная S и $2p$.

5.161. Начертить R, зная h_a и bc.

В задачах 5.162–5.165 требуется построить треугольник, зная:

5.162. R, h_a и $b+c$. **5.163.** R, $S=k^2$ и $ac=m^2$.

5.164. R, h_a и $b:c$. **5.165.** b, h_b, если известно, что $a=h_a$.

5.166. Построить радикальную ось к двум окружностям, центры которых находятся в точках с координатами $(0,0)$ и $(5,5)$, а радиусы соответственно равны 1 и 2.

5.167. На данной окружности найти точку, касательные из которой к двум другим окружностям равны между собой.

5.168. Через точку A провести окружность, делящую две данные окружности пополам.

5.169. Через точку A провести окружность, пересекающую две данные окружности под прямыми углами.

5.170. Провести окружность, пересекающую три данные окружности под прямыми углами.

5.171. Провести окружность, делящую пополам три данные окружности.

5.172. Провести прямую, делящую пополам касательную к данным окружностям, не проводя самой касательной.

5.173. Описать окружность, встречающую две данные окружности под прямыми углами так, чтобы касательная к ней из данной точки имела данную длину.

5.174. Через данную точку M радиусом R провести окружность, пересекающую данную окружность по хорде данной длины.

5.175. Данным радиусом провести окружность, касающуюся одной данной окружности и делящую пополам другую данную окружность.

5.176. В данной окружности провести хорду данной длины так, чтобы отношение расстояний от ее концов до данной точки A было данное.

5.177. Даны две концентрические окружности. Через данную точку провести окружность, встречающую данные окружности по хордам данной величины.

5.178. На координатной плоскости даны точки $A(0,0)$ и $B(0,3)$. Построить ГМТ X, для которых $XA : XB = 2$.

5.179. Построить треугольник ABC по сторонам a, b и биссектрисе l_c.

Группа Б

5.180. На стороне AB треугольника ABC дана точка P. Провести через точку P прямую (отличную от AB), пересекающую лучи CA и CB в таких точках M и N, что $AM = BN$.

5.181. Известны отрезки длины a, m, n и k. Построить корни системы уравнений: $x^2 + y^2 = k^2$ и $(x - a) : y = m : n$.

5.182. Построить отрезок, длина которого равна расстоянию между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, зная R и r.

5.183. На бильярде, имеющем форму круга, лежит шар в точке A. Требуется ударить его так, чтобы он прошел через прежнее свое место, отразившись от стенок два, три, четыре ... раза.

5.184. Из точке A провести к данной окружности секущую так, чтобы она разделилась окружностью на части, разность которых равна данному отрезку.

5.185. В данную окружность вписать пять равных квадратов; у первого центр общий с окружностью, а две вершины каждого из остальных квадратов лежат на окружности и две совпадают с вершинами первого квадрата.

5.186. В данный равнобедренный треугольник ABC вписать треугольник DEF так, чтобы $(DE)\|(AC)$ и площадь $\triangle DEF$ составила пятую часть площади $\triangle ABC$.

5.187. Внутри треугольника ABC дана точка M. Провести через нее прямую, которая делит площадь данного треугольника пополам.

5.188. Через данную точку P провести окружность, касательную к сторонам данного угла.

5.189. Из высот данного равностороннего треугольника ABC составлен $\triangle A_1B_1C_1$, из высот которого составлен $\triangle A_2B_2C_2$ и т.д. до бесконечности. Начертить равносторонний треугольник, равновеликий сумме всех полученных треугольников, считая в том числе $\triangle ABC$.

5.190. Даны две внешне касающиеся окружности и касательная к ним окружность, так что все три центра лежат на одной прямой. Провести окружность, касательную ко всем трем окружностям (ее центр должен быть вне линии центров данных окружностей).

5.191. Построить треугольник, зная a, m_a и $b \pm c$.

5.192. Построить окружность, касательные к которой, проведенные из трех данных точек A, B и C, имели бы длины a, b и c соответственно.

5.193. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой и данной окружности.

5.194. Даны три луча с общим началом и точка M. Провести через M прямую, пересекающую лучи в точках A, B и C так, что $AM = BC$.

5.195. Построить треугольник по a, h_a и b/c.

5.196. Построить треугольник ABC, если известны длина биссектрисы CD и длины отрезков AD и BD, на которые она делит сторону AB.

5.197. На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Построить точку M, из которой отрезки AB, BC, CD видны под равными углами.

5.198. На плоскости даны два отрезка AB и A_0B_0. Построить точку O так, чтобы треугольники AOB и A_0OB. были подобны (одинаковые буквы обозначают соответственные вершины подобных треугольников).

5.199. Точки A и B лежат на диаметре данной окружности. Провести через них две равные хорды с общим концом.

5.200. Прямая CB касается данной окружности в точке B; на этой прямой найти точку, соединив которую с концом A диаметра AB, получим секущую, внешний отрезок которой равен данной длине.

5.201. В данный сектор вписать прямоугольник данной площади.

5.202. В данный сектор вписать прямоугольник, имеющий данную диагональ.

5.5. Построения одной линейкой

Этот параграф посвящен построениям одной линейкой. Без дополнительно нарисованных линий на плоскости (например, двух параллельных прямых) одной линейкой мало что можно сделать. Например, с помощью только одной линейки без дополнительных линий нельзя даже разделить пополам произвольный отрезок. Но, зато, если на плоскости нарисована хотя бы одна окружность и отмечен ее центр, все дальнейшие построения можно выполнять только с помощью одной линейки. В 1833 году швейцарский математик Якоб Штейнер доказал следующую теорему: *любая задача на построение, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена только одной линейкой, если в плоскости чертежа задана хотя бы одна окружность и отмечен ее центр (при этом задача на построение какой-либо окружности считается решенной, если найден ее центр и отрезок, длина которого равна радиусу искомой окружности).* Чуть раньше, эту же теорему совершенно другими методами удалось доказать французским математиком Жаном Понселе. Здесь мы разберем несколько задач геометрии линейки (эту часть геометрии принято называть *геометрией Понселе-Штейнера*).

Пример 1. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки построить прямоугольник.

Решение. Через точку O — центр данной окружности достаточно провести два различных диаметра. Концы этих диаметров будут вершинами прямоугольника, поскольку каждый из углов этого вписанного четырехугольника опирается на диаметр.

Пример 2. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Разделить данный отрезок пополам, используя одну линейку.

Решение. Пусть $a \| b$ и $[AB] \subseteq a$ (рис. 28). Выберем произвольно $D \in b$ и на продолжении прямой AD за точку D отметим точку M. В пересечении прямых b и BM получим точку C, а в пересечении прямых AC и BD — точку O. Точки пересечения прямой OM с прямыми a и b обозначим через K и L соответственно. Четырехугольник $ABCD$ является трапецией, отсюда точки K и L — середины ее оснований.

Пример 3. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Увеличить данный отрезок в два раза, используя одну линейку.

Решение. Используем обозначения предыдущей задачи и рис. 29. Последовательно найдем точки P и N, где $\{P\} = (BL) \cap (AM)$ и $\{N\} = (PC) \cap a$. Снова применяя основное свойство трапеции (прямая, проходящая через середины оснований трапеции проходит также и через точку пересечения ее диагоналей, и через точку пересечения продолжений ее боковых сторон), но уже к трапеции $ADCN$, получаем, что B — середина отрезка AN. Отсюда отрезок AN — искомый.

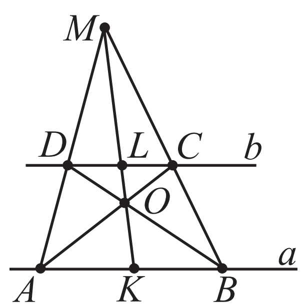

Рис. 28

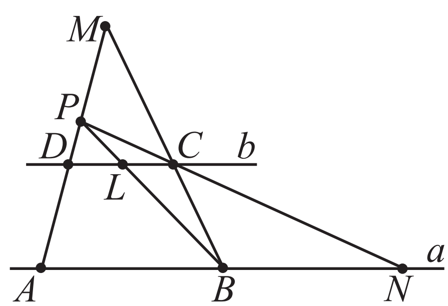

Рис. 29

Пример 4. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки вписать в эту окружность квадрат.

Решение. Пусть $ABCD$ — вписанный в данную окружность прямоугольник (он построен в первом примере). Его противоположные стороны параллельны, поэтому, используя пример 2, мы можем найти точки K, L, M и N, которые являются соответственно серединами его сторон AB, BC, CD и DA. Прямые KM и LN содержат перпендикулярные диаметры данной окружности, поэтому высекают на ней четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.

Пример 5. Дана прямая a и два равных отрезка AB и BN, лежащих на этой прямой. Через произвольную точку D провести прямую, параллельную прямой a.

Решение. Фактически, эта задача является обратной к задаче из примера 2. Сначала на продолжении прямой AD за точку D произвольно выберем точку M (рис. 30). Пусть O — точка пересечения прямых MB и DN, а C — точка пересечения прямых AO и MN. Докажем, что прямая $b = (DC)$ является искомой. Пусть это не так, тогда рассмотрим прямую b_1, которая проходит через D, параллельна прямой a и не совпадает с b. Точку пересечения прямых b_1 и MN обозначим через C_1. Тогда ANC_1D — трапеция, причем точка O, одновременно лежащая на прямых DN и MB должна быть точкой пересечения диагоналей этой трапеции. Таким образом, $C_1 \in (AO)$, откуда $C = C_1$ и $b_1 = b$. Это противоречит предположению $b_1 \neq b$. Параллельность прямых b и a доказана.

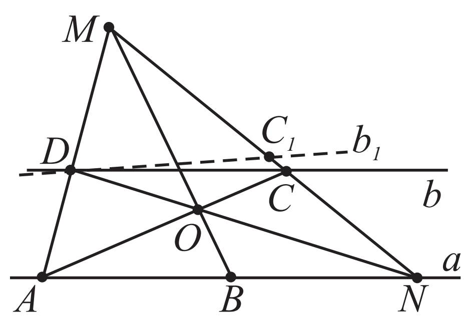

Рис. 30

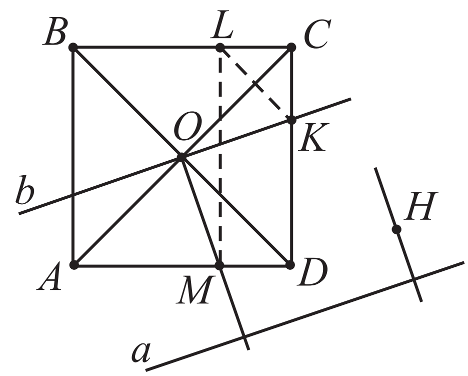

Рис. 31

Пример 6. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, параллельную данной прямой a.

Решение. Используя примеры 1 и 2 в данную окружность можно вписать прямоугольник $ABCD$ и найти середины его сторон. Прямая a не может быть параллельна каждой стороне этого прямоугольника. Пусть, например прямые AB и a не параллельны. Обозначим через K и M середины отрезков AB и CD. Тогда тройка параллельных прямых — (AD), (KM) и (BC) — высечет согласно теореме Фалеса на прямой a два равных отрезка. Затем, используя результат предыдущей задачи, через любую точку плоскости, в том числе и через H, можно провести прямую, параллельную данной прямой a (используя при этом только линейку).

Пример 7. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

Решение. Можно считать, что на плоскости, кроме данных прямой и точки нарисован квадрат $ABCD$ (см. пример 4), его центр — точка O, а также прямая b (см. пример 5), которая проходит через точку O и параллельна прямой a (рис. 31). Пусть K — точка пересечения прямой b со стороной CD, прямая KL параллельна диагонали BD (см. пример 5), причем $L \in [BC]$. И, наконец, проводя через L прямую параллельно (AB), получаем на стороне AD точку M. Докажем, что $(OM) \perp b$. Из равенств $DM = CL = CK$ следует равенство треугольников ODM и OCK (две пары соответственно равных сторон и равенство углов между ними). Из равенства этих треугольников и условия $(OC) \perp (OD)$ следует, что $(OM) \perp b$. Теперь остается через точку H провести прямую, параллельную прямой OM (см. пример 5).

Группа А

5.203. Даны две параллельные прямые и на одной из них — отрезок AB. а) Увеличить отрезок AB в три раза используя только линейку. б) Уменьшить отрезок AB в три раза используя только линейку.

5.204. В треугольнике проведена средняя линия. Найти середину основания этого треугольника, пользуясь только односторонней линейкой.

5.205. На плоскости нарисована окружность ω и в ней проведен диаметр AB. Для любой точки C, не лежащей на прямой AB, только с помощью линейки провести перпендикуляр из точки C к прямой AB.

5.206. К двум пересекающимся окружностям проведена общая касательная. Разделить ее пополам с помощью одной линейки.

5.207. Дан параллелограмм $ABCD$ через его центр провести прямую, параллельную одной из его сторон.

В задачах 5.208–5.215 требуется выполнить построения с помощью линейки с двумя параллельными краями (т.е. с помощью двусторонней линейки).

5.208. а) Построить биссектрису данного угла AOB. б) Дан острый угол AOB. Построить угол BOC, биссектрисой которого является луч OA.

5.209. Восстановить перпендикуляр к данной прямой l в данной точке A.

5.210. а) Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой. б) Построить середину данного отрезка.

5.211. Даны угол AOB, прямая l и точка P на ней. Провести через точку P прямые, образующие с прямой l угол, равный углу AOB.

5.212. Даны отрезок AB, непараллельная ему прямая l и точка M на ней. Построить точки пересечения прямой l с окружностью радиуса AB с центром M.

5.213. Даны прямая l и отрезок OA, параллельный l. Построить точки пересечения прямой l с окружностью радиуса OA с центром O.

5.214. На данной прямой DE от данной точки D отложить отрезок, равный данному отрезку AB.

5.215. Даны отрезки O_1A_1 и O_2A_2. Построить радикальную ось окружностей радиуса O_1A_1 и O_2A_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно.

Группа Б

5.216. Дан параллелограмм $ABCD$. Через данную точку P провести прямую, параллельную данной прямой l.

5.217. При помощи одной линейки заданный отрезок разделить на три равные части, если указана середина отрезка.

5.218. На плоскости изображены две пересекающиеся окружности. При помощи одной линейки построить центр каждой из них.

В задачах 5.219–5.222 предполагается, что на плоскости дана какая-нибудь окружность ω и отмечен ее центр O.

5.219. От данной прямой от данной точки отложить отрезок, равный данному отрезку.

5.220. Построить отрезок длиной ab/c, где a, b, c — длины данных отрезков.

5.221. Построить точки пересечения данной прямой l с окружностью, центр которой — данная точка A, а радиус равен длине данного отрезка.

5.222. Построить точки пересечения двух окружностей, центры которых — данные точки, а радиусы — данные отрезки.

5.223. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки построить шестую точку этой окружности.

5.6. Построения одним циркулем. Инверсия

Теория построения одним циркулем получила свою известность благодаря книге “Геометрия циркуля” (1797 г.) Лоренцо Маскерони[2]. Значительно позже в одном из букинистических магазинов была обнаружена книга датского математика Георга Мора “Датский Евклид”, датированная 1672 годом! Обе книги содержат следующий основной результат геометрии циркуля.

Теорема Мора-Маскерони. *Все построения, выполненные с помощью циркуля и линейки, могут быть проделаны только с помощью циркуля (при этом мы считаем прямую построенной, если найдены хотя бы две точки этой прямой).*

Для доказательства этой теоремы достаточно научиться находить только с помощью циркуля пересечения двух прямых, прямой и окружности. Решения этих задач мы приведем чуть позже, а сначала исследуем еще один вид преобразований плоскости.

В 1831 году Л. Дж Магнус впервые стал рассматривать преобразование плоскости, которое получило название симметрии относительно окружности или инверсии (от лат. *inversio* — обращение). Под инверсией плоскости α относительно окружности $\omega(O, R)$ с центром в точке O и радиусом R

[2]Л. Маскерони(1750-1800), итальянский инженер, изучал математику самостоятельно. Работы относятся к теории геометрических построений, теории многоугольников, интегральному исчислению. Результаты его геометрических исследований доложил в 1797 году на заседании Национального института Наполеон Бонапарт.

понимают такое преобразование множества $\alpha\backslash\{O\}$, при котором каждой точке $A \in \alpha\backslash\{O\}$ ставится в соответствие такая точка A', что A' лежит на луче $[OA)$ и $OA \cdot OA' = R^2$ (далее будем использовать обозначение $inv_O^R(A) = A'$). Заметим сразу, что инверсия не определена в точке O, но иногда бывает полезно добавить к плоскости одну бесконечно удаленную точку, т.е. рассмотреть множество $\alpha \cup \{\infty\}$ и при этом считать, что $inv_O^R(O) = \infty$ и $inv_O^R(\infty) = O$.

На рис. 32 указан способ построения образа точки A при инверсии относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. Для этого (если точка A расположена внутри окружности) проводят перпендикуляр (AB) к прямой OA ($B \in \omega \cap (AB)$) и из точки B проводят касательную к окружности ω. Из подобия треугольников OAB и OBA' получаем отношение $OA : OB = OB : OA'$ или $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Следовательно $inv_O^R(A) = A'$. Если же точка A расположена вне окружности, то сначала из точки A проводят касательную к окружности, затем из точки касания опускают перпендикуляр на прямую OA и получают точку A'.

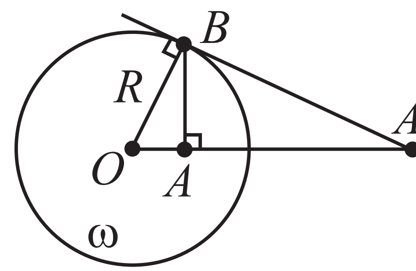

Рис. 32

На рис. 33 построение образа выполнено только с помощью циркуля (в предположении, что $OA > R/2$). Для этого достаточно провести окружность $\omega(A, OA)$ и для двух точек пересечения $\omega(O, R) \cap \omega(A, OA)$ построить равные окружности $\omega(B, R)$ и $\omega(C, R)$. Вторая точка пересечения $\omega(B, R) \cap \omega(C, R)$, отличная от точки O, является искомой. Для доказательства используем подобие равнобедренных треугольников OBA' и OBA. Сначала получаем $OA' : OB = OB : OA$, а затем, необходимое $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Если же $OA \leqslant R/2$, то сначала увеличивают отрезок OA в n раз до отрезка OB (удвоение отрезка показано на рис. 34 — последовательно откладывают радиус OA на окружности $\omega(A, OA)$ и используют свойство правильного вписанного шестиугольника), после этого находят $B' = inv_O^R(B)$ и снова увеличивают (а не уменьшают!) отрезок OB' в n раз до отрезка OC. Можно доказать, что $C = inv_O^R(A)$.

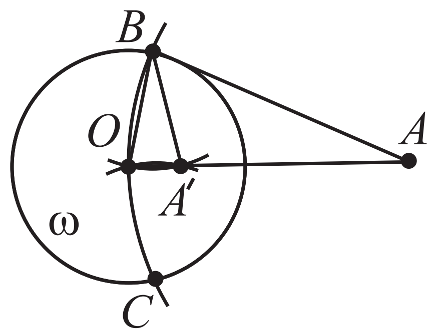

Рис. 33

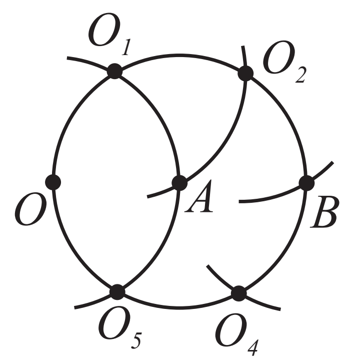

Рис. 34

Из многочисленных свойств инверсии рассмотрим лишь следующие. Пусть $A' = inv_O^R(A)$ и $B' = inv_O^R(B)$.

I. Если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Утверждение требует проверки только когда лучи $[OA)$ и $[OB)$ совпадают. В этом случае $OA \neq OB$ и поэтому $OA' \neq OB'$. Приходим к неравенству $A' \neq B'$.

II. Все точки окружности $\omega(O, R)$ при инверсии inv_O^R остаются неподвижными. Внутренние точки круга с границей $\omega(O, R)$ переходят во внешние, а внешние — во внутренние.

Первая часть утверждения очевидна, а вторая следует из замечания: если $OA < R$, то $OA' = R^2/OA > R$.

III. Если $A' = inv_O^R(A)$, то $A = inv_O^R(A')$. Для произвольных фигур Φ и Φ' из условия $\Phi' = inv_O^R(\Phi)$ также следует $\Phi = inv_O^R(\Phi')$.

IV. Треугольники AOB и $A'OB'$ подобны, причем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

Достаточно заметить, что эти треугольники имеют общий угол, а из равенства $OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$ следует равенство отношений $OA : OB' = OB : OA'$. Обратите внимание, что в отличие от подобия, пропорциональность связывает стороны OA и OB', OB и OA', а не OA и OA', OB и OB'. Из подобия получаем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

V. $A'B' = \dfrac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2$. Действительно, по свойству IV имеем

$$A'B' = \frac{AB \cdot OA'}{OB} = \frac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2.$$

VI. Прямая a, проходящая через центр инверсии, отображается в себя. Если же $O \notin a$ и A — основание перпендикуляра из точки O на прямую a (рис. 35), то образом прямой a будет окружность ω_1, построенная на отрезке OA' как на диаметре ($A' = inv_O^R(A)$).

Для доказательства этого свойства рассмотрим произвольную точку B прямой a. По свойству IV имеем $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$. Следовательно точка B' лежит на окружности с диаметром OA'. Удивление от такого неожиданного действия инверсии на произвольную прямую пройдет, если принять в расчет бесконечно удаленную точку. Каждая прямая проходит через ∞. Поэтому переход точки ∞ в точку O заставляет концы прямой сжиматься к точке O.

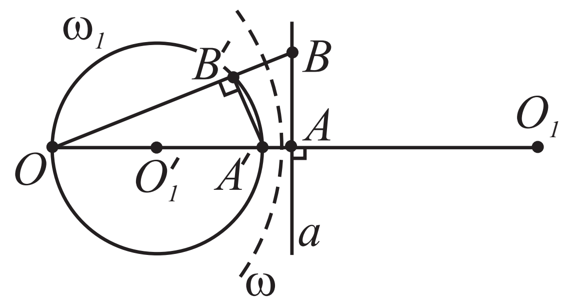

Рис. 35

Следующее свойство позволяет определить центр окружности, которая является образом прямой из свойства VI.

VII. Пусть $\omega_1 = inv_O^R(a)$. Обозначим через $O_1 = S_a(O)$, где S_a — осевая симметрия с осью a (рис. 35). Тогда центром окружности ω_1 является точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$.

Сохраняя принятые в предыдущем свойстве обозначения, имеем $OO_1 = 2OA$. Подставляя это в равенство $OA \cdot OA' = R^2 = OO_1 \cdot OO_1'$ получаем $OO_1' = OA'/2$. Поэтому точка O_1' является серединой отрезка OA'.

VIII. Окружность $\omega_1(O_1, r)$, проходящая через центр инверсии, отображается на некоторую прямую a. Более того, если A — конец диаметра, проходящего через O и O_1 ($A \neq O$), то прямая a проходит через точку $A' = inv_O^R(A)$ и перпендикулярна прямой OO_1.

Справедливость этого свойства сразу следует из свойств III и VI.

IX. Окружность $\omega_1(O_1, r_1)$, не проходящая через центр инверсии, отображается при inv_O^R на некоторую окружность $\omega_2(O_2, r_2)$. Точнее, если точки A и B являются концами диаметра, лежащего на прямой OO_1 (рис. 36), то отрезок $A'B'$ является диаметром окружности ω_2 ($A' = inv_O^R(A),\ B' = inv_O^R(B)$).

Для доказательства рассмотрим произвольную точку C окружности ω_1 и покажем, что $C' = inv_O^R(C) \in \omega_2$. Из свойства IV имеем равенства

$\angle OCA = \angle OA'C'$ и $\angle OCB = \angle OB'C'$. Поэтому

$$\angle A'C'B' = \angle OB'C' - \angle OA'C' = \angle OCB - \angle OCA = 90^\circ.$$

Следовательно $C' \in \omega_2$.

Переходит ли центр O_1 в центр окружности ω_2, точку O_2? Оказывается, никогда не переходит (убедитесь в этом с помощью прямых вычислений, т.е. докажите, что точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$ не может быть серединой $[A'B']$). Этот "недостаток" инверсии с лихвой компенсируется замечательным ее свойством сохранять величину угла. Напомним, что угол между пересекающимися окружностями по определению равен углу между касательными к этим окружностям в точке их пересечения. Аналогично определяется и угол между пересекающимися прямой и окружностью. Рассмотрим частный случай: для двух касающихся окружностей ω_1 и ω_2 определим величину угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$. Вид образов $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ во многом зависит от положения точки O относительно окружностей ω_1 и ω_2. Так, если $O \notin \omega_1 \cup \omega_2$, то из свойств I и IX получаем, что $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются касающимися окружностями. Если же O лежит только на одной из окружностей, например на ω_1, то из свойств I, VIII и IX получим касающиеся прямую $inv_O^R(\omega_1)$ и окружность $inv_O^R(\omega_2)$. И, наконец, если O совпадает с точкой касания окружностей, то $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются параллельными прямыми (величина угла между параллельными прямыми по определению равна нулю). Итак, в каждом из случаев, величина угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ равна нулю. Аналогично можно установить, что если прямые a и b параллельны, то величина угла между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ также равна нулю.

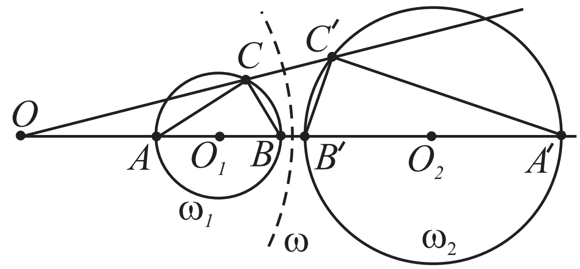

Рис. 36

X. Инверсия сохраняет величину угла между прямыми, пересекающимися окружностями, пересекающимися прямой и окружностью.

Докажем сначала, что для любых прямых угол $\angle ab$ совпадает с углом между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$. Утверждение очевидно, если прямые проходят через точку O. Пусть теперь $O \in a$ и $O \notin b$ (рис. 37). Обозначим через ω_1 окружность, в которую переходит прямая b, и через b_1 — касательную к ω_1 в точке O. Так прямые b и b_1 перпендикулярны одному и тому же диаметру, то они параллельны. Поэтому угол между a и ω_1, равный по определению углу между a и b_1, совпадает с углом $\angle ab$. Рассуждения аналогичны и в случае, когда $O \notin a \cup b$ (надо рассмотреть касательные к окружностям $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ в точке O).

Поскольку угол между окружностями и между прямой и окружностью определялся через касательные, то доказательство остальных двух утверждений легко сводятся к случаю сохранения угла между прямыми.

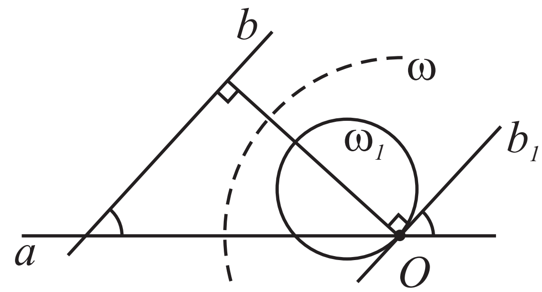

Рис. 37

Далее рассмотрим несколько задач, в решении которых разрешается пользоваться только циркулем.

Пример 1. Разделить с помощью циркуля данный отрезок AB на n равных частей ($n \in N$).

Решение. Чтобы разделить отрезок AB на n равных частей, сначала увеличим его в n раз, т.е. на луче $[AB)$ найдем точку C, что $AC = n \cdot AB$. А затем построим точку C' — образ точки C при инверсии относительно окружности $\omega(A, AB)$. Из соотношения $AC \cdot AC' = AB^2$ получаем $AC' = AB/n$. Все указанные построения можно выполнить только с помощью циркуля (для этого даже не нужна прямая AB).

Пример 2. Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

Решение. Выберем произвольную точку O окружности $\omega_1(X, r)$, центр X которой нам нужно определить (рис. 38). Из точки O проведем произвольную окружность $\omega(O, R)$ так, чтобы она пересекала исходную окружность ω_1. Обозначим точки пересечения $\omega \cap \omega_1$ через A и B. Куда перейдет прямая AB при инверсии inv_O^R? Конечно же в ω_1, поскольку точки A и B остаются неподвижными (свойства II и VI). По свойству VII центр $inv_O^R((AB))$ (т.е. центр ω_1) является образом точки $S_{(AB)}(O)$ при inv_O^R. Из этих рассуждений следует цепочка необходимых построений. Сначала находим точку $O_1 = S_{(AB)}(O)$, симметричную O относительно прямой AB. А затем строим образ точки O_1 при inv_O^R, он и будет искомым центром. Все указанные построения выполняются только с помощью циркуля.

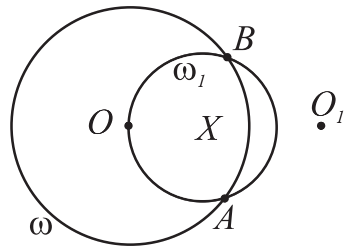

Рис. 38

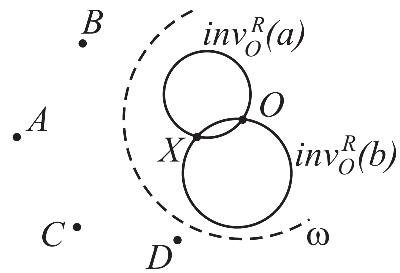

Рис. 39

Пример 3. Даны точки A, B, C, D и окружность ω. Только с помощью циркуля найти пересечение прямых AB и CD, а также точки пересечения прямой AB с окружностью ω.

Решение. Опишем поиск пересечения двух прямых только с помощью циркуля. Пусть даны точки A, B, C и D (рис. 39). Выберем точку O так, чтобы она не лежала на прямых $a = (AB)$ и $b = (CD)$ (для этого достаточно провести две окружности, описанные около треугольников ABC и BCD и выбрать точку их пересечения, отличную от точки C; если же эти две окружности совпадают, т.е. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, выбираем на этой окружности любую точку, отличную от A, B, C и D). При инверсии inv_O^R прямые a и b должны перейти в окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, а их точка пересечения отобразится в точку пересечения окружностей $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, отличную от точки O (свойства VI и I). Теперь необходимые построения становятся очевидными: с помощью свойства VII строим окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, находим точку пересечения этих окружностей — точку X, и снова действуем инверсией уже на точку X. Точка $Y = inv_O^R(X)$ является искомой. Пересечение прямой и окружности находится похожим образом.

Теперь терема Мора-Маскерони следует из решения задач предыдущих трех примеров. Поскольку уже доказано, что добавление линейки к циркулю не приводит к появлению новых возможностей при решении задач на построение, можно снять ограничения на набор инструментов для построения. Будем считать, что у нас есть циркуль и линейка, и сосредоточим внимание только на том, как предварительное использование инверсии существенно помогает в решении нескольких классических задач.

Пример 4. Построить окружность, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности ω_1.

Решение. Чтобы построить окружность ω_2, проходящую через точки A и B и касающуюся данной окружности ω_1, рассмотрим инверсию с центром в точке $O = A$ относительно окружности произвольного радиуса R. Образом ω_2 при инверсии inv_O^R должна быть некоторая прямая a, проходящая через точку $B' = inv_O^R(B)$ и касающаяся окружности $inv_O^R(\omega_1)$ (свойства VIII и IX). Напомним, что касательные из произвольной точки X к произвольной окружности $\omega(Y,r)$ провести довольно легко: для этого достаточно построить вспомогательную окружность ω' на диаметре $[XY]$ и соединить X с точками пересечения $\omega \cap \omega'$. Теперь выполняем необходимые построения в следующем порядке: находим $B' = inv_O^R(B)$ и $inv_O^R(\omega_1)$, через точку B' проводим касательные a и b к окружности $inv_O^R(\omega_1)$, строим образы $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ при инверсии inv_O^R. В зависимости от расположения точки B' относительно окружности $inv_O^R(\omega_1)$ может быть два, одно и ни одного решения (например, когда B' находится внутри $inv_O^R(\omega_1)$).

Пример 5. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

Решение. Для решения этой задачи достаточно уметь проводить общую касательную к двум произвольным окружностям $\omega(X,r)$ и $\omega'(Y,R)$. Будем считать, что $r < R$. Проведем из точки X касательную a к окружности $\omega_1(Y, R-r)$ (рис. 40), тогда искомая внешняя касательная b к окружностям ω и ω' будет параллельна прямой a и находится от нее на расстоянии r. Для проведения внутренней касательной вместо $\omega_1(Y, R-r)$ надо рассмотреть окружность $\omega_2(Y, R+r)$. В общем случае возможно до четырех решений. Теперь вернемся к исходной задаче. Пусть даны точка A и две окружности ω_1 и ω_2. Искомая окружность ω, проходящая через A и касающаяся ω_1 и ω_2, при инверсии с центром $O = A$ должна перейти в некоторую прямую a, которая касается окружностей $inv_O^R(\omega_1)$ и

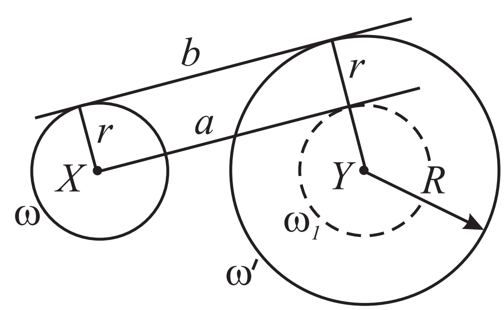

Рис. 40

$inv_O^R(\omega_2)$ (свойства VIII и IX). Таким образом, приходим к следующему порядку построений: находим $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$, проводим общие касательные (a, b, c, d) и строим образы этих касательных при inv_O^R. В общем случае получится до четырех искомых окружностей, однако в одном случае решений будет бесконечно много (представьте, что произойдет после инверсии с окружностями ω_1 и ω_2, если они касаются в точке A).

Пример 6. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

Решение. Задача Аполлония сводится к предыдущей задаче. Пусть даны окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$, и $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$. Построим окружность $\omega(O, R)$, проходящую через точку O_1 и касающуюся окружностей $\omega_2(O_2, r_2 - r_1)$ и $\omega_3(O_3, r_3 - r_1)$. Уменьшив радиус окружности ω на r_1, т.е. рассматривая $\omega(O, R - r_1)$, приходим к одной из искомых окружностей. Количество решений исследовать самим.

Группа А

5.224. а) Увеличить данный отрезок в три раза, используя только циркуль. б) Разделить данный отрезок на три равные части, используя только циркуль.

5.225. Построить середину отрезка с данными концами, используя только циркуль.

5.226. Только с помощью циркуля построить окружность, в которую переходит данная прямая AB при инверсии относительно данной окружности с данным центром O.

5.227. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найти множество их точек касания.

5.228. Найти множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках A и B.

5.229. Доказать, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

Группа Б

5.230. Доказать, что две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

5.231. Доказать, что непересекающиеся окружность ω и прямую l можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

5.232. Через точку A проведена прямая l, пересекающая окружность S с центром O в точках M и N и не проходящая через O. Пусть M' и N' — точки, симметричные M и N относительно OA, а A' — точка пересечения прямых MN' и $M'N$. Доказать, что A' совпадает с образом точки A при инверсии относительно S (и, следовательно, не зависит от выбора прямой l).

5.233. Используя только циркуль, найти центр окружности, описанной около данного треугольника ABC.

5.234. Провести через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

5.235. Построить окружность, касающуюся данной окружности ω и перпендикулярную двум данным окружностям ω_1 и ω_2.

5.236. Провести через данные точки A и B окружность, пересекающую данную окружность ω под данным углом α.

5.237. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Доказать, что все эти прямые проходят через одну точку.

5.238. Никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Доказать, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD.

5.239. Через точки A и B проведены окружности S_1 и S_2, касающиеся окружности S, и окружность S_3, перпендикулярная S. Доказать, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2.

5.240. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются окружности (или прямой) S_1 в точках B_1 и C_1, а окружности (или прямой) S_2 в точках B_2 и C_2 (причем касание в B_2 и C_2 такое же, как в B_1 и

C_1). Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2, касаются друг друга.

5.241. Доказать, что окружность, проходящая через середины сторон треугольника, касается его вписанной и трех вневписанных окружностей (теорема Фейербаха).

5.242. Окружности S_1, $S_2, \ldots$, S_n касаются двух окружностей R_1 и R_2 и, кроме того, S_1 касается S_2 в точке A_1, S_2 касается S_3 в точке A_2, ..., S_{n-1} касается S_n в точке A_{n-1}. Доказать, что точки A_1, A_2, ... , A_{n-1} лежат на одной окружности.

5.243. Доказать, что если существует цепочка окружностей S_1, S_2, ..., S_n, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей T_1, $T_2, \ldots$, T_n (поризм Штейнера).

5.244. Доказать, что при инверсии относительно описанной окружности изодинамические центры треугольника переходят друг в друга. (Напомним определение изодинамических центров. Пусть AD и AE — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника ABC и S_a — окружность с диаметром DE, окружности S_b и S_c определяются аналогично. Эти три окружности имеют две общие точки M и N, причем прямая MN проходит через центр описанной около треугольника ABC окружности. Точки M и N называются изодинамическими центрами треугольника ABC.)

Глава 6

Преобразования пространства

6.1. Движения пространства

Группа А

6.1. Доказать, что любое движение пространства a) сохраняет отношение лежать между; b) переводит отрезок в отрезок; c) отображает выпуклую фигуру на выпуклую фигуру; d) отображает прямую на прямую; e) сферу отображает на сферу.

6.2. Доказать, что если прямые a и b параллельны, то и образы их при любом движении пространства также будут параллельными прямыми.

6.3. Доказать, что при любом движении пространства плоскость отображается на плоскость, а пара параллельных плоскостей отображаются в пару параллельных плоскостей.

6.4. Доказать, что множество всех параллельных переносов пространства с операцией композиция является абелевой группой.

6.5. Пусть f — движение пространства. Доказать, что f — параллельный перенос, тогда и только тогда, когда для произвольной прямой a выполнено $f(a)\|a$.

6.6. Доказать, что для произвольного движения f и произвольной пары векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ справедливо равенство $f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u})+f(\overrightarrow{v})$.

6.7. Доказать, что для произвольных движения f, вектора $\overrightarrow{u}$ и числа λ выполняется $f(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u})$.

6.8. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой a. Доказать, что для любой плоскости α_1, проходящей через прямую a, найдется пара плоскостей β_1 и β_2, также проходящих через a и для которых справедливы равенства
$$S_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta_1} \circ S_{\alpha_1} = S_{\alpha_1} \circ S_{\beta_1}.$$

6.9. Может ли движение пространства иметь ровно две неподвижные точки? Описать все движения, имеющие по крайней мере две неподвижные точки.

6.10. Пусть S_α — зеркальная симметрия относительно плоскости α, $A \notin \alpha$ и $A' = S_\alpha(A)$. Доказать, что прямая и плоскости, проходящие одновременно через A и A' инвариантны, т.е. отображаются сами на себя; эти прямая и плоскости перпендикулярны плоскости α.

6.11. Найти все движения, множество неподвижных точек которых содержит некоторую окружность ω.

6.12. Известно, что $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. Доказать, что $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha$ и $S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ являются зеркальными симметриями относительно плоскостей β и γ. Найти β и γ.

6.13. Известно, что $\overrightarrow{AB} \perp \alpha$. Найти такой вектор $\overrightarrow{CD}$, что $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{CD}}$.

6.14. Говорят, что движение f меняет направление на противоположное, если для любого вектора $\overrightarrow{u}$ выполняется $f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$. Описать все движения, которые меняют направление на противоположное.

6.15. Движение пространства имеет три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой. Доказать, что плоскость, проходящая через эти точки, является неподвижной. Верно ли, что указанная плоскость будет плоскостью неподвижных точек?

6.16. Даны плоскость α и не принадлежащие ей точки A и B. Найти на плоскости α такую точку M, чтобы сумма $|MA| + |MB|$ была наименьшей.

6.17. Даны плоскость α и не принадлежащие ей точки A и B. Найти на плоскости α такую точку N, чтобы число $||MA| - |MB||$ было наибольшим.

6.18. Через данную точку P провести прямую, перпендикулярную двум скрещивающимся прямым a и b.

6.19. Найти геометрическое место центров симметрии двух параллельных плоскостей.

6.20. Отрезок постоянной длины "скользит" своими концами по двум взаимно перпендикулярным скрещивающимся прямым. Какую линию при этом описывает середина отрезка?

6.21. Пусть Z_O — симметрия с центром O. Доказать, что $Z_O(l)\|l$ и $Z_O(\alpha)\|\alpha$.

6.22. Доказать, что композиция трех зеркальных симметрий относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей есть центральная симметрия. Как найти ее центр? Как, обратно, представить центральную симметрию в виде композиции трех симметрий относительно плоскостей?

6.23. Даны прямая l и не принадлежащие ей точки A и B. Найти на прямой l такую точку M, чтобы сумма $|MA|+|MB|$ была наименьшей.

6.24. Даны два конгруэнтных треугольника AOB и $A'OB'$, не лежащих в одной плоскости. Доказать, что существует поворот, отображающий один треугольник на другой.

6.25. Даны биссектрисы трех плоских углов трехгранного угла. Восстановить по ним трехгранный угол.

6.26. Внутри двугранного угла дана точка. Провести через эту точку прямую, перпендикулярную к ребру, и притом так, чтобы отрезок этой прямой между сторонами угла делился данной точкой пополам.

6.27. Дан произвольный тетраэдр. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

6.28. Найти поворот, переводящий отрезок в конгруэнтный отрезок.

6.29. Найти поворот, переводящий угол в конгруэнтный угол.

6.30. Доказать, что существует бесконечно много поворотов, переводящих одну прямую в другую.

6.31. На данной прямой найти точку так, чтобы сумма ее расстояний до двух данных прямых была наименьшей.

6.32. Даны две прямые. Найти осевые симметрии, переводящие одну прямую в другую.

6.33. Доказать, что если $S_p(m) = n$ и $S_q(n) = m$, то прямые p и q пересекаются.

6.34. *a*) Доказать, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом пространства. Как определить длину и направление этого переноса (вектора)? *b*) Доказать, что любой параллельный перенос пространства можно представить как композицию двух осевых симметрий. Как построить оси таких симметрий?

6.35. Найти все движения, при которых данная прямая является неподвижной.

6.36. Найти все движения, при которых данная плоскость является неподвижной.

6.37. Найти неподвижные плоскости винтового движения.

6.38. Доказать, что винтовое движение является композицией двух осевых симметрий со скрещивающимися осями.

6.39. Доказать, что композиция двух поворотов со скрещивающимися осями не может быть поворотом.

6.40. В пространстве даны две перпендикулярные прямые a и b (не обязательно пересекающиеся). Чему равна композиция $S_b \circ S_a$?

6.41. Даны две скрещивающиеся прямые a и a'. На первой из них дана точка A, на второй — точка A'. Найти поворот пространства относительно оси, отображающий a на a' и A на A' (построить ось этого поворота).

6.42. Даны скрещивающиеся прямые a и b, образующие с некоторой прямой l равные углы. Доказать, что существует поворот с осью l, отображающий прямую a на прямую a', параллельную b.

6.43. Описать все движения, представимые в виде композиции трех зеркальных симметрий.

6.44. Доказать, что если движение представлено в виде композиции пяти зеркальных симметрий, то его можно представить и в виде композиции трех зеркальных симметрий.

6.45. Показать, что тождественное преобразование не может быть представлено в виде композиции нечетного числа зеркальных симметрий.

6.46. Доказать, что если движение представлено в виде композиции четного (нечетного) числа зеркальных симметрий, то его нельзя представить в виде композиции нечетного (соответственно, четного) числа зеркальных симметрий.

6.47. Движение называется сохраняющим (меняющим) ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции четного (соответственно, нечетного) числа зеркальных симметрий. Описать все движения, которые *a*) сохраняют ориентацию; *b*) меняют ориентацию.

6.48. Пусть f — скользящая симметрия. Доказать, что для любого вектора $\vec{v}$ движения $f \circ T_{\vec{v}}$ и $T_{\vec{v}} \circ f$ также являются скользящими симметриями.

6.49. Пусть f — винтовой поворот. Доказать, что для любого вектора $\vec{v}$ движения $f \circ T_{\vec{v}}$ и $T_{\vec{v}} \circ f$ также являются винтовыми поворотами.

6.50. Пусть f — зеркальный поворот. Доказать, что для любого вектора $\vec{v}$ движения $f \circ T_{\vec{v}}$ и $T_{\vec{v}} \circ f$ также являются зеркальными поворотами.

Группа Б

6.51. Через середину каждого ребра тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противоположному ребру. Доказать, что все шесть таких плоскостей пересекаются в одной точке (точка Монжа).

6.52. Доказать, что если точка Монжа лежит в какой либо грани тетраэдра, то основание высоты, опущенной на эту грань, лежит на описанной окружности.

6.53. Даны три правильных конгруэнтных пятиугольника: $OAMNB$, $OBPQC$, $OCRSA$. Доказать, что прямые ON, OQ, OS взаимно перпендикулярны.

6.54. Дан произвольный тетраэдр и точка N. Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная отрезку, соединяющему N

с серединой противоположного ребра. Доказать, что все шесть плоскостей пересекаются в одной точке.

6.55. Если некоторая фигура имеет две пересекающиеся перпендикулярные оси симметрии, то она имеет еще одну ось симметрии. Доказать.

6.56. Ограниченная фигура имеет центр симметрии и плоскость симметрии. Доказать, что центр симметрии лежит в плоскости симметрии.

6.57. Ограниченная фигура имеет несколько плоскостей симметрии. Доказать, что все они проходят через одну точку.

6.58. Ограниченная фигура имеет несколько осей симметрии. Доказать, что все оси симметрии проходят через одну точку.

6.59. Плоскости α, β, γ и δ содержат все грани некоторого тетраэдра $ABCD$. Каким движением является композиция $S_\delta \circ S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$?

6.2. Гомотетия. Преобразования подобия

Группа А

6.60. Даны две произвольные сферы. Существует ли гомотетия, отображающая одну из этих сфер на другую? Если да, то сколько таких гомотетий?

6.61. Доказать, что центроиды граней тетраэдра являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному. Указать центр и коэффициент гомотетии.

6.62. Для каждой вершины тетраэдра строится точка, симметричная ей относительно центроида противоположной грани. Доказать, что построенные точки являются вершинами тетраэдра, гомотетичного данному. Указать центр и коэффициент гомотетии.

6.63. Построить куб по данной его диагонали.

6.64. Построить куб по данной величине разности между длинами его диагонали и стороны.

6.65. Доказать, что два подобных, но неравных треугольника можно перевести друг в друга композицией гомотетии и поворота вокруг оси.

6.66. Доказать, что преобразование подобия с коэффициентом $k \neq 1$, переводящее каждую плоскость в себя или в параллельную ей плоскость, является гомотетией.

6.67. Даны четыре точки A_1, A_2, A_3 и A_4, не расположенные в одной плоскости. Доказать, что если для двух подобий f и g выполняется $f(A_i) = g(A_i)$ при всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, то $f = g$ (т.е. для любой точки A пространства $f(A) = g(A)$).

Группа Б

6.68. В данную правильную четырехугольную пирамиду вписать куб так, чтобы четыре вершины одной из его граней лежали на четырех боковых ребрах пирамиды.

6.69. Найти геометрическое место середин отрезков, соединяющих точку вне сферы с точками этой сферы.

6.70. Даны четыре отрезка $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3B_3]$, $[A_3B_3]$, из которых никакие три не лежат в одной плоскости, причем все они параллельны друг другу и в то же время попарно не равны. Как расположены центры шести гомотетий, отображающих A_i на A_k и B_i на B_k $(i, k = 1, 2, 3, 4)$?

6.71. В плоскости боковой грани правильной чтырехугольной пирамиды взята вигура Φ. Пусть Φ_1 - проекция Φ на плоскость основания пирамиды, а Φ_2 - проекция Φ на плоскость смежной боковой грани. Доказать, что фигуры Φ_1 и Φ_2 подобны.

Глава 7

Стереометрия

7.1. Прямые и плоскости. Двугранные и многогранные углы

Во всех задачах на построение предполагается, что мы умеем:

1) *провести плоскость через данные три точки;*

2) *построить линию пересечения двух плоскостей и точку пересечения прямой и плоскости;*

3) *выполнить в произвольной плоскости пространства все построения, известные из планиметрии.*

Группа А

7.1. Через данную точку провести прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

7.2. Провести прямую, пересекающую три данные попарно скрещивающиеся прямые. Сколько существует таких прямых?

7.3. Дана плоскость π и вне ее три неколлинеарные точки A, B, C. Найти: a) такую точку M, что прямые MA, MB, MC пересекают плоскость π в вершинах треугольника, гомотетичного некоторому данному треугольнику; b) такую точку M, что прямые MA, MB, MC пересекают плоскость π в вершинах треугольника, конгруэнтного некоторому данному треугольнику.

7.4. Провести прямую, параллельную данной прямой и пересекающую две данные прямые.

7.5. Доказать, что три параллельные между собой плоскости отсекают на двух пересекающих их прямых пропорциональные отрезки.

7.6. Пусть даны две тройки коллинеарных точек A, B, C и A_1, B_1, C_1, причем $|AB| : |BC| = |A_1B_1| : |B_1C_1|$. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 лежат в параллельных плоскостях.

7.7. Два плоских зеркала служат гранями двугранного угла. Луч света, перпендикулярный ребру угла и параллельный первому зеркалу, отражается пять раз от граней угла и возвращается обратно по той же прямой. Какова величина двугранного угла?

7.8. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости, и не принадлежащая ни одной из них точка P. Провести через P плоскость так, чтобы она образовывала с данными прямыми равные углы.

7.9. Из точки O на ребре двугранного угла в одной из его граней проведен луч. Провести из той же точки в другой грани луч, перпендикулярный первому лучу.

7.10. На двух гранях двугранного угла даны точки A и B. Найти на ребре такую точку M, чтобы угол AMB был прямым.

7.11. Даны двугранный угол и прямая l, которая пересекает его ребро. Провести через эту прямую плоскость, которая пересекается с гранями двугранного угла по двум прямым так, чтобы прямая l была биссектрисой плоского угла, получающегося в сечении.

7.12. Пусть $ABCD$ — пространственный четырехугольник. Доказать, что $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} < 360^\circ$.

7.13. Найти геометрическое множество точек пространства, одинаково удаленных от двух данных пересекающихся прямых. То же для двух параллельных прямых.

7.14. Найти геометрическое множество точек пространства, равноудаленных от вершин данного треугольника.

7.15. Найти множество всех точек, равноудаленных от трех прямых, содержащих ребра данного трехгранного угла и расположенных внутри угла.

7.16. Найти множество всех точек, равноудаленных от плоскостей всех трех граней данного трехгранного угла.

7.17. Семейство параллельных плоскостей, пересекая все грани трехгранного угла, образует семейство треугольников. а) Найти множество центроидов (центроид, или центр масс треугольника, суть точка пересечения медиан треугольника) этих треугольников. б) Найти множество ортоцентров этих треугольников.

7.18. Доказать: если в трехгранном угле два плоских угла равны, то равны и противолежащие им двугранные углы. Справедливо ли обратное утверждение?

7.19. Трехгранный угол называется *ортогональным*, если все его плоские углы прямые. Доказать: а) три точки, лежащие на ребрах ортогонального трехгранного угла и не совпадающие с его вершиной O, являются вершинами остроугольного треугольника; б) проекция вершины O на плоскость этого треугольника совпадает с его ортоцентром.

7.20. Доказать, что если луч образует конгруэнтные углы с тремя лучами, лежащими в одной плоскости, то он перпендикулярен этой плоскости.

7.21. Доказать, что геометрическое место точек, разность квадратов расстояний до двух данных точек есть постоянная, есть плоскость.

7.22. В данной плоскости через данную на ней точку провести прямую, образующую с данной прямой данный угол.

7.23. В данной плоскости через данную на ней точку провести прямую, образующую с другой данной плоскостью данный угол.

7.24. Через данную прямую провести плоскость, образующую данный угол с данной плоскостью.

7.25. Доказать, что прямая, одинаково наклоненная к обеим граням двугранного угла, пересекает эти грани в точках, одинаково удаленных от ребра. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

7.26. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих равные углы с двумя данными плоскостями.

7.27. Найти геометрическое место точек плоскости, обладающих тем свойством, что прямые, которые соединяют их с данными точками A, B, образуют равные углы с данной плоскостью.

7.28. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Доказать, что плоскости A_1BD и B_1D_1C делят диагональ AC_1 на три равные части.

7.29. В пространстве дано несколько прямых, причем любые две из них пресекаются. Доказать, что либо все они лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку.

7.30. Доказать, что сумма углов, которые прямая образует с двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, не превосходит 90°.

7.31. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найти этот угол.

7.32. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD.

7.33. Через ребро AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC и B_1D. Найти эти углы.

7.34. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC; M — середина DB, N — середина AB, а точка K делит ребро CD в отношении $CK : KD = 1 : 2$. Доказать, что прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

7.35. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости A_1BD. Доказать, что параллелепипед является кубом.

7.36. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведен общий перпендикуляр MN к прямым A_1B и B_1C ($M \in [A_1B]$). Найти $A_1M : MB$.

7.37. Плоскость, проходящая через середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ пересекает ребра AD и BC в точках L и N. Доказать, что $BC : CN = AD : DL$.

7.38. Доказать, что противоположные ребра тетраэдра попарно перпендикулярны, если одна из его высот проходит через ортоцентр грани.

7.39. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости, проходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

7.40. Можно ли произвольный четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм?

7.41. Доказать, что проекция правильного тетраэдра на плоскость будет наибольшей площади, если плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам.

7.42. Через середину диагонали куба перпендикулярно к ней проведена плоскость. Определить площадь сечения куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

7.43. Дан трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B, C. Доказать, что существует трехгранный угол с плоскими углами $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$ и двугранными углами $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$.

7.44. Доказать, что против равных плоских углов трехгранного угла лежат равные двугранные углы.

7.45. Дан трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B, C. Доказать, что

$$a)\ \cos\angle A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma};$$

$$b)\ \cos\alpha = \frac{\cos\angle A + \cos\angle B\cdot\cos\angle C}{\sin\angle B\cdot\sin\angle C}.$$

(*Первая и вторая теоремы косинусов для трехгранного угла.*)

7.46. Дан трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ и противолежащими им двугранными углами A, B, C. Доказать, что

$$\frac{\sin\angle A}{\sin\alpha} = \frac{\sin\angle B}{\sin\beta} = \frac{\sin\angle C}{\sin\gamma}.$$

(*Теорема синусов для трехгранного угла.*)

7.47. В одной из граней двугранного угла величины α проведена прямая l, пересекающаяся с его ребром и образующая с ним угол β, а с другой гранью этого двугранного угла — угол γ. Доказать, что

$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta.$$

(*Теорема о трех синусах.*)

7.48. Доказать, что плоскости, проведенные через ребра двугранного угла и биссектрисы противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

7.49. Дан трехгранный угол, среди двугранных углов которого нет прямых углов. Доказать, что плоскости, проведенные через ребра двугранного угла перпендикулярно противоположным граням, пересекаются по одной прямой.

7.50. В грани двугранного угла, равного 120°, проведена прямая, образующая угол 60° с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

7.51. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), у которого $\angle B = 60^\circ$. Треугольник перегнули вдоль биссектрисы BD так, что плоскости DBC и DBA образовали угол 45°. Какой угол будут образовывать прямая AD с плоскостью DBC?

7.52. Все три плоских угла трехгранного угла являются острыми. Один из них равен α, двугранные углы, прилегающие е этому плоскому углу, равны β, γ. Найти два других плоских угла.

7.53. Три луча $a = [OA)$, $b = [OB)$, $c = [OC)$ образуют следующие углы: $\angle a, c = \angle b, c = \phi$, $\angle a, b = \psi$. Найти углы между парами плоскостей OAB и OAC, OAC и OBC.

7.54. Прямоугольный равнобедренный треугольник повернут вокруг биссектрисы прямого угла на угол 45°. На какие углы повернулись катеты?

7.55. В прямоугольном треугольнике через биссектрису прямого угла проведена плоскость, которая составляет с плоскостью треугольника угол α. Какие углы она составляет с катетами?

7.56. Плоскость отсекает на ребрах прямого трехгранного угла отрезки a, b, c. Вычислить площадь полученного сечения.

7.57. Через вершину S прямого трехгранного угла $Sabc$ проведен луч d. Доказать, что $\cos^2 \widehat{a,d} + \cos^2 \widehat{b,d} + \cos^2 \widehat{c,d} = 1$.

7.58. Доказать, что у всякого четырехгранного угла с равными плоскими углами есть сечение, являющееся ромбом.

7.59. Доказать. что сумма двугранных углов выпуклого n-гранного угла больше $(n-2)\pi$.

7.60. Сумма плоских углов некоторого выпуклого n-гранного угла равна сумме его двугранных углов. Доказать, что $n = 3$.

7.61. В выпуклый четырехгранный угол вписана сфера. Доказать, что суммы его противоположных плоских углов равны.

7.62. В трехгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром O. Доказать, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна прямой SO.

Группа Б

7.63. Даны две скрещивающиеся прямые l и m. Найти геометрическое место точек, делящих в данном отношении отрезки LM, где $L \in l$, $M \in m$.

7.64. Провести прямую, пересекающую три данные прямые так, чтобы отрезки, отсекаемые на ней этими прямыми, имели данное отношение.

7.65. Построить отрезок, имеющий заданную длину и параллельный данной плоскости, концы которого принадлежат двум данным прямым.

7.66. Найти множество всех точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся плоскостей постоянна и равна p.

7.67. Даны скрещивающиеся перпендикулярные прямые l, m и точка P. Найти множество всех точек M, таких, что сумма длин проекций отрезков PM на прямые l и m постоянна.

7.68. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости, а прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 попарно пересекаются. Доказать, что: а) точки пересечения указанных прямых коллинеарны; б) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

7.69. Углы между некоторой плоскостью и сторонами правильного треугольника равны α, β, γ. Доказать, что синус одного из этих углов равен сумме синусов двух других углов.

7.70. В основании пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон. Можно ли на его ребрах так расставить стрелки, что сумма полученных векторов равна нулю?

7.71. Дана плоскость π и точки A, B вне ее. Найти множество всех точек X плоскости π, для которых прямые AX и BX образуют равные углы с плоскостью π.

7.72. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Пусть P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1 и B_1C_1; Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

7.73. Ортогональные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найти периметр ABC, если $AB = \sqrt{5}/2$.

7.74. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Точка M — середина ребра SB, а $N \in (AB)$, причем $NB = 2AB$. Где на боковом ребре SC лежит точка P, если в сечении пирамиды плоскостью MNP получился четырехугольник?

7.75. В треугольной пирамиде $SABC$ суммы всех плоских углов при каждой из вершин A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми SA и BC, если $BC = 4$, $AC = 5$, $AB = 6$.

7.76. Дан трехгранный угол с плоскими углами α, β, γ. Найти угол наклона каждого ребра к плоскости противоположной грани.

7.77. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Доказать, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.

7.78. В трехгранный угол $Oabc$ вписана сфера, касающаяся граней Obc, Oca и Oab в точках A_1, B_1, C_1. Выразить величину угла aOB_1 через плоские углы трехгранного угла.

7.2. Многогранники

Группа А

7.79. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найти угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего ей бокового ребра.

7.80. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найти объем пирамиды, а также радиусы вписанного и описанного шаров.

7.81. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник со стороной 6. Найти объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

7.82. Внутри куба расположены два равных, касающихся друг друга шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех других граней куба. Найти радиусы шаров, если ребро куба равно a.

7.83. Найти объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4, 5, а двугранные углы при основании равны 60°.

7.84. Внутри треугольной пирамиды, все ребра которой равны a, расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других шаров, а также трех граней пирамиды. Найти радиусы шаров.

7.85. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а радиус вписанного шара — $1/2$. Найти величину двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

7.86. Найти двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что радиус вписанного в нее шара в три раза меньше стороны основания.

7.87. Найти радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

7.88. Ребро куба равно 1. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в центрах трех смежных граней и в вершине куба, не принадлежащей этим граням.

7.89. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a. Найти радиус шара, касающегося ребра AB в его середине, а также ребер AC и CD.

7.90. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти объем общей части двух треугольных пирамид ACB_1D_1 и A_1C_1BD.

7.91. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 3$. Высота пирамиды равна 4 и проходит через середину AD. Найти AD, если известно, что в пирамиду можно вписать шар.

7.92. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 4$. Высота пирамиды равна 3 и проходит через середину BC. Найти радиус наибольшего шара, который можно поместить внутри пирамиды.

7.93. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через D, C_1 и середину A_1B_1, делит диагональ D_1B?

7.94. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найти расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через C и середины ребер SB и SD.

7.95. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен 1, радиус вписанного шара — $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Найти длины ребер пирамиды.

7.96. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти радиус шара, проходящего через вершины C и C_1 и касающегося прямых (AB) и (AD).

7.97. Чему равна длина кратчайшего пути по поверхности куба, соединяющего центр какой-либо грани куба с одной из вершин противоположной грани (ребро куба равно a)?

7.98. Из точки S в пространстве проведены три луча: $[SX)$, $[SY)$, $[SZ)$. На этих лучах выбраны точки $A_1, A_2 \in [SX)$, $B_1, B_2 \in [SY)$, $C_1, C_2 \in [SZ)$. Докажите, что отношение объемов тетраэдров $SA_1B_1C_1$ и $SA_2B_2C_2$ равно $\dfrac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SA_2B_2C_2}} = \dfrac{SA_1}{SA_2} \cdot \dfrac{SB_1}{SB_2} \cdot \dfrac{SC_1}{SC_2}$.

7.99. S и P — площади двух смежных граней тетраэдра $ABCD$, a — длина их общего ребра, α — величина угла между этими гранями.

Докажите, что объем тетраэдра равен

$$V_{ABCD} = \frac{2 \cdot S \cdot P \sin\alpha}{3a}.$$

7.100. a и b — длины противоположных ребер тетраэдра $ABCD$, d — расстояние между этими ребрами, ϕ — угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра равен

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}abd\sin\phi.$$

7.101. Доказать, что биссекторная плоскость двугранного угла, образованного смежными гранями тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям этих граней. Доказать также, что отношение этих частей также равно отношению объемов тетраэдров, на которые биссекторная плоскость разбивает данный тетраэдр.

7.102. Основанием пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$. На ребре SA взята точка M так, что $SM = 2AM$. Через M и середины ребер SB и SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

7.103. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину D_1C_1 проведена прямая l, пересекающая прямые BA_1 и AD_1. Какой угол образует прямая l с BA_1?

7.104. $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром 6. Точка M — середина AB, K — такая точка на BC, что $BK = 2KC$. Найти расстояние от K до середины отрезка SM.

7.105. Найти радиус шара, касающегося всех ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3.

7.106. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через центры трех его смежных граней.

7.107. Радиус шара, описанного около правильной шестиугольной пирамиды, равен 2, боковое ребро равно 1. Найти объем пирамиды.

7.108. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 1. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковыми углами. Одно боковое ребро равно $\sqrt{7}$, а два других меньше его. Найти объем пирамиды.

7.109. Дан куб с ребром a. Две вершины правильного тетраэдра лежат на его диагонали, а две оставшиеся — на диагонали его грани. Найти длину ребра тетраэдра.

7.110. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани. Найти радиус сферы, если ребро куба равно a.

7.111. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найти радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1 и BB_1 и вершины A и C_1.

7.112. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найти радиус сферы, проходящей через C, D и середины ребер AB и AC.

7.113. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены две плоскости: одна проходит через A, B, C_1, другая — через A_1, B_1, C. Эти плоскости разделили призму на четыре части. Объем меньшей из этих частей равен V. Найти объем призмы.

7.114. В каком отношении делит объем треугольной пирамиды плоскость, параллельная двум ее скрещивающимся ребрам и делящая одно из других ребер в отношении $2:1$?

7.115. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Сечение призмы проходит через сторону нижнего основания и параллельную ей среднюю линию верхнего основания. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

7.116. Объем пирамиды $ABCD$ равен V. Найти объем пирамиды $KNPB$, если B — середина AP, K лежит на ребре AD и $AK:KD = 3$, N — точка пересечения медиан грани BCD.

7.117. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти двугранные углы между соседними боковыми гранями.

7.118. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной усеченной треугольной пирамиды, если известно, что в нее можно вписать шар, и, кроме того, существует шар, касающийся всех ее ребер.

7.119. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через ребро AA_1 проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC и B_1D. Найти эти углы.

7.120. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка L лежит на ребре BC. Отрезок KL касается шара, вписанного в куб. В каком отношении отрезок KL делится точкой касания?

7.121. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади S_1 и S_2 и образуют между собой угол α. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

7.122. Точки K и L являются серединами ребер AB и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной A и касающегося прямой KL, если ребро куба равно a.

7.123. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a, M — центр грани ADC, N — середина ребра BC. Найти радиус шара, вписанного в трехгранный угол A и касающегося прямой MN.

7.124. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AC = AB$, а ребро SA наклонено к плоскостям граней ABC и SBC под углом 45°. Известно, что вершина A и середины всех ребер пирамиды, кроме SA, лежат на сфере радиуса 1. Доказать, что центр сферы расположен на ребре SA и найти площадь грани ASC.

7.125. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусов $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной A, а другой — в трехгранный угол с вершиной B. Найти ребро тетраэдра.

7.126. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна a, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α. Плоскость, параллельная стороне основания AC и боковому ребру SB пересекает пирамиду так, что в сечении получается четырехугольник, в который можно вписать окружность. Определить радиус этой окружности.

7.127. В правильном тетраэдре точки M и N являются серединами противоположных ребер. Проекция тетраэдра на плоскость, параллельную MN, представляет собой четырехугольник площадью S, один из углов которого равен 60°. Найти площадь поверхности тетраэдра.

7.128. Длина стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер A_1B_1 и AA_1. Проекция отрезка BM на прямую C_1N равна $a/(2\sqrt{5})$. Определить высоту призмы.

7.129. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения. Первое сечение проходит через ребро AB и середину ребра CC_1, а второе — через ребро A_1B_1 и середину ребра BC. Найти отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключенного внутри призмы, к длине ребра AB.

7.130. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной a. Проекцией призмы на плоскость основания является трапеция с боковой стороной AB и площадью, в два раза большей площади основания. Радиус сферы, проходящей через вершины A, B, A_1, C_1 равен a. Найти объем призмы.

7.131. Правильный тетраэдр объемом V повернут около прямой, соединяющей середины его скрещивающихся ребер, на угол $\alpha = 90^\circ$. Найти объем общей части данного тетраэдра и повернутого. Решить задачу для произвольного α, $0 < \alpha < 180^\circ$.

7.132. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. M — центр грани ABB_1A_1, N — точка на ребре B_1C_1, L — середина A_1B_1, K — основание перпендикуляра, опущенного из N на BC_1. В каком отношении точка N делит B_1C_1, если $\angle LMK = \angle MKN$?

7.133. Высота усеченной пирамиды равна h, площадь среднего сечения равна S. В каких пределах может изменяться объем пирамиды?

7.134. Квадрат $ABCD$ является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

7.135. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найти величину плоского угла при вершине пирамиды.

7.136. В правильной шестиугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найти отношение радиусов описанной и вписанной сфер.

7.137. Найти чему равна площадь сечения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной A_1BD и проходящей через точку D_1, если $AD = 2$ и $AB = AA_1 = 1$.

7.138. Через вершину A_1 и середины ребер AC и BC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость. Найти периметр многоугольника, полученного в сечении, если сторона основания призмы равна 8, а боковое ребро равно 3.

7.139. Основанием пирамиды $ABCD$ служит правильный треугольник ABC со стороной, длина которой равна 4. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 1. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной скрещивающимся ребрам AC и BD так, что в сечении получился квадрат. Найти длину стороны этого квадрата.

7.140. Центр вписанного шара делит высоту правильной четырехугольной пирамиды в отношении $4:3$, считая от вершины. Найти отношение радиусов описанного и вписанного шаров.

7.141. В основании пирамиды с объемом 4,8 лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота составляет равные углы с боковыми гранями, а основание высоты лежит внутри основания пирамиды.

7.142. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — $3a$, проведено сечение, параллельное боковому ребру. Найти площадь этого сечения, если оно является ромбом.

7.143. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти радиус сферы, проходящей через вершины A, B и середины ребер A_1B_1, AD.

7.144. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины ребер SA, SC и вершину B проведена плоскость. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, если сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

7.145. В основании четырехугольной пирамиды с вершиной S лежит параллелограмм $ABCD$. Через точку A и середины ребер CD и SB проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит ребро SC?

7.146. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Сфера касается ребер BC и CD и проходит через вершины A и A_1. Найти радиус сферы и расстояние от центра сферы до центра грани $ABCD$.

7.147. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC $(AB = BC)$, а угол между прямыми AB_1 и BC_1 равен 60°. Найти угол между прямой BC_1 и плоскостью грани AA_1C_1C.

7.148. Пусть $ABCDS$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что $P \in [BC]$, $Q \in [CD]$, причем $BP : PC = 1 : 2$, $CQ = QD$. Через вершину C проведена плоскость α, параллельная прямым AP и QS. Найти в каком отношении точка пересечения плоскости α и прямой SA делит ребро SA (начиная от A).

7.149. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Известно, что $P \in [A_1B_1]$, $Q \in [CC_1]$, причем $A_1P : PB_1 = 2$, $C_1Q : QC = 1 : 2$. Найти такие точки $R \in (AA_1)$, $S \in (CD)$, что прямые PQ и RS были бы параллельны.

7.150. Дан прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90^\circ)$ и плоскость α. Известно, что $AC : BC = 3 : 4$, $(AB) \| \alpha$ и угол между плоскостью ABC и плоскостью α равен 60°. Найти угол между плоскостью α и прямой AC.

7.151. Основанием пирамиды с вершиной S служит правильный пятиугольник $ABCDE$. Высота пирамиды проходит через точку E и образует с плоскостью SBC угол 30°. Найти величину угла, образованного гранью SAB и основанием пирамиды.

7.152. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точки P, Q, R лежат на ребрах DD_1, CD и AB соответственно, причем $DQ = QC$, $BR = 2AR$, $PD = PD_1$. Найти угол и расстояние между (PR) и (B_1Q).

7.153. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной, равной a. Высота пирамиды проходит через вершину A. Через центр основания параллельно боковой грани SCD проведена плоскость, причем площадь полученного сечения равна $3a^2\sqrt{2}/8$. Найти высоту пирамиды и косинус угла между секущей плоскостью и основанием.

7.154. Все ребра правильной треугольной призмы равны a. Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями соседних граней.

7.155. В правильной шестиугольной пирамиде через центр основания проведено сечение, параллельное боковой грани. Найти отношение площади сечения к площади боковой грани.

7.156. Два боковых ребра пирамиды, равные a и b, образуют угол $\pi/3$. Угол между их проекциями на плоскость основания равен $2\pi/3$. Найти высоту пирамиды.

7.157. На диагоналях AC и DC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M, N так, что $(MN)\|(BD_1)$. Найти $MN : BD_1$.

7.158. В тетраэдре $ABCD$ выполняется: $(AB)\perp(CD)$, $(AC)\perp(BD)$. Доказать, что $(AD)\perp(BC)$.

7.159. Ребро куба равно a. Через диагональ AC грани $ABCD$ проведена плоскость так, что в сечении куба этой плоскостью получилась трапеция, острый угол которой равен $\arccos(1/\sqrt{10})$. Найти расстояние от вершины B до этой плоскости.

7.160. В правильной треугольной пирамиде расстояние от середины высоты до боковой грани и бокового ребра равно a и b соответственно. Найти высоту пирамиды.

7.161. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точки E, F лежат на ребрах AA_1, BC соответственно, причем $AE = 1/3$, $BF = 1/4$. Через точки E, F и через центр куба проведена плоскость. Найти расстояние от вершины B до этой плоскости.

7.162. В плоскости π дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = l$, $AC = 2a$). Шар радиуса r касается плоскости π в точке B. Две скрещивающиеся прямые проходят через точки A, C и касаются шара. Угол между каждой из этих прямых и плоскостью π равен α. Найти расстояние между прямыми.

7.163. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы.

7.164. Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA, SC, AB и CB треугольной пирамиды $SABC$ на три равные части и проходит через середины ребер AC и SB. Найти длину высоты, опущенной из S.

7.165. В пирамиде $SABC$ двугранные углы при ребрах AB, BC, CA равны 90°, 30°, 90° соответственно. Плоскость пересекает ребра

SB, SC, AC и AB в точках K, L, M, N, причем $KLMN$ — трапеция, основание KL которой втрое больше основания MN. Найти максимальную площадь трапеции, если $SA = 5$, $CS = BS = 13$.

7.166. Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Сфера касается плоскостей всех боковых граней в точках, лежащих на сторонах основания. Найти радиус сферы.

7.167. Три параллельные прямые касаются в точках A, B, C сферы радиуса 4 с центром в точке O. Найти угол BAC, если известно, что площадь треугольника OBC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

7.168. Пусть $DABC$ — треугольная пирамида. Точка Q — середина ребра AC, точка R лежит на ребре BD, причем $DR = 2RB$. Точки M, N лежат на прямых AR и DQ соответственно и $(MN)\|(BC)$. Найти отношения $MN : BC$ и $DN : NQ$.

7.169. Дана четырехугольная пирамида $FABCD$. Ее основанием является параллелограмм $ABCD$ ($AB = 2$, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$). Известно, что $AF = \sqrt{3}$, $\angle FAD = 30^\circ$ и двугранный угол между плоскостями FAB и DAB равен 60°. Найти длину ребра FA и угол, образованный ребром FA с плоскостью основания.

7.170. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$. Ее основанием является прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды проходит через вершину A. Найти величину двугранного угла между плоскостями SBC и SCD, если $AD = SA = 2a$, $AB = a$.

7.171. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки P, M лежат на ребрах BC и DD_1 соответственно, причем $BP = 2PC$, $DM = 5MD_1/4$. Через точки P, M параллельно диагонали BD_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит ребро AD? В каком отношении она делит объем?

7.172. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Ее большее основание AD равно a, острый угол равен 60°, а меньшее основание равно боковой стороне. Трапецию согнули вдоль диагонали AC так, что угол между плоскостями ABC и ACD стал равным 45°. Найти расстояние между точками B и D.

7.173. В основании треугольной пирамиды $PQRS$ лежит правильный треугольник QRS. Высота пирамиды, опущенная из вершины P, проходит через середину ребра RS. Известно, что $PQ = m\sqrt{2}$, $QR = m$. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам PQ и RS и отстоящая от вершины Q на расстоянии d. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

7.174. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с нижним основанием ABC и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 рассечена плоскостью, проходящей через точки E, F, C, где E — середина ребра AA_1, F лежит на ребре BB_1, причем $FB_1 = 2BF$. Найти объем части призмы, заключенной между секущей плоскостью и нижним основанием, если объем призмы равен V.

7.175. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Пусть O — центр сферы, касающейся AA_1, A_1B_1, B_1C_1. Найти радиус сферы, если расстояние от точки O до прямой BD равно $1/3$.

7.176. Рассматривается ортогональная проекция куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную диагонали куба. Во сколько раз площадь проекции будет больше площади сечения куба плоскостью, проходящей через середину диагонали перпендикулярно к ней?

7.177. Из точки O, лежащей в основании ABC треугольной пирамиды $SABC$, проведены прямые OA_1, OB_1, OC_1, параллельные ребрам SA, SB, SC соответственно — до пересечения с гранями SBC, SCA, SAB в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\frac{OA_1}{SA} + \frac{OB_1}{SB} + \frac{OC_1}{SC} = 1.$$

7.178. Доказать, что если точка перемещается в плоскости основания правильной пирамиды, оставаясь внутри этого основания, то сумма расстояний от этой точки до боковых граней постоянна.

7.179. Доказать, что если все двугранные углы некоторой треугольной пирамиды равны, то и все ребра этой пирамиды равны.

7.180. Доказать, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

7.181. В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум ее пересекающимся ребрам. Найти сечение с наибольшей площадью.

Группа Б

7.182. Основание треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Известно, что $AC = 48$, а площадь треугольника ABC равна 432. Высота пирамиды проходит через середину боковой стороны. Точки A, B, C и середина высоты пирамиды лежат на сфере радиуса 30. Найти объем пирамиды, если ее высота меньше чем 70.

7.183. Пусть $SABCD$ — четырехугольная пирамида, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Точки K, L, M лежат на ребрах SB, SA, AD соответственно, причем $AL = 2LS$, $AM = MD$, $KB = 3SK$. На прямой (LM) выбрана точка X, а на прямой (SC) — точка Y так, что $(XY)\|(AK)$. Найти $LX : XM$.

7.184. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Боковое ребро $[SA]$ образует с плоскостью основания угол $\phi = \operatorname{arctg}(2/\sqrt{5})$, а боковые ребра $[SC]$ и $[SB]$ одинаково наклонены к плоскости основания. Параллельно ребрам $[SA]$ и $[BC]$ проведена плоскость α, причем расстояние от точки S до плоскости α равно 1. Известно, что существует сфера с центром O, касающаяся всех граней пирамиды и плоскости α. Найти радиус этой сферы, если известно, что точки S и O лежат по одну сторону от плоскости α.

7.185. В правильный тетраэдр $ABCD$ с длиной ребра 1 вписан шар. Найти радиус шара, касающегося этого шара и трех граней ADC, ABC и ADB.

7.186. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC. Все ребра призмы имеют длину 1; MN — средняя линия грани BCC_1B_1, параллельная ребру BC. Через центр треугольника ABC проходит прямая, пересекающая прямые AB_1 и MN в точках P и Q соответственно. Найти длину отрезка PQ.

7.187. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC со сторонами $|AB| = 6$, $|AC| = 10$ и $|BC| = 14$. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. На биссектрисе $\angle BAC$ выбрана точка E так, что радиус шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной A и касающегося прямой SE, равен $2/13$. Найти длину отрезка AE.

7.188. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найти объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $2AB\sqrt{2}/3$. (МФТИ. Билет 9, 1991)

7.189. В сферу радиуса $5/8$ вписана четырехугольная пирамида $SABCD$, основанием которой служит параллелограмм $ABCD$. Точка пересечения диагоналей параллелограмма является ортогональной проекцией вершины S на плоскость $ABCD$. Плоскость каждой грани пирамиды касается второй сферы, расстояние от центра которой до прямой AD вдвое больше расстояния до прямой BC. Найти радиус второй сферы и расстояние от ее центра до вершины S, если $AD : AB = 5 : 3$. (МФТИ. Билет 10, 1991)

7.190. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точки D и E являются серединами ребер AC и BC соответственно. Через точку E проведена плоскость β, пересекающая ребра AB и SB и удаленная от точек D и В на одинаковое расстояние, равное $1/2$. Найти Длины отрезков, на которые плоскость делит ребро SB, если $BC = 4$, $SC = 3$. (МФТИ. Билет 1, 1992)

7.191. Сфера вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SABCD$. Найти радиус сферы, если объем пирамиды $SABCD$ равен 64. (МФТИ. Билет 5, 1992)

7.192. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SKLMN$ (S — вершина), и вписана в прямую треугольную призму $ABCA'B'C'$, у которой $AB = AC$, $BC = 4\sqrt{2}$, а боковое ребро AA' лежит на прямой KL. Найти радиус сферы, если известно, что прямая SM параллельна плоскости $BB'C'C$. (МФТИ. Билет 8, 1992)

7.193. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = CB = 5$, $\angle ACB = 2\arcsin(3/5)$. Плоскость, перпендикулярная прямой A_1C, пересекает ребра AC и A_1C_1 в точках D, E соответственно, причем $AD = AC/3$, $EC_1 = A_1C_1/3$. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью. (МФТИ. Билет 9, 1992)

7.194. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $(BC)\|(AD)$, $BC = 1$, $AD = 5$, $\angle BAD = \operatorname{arctg}(3/2)$. Плоскость, перпендикулярная прямой A_1D, пересекает ребра AD и A_1D_1 в точках E и F соответственно, причем $AE = FD_1 = 5/3$. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью. (МФТИ. Билет 10, 1992)

7.195. Через середину ребра AC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина) проведены плоскости α, β, каждая из которых образует угол $\pi/6$ с плоскостью ABC. Найти площади сечений пирамиды $SABC$ плоскостями α, β, если эти сечения имеют общую сторону длины 1, лежащую в грани ABC, и $\alpha\perp(SA)$. (МФТИ. Билет 1, 1993)

7.196. На сторонах BC и AD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) взяты точки P, Q. Сечения пирамиды двумя перпендикулярными плоскостями α, β, проходящими через прямую PQ, — трапеции с равными основаниями. Грань SAB образует угол $\pi/4$ с пересекающей ее плоскостью сечения, а угол между гранями SAB и $ABCD$ равен $\operatorname{arctg} 2$. Найти площади сечений, если $PQ = 13$. (МФТИ. Билет 2, 1993)

7.197. Основание прямой призмы $KLMNK'L'M'N'$ — ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине K. Точки E и F — середины ребер LL' и LM призмы. Ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) лежит на прямой LN, вершины D и B — на прямых MM' и EF соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $SA = 2AB$. (МФТИ. Билет 5, 1993)

7.198. Точки E и F — середины ребер CC' и $C'D'$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Ребро KL правильной треугольной пирамиды $KLMN$ (K — вершина) лежит на прямой AC, а вершины N и M — на прямых DD' и EF соответственно. Найти отношение объемов призмы и пирамиды, если $AB : BC = 4 : 3$, $KL : MN = 2 : 3$. (МФТИ.

Билет 6, 1993)

7.199. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена прямая призма, в основании которой лежит ромб. Одна из граней призмы принадлежит основанию пирамиды, другая грань — боковой грани пирамиды. Какой наибольший объем может иметь призма, если ребро основания пирамиды равно 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$? (МФТИ. Билет 9, 1993)

7.200. Внутри правильной четырехугольной пирамиды расположена прямая призма $KLMNK'L'M'N'$, в основании которой лежит ромб $KLMN$ с углом 60° при вершине L. Ребро KK' принадлежит основанию пирамиды, а ребро LL' — диагонали этого основания. Какой наибольший объем может иметь призма, если диагональ основания пирамиды равна 6, а высота пирамиды равна $\sqrt{3}$? (МФТИ. Билет 10, 1993)

7.201. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ с углом BAD, равным $2\arccos(1/3)$. Сфера касается всех звеньев ломаной $ABCC_1A_1$ и пересекает ребро BB_1 в точках B_1 и M. Найти объем призмы и радиус сферы, если $B_1M = 1$. (МФТИ. Билет 1, 1994)

7.202. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K и касается всех звеньев ломаной $BCAA_1B_1$. Найти объем призмы и радиус сферы, если $C_1K = 4$. (МФТИ. Билет 3, 1994)

7.203. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 3\sqrt{2}$, высота пирамиды равна 8. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку A, а другая - через точки B и D, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SC плоскости сечений? Найти расстояние между плоскостями сечений и объемы многогранников, на которые пирамида разбивается этими плоскостями. (МФТИ. Билет 1, 1995)

7.204. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, $AB = 2$, $AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$, $SA = 3\sqrt{2}$. Сечения пирамиды двумя параллельными плоскостями, одна из которых проходит через точку C и середину ребра AB, а другая — через точку B, имеют равные площади. В каком отношении делят ребро SA плоскости сечений? Найти объемы многогранников, на которые разбивают пирамиду плоскости сечений, а также расстояние между этими плоскостями. (МФТИ. Билет 2, 1995)

7.205. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = 1/4$, $CK = 3/4$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}(7/6)$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (МФТИ. Билет 9,1995)

7.206. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 25$, $BC = 40$. На ребре AB взята точка M так, что $BM = 15$. Через точку M проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}(11/15)$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет. (МФТИ. Билет 10, 1995)

7.207. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник $ABCD$. Острые углы D_1DA и D_1DC равны между собой, угол между ребром D_1D и плоскостью основания призмы равен $\arccos(1/\sqrt{13})$, а $CD = 5\sqrt{6}$. Все грани призмы касаются некоторой сферы. Найти длину BC, угол между плоскостями D_1DC и ABC, а также расстояние от точки D до центра сферы. (МФТИ. Билет 1, 1996)

7.208. Все грани призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ касаются некоторого шара. Основанием призмы служит квадрат $ABCD$ со стороной, равной 5. Угол C_1CD — острый, а $\angle C_1CB = \operatorname{arctg}(5/3)$. Найти $\angle C_1CD$, угол между боковым ребром и плоскостью основания призмы, а также расстояние от точки C до точки касания шара с плоскостью AA_1D. (МФТИ. Билет 2, 1996)

7.209. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK = 2KC$. Найти: 1) расстояние от точки N до прямой AK; 2) расстояние между прямыми MN и AK; 3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK. (МФТИ. Билет 5, 1996)

7.210. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 4, точки E и

F — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка P расположена на ребре CD так, что $CP = 3PD$. Найти: 1) расстояние от точки F до прямой AP; 2) расстояние между прямыми EF и AP; 3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника EFP. (МФТИ. Билет 6, 1996)

7.211. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро равно a и равно диагонали основания $ABCD$. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость P, образующая с прямой AD угол, равный $\arcsin(\sqrt{2}/4)$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P и радиус шара, касающегося плоскости P и четырех прямых, которым принадлежат боковые ребра пирамиды. (МФТИ. Билет 5, 1997)

7.212. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AB и CD взаимно перпендикулярны, $AD = BC$, расстояние от середины E ребра AB до плоскости ACD равно h, $\angle DAC = \pi/2$, $\angle ACD = \pi/4$, угол между ребром DC и гранью ABC равен $\pi/6$. Найти расстояние от точки E до плоскости BCD, угол между ребром AB и гранью ACD, а также угол между гранями ABD и ABC. (МФТИ. Билет 9, 1997)

7.213. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 6, а высота равна $3/\sqrt{7}$. На ребрах AC, A_1C_1 и BB_1 расположены соответственно точки P, F и K так, что $AP = 1$, $A_1F = 3$ и $BK = KB_1$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через точки P, F и K. Найти площадь сечения и угол между плоскостью основания призмы и плоскостью сечения. (МФТИ. Билет 1, 1998)

7.214. Две противоположные боковые грани четырехугольной пирамиды $SABCD$ перпендикулярны основанию, высота пирамиды равна $\sqrt{5}$. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AD = BC$), описанная около окружности и такая, что $AB = 6$, $\angle BAD = \pi/3$. Найти расстояние от точки D до плоскости SAB. Внутри пирамиды расположен конус так, что окружность его основания вписана в треугольник SCD, а вершина принадлежит грани SAB. Найти объем конуса. (МФТИ. Билет 5, 1998)

7.215. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$, точка F — центр грани ABC. Найти угол между прямыми BC и KE, расстояние между этими прямыми и радиус сферы, проходящей через точки A, B, E и F. (МФТИ. Билет 1, 1999)

7.216. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна $2\sqrt{2}$. На ребрах SA и SD расположены точки E и F так, что $AE = 2ES$, $SF = 5DF$. Через точки E и F проведена плоскость α, параллельная CD. Найти: 1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью α; 2) радиус сферы с центром в точке A, касающейся плоскости α; 3) угол между плоскостью α и плоскостью ABC. (МФТИ. Билет 5, 1999)

7.217. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2\operatorname{arctg}(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1, а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1. Найти: 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$; 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC. (МФТИ. Билет 1, 2000)

7.218. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2\arcsin(1/6)$, а сторона основания ABC равна 2. Точки K, M, N — середины ребер AB, CD, AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость α перпендикулярно отрезку KM. В каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью α и расстояние от точки N до плоскости α. (МФТИ. Билет 5, 2000)

7.219. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным? (МФТИ. Билет 1, 2001)

7.220. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB = \operatorname{arctg}\sqrt{37/3}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти: 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1; 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1; 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1. (МФТИ. Билет 5, 2001)

7.221. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{3/2}$. Точки

E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $AE/EB = AF/FD = SK/KC = 1/2$. Найти: 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK. (МФТИ. Билет 9, 2001)

7.222. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2. Плоскость α, параллельная прямым SB и AD, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность радиуса $\sqrt{15}/5$. Найти: 1) в каком отношении плоскость α делит ребра пирамиды; 2) отношение объемов частей, на которые плоскость α разбивает пирамиду; 3) расстояние от центра описанной около пирамиды сферы до плоскости α. (МФТИ. Билет 3, 2002)

7.223. Расстояние от центра O шара радиуса 12, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$. Найти: 1) высоту пирамиды; 2) расстояние от точки O до боковой грани пирамиды; 3) радиус вписанного в пирамиду шара. (МФТИ. Билет 5, 2002)

7.224. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота SO равна 3. Точка M — середина ребра SB, точка K — середина ребра BC. Найти: 1) объем пирамиды $AMSK$; 2) угол между прямыми AM и SK; 3) расстояние между прямыми AM и SK. (МФТИ. Билет 9, 2002)

7.225. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найти радиус сферы, касающейся: а) ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1; б) ребер BA, BB_1, BC и прямой DA_1 (МФТИ. Билет 5, 2003)

7.226. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ — треугольник ABC, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. Высота призмы равна $\sqrt{6}$. На сторонах AC, BC и A_1C_1 выбраны соответственно точки D, E и D_1 так, что $DC = AC/4$, $BE = CE$, $A_1D_1 = A_1C_1/3$, и через эти точки проведена плоскость α. Найти: 1) площадь сечения призмы плоскостью α; 2) угол между плоскостью α и плоскостью ABC; 3) расстояние от точек C_1 и C до плоскости α. (МФТИ. Билет 9, 2003)

7.227. В пирамиде $ABCD$ длина отрезка BD равна $5/2$, точка E — середина AB, а F — точка пересечения медиан грани BCD, причем $EF = 8$. Сфера радиуса 5 касается плоскостей ABD и BCD в точках

E и F соответственно. Найти двугранный угол между гранями ABD и BCD, площадь грани BCD и объем пирамиды $ABCD$. (МФТИ. Билет 1, 2004)

7.228. Вписанные окружности граней SBC, SAC и SAB треугольной пирамиды $SABC$ попарно пересекаются и имеют радиусы $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$ соответственно. Точка K является точкой касания окружностей со стороной SA, причем $SK = 5$. Найти длину отрезка AK, периметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC. (МФТИ. Билет 5, 2004)

7.229. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины 1. Найти: а) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1, середину ребра AD и параллельной прямой A_1C_1; б) площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и параллельной прямой A_1C_1, у которой площадь проекции сечения на плоскость A_1C_1A максимальна. (МФТИ. Билет 9, 2004)

7.3. Фигуры вращения

Группа А

7.230. Радиусы двух шаров равны 2 и 5. Через их единственную общую точку проведена плоскость, площадь сечения которой меньшего шара равна 0,4. Найти площадь сечения этой плоскостью большего шара.

7.231. Расстояние от центра верхнего основания цилиндра до плоскости нижнего основания цилиндра равно радиусу основания цилиндра и равно 6. Найти расстояние от центра верхнего основания до хорды нижнего основания, стягивающего дугу $90°$.

7.232. Площадь сечения усеченного конуса плоскостью, проходящей через ось его симметрии, равна 5, а один из углов между диагоналями сечения равен α. Найти высоту конуса.

7.233. Радиус основания конуса равен R, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

7.234. Высота конуса равна h. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислить объем конуса.

7.235. Радиус основания конуса равен R. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 90°. Вычислить объем конуса.

7.236. Определить боковую поверхность и объем усеченного конуса с образующей, равной l, описанного около шара радиуса r.

7.237. Радиус основания конуса равен R. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении $1:2$. Найти объем конуса.

7.238. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определить отношение объемов полученных частей конуса.

7.239. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в a раз больше площади верхнего основания. Во сколько раз объем усеченного конуса больше объема шара?

7.240. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

7.241. Высота цилиндра равна радиусу его основания и имеет длину a. Через ось цилиндра проведена другая цилиндрическая поверхность, делящая окружность основания на две дуги, длины которых относятся, как $2:1$. Эта цилиндрическая поверхность делит данный цилиндр на две части. Найти боковую поверхность и объем большей части цилиндра.

7.242. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно q. Найти отношение объемов этих тел. При каких значениях q задача не имеет решения?

7.243. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины. Высота конуса и его образующая равны h и l. Вычислить площадь поверхности, описываемой высотой конуса.

7.244. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы прямую призму можно было вписать в цилиндр?

7.245. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы цилиндр можно было вписать в прямую призму?

7.246. Цилиндр рассечен плоскостью, не параллельной основаниям и их не пересекающей. Какие измерения нужно произвести, чтобы вычислить объем одной из отсеченных частей?

7.247. Фигура получена вращением прямоугольника около оси, параллельной одной из его сторон и лежащей в плоскости прямоугольника, но его не пересекающей. Доказать, что объем этой фигуры равен произведению площади прямоугольника на длину окружности, описываемой при вращении центром прямоугольника.

7.248. Цилиндр называется *равносторонним*, если его высота равна диаметру основания. В правильный тетраэдр с ребром a вписать равносторонний цилиндр так, чтобы одно из оснований цилиндра содержалось в одной из граней тетраэдра, а окружность второго основания касалась трех других граней. Вычислить объем и площадь боковой поверхности этого цилиндра.

7.249. В куб с ребром a вписать равносторонний цилиндр так, чтобы ось цилиндра содержала диагональ куба, а окружности оснований цилиндра касались граней куба. Вычислить объем этого цилиндра.

7.250. Диаметр основания цилиндра увеличили вдвое и одновременно уменьшили вдвое его высоту. Как изменилась площадь боковой поверхности и объем цилиндра?

7.251. В каком случае площадь треугольника, получающегося в сечении конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, имеет наибольшую величину?

7.252. В конус высоты h и с радиусом основания R вписать цилиндр с максимальной площадью боковой поверхности и найти эту площадь.

7.253. Дана сфера радиуса R. На расстоянии, равном $2R$ от центра сферы, взята точка S и из нее проведены все прямые, касающиеся сферы (т.е. имеющие с ней ровно одну общую точку). Что из себя представляет объединение этих касательных? Вычислить площадь поверхности, составленных из отрезков касательных от точки S до точек касания.

7.254. В сферу радиуса R вписать правильный тетраэдр (описать построение). Найти объем этого тетраэдра.

7.255. В сферу радиуса R вписать куб (описать построение). Найти объем этого куба.

7.256. Около сферы радиуса R описать правильный тетраэдр (описать построение). Найти объем этого тетраэдра.

7.257. Около сферы радиуса R описать правильный октаэдр (описать построение). Найти объем этого октаэдра.

7.258. Три образующие конуса содержатся в прямых — осях прямоугольной системы координат. В этот конус вписана сфера радиуса R. Вычислить боковую поверхность конуса.

7.259. Каждое ребро куба разделено на три конгруэнтные части. Доказать, что полученные двадцать четыре точки деления принадлежат одной сфере. Вычислить площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна a.

7.260. Гранями параллелепипеда с ребрами длины a являются ромбы с острым углом 60°. Вычислить объем вписанного в параллелепипед шара.

7.261. Из бумажного прямоугольника со сторонами a и b склеивают боковую поверхность цилиндра. Какие стороны следует склеить между собой, чтобы цилиндр с такой боковой поверхностью имел наибольший объем?

7.262. Доказать, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, но не пересекающая его основания, делит ось цилиндра, боковую поверхность и объем в одинаковом отношении.

7.263. Цилиндр пересекается плоскостью, не перпендикулярной его образующей и не пересекающей его основания. Какая кривая получится, если развернуть линию пересечения вместе с боковой поверхностью цилиндра на плоскость?

7.264. Найти геометрическое место центров кругов, образуемых при сечении данного шара плоскостями, проходящими: а) через данную прямую a; б) через данную точку A.

7.265. Доказать, что отношение объемов шара и описанного около него усеченного конуса равно отношению площадей их полных поверхностей.

7.266. Плоскость касается двух касающихся шаров радиусов R и r в точках A и B. Найти длину отрезка AB.

7.267. Центры трех сфер радиусов 3, 4 и 6 расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 11. Сколько существует плоскостей, касающихся одновременно этих сфер?

7.268. Внутри конуса находятся четыре шара равного радиуса. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

7.269. Радиус основания и высота конуса равны 1. Внутри конуса находятся три шара равного радиуса. Каждый шар касается двух других, основания конуса и боковой поверхности конуса. Найти радиус каждого из этих шаров.

7.270. Два равных конуса с общей вершиной S, высотой h и радиусом основания R $(R < h)$ касаются друг друга и плоскости P, находясь по одну сторону от этой плоскости. Пусть l — прямая, по которой пересекаются плоскости оснований конусов. Найти угол между прямой l и плоскостью P.

7.271. Два конуса, осевое сечение каждого из которых является правильным треугольником со стороной a, лежат на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга и имея общую вершину. На какой высоте над этой плоскостью находится точка касания оснований этих конусов?

7.272. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на 8 частей. В каждую из этих частей вписано по шару. а) Найти отношение объема вписанного в одну из частей шара к объему исходного шара. б) Центры вписанных шаров являются вершинами многогранника. Найти отношение объема этого многогранника и данного шара.

7.273. Найти объем конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг радиуса R.

7.274. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $150°$. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найти угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

7.275. Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим два шара, каждый из которых касается этих двух плоскостей, плоскости основания и боковой поверхности конуса, только один касается изнутри, а другой — снаружи. Найти отношение радиусов шаров.

7.276. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина — на границе другого основания. Найти сторону правильного треугольника.

7.277. Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб, четыре вершины которого расположены на основании конуса, а четыре — на его боковой поверхности. Найти отношение объемов куба и конуса.

7.278. Три одинаковых шара касаются попарно между собой, а также касаются боковой поверхности и плоскости основания конуса. Центры шаров находятся внутри конуса. Найти угол в осевом сечении конуса, если известно, что точка касания каждого шара с боковой поверхностью конуса делит соответствующую образующую пополам.

7.279. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 30°$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Известно, что существует конус, вершина которого совпадает с точкой A, а основание вписано в треугольник SBC. Найти объем пирамиды.

7.280. Найти объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 1 и 2 вокруг диагонали.

7.281. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найти отношение объемов цилиндра и куба.

7.282. ABC — правильный треугольник со стороной 3, M и K —

точки на BA и CA такие, что $BM = CK = 1$. Найти объем тела, полученного при вращении треугольника ABC вокруг прямой MK.

7.283. Основанием пирамиды $ABCD$ является правильный треугольник ABC со стороной 12. Ребро BD перпендикулярно плоскости ABC и равно $10\sqrt{3}$. Все вершины этой пирамиды лежат на боковой поверхности прямого кругового цилиндра, ось которого пересекает ребро BD и плоскость ABC. Найти радиус основания цилиндра.

7.284. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если диагонали сечения перпендикулярны ребрам SA и SD.

7.285. Внутри прямого кругового конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса, вершины, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найти отношение объемов конуса и куба.

7.286. Основанием пирамиды служит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно b, M — точка на ребре SA. Точки M, B, D лежат на поверхности прямого кругового конуса с вершиной в точке A, точка C — в плоскости основания конуса. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Группа Б

7.287. Пусть точки A, B и C не принадлежат одной прямой. Что из себя представляет множество точек пространства, расстояния от которых до плоскости $\alpha = (ABC)$ не превышают данной величины h и проекции которых на прямые BC, CA, AB принадлежат одной прямой?

7.288. Доказать, что в сечении боковой поверхности цилиндра плоскостью, не перпендикулярной оси цилиндра и не пересекающей его основания, получается эллипс. Указать наибольший и наименьший диаметры этого эллипса.

7.289. Что из себя представляет множества точек, находящихся на данных расстояниях от плоскости α и от прямой l, наклоненной к этой плоскости?

7.290. Два цилиндра, имеющие равные радиусы оснований, расположены так, что их оси пересекают друг друга под прямым углом. Нарисовать фигуру, получившуюся в пересечении этих цилиндров. Вычислить ее объем, если радиусы оснований цилиндров равны r.

7.291. Вершина конической поверхности вращения совпадает с началом O прямоугольной системы координат $Oxyz$, ось вращения совпадает с положительным направлением оси Oz, луч, вращением которого получается поверхность, образует с осью Oz угол ϕ. Написать уравнение этой поверхности в координатах.

7.292. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы данный выпуклый четырехгранный угол мог быть вписан в коническую поверхность вращения так, чтобы ребра угла были образующими конической поверхности?

7.293. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы в данный выпуклый четырехгранный угол могла быть вписана коническая поверхность вращения так, чтобы угол и коническая поверхность пересекались в точности по четырем образующим поверхности — лежащим в гранях угла?

7.294. Доказать, что для того, чтобы в усеченный конус можно было вписать сферу, касающуюся оснований и каждой образующей конуса, необходимо и достаточно, чтобы длина высоты конуса была средним пропорциональным между диаметрами верхнего и нижнего основания конуса: $2R : h = h : 2r$ (здесь r — радиус верхнего основания, R — радиус нижнего основания, h — высота конуса).

7.295. При помощи циркуля и линейки построить диаметр данного материального (например, из углепластика) шара.

7.296. Все четыре стороны пространственного четырехугольника касаются сферы. Доказать, что четыре точки касания принадлежат одной плоскости.

7.297. Рассмотрим гексаэдр (шестигранник), все грани которого — четырехугольники, около которых можно описать окружность. Доказать, что существует единственная сфера, проходящая через все 8 вершин этого многогранника.

7.298. Что из себя представляет множество точек пространства, не содержащееся в одной плоскости, не совпадающее со всем пространством, и такое, что через каждые три его точки проходит окружность, содержащаяся в этом множестве?

7.299. Даны четыре попарно не пересекающиеся сферы равных радиусов с центрами, не принадлежащими одной плоскости. а) Сколько существует сфер, касающихся одновременно всех четырех сфер? б) Как построить эти сферы?

7.300. Пересечение сферы с двугранным углом, ребро которого проходит через центр сферы, называется *сферическим двуугольником.* Ограничивающие его две полуокружности называются его *сторонами*, величина двугранного угла, равная величине угла между касательными, проведенными к полуокружностям в точке их пересечения, называется *величиной угла двуугольника.* Доказать, что: а) если величины углов двух двуугольников на одной сфере равны, то сами двуугольники конгруэнтны; б) исходя из того, что конгруэнтные сферические двуугольники имеют равные площади, вывести для площади двуугольника формулу: $S_\alpha = 2R^2\alpha$, где R — радиус сферы, α — радианная мера угла двуугольника.

7.301. *Сферическим треугольником* называется пересечение сферы и трехгранного угла с вершиной в центре сферы (или часть сферы, ограниченная тремя дугами больших кругов). Вычислить площадь сферического треугольника ABC, рассматривая его как пересечение трех двуугольников: одного с вершиной в точке A и соответствующем углом α, другого с вершиной B и углом величины β и третьего с вершиной C и углом γ.

7.302*. Доказать, что если грани тетраэдра равновелики (т.е. имеют равные площади), то описанная около него и вписанная в него сферы концентрические.

7.303*. Вывести формулу Симпсона: если площадь $S(x)$ сечения пространственной фигуры плоскостью P_x, проведенной перпендикулярно некоторой координатной прямой Ox через точку с координатой x, выражается многочленом от переменной x не выше второй степени, то объем фигуры можно вычислить по формуле $V = h(S_0 + 4S_m + S_n)/6$, где h — высота фигуры, S_0 — площадь непустого сечения с наименьшей координатой $x = x_0$, S_n — площадь непустого сечения с наибольшей координатой $x = x_1$, S_m — площадь сечения с координатой $x = (x_0 + x_1)/2$. Проверить справедливость этой формулы на уже известных формулах для объемов.

7.304. Можно ли внутри куба с ребром 1 разместить три цилиндра высоты 1 и диаметра $1/2$ так, чтобы они не могли перемещаться внутри куба?

7.305. С помощью циркуля и линейки построить на плоскости отрезок, равный радиусу данного деревянного шара.

7.306. Планета получена вращением квадрата со стороной a вокруг его диагонали. Маршрут по поверхности этой планеты называется кругосветным, если он замкнут и симметричен относительно центра квадрата. Найти длину кратчайшего кругосветного маршрута.

7.307. а) Доказать, что если все сечения тела плоскостями являются кругами, то это тело — шар. б) Доказать, что если все сечения тела плоскостями, проходящими через данную точку, являются кругами, то это тело — шар.

7.308. а) Можно ли четырьмя шарами закрыть точечный источник света? (Источник считается закрытым, если любой исходящий из него луч пересекает хотя бы один из шаров.) б) Каким наименьшим числом шаров одинакового радиуса можно закрыть точечный источник света?

7.309. В пространстве заданы тридцать ненулевых векторов. Доказать, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.

7.310. Три шара попарно касаются, а плоскость касается этих шаров в точках A, B и C. Найти радиусы этих шаров, если стороны треугольника ABC равны a, b и c.

7.311. Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найти отношение радиусов шаров.

7.312. В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Доказать, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

7.313. В пространстве расположены четыре конуса с общей вершиной и одинаковой образующей (но, вообще говоря, с разными радиусами оснований). Каждый из этих конусов касается двух других. Доказать, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.

7.314. На плоскости лежат n равных конусов с общей вершиной ($n \geqslant 3$). Каждый конус касается двух других конусов. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

7.315. Оси трех равных попарно касающихся цилиндрических поверхностей взаимно перпендикулярны. Найти радиус наибольшей цилиндрической поверхности, которая может пройти между данными, если их радиус равен r.

7.316. а) Две окружности, не лежащие в одной плоскости, пересекаются в двух точках A и B. Доказать, что существует единственная сфера, содержащая эти окружности. б) Докажите справедливость утверждения предыдущего пункта в случае, когда обе окружности касаются прямой l в точке A.

7.317. а) В пространстве расположены несколько окружностей, причем любые две из них имеют пару общих точек. Доказать, что либо все эти окружности имеют две общие точки, либо все они лежат на одной сфере (или в одной плоскости). б) Три окружности попарно касаются друг друга (т.е. имеют общие точки и общие касательные в этих точках), причем все точки касания различны. Доказать, что эти окружности лежат на одной сфере (или в одной плоскости).

7.318. На сфере радиуса 2 расположены три попарно касающиеся окружности радиуса 1. Найти радиус наименьшей окружности, расположенной на этой сфере и касающейся всех трех окружностей.

7.319. Доказать, что в четырехгранный угол можно вписать сферу тогда и только когда, когда суммы его противоположных плоских углов равны.

7.320*. Доказать, что многогранник, описанный около сферы радиуса 10 и целиком лежащий внутри сферы радиуса 11, имеет более двадцати двух граней.

7.321. Доказать, что если все грани многогранника являются вписанными многоугольниками, а в каждой его вершине сходятся три ребра, то этот многогранник можно вписать в шар.

7.322*. У белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра. Доказать, что если выполнено хотя бы одно из условий: а) черных граней больше половины; б) площадь черных граней больше площади половины площади поверхности многогранника, то в этот многогранник нельзя вписать шар.

7.323*. У белого многогранника некоторые вершины покрашены черной краской так, что никакие две черные вершины не соединены ребром, и черных вершин больше половины. Доказать, что в этот многогранник нельзя вписать шар.

7.324*. Известно, что все ребра многогранника M равны и касаются некоторого шара. а) Доказать, что если одна из граней M имеет нечетное число сторон, то существует шар, описанный около M. б) Обязательно ли в условиях пункта (а) существует вписанный в M шар? в) Доказать, что если все грани M имеют одинаковое число сторон, то существует вписанный в M шар. г) Обязательно ли в условиях пункта (в) существует описанный около M шар?

7.325*. Сколько существует шаров, касающихся всех ребер данного тетраэдра или их продолжений?

7.326. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр, если радиусы вневписанных шаров равны r_1, r_2, r_3 и r_4.

7.327. Конус расположен внутри треугольной пирамиды $SABC$ так, что плоскость его основания совпадает с плоскостью одной из граней пирамиды, а три других грани касаются его боковой поверхности. Найти объем пирамиды, если длина образующей конуса равна 1, $\angle ABS = \pi/2$, $\angle BSC = \pi/12$, $\angle SCB = \pi/4$. (МФТИ. Билет 1, 1991)

7.328. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найти объем пирамиды, если $MK = 5/4$, $\angle NMK = \pi/2$, $\angle KML = 3\operatorname{arctg}(1/3)$, $\angle NML = \pi/2 - \operatorname{arctg}(1/3)$. (МФТИ. Билет 2, 1991)

7.329. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$), $BC = 4AD/5$, $\angle ASD = \angle CDS = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен $5/3$. Найти объем пирамиды. (МФТИ. Билет 5, 1991)

7.330. В четырехугольной пирамиде $SKLMN$ основанием является параллелограмм $KLMN$, $\angle LSM = \angle KSL = \pi/2$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований усеченного конуса, высота которого равна $3/2$, а радиусы оснований равны 1 и $5/4$. Найти объем пирамиды. (МФТИ. Билет 8, 1991)

7.331. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребро AH вдвое больше высоты пирамиды. По одну сторону от плоскости грани $ABCD$ расположен цилиндр, окружность основания которого проходит через центр этой грани. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SCD и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке C. Найти отношение объемов цилиндра и пирамиды. (МФТИ. Билет 5, 1994)

7.332. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ имеет длину $11/5$ и составляет с плоскостью основания ABC угол, равный $\operatorname{arctg}(5\sqrt{2}/4)$. Цилиндр расположен так, что окружность одного из его оснований проходит через середину ребра AC и не пересекает грань SAB. Ортогональные проекции цилиндра на плоскости SAB и SBC — прямоугольники с общей вершиной в точке S. Найти объем цилиндра. (МФТИ. Билет 6, 1994)

7.333. Сфера, касающаяся верхнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его нижнего основания и делит ось цилиндра в отношении $2:6:1$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии $2\sqrt{6}$ друг от друга. (МФТИ. Билет 9, 1994)

7.334. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро равно $\sqrt{14}$, длина стороны основания $ABCD$ призмы равна 6. Окружность основания прямого кругового конуса вписана в треугольник BC_1D, а вершина конуса лежит в плоскости ABC_1. Найти объем конуса. (МФТИ. Билет 5, 1995)

7.335. Окружность основания прямого кругового цилиндра вписана в боковую грань SAB правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), центр другого основания цилиндра лежит в плоскости SBC. Найти объем цилиндра, если $AB = 6$, $SB = 5$. (МФТИ. Билет 6, 1995)

7.336. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ACD, а вершиной конуса является точка O, лежащая на высоте BE треугольника ABC так, что $BE : OB = 3$. Найти радиус основания конуса и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой B. (МФТИ. Билет 9, 1996)

7.337. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна a. Внутри пирамиды расположен конус, окружность основания которого вписана в треугольник ABD, а вершина конуса расположена на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AB. Найти боковое ребро пирамиды и радиус шара, касающегося конуса и трех граней пирамиды с общей точкой C. (МФТИ. Билет 10, 1996)

7.338. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $3r/2$ так, что каждый шар касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причем первые два равных шара касаются нижнего основания, а третий шар касается верхнего основания цилиндра. Найти радиус основания цилиндра, если его высота равна $4r$. (МФТИ. Билет 1,1997)

7.339. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $r/2$ так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найти радиус основания цилиндра. (МФТИ. Билет 2, 1997)

7.340. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающегося всех четырех шаров внешним образом. (МФТИ. Билет 5, 2001)

Глава 8

Задачи на максимум и минимум

8.1. Планиметрия

Группа А

8.1. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3,8$, $BC = 0,6$. Найти длину стороны AC, если ее длина выражается целым числом.

8.2. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшая?

8.3. Доказать, что медианы треугольника меньше полусумм сторон, выходящих из той же вершины, но больше разности полупериметра и длины стороны, к которой проведена эта медиана.

8.4. В некотором поселке четыре дома: столовая, баня, клуб и почта. Расстояние между баней и клубом рано 1000м, между клубом и почтой — 500 м, между баней и столовой — 200 м , между столовой и почтой — 300м. На каком расстоянии находятся баня и почта?

8.5. а) По разные стороны от прямолинейного шоссе расположены две деревни. В каком месте на шоссе надо построить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от деревень до автобусной остановки была наименьшей (шириной шоссе пренебречь)? б) Где нужно построить автобусную остановку, если деревни расположены по одну сторону от шоссе?

8.6. В треугольнике ABC известно, что $AB < BC < AC$, а один из углов вдвое меньше другого и втрое меньше третьего. Найти угол при вершине A.

8.7. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

8.8. Внутри треугольника ABC с периметром P взята точка O. Доказать, что $P/2 < AO + BO + CO < P$.

8.9. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Доказать, что угол AKC — тупой.

8.10. В треугольнике PQR сторона PQ не больше, чем 9, сторона PR не больше, чем 12. Площадь треугольника не меньше, чем 54. Найти его медиану, проведенную из вершины P.

8.11. В треугольнике ABC сторона AC не длиннее, чем 3, сторона BC не длиннее, чем 4, а его площадь не меньше, чем 6. Найти радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности.

8.12. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Доказать, что $BN > MN$.

8.13. Площадь треугольника равна 1. Доказать, что средняя по длине сторона не меньше $\sqrt{2}$.

8.14. Диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точке E. На прямой AC взята точка M, причем $\angle DME = 80°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle CBD = 70°$. Где расположена точка M: на диагонали AC или на ее продолжении?

8.15. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 10$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке M. На отрезке BM выбрана точка O так, что $BO : OM = 3 : 1$. Площадь какого из треугольников ABO, BCO или ACO будет наименьшей?

8.16. Доказать, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.

8.17. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая высота.

8.18. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая медиана.

8.19. Длины двух сторон треугольника 10 и 15. Доказать, что биссектриса угла между ними не больше 12.

8.20. Доказать, что не существует двух трапеций (отличных от параллелограмма) таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

8.21. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M, отличная от C. Доказать, что $MA+MB>CA+CB$.

8.22. Среди всех треугольников с данным основанием и данной площадью Найти треугольник наименьшего периметра.

8.23. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l. Постройте на прямой l такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

8.24. Внутри угла даны точки M и N. Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырехугольника $KLMN$ был наименьшим.

8.25. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

Группа Б

8.26. На сторонах прямого угла с вершиной в точке O выбраны точки A и B. Точка C лежит во внутренней области угла. Доказать, что полупериметр треугольника ABC больше OC.

8.27. Внутри квадрата выбрана произвольная точка. Доказать, что расстояние от этой точки до любой вершины меньше суммы расстояний до трех других вершин.

8.28. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Доказать, что существуют положительные числа x, y, z такие, что $a=x+y$, $b=y+z$, $c=x+z$.

8.29. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин сторон меньше удвоенной суммы длин диагоналей, но больше суммы диагоналей.

8.30. Внутри острого угла выбрана точка C. Построить на сторонах угла точка A и B так, чтобы треугольник ABC имел наименьший периметр.

8.31. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Доказать, что если периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD, то $AB < AC$.

8.32. Доказать, что удвоенный периметр выпуклого пятиугольника больше суммы длин его диагоналей.

8.33. Два поселка расположены по разные стороны от реки с параллельными прямолинейными берегами. В каком месте на реке нужно построить мост, чтобы путь от одного поселка до другого был наименьший?

8.34. Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 1м, а площадь меньше 1см?

8.35. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной b, выбирается точка M. Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

8.36. Доказать, что в параллелограмме против большего угла лежит большая сторона.

8.37. Две высоты треугольника равны 12 и 20. Доказать, что третья высота меньше 30.

8.38. Две высоты треугольника равны 10 и 6. Доказать, что третья высота меньше 15.

8.39. Доказать, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из той же вершины.

8.40. Доказать, что в любом треугольнике со сторонами a, b, c выполняется неравенство $a^2 + b^2 > c^2/2$.

8.41. Пусть m_1 и m_2 — медианы, проведенные к сторонам a и b треугольника со сторонами a, b, c. Доказать, что $m_1^2 + m_2^2 > 9c^2/2$.

8.42. Пусть a, b, c — стороны произвольного треугольника. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$.

8.43. Пусть h_1, h_2, h_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности. Доказать, что $h_1 + h_2 + h_3 \geqslant 9r$.

8.44. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности. Доказать, что $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}$.

8.45. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Доказать, что площадь треугольника меньше 1.

8.46. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K. Доказать, что $BK < 2CK$.

8.47. Известно, что в треугольнике ABC угол A равен 60°. Доказать, что $AB + AC \leqslant 2BC$.

8.48. Доказать, что площадь четырехугольника $ABCD$ не превосходит $(AB \cdot CD + AD \cdot BC)/2$.

8.49. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и CDE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $AD = 3$. Найти сторону BC.

8.50. Пусть M и N — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ и $MN = (AB + CD)/2$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

8.51. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC делит другую диагональ пополам и $BC + CD = AB + AD$. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

8.52. Возможен ли треугольник со сторонами 7 и 2, если известно, что высота, опущенная на третью сторону этого треугольника, является средним геометрическим двух других высот?

8.53. На плоскости дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбрана точка M, сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния от A и B равны. Доказать, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

8.54. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, на которой окружности высекают хорды, сумма которых наибольшая. (Центры окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды.)

8.55. На сторонах прямого угла с вершиной O лежат концы отрезка AB длины a. При каком положении отрезка площадь треугольника будет наибольшей?

8.56. Доказать, что из всех четырехугольников с данной площадью наименьший периметр имеет квадрат.

8.57. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Наибольшая сторона треугольника $AB = 10$. Какое максимальное значение может принимать площадь треугольника?

8.58. Площадь треугольника ABC равна 10. Какое наименьшее значение может принимать радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой?

8.59. В треугольнике ABC со стороной $AC = 8$ проведена биссектриса BL. Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся, как $3 : 1$. Найти биссектрису BL, при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC будет наибольшей.

8.60. В треугольнике KLM с основанием $KM = 6$ проведена медиана LP. Известно, что расстояния от точки P до боковых сторон KL и LM относятся, как $1 : 2$. Найти медиану LP, при которой площадь треугольника KLM будет наибольшей.

8.61. В треугольник с периметром $2p$ вписана окружность. К этой окружности проведена касательная, параллельная стороне треугольника. Найти наибольшую возможную длину отрезка этой касательной, заключенной внутри треугольника.

8.62. На окружности, описанной около треугольника ABC, Найти точку M такую, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC максимально.

8.63. На прямой, содержащей сторону AB остроугольного треугольника ABC, постройте такую точку M, что расстояние между ее проекциями на прямые AC и BC минимально. Чему равно это расстояние?

8.64. Около данного треугольника опишите равносторонний треугольник наибольшего периметра.

8.65. Даны угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

8.66. На плоскости даны прямая и две точки P и Q, лежащие по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку M, что расстояние между основаниями высот треугольника PQM, опущенных на стороны PM и QM наименьшее.

8.67. От данного угла отрезком данной длины отрежьте треугольник наибольшего периметра.

8.68. Пусть точка C — середина дуги AB, а D — любая другая точка этой дуги. Доказать, что $AC + BC > AD + BD$.

8.69. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего периметра.

8.70. Доказать, что в любом треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.

8.2. Стереометрия

Группа А

8.71. Дан куб с ребром 1. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки до его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

8.72. Доказать, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего.

8.73. Доказать, что плоский угол выпуклого четырехгранного угла меньше суммы трех остальных.

8.74. В каких пределах может меняться плоский угол трехгранного угла, если два других плоских угла соответственно равны а) 70° и 100°; б) 130° и 150°?

8.75. Доказать, что площадь одной грани тетраэдра меньше суммы площадей трех остальных граней.

8.76. Найти длину кратчайшего пути по поверхности единичного куба между его противоположными вершинами.

8.77. Найти длину кратчайшего пути по поверхности единичного правильного тетраэдра между серединами противоположных ребер.

8.78. Радиус основания конуса и образующая равны соответственно $2/3$ и 2. Найти длину кратчайшего замкнутого пути, пересекающего все образующие конуса и проходящего через конец одной из них, принадлежащий основанию.

8.79. Радиус основания и высота цилиндра равны r и h. Найти длину кратчайшего пути по боковой поверхности цилиндра между диаметрально противоположными точками разных оснований.

8.80. Ребро правильного октаэдра равно a. Найти кратчайший путь по поверхности октаэдра между серединами двух его параллельных ребер.

8.81. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6. Найти среди них параллелепипед большего объема. Вычислите этот объем.

8.82. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4, а основания являются квадратами. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани. Вычислите этот периметр.

8.83. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен $1/2$, а одна из боковых граней является квадратом. Найти среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания. Вычислите этот периметр.

8.84. Найти высоту и радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в сферу радиуса R.

8.85. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в конус, высота которого равна 27, а радиус основания 9.

8.86. Найти наибольший объем конуса с образующей, равной a.

8.87. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в конус, радиус основания которого равен 3.

8.88. Вокруг сферы радиуса r описан конус. Найти наименьшее значение объема конуса и отношение его высоты к радиусу сферы в этом случае.

8.89. Конус описан около куба так, что четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины — на его боковой поверхности. Какой наименьший объем может иметь такой конус, если ребро куба равно a?

8.90. Около шара объема V описана треугольная пирамида. Какой наименьший объем может быть у этой пирамиды?

8.91. В конусе расположены два единичных шара, центры которых находятся на оси симметрии конуса. Один из шаров касается боковой поверхности конуса, а другой — основания конуса и первого шара. Найти угол между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

8.92. В конусе расположены два единичных шара, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найти угол между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

8.93. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два шара радиуса r, касающиеся основания пирамиды в точках, принадлежащих отрезку, соединяющему середины противоположных сторон основания. Каждый из шаров касается боковой грани пирамиды и другого шара. Найти высоту пирамиды, при которой объем пирамиды наименьший.

8.94. Периметр равнобедренного треугольника равен P. Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объем фигуры, полученной вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

8.95. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырехугольной пирамиды, ребро CD параллельно другой диагонали этого основания, и концы его лежат на боковых ребрах пирамиды. Найти наименьший объем пирамиды, если объем тетраэдра равен V.

8.96. Через вершину конуса проведено сечение наибольшей площади. Оказалось, что площадь сечения в два раза больше площади осевого сечения конуса. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

8.97. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат. Найти наибольший возможный угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Группа Б

8.98. Все плоские углы трехгранного угла прямые. Доказать, что любое его сечение, не проходящее через вершину, есть остроугольный треугольник.

8.99. Доказать, что сумма углов пространственного четырехугольника не превосходит 360°.

8.100. Существует ли треугольная пирамида, высоты которой равны 1, 2, 3 и 6?

8.101. Верно ли, что у любого трехгранного угла есть сечение, являющееся правильным треугольником?

8.102. Пусть a, b, c — стороны параллелепипеда, d — одна из его диагоналей. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant d^2/3$.

8.103. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть M и K — середины этих отрезков. Доказать, что $MK < (AD + BC)/2$.

8.104. Ребро правильного тетраэдра равно a. Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Доказать, что $2a < P \leqslant 3a$.

8.105. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине A равны 60°. Доказать, что $AB + AC + AD \leqslant BC + CD + DB$.

8.106. Можно ли в кубе вырезать отверстие, сквозь которое пройдет куб того же размера?

8.107. На какое наименьшее количество непересекающихся трехгранных углов можно разбить пространство?

8.108. Сфера радиуса 2 пересечена плоскостью, удаленной от центра на расстояние, равное 1. Найти длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удаленными точками сечения.

8.109. Сторона основания BCA правильной пирамиды $PABC$ равна a, боковое ребро равно b. На каком расстоянии от прямой BC следует провести сечение пирамиды, параллельное BC и AP, чтобы площадь его была наибольшей?

8.110. В основании пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM со стороной a, $KN = b$. Высота пирамиды, опущенная из вершины N, проходит через середину ребра LM. Пирамиду пересекает плоскость β, параллельная ребрам KN и LM. На каком расстоянии должна находиться плоскость β, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

8.111. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, в котором угол BAD равен 60°. Известно, что $SA = SC$, $SD = SB = AB$. В каком отношении должна делить ребро CD точка E, чтобы площадь треугольника SBE была наименьшая из возможных?

8.112. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. Найти наименьшую длину отрезков, с концами на диагоналях BC_1 И CA_1, параллельных плоскости ABB_1.

8.113. Сторона основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равна a, а боковые ребра равны $2a$. Найти наименьшую длину отрезков, с концами на ребрах AD И PC, параллельных плоскости PAB.

8.114. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a. Найти наименьшую длину отрезков, с концами на прямых AB_1 И BC_1, перпендикулярных прямой AC_1.

8.115. Высота правильной четырехугольной пирамиды вдвое больше диагонали основания, объем пирамиды равен V. Рассматриваются всевозможные правильные четырехугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что их боковые ребра параллельны диагонали основания пирамиды, одна боковая грань принадлежит этому основанию, а вершины противоположной боковой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найти наибольшее значение объема рассматриваемых пирамид.

8.116. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BB_1 и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба с прямыми AC_1, CE и DF. Найти наименьшее значение площади этих треугольников.

8.117. В правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания a и высотой h вписана правильная четырехугольная призма так, что ее нижнее основание лежит внутри основания пирамиды, а вершины верхнего — на боковых ребрах пирамиды. Найти наибольшую площадь боковой поверхности таких призм.

8.118. Образующая конуса имеет фиксированную длину и составляет с высотой угол α. В конус вписана правильная шестиугольная призма с равными ребрами (одно основание призмы лежит внутри основания конуса, а вершины другого основания лежат на боковой поверхности конуса). При каком значении α площадь боковой поверхности призмы будет наибольшей?

Сборник задач по геометрии

Компьютерный набор и верстка С.А. Ануфриенко, А.М. Гольдин, С.А. Кремешкова, С.Э. Нохрин, Е.В. Смирнова, С.Б. Шишеморова.

Подписано в печать . .2019. Формат $60 \times 84\ 1/16$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд.л. . Усл. печ. л. . Зак. . Тираж экз.
Уральский федеральный университет
им. первого президента России Б.Н. Ельцина

Отпечатано .

.