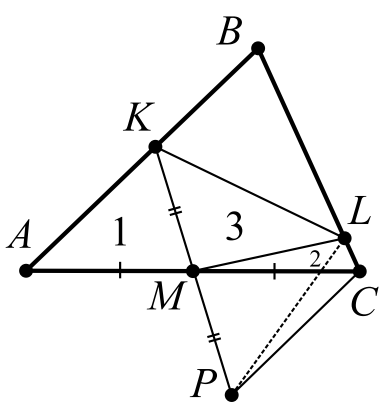
Решения задач. День второй
9 класс. Группа 2

1. Малыш разрезал длинным ножом треугольный торт на три части двумя разрезами, проходящими через середину M одной из его сторон. Пока он резал, Карлсон съедал отрезанные треугольники. Затем по диагонали, не содержащей M, Малыш разрезал оставшийся четырехугольный кусок и съел отрезанный кусок, содержащий точку M. Оставшийся треугольный кусок остался не съеденным никем. Мог ли Малыш резать торт так, чтобы в итоге съесть больше Карлсона?

   Ответ: не мог.

   Решение. Будем использовать обозначения рисунка. Докажем, что $S_1 + S_2 \geqslant S_3$. Выберем точку P так, что M — середина отрезка KP. Тогда треугольники AKM и PCM равны, поэтому $S_{\triangle PCM} = S_1$. Треугольники KML и PML имеют одинаковые основания ($[KM] = [PM]$) и общую высоту к этим основаниям, поэтому $S_{\triangle PLM} = S_3$. Тогда
$$S_3 = S_{\triangle PLM} \leqslant S_{PMLC} = S_1 + S_2.$$



   Если оба разреза пересекают одну и ту же сторону, скажем, AB, в точках K и L, где K лежит между A и L, то Карлсон съел треугольник AML, а Малыш съел треугольник MLC, о их площади будут равны, так как LM – медиана в треугольнике ALC, значит, и в этом случае Малыш не мог съесть больше Карлсона.

2. Найдите наименьшее значение выражения $a + \sqrt{b + \sqrt{c}}$, если $a, b, c > 0$ и $a^4b^2c = 16$.

   Ответ: 3.

   Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем:
$$a + \sqrt{b+\sqrt{c}} \geqslant 3\sqrt[3]{a\frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{2}\frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{a}{4}(b+\sqrt{c})} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{4}\cdot 2\sqrt{b\sqrt{c}}} = 3.$$

   Равенство достигается, если $b = \sqrt{c}$ и $a = \frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{2}$, т.е. при $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$.

3. Найдите все натуральные числа $k > 1$, для которых число $k + k^3 + k^4$ является квадратом некоторого целого числа.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть k нечетное, тогда $k = 4l+1$ или $k = 4l+3$. В любом случае $k+k^3+k^4$ сравнимо с 3 по модулю 4, но квадрат целого числа при делении на 4 дает остаток, равный только 0 или 1. Значит, k – четное, т.е. $k = 2l$. Рассмотрим последовательные квадраты целых чисел $\left(k^2 + \frac{k}{2} - 1\right)^2$ и $\left(k^2 + \frac{k}{2}\right)^2$. Найдем, при каких k выполняется неравенство

$$\left(k^2 + \frac{k}{2} - 1\right)^2 < k^4 + k^3 + k < \left(k^2 + \frac{k}{2}\right)^2.$$

Левая часть неравенства верна при любом k, а правая – при $k > 4$ или $k < 0$. Таким образом, если k принимает значение, отличное от 2 и 4, то k^4+k^3+k точно не является квадратом целого числа, так как заключено строго между двумя последовательными квадратами. Осталось проверить, подходят ли 2 и 4: при $k = 2$ получаем 26, что не является квадратом, а при $k = 4$ получим $324 = 18^2$.

4. В лабораторию доставили 2020 пробирок с анализами и установили новый аппарат. В аппарат нужно загружать ровно 2019 пробирок с анализами. После запуска аппарат сообщает, сколько пробирок содержат вирус. За какое наименьшее число запусков в лаборатории смогут гарантированно выяснить, в каких из пробирок вирус есть, а в каких его нет?

   Ответ: за 2019 запусков.

   Решение. Покажем, что 2019 запусков достаточно. Занумеруем пробирки от 1 до 2020. Пусть в запуске номер k анализируются все пробирки, кроме пробирки номер k. Пусть S — сумма всех выданных аппаратом значений. Каждая пробирка кроме 2020-й проверялась 2018 раз а 2020-я — 2019 раз. Следовательно, S нечетна тогда и только тогда, когда в 2020-й пробирке вирус есть. Пусть $a = 1$, если в 2020-й пробирке вирус есть и $a = 0$, в противном случае, тогда число пробирок с вирусом равно $z = (S - a)/2018$. Теперь, сравнивая результат k-го теста с z, определяем наличие или отсутствие вируса в k-й пробирке.

   Покажем, что 2018 запусков недостаточно. При 2018 (и менее) запусках найдутся две пробирки, которые участвовали во всех запусках. Если вирус ровно в одной из них, то независимо от того в какой именно, набор результатов тестов будет один и тот же, а значит определить в какой из них вирус невозможно.

10 класс. Группа 2

1. Найдите все натуральные значения n, при которых существует решение в натуральных числах уравнения $a^n + b^n + c^n = abc$.

   Ответ: 1 и 2.

   Решение. Предположим, что $n \geqslant 3$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получаем $a^n + b^n + c^n \geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^n} \geqslant 3abc > abc$. При $n = 2$ в качестве примера подойдет $a = b = c = 3$, а при $n = 1$ возьмем $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

2. Какое наибольшее число точек красного, синего, зеленого и желтого цветов можно отметить на плоскости так, что на любом отрезке с концами в отмеченных точках одного цвета нет отмеченных точек этого же цвета, но есть хотя бы две отмеченные точки не этого цвета?

   Ответ: 8.

   Решение. Пример на прямой.

   По условию нет трех одноцветных на одной прямой. Допустим, что три одноцветных все же есть. Выберем треугольник наименьшей площади ABC с одноцветными вершинами. Пусть его вершины цвета 1. Внутри треугольника ABC нет точек цвета 1 в силу минимальности его площади. На его сторонах имеется как минимум шесть точек цветов 2, 3, 4. Среди этих шести точек обязательно есть две одноцветные, а на отрезке, их соединяющем, есть еще 2 точки. Таким образом, внутри треугольника ABC (будем считать, что на сторонах, но не в вершинах это тоже «внутри») найдется 8 точек цветов 2, 3, 4. Среди этих 8 точек по крайней мере три одного цвета D, E и F. Треугольник DEF целиком содержится внутри треугольника ABC, следовательно ABC не является треугольником наименьшей площади с одноцветными вершинами.

3. На столе 2020^2 железных слитков выложены в виде квадрата 2020×2020. Около каждой строки и около каждого столбца стоит по одной склянке с зельем (всего 4040 склянок). Золотой и Серебряный колдуны по очереди разбивают склянки. Начинает Серебряный. Если склянку разбивает Золотой колдун, то все слитки соответствующей строки или соответствующего столбца становятся золотыми, а если Серебряный, то серебряными. Если после разбивания последней склянки число золотых слитков нечетно, то выигравшим считается Золотой колдун, а если четно, то Серебряный. Кто выигрывает при правильной игре?

   Ответ: Золотой.

   Решение. Стратеги Золотого колдуна может быть, например, такой. Первые свои 2018 ходов он делает симметрично ходам Серебряного относительно главной диагонали. Тогда после этих 4036 ходов остались не разбитыми 4 склянки: две в строках с номерами a и b и две в столбцах с номерами a и b. Строки и столбцы, в которых склянки разбиты образуют квадрат 2018×2018. На его главной диагонали все слитки золотые, а все остальные слитки разбиваются на пары симметричных относительно главной диагонали. В каждой такой паре один слиток золотой и один серебряный. Таким образом в этом квадрате 2018×2018 число золотых слитков равно $2018 + 2018 * 2017/2$, т.е. нечетно. Оставшиеся 4 хода эти слитки не изменяют.

   Покажем, что оставшимися двумя своими ходами Золотой колдун сможет сделать так, чтобы число золотых слитков за пределами этого квадрата 2018×2018 стало четным. Доля этого он должен действовать так: если Серебряный колдун разбивает склянку в строке, то и он тоже разбивает склянку в строке, а если в столбце, то и он в столбце. Ясно, что после таких ходов среди слитков с координатами (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) два золотых и два серебряных. Для любого $x \in \{1, 2, ..., 2020\} \setminus \{a, b\}$ рассмотрим слитки с координатами (a, x), (b, x), (x, a), (x, b). Последние 4 хода сделают слитки с координатами (a, x), (b, x) разными, и слитки с координатами (x, a), (x, b) тоже разными, следовательно в конце игры среди этих слитков четное число золотых (доказать, что их 2 можно, но не нужно).

4. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ во внешнюю стороны построены равносторонние треугольники ABE и CDF. Оказалось, что точка O пересечения диагоналей трапеции лежит на прямой EF. Докажите, что угол $\angle AOD = 60°$.

   Решение. Без ограничения общности положим, что $BC < AD$. Рассмотрим гомотетию с центром в точке O, переводящую точку B в точку D. Эта гомотетия переведет равносторонний треугольник ABE в равносторонний треугольник $A'DE'$, причём $A' \in (OC), E' \in (OF)$. Так как $BC < AD$, то коэффициент гомотетии равен $-\frac{OD}{OB} = -\frac{AD}{BC} < -1$, а значит точка A' лежит на продолжении отрезка OC за точку C. Так как $\angle CDF = 60° = \angle CDA' + \angle A'DF$ и $\angle A'DE' = 60° = \angle FDE' + \angle A'DF$, то $\angle CDA' = \angle FDE'$, из чего следует равенство треугольников CDA' и FDE'. Значит $\angle OA'D = \angle OE'D$ и поэтому четырехугольник $OA'E'D$ – вписанный. Но тогда $\angle AOD = 180^\circ - \angle DOA' = \angle DE'A' = 60^\circ$, что и требовалось доказать.

9 класс. Группа 1

1. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел a_n, в которой при всех n выполняется соотношение $a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1$. Может ли эта последовательность содержать более 2021 различных чисел?

   Ответ: да, может.

   Решение. Приведем пример такой последовательности. Положим $a_{2021} = 3$, $a_{2020} = 4$. Числа a_n, начиная с $n = 2022$, определим по индукции с помощью данной в условии формулы. Числа a_n, где $1 \leqslant n \leqslant 2019$, построим «обратным ходом» (т.е. сначала a_{2019}, потом a_{2018} и т.д. до a_1) по формуле $a_n = (a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1)$. По индукции легко проверить, что числа a_{2021}, a_{2020}, ..., a_1 все не меньше 3 и возрастают с убыванием номера. В частности, они все различные. Убедимся, что построенная последовательность удовлетворяет условию $a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1$. При $n \geqslant 2020$ это выполняется автоматически. При $n = 2019$ имеем $a_n = 3 \cdot 2 = 6$, $\text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1 = \text{НОД}(6, 4) + 1 = 3 = a_{n+2}$. Пусть $n \leqslant 2018$. Тогда

$$\text{НОД}(a_n, a_{n+1}) = \text{НОД}((a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1), a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1, a_{n+1}) =$$

$$= \text{НОД}(a_{n+2} - 1, (a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1)) = a_{n+2} - 1,$$

   что и требовалось. Второе равенство в цепочке следует из того, что $a_{n+1} - 1$ взаимно просто с a_{n+1}.

2. На столе 2020^2 железных слитков выложены в виде квадрата 2020×2020. Около каждой строки и около каждого столбца стоит по одной склянке с зельем (всего 4040 склянок). Золотой и Серебряный колдуны по очереди разбивают склянки. Начинает Серебряный. Если склянку разбивает Золотой колдун, то все слитки соответствующей строки или соответствующего столбца становятся золотыми, а если Серебряный, то серебряными. Если после разбивания последней склянки число золотых слитков нечетно, то выигравшим считается Золотой колдун, а если четно, то Серебряный. Кто выигрывает при правильной игре?

   Ответ: Золотой.

   Решение. Стратеги Золотого колдуна может быть, например, такой. Первые свои 2018 ходов он делает симметрично ходам Серебряного относительно главной диагонали. Тогда после этих 4036 ходов остались не разбитыми 4 склянки: две в строках с номерами a и b и две в столбцах с номерами a и b. Строки и столбцы, в которых склянки разбиты образуют квадрат 2018×2018. На его главной диагонали все слитки золотые, а все остальные слитки разбиваются на пары симметричных относительно главной диагонали. В каждой такой паре один слиток золотой и один серебряный. Таким образом в этом квадрате 2018×2018 число золотых слитков равно $2018 + 2018 * 2017/2$, т.е. нечетно. Оставшиеся 4 хода эти слитки не изменяют.

   Покажем, что оставшимися двумя своими ходами Золотой колдун сможет сделать так, чтобы число золотых слитков за пределами этого квадрата 2018×2018 стало четным. Доля этого он должен действовать так: если Серебряный колдун разбивает склянку в строке, то и он тоже разбивает склянку в строке, а если в столбце, то и он в столбце. Ясно, что после таких ходов среди слитков с координатами (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) два золотых и два серебряных. Для любого $x \in \{1, 2, ..., 2020\} \setminus \{a, b\}$ рассмотрим слитки с координатами (a, x), (b, x), (x, a), (x, b). Последние 4 хода сделают слитки с координатами (a, x), (b, x) разными, и слитки с координатами (x, a), (x, b) тоже разными, следовательно в конце игры среди этих слитков четное число золотых (доказать, что их 2 можно, но не нужно).

3. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр (точка пересечения высот), точка O — центр описанной окружности, точка M — середина стороны AC. Оказалось, что треугольник HMO — равносторонний. Найдите $\sin \angle ABC$.

   Ответ: $\sqrt{2/3}$.

   Решение. Для решения задачи воспользуемся известным фактом. Факт: $BH = 2MO$. Так как отрезки BH и MO параллельны и не равны, то $BHMO$ — трапеция, а значит существует точка пересечения прямых BO и MH. Обозначим её через D. Треугольники DMO и BDH подобны с коэффициентом 2, а значит $BD = 2BO$, то есть BD— диаметр и точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC. Также $DM = MH = OM = \frac{1}{2}BH$, поэтому $DH = BH$. Так как O — середина BD, то $OH \perp BD$, а значит $\angle DBH = \angle BDH = 90° - \angle OHM = 30°$. Пусть $MO = r$, тогда $DH = BH = 2r$ и $BO = \sqrt{3}r$ по теореме Пифагора. Продлим OM до пересечения с окружностью в точках K и N. Тогда $KM = KO + OM = (\sqrt{3}+1)r$, $MN = ON - OM = (\sqrt{3}-1)r$. По теореме о произведении отрезков хорд получим $\frac{1}{4}AC^2 = AM \cdot MC = KM \cdot MN = 2r^2$, откуда $AC = 2\sqrt{2}r$. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\sin\angle ABC = \frac{AC}{2OB} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Нестандартная шахматная доска представляет собой квадрат 10×10 клеток, в центре которого вырезана дыра – квадрат 6×6 клеток. На доску ставят n ладей. Ладья в данном случае бьет на любое расстояние по вертикали, по горизонтали до края доски, другой ладьи (включая клетку, на которой эта ладья стоит) или до вырезанной области. Клетку под собой ладья тоже бьет. Т.е. поля, отделенные от ладьи вырезанной дыркой, эта ладья бить не может. При каком наибольшем n можно поставить n ладей так, что убирание любой ладьи с доски приведет к уменьшению числа побитых клеток? (Клетка считается побитой, если она находится под боем хотя бы одной ладьи.)

   Ответ: 24.

   Решение. Выделим на доске 32 *линии*: 4 длинных стоки (по 10 клеток), 12 коротких строк (по 2 клетки) и столько же длинных и коротких столбцов.

   Заметим, что если ладья не одинока ни в одной линии, то ее убирание не меняет множества побитых клеток. Следовательно, каждая ладья одинока по крайней мере в одной линии. Будем говорить, что ладья *отмечает* линию, в которой она одинока. Тогда число ладей не превосходит числа отмеченных линий. Ясно, что если ладья отмечает обе линии, на которых расположена, то, сняв одну из отметок, мы сохраним то свойство, что число ладей не превосходит числа отмеченных линий.

   Пусть все 16 строк не пустые, то побиты все клетки. Допустим, что в какой-то строке есть хотя бы две ладьи. Убирая любую из них оставляем все 16 строк не пустыми и все клетки побитыми. Значит, ладей не более 16. Аналогично, если все 16 столбцов не пустые, то ладей не более 16.

   Итак, если ладей более 16, то найдется пустая строка и пустой столбец.

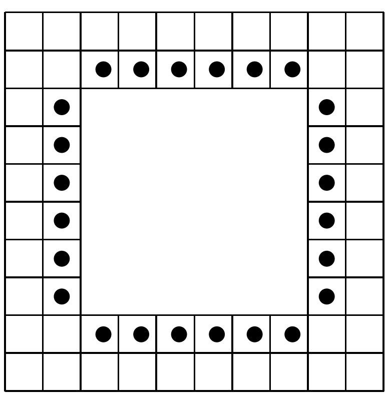
Пусть две соседние длинные строки не пустые. Они полностью покрывают 6 коротких столбцов, Пусть в каком-то из них расположена лалья, тогда ее удаление не отменит побитие второй клетки этого столбца, значит, если условие выполнено, то эта ладья одинока в строке. Будем считать, что она отмечает строку и не отмечает столбец.Таким образом, нашлось 6 неотмеченных линий.Кроме того есть пустая строка, которая разумеется не отмечена. Если есть еще хотя бы одна неотмеченная строка, то найдено 8 неотмеченных линий и ладей не более 24. Если же все строки (кроме пустой) отмечены,то в каждой строке не более одной ладьи и ладей не более 15.

Итак, если есть расстановка более 24 ладей, то в каждой паре соседних длинных строк одна пустая.

Допустим что непустая длинная строка отмечена, тогда, рассуждая как выше получим, что все 6 коротких столбцов, покрытых парой соседних длинных строк, можно считать не отмеченными, а, значит, вновь нашлось по крайней мере 8 не отмеченных линий (2 пустые длинные строки и 6 коротких столбцов) и ладей не более 24.

Итак, если есть расстановка более 24 ладей, то в каждой паре длинных строк одна пустая, а вторая неотмеченная, т.е. вообще нет длинных отмеченных строк. Аналогично, нет и длинных отмеченных столбцов. Следовательно, отмечено не более 24 линий. И ладей не более 24.

Расстановка 24 ладей приведена на рисунке:



10 класс. Группа 1

1. Какое наибольшее число точек черного, красного, синего, зеленого и желтого цветов можно отметить на плоскости так, что на любом отрезке с концами в отмеченных точках одного цвета нет отмеченных точек этого же цвета, но есть хотя бы две отмеченные точки не этого цвета?

   Ответ: 10.

   Решение. Пример на прямой.

   По условию нет трех одноцветных на одной прямой. Допустим, что три одноцветных все же есть. Выберем треугольник наименьшей площади ABC с одноцветными вершинами. Пусть его вершины цвета 1. Внутри треугольника ABC нет точек цвета 1 в силу минимальности его площади. На его сторонах имеется как минимум шесть точек цветов 2, 3, 4, 5. Среди этих шести точек обязательно есть либо три одноцветные, либо две пары одноцветных. На двух отрезках с одноцветными концами есть еще 3 или 4 точки. Таким образом, внутри треугольника ABC (будем считать, что на сторонах, но не в вершинах это тоже «внутри») найдется 9 или 10 точек цветов

2, 3, 4, 5. Среди этих точек по крайней мере три одного цвета D, E и F. Треугольник DEF целиком содержится внутри треуголькика ABC, следовательно ABC не является треугольником наименьшей площади с одноцветными вершинами.

2. Нестандартная шахматная доска представляет собой квадрат 10×10 клеток, в центре которого вырезана дыра – квадрат 6×6 клеток. На доску ставят n ладей. Ладья в данном случае бьет на любое расстояние по вертикали, по горизонтали до края доски, другой ладьи (включая клетку, на которой эта ладья стоит) или до вырезанной области. Клетку под собой ладья тоже бьет. Т.е. поля, отделенные от ладьи вырезанной дыркой, эта ладья бить не может. При каком наибольшем n можно поставить n ладей так, что убирание любой ладьи с доски приведет к уменьшению числа побитых клеток? (Клетка считается побитой, если она находится под боем хотя бы одной ладьи.)

   Ответ: 24.

   Решение. Выделим на доске 32 *линии*: 4 длинных стоки (по 10 клеток), 12 коротких строк (по 2 клетки) и столько же длинных и коротких столбцов.

   Заметим, что если ладья не одинока ни в одной линии, то ее убирание не меняет множества побитых клеток. Следовательно, каждая ладья одинока по крайней мере в одной линии. Будем говорить, что ладья *отмечает* линию, в которой она одинока. Тогда число ладей не превосходит числа отмеченных линий. Ясно, что если ладья отмечает обе линии, на которых расположена, то, сняв одну из отметок, мы сохраним то свойство, что число ладей не превосходит числа отмеченных линий.

   Пусть все 16 строк не пустые, то побиты все клетки. Допустим, что в какой-то строке есть хотя бы две ладьи. Убирая любую из них оставляем все 16 строк не пустыми и все клетки побитыми. Значит, ладей не более 16. Аналогично, если все 16 столбцов не пустые, то ладей не более 16.

   Итак, если ладей более 16, то найдется пустая строка и пустой столбец.

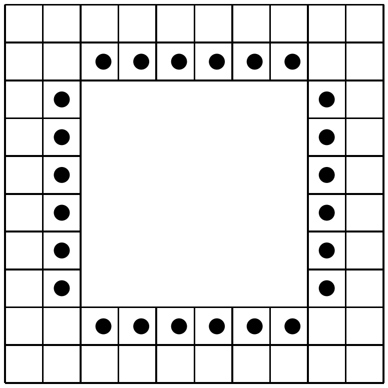
   Пусть две соседние длинные строки не пустые. Они полностью покрывают 6 коротких столбцов, Пусть в каком-то из них расположена лалья, тогда ее удаление не отменит побитие второй клетки этого столбца, значит, если условие выполнено, то эта ладья одинока в строке. Будем считать, что она отмечает строку и не отмечает столбец.Таким образом, нашлось 6 неотмеченных линий.Кроме того есть пустая строка, которая разумеется не отмечена. Если есть еще хотя бы одна неотмеченная строка, то найдено 8 неотмеченных линий и ладей не более 24. Если же все строки (кроме пустой) отмечены,то в каждой строке не более одной ладьи и ладей не более 15.

   Итак, если есть расстановка более 24 ладей, то в каждой паре соседних длинных строк одна пустая.

   Допустим что непустая длинная строка отмечена, тогда, рассуждая как выше получим, что все 6 коротких столбцов, покрытых парой соседних длинных строк, можно считать не отмеченными, а, значит, вновь нашлось по крайней мере 8 не отмеченных линий (2 пустые длинные строки и 6 коротких столбцов) и ладей не более 24.

   Итак, если есть расстановка более 24 ладей, то в каждой паре длинных строк одна пустая, а вторая неотмеченная, т.е. вообще нет длинных отмеченных строк. Аналогично, нет и длинных отмеченных столбцов. Следовательно, отмечено не более 24 линий. И ладей не более 24.

Расстановка 24 ладей приведена на рисунке:



3. Число 2020! записали в 8-ричной системе счисления. Какая в этой записи последняя ненулевая цифра? (Напоминаем, как устроена 8-ричная система счисления. Например, $2019 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3$, т.е. в 8-ричной системе оно равно 3743. Все цифры в записи числа в этой системе счисления не больше 7.)

   Ответ 5.

   Решение. Назовем нечетной составляющей натурального числа v нечетное число, полученное из v делением на степень двойки. 2 входит в разложение 2020! с показателем $[2020/2] + [2020/4] + ... + [2020/1024] = 2013$. Поскольку 2013 делится на 3, последняя ненулевая цифра 2020! — нечетная. Она равна остатку R от деления на 8 произведения нечетных составляющих чисел от 1 до 2020.

   Каждое натуральное число можно представить в виде $v = 2^k(8t + s)$, где k и t — неотрицательные целые, а $s \in \{1, 3, 5, 7\}$. Ясно, что при таком представлении остаток от деления на 8 нечетной составляющей числа v равен s. Поскольку остаток от деления на 8 произведения $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ равен 1, для вычисления R достаточно для каждого k от 0 до 10 найти такое s_k, что $2^k(8t + s_k) \leq 2020 < 2^k(8t + s_k + 2)$ для некоторого t, перемножить нечетные числа от 1 до s_k, и, наконец, перемножить полученные произведения для всех одиннадцати значений k.

   Удобно вычислять s_k, глядя на двоичное представление числа $2020 = 11111100100$, поскольку остаток от деления $[2020/2^k]$ на 8 в двоичном виде задается $k+3$-м, $k+2$-м и $k+1$-м младшими битами двоичного представления числа 2020, а s_k — это наибольшее нечетное, которое его не превосходит. Получаем: $s_0 = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 3$, $s_4 = 5$, $s_5 = 7$, $s_6 = 7$, $s_7 = 7$, $s_8 = 7$, $s_9 = 3$, $s_{10} = 1$.

   Еще раз используя то, что остаток от деления на 8 произведения $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ равен 1, получаем, чт R равно остатку от деления на 8 произведения $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1$, т.е. $R = 5$.

4. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N соответственно и касается его описанной окружности в точке K. Через точку A и точку пересечения отрезков CM и BN проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке L. Докажите, что KL — биссектриса угла BKC.

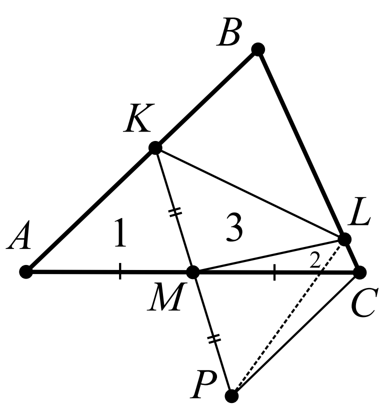
   Решение. Обозначим точку пересечения BN и CM через O, описанную окружность треугольника ABC через ω_1, а окружность, которая касается ω_1, AB и AC через ω_2. По теореме Чевы для треугольника ABC получаем, что $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CN}{AN} = 1$, откуда $\frac{BL}{LC} = \frac{MB}{CN}$. Достаточно доказать, что $\frac{BK}{BL} = \frac{CK}{CL}$, тогда BL будет биссектрисой в треугольнике BKC. Пусть ω_2 пересекает BK в точке E, а KC – в точке F. Рассмотрим квадрат отношения $\frac{BL^2}{LC^2} = \frac{MB^2}{CN^2} = \frac{BE \cdot BK}{CF \cdot CK}$. Рассмотрим гомотетию с центром в точке K, переводящую окружность ω_2 в окружность ω_1. Эта гомотетия переводит точку E в точку B, а точку B, а точку F в точку C, поэтому прямая EF параллельна BC, откуда по свойству пропорциональных отрезков, отсекаемых параллельными прямыми получаем, что $\frac{BE}{CF} = \frac{BK}{KC}$ и $\frac{BL^2}{LC^2} = \frac{BK^2}{KC^2}$, откуда вытекает требуемое.

Младшая лига. Группа 2.

1. Малыш разрезал длинным ножом треугольный торт на три части двумя разрезами, проходящими через середину M одной из его сторон. Пока он резал, Карлсон съедал отрезанные треугольники. Затем по диагонали, не содержащей M, Малыш разрезал оставшийся четырехугольный кусок и съел отрезанный кусок, содержащий точку M. Оставшийся треугольный кусок остался не съеденным никем. Мог ли Малыш резать торт так, чтобы в итоге съесть больше Карлсона?

   Ответ: не мог.

   Решение. Будем использовать обозначения рисунка. Докажем, что $S_1 + S_2 \geqslant S_3$. Выберем точку P так, что M — середина отрезка KP. Тогда треугольники AKM и PCM равны, поэтому $S_{\triangle PCM} = S_1$. Треугольники KML и PML имеют одинаковые основания ($[KM] = [PM]$) и общую высоту к этим основаниям, поэтому $S_{\triangle PLM} = S_3$. Тогда
$$S_3 = S_{\triangle PLM} \leqslant S_{PMLC} = S_1 + S_2.$$



   Если оба разреза пересекают одну и ту же сторону, скажем, AB, в точках K и L, где K лежит между A и L, то Карлсон съел треугольник AML, а Малыш съел треугольник MLC, о их площади будут равны, так как LM – медиана в треугольнике ALC, значит, и в этом случае Малыш не мог съесть больше Карлсона.

2. Алибаба купил в Самарканде: бобов — по 7 динариев за мешок; риса — по 14 динариев за мешок; изюма — по 21 динарий за мешок; фиников — по 35 динариев за мешок. На все он затратил 4900 динариев. Приведя свой караван в Багдад он обнаружил, что на базаре: мешок бобов стоит 52 динария; мешок риса стоит 40 динариев; мешок изюма стоит 28 динариев; а мешок фиников стоит всего 4 динария. Тем не менее, продав весь свой товар, он получил прибыль в 1100 динариев (т.е. выручил 6000 динариев). Сколько мешков товара он привез из Самарканда в Багдад? (Найдите все возможные значения.)

   Ответ: 225 мешков.

Решение. Пусть Алибаба привез x мешков бобов, y мешков риса, z мешков изюма и t мешков фиников. Тогда имеем два уравнения

$$7x + 14y + 21z + 35t = 4900, \qquad (1)$$

$$52x + 40y + 28z + 4t = 6000. \qquad (2)$$

Нам нужно вычислить сумму $x + y + z + t$. Для этого сначала разделим первое уравнение на 7, а второе на 4, получим

$$x + 2y + 3z + 5t = 700, \qquad (3)$$

$$13x + 10y + 7z + t = 1500. \qquad (4)$$

Умножим третье уравнение на 3 и прибавим четвертое, получим

$$16x + 16y + 16z + 16t = 3600.$$

Следовательно, $x + y + z + t = 225$.

3. В лабораторию доставили 2020 пробирок с анализами и установили новый аппарат. В аппарат нужно загружать ровно 2019 пробирок с анализами. После запуска аппарат сообщает, сколько пробирок содержат вирус. За какое наименьшее число запусков в лаборатории смогут гарантированно выяснить, в каких из пробирок вирус есть, а в каких его нет?

   Ответ: за 2019 запусков.

   Решение. Покажем, что 2019 запусков достаточно. Занумеруем пробирки от 1 до 2020. Пусть в запуске номер k анализируются все пробирки, кроме пробирки номер k. Пусть S — сумма всех выданных аппаратом значений. Каждая пробирка кроме 2020-й проверялась 2018 раз а 2020-я — 2019 раз. Следовательно, S нечетна тогда и только тогда, когда в 2020-й пробирке вирус есть. Пусть $a = 1$, если в 2020-й пробирке вирус есть и $a = 0$, в противном случае, тогда число пробирок с вирусом равно $z = (S - a)/2018$. Теперь, сравнивая результат k-го теста с z, определяем наличие или отсутствие вируса в k-й пробирке.

   Покажем, что 2018 запусков недостаточно. При 2018 (и менее) запусках найдутся две пробирки, которые участвовали во всех запусках. Если вирус ровно в одной из них, то независимо от того в какой именно, набор результатов тестов будет одним и тем же, а значит определить в какой из них вирус невозможно.

4. На калькуляторе у Васи есть кнопки цифр, скобок и еще одна кнопка @. Вася выяснил, что для любых введенных чисел x, y и z значение выражения $x@(y@z)$ равно сумме z и значения выражения $x@y$, а значение выражения $x@x$ равно нулю. Чему будет равно значение 2021@1202?

   Ответ: 819.

   Решение. По условию $x@x = y@y$ для произвольных целых чисел x, y, поэтому $x@(x@x) = x@(y@y)$, или, пользуясь условием, $x@x + x = x@y + y$, отсюда для любых x и y получаем $x@y = x - y + x@x$, т.е. для любых x, y выполняется, что $x@y = x - y$ и $2021@1202 = 819$.

5. Найдите все натуральные числа $k > 1$, для которых число $k + k^3 + k^4$ является квадратом некоторого целого числа.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть k нечетное, тогда $k = 4l+1$ или $k = 4l+3$. В любом случае $k+k^3+k^4$ сравнимо с 3 по модулю 4, но квадрат целого числа при делении на 4 дает остаток, равный только 0 или 1. Значит, k – четное, т.е. $k = 2l$. Рассмотрим последовательные квадраты целых чисел $\left(k^2 + \frac{k}{2} - 1\right)^2$ и $\left(k^2 + \frac{k}{2}\right)^2$. Найдем, при каких k выполняется неравенство
$$\left(k^2 + \frac{k}{2} - 1\right)^2 < k^4 + k^3 + k < \left(k^2 + \frac{k}{2}\right)^2.$$
   Левая часть неравенства верна при любом k, а правая – при $k > 4$ или $k < 0$. Таким образом, если k принимает значение, отличное от 2 и 4, то k^4+k^3+k точно не является квадратом целого числа, так как заключено строго между двумя последовательными квадратами. Осталось проверить, подходят ли 2 и 4: при $k = 2$ получаем 26, что не является квадратом, а при $k = 4$ получим $324 = 18^2$.

6. Художник Дима выработал свой особый художественный стиль. Каждая его инсталляция представляет собой ровно 6 прямых на бесконечной плоскости холста. Художественный критик Петя упрекнул Диму в однообразии, на что Дима возразил, что каждая его картина уникальна тем, что на ней число точек пересечения прямых отличается от такого же числа на других картинах. Какое максимальное число картин мог нарисовать Дима в своем стиле?

   Ответ: 13 картин.

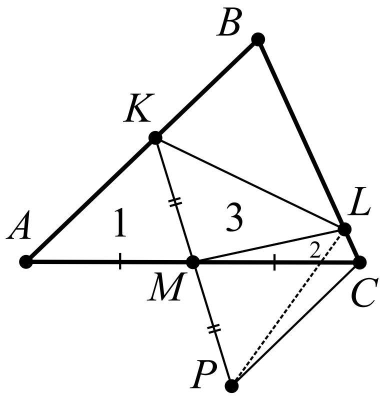
   Решение. Максимальное число точек пересечения 15, минимальное 0. Реализуются все возможности кроме 2, 3 и 4. (См. решение задачи 5 младшей лиги, первой группы.)

Младшая лига. Группа 1

1. Малыш разрезал длинным ножом треугольный торт на три части двумя разрезами, проходящими через середину M одной из его сторон. Пока он резал, Карлсон съедал отрезанные треугольники. Затем по диагонали, не содержащей M, Малыш разрезал оставшийся четырехугольный кусок и съел отрезанный кусок, содержащий точку M. Оставшийся треугольный кусок остался не съеденным никем. Мог ли Малыш резать торт так, чтобы в итоге съесть больше Карлсона?

   Ответ: не мог.

   Решение. Будем использовать обозначения рисунка. Докажем, что $S_1 + S_2 \geqslant S_3$. Выберем точку P так, что M — середина отрезка KP. Тогда треугольники AKM и PCM равны, поэтому $S_{\triangle PCM} = S_1$. Треугольники KML и PML имеют одинаковые основания ($[KM] = [PM]$) и общую высоту к этим основаниям, поэтому $S_{\triangle PLM} = S_3$. Тогда
$$S_3 = S_{\triangle PLM} \leqslant S_{PMLC} = S_1 + S_2.$$



Если оба разреза пересекают одну и ту же сторону, скажем, AB, в точках K и L, где K лежит между A и L, то Карлсон съел треугольник AML, а Малыш съел треугольник MLC, о их площади будут равны, так как LM – медиана в треугольнике ALC, значит, и в этом случае Малыш не мог съесть больше Карлсона.

2. На калькуляторе у Васи есть кнопки цифр, скобок и еще одна кнопка @. Вася выяснил, что для любых введенных чисел x, y и z значение выражения $x@(y@z)$ равно сумме z и значения выражения $x@y$, а значение выражения $x@x$ равно нулю. Чему будет равно значение 2021@1202?

   Ответ: 819.

   Решение. По условию $x@x = y@y$ для произвольных целых чисел x, y, поэтому $x@(x@x) = x@(y@y)$, или, пользуясь условием, $x@x + x = x@y + y$, отсюда для любых x и y получаем $x@y = x - y + x@x$, т.е. для любых x, y выполняется, что $x@y = x - y$ и $2021@1202 = 819$.

3. Число 2020! записали в 8-ричной системе счисления. Какая в этой записи последняя ненулевая цифра? (Напоминаем, как устроена 8-ричная система счисления. Например, $2019 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3$, т.е. в 8-ричной системе оно равно 3743. Все цифры в записи числа в этой системе счисления не больше 7.)

   Ответ 5.

   Решение. Назовем нечетной составляющей натурального числа v нечетное число, полученное из v делением на степень двойки. 2 входит в разложение 2020! с показателем $[2020/2] + [2020/4] + ... + [2020/1024] = 2013$. Поскольку 2013 делится на 3, последняя ненулевая цифра 2020! — нечетная. Она равна остатку R от деления на 8 произведения нечетных составляющих чисел от 1 до 2020.

   Каждое натуральное число можно представить в виде $v = 2^k(8t + s)$, где k и t — неотрицательные целые, а $s \in \{1, 3, 5, 7\}$. Ясно, что при таком представлении остаток от деления на 8 нечетной составляющей числа v равен s. Поскольку остаток от деления на 8 произведения $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ равен 1, для вычисления R достаточно для каждого k от 0 до 10 найти такое s_k, что $2^k(8t + s_k) \leq 2020 < 2^k(8t + s_k + 2)$ для некоторого t, перемножить нечетные числа от 1 до s_k, и, наконец, перемножить полученные произведения для всех одиннадцати значений k.

   Удобно вычислять s_k, глядя на двоичное представление числа $2020 = 11111100100$, поскольку остаток от деления $[2020/2^k]$ на 8 в двоичном виде задается $k+3$-м, $k+2$-м и $k+1$-м младшими битами двоичного представления числа 2020, а s_k — это наибольшее нечетное, которое его не превосходит. Получаем: $s_0 = 3$, $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_3 = 3$, $s_4 = 5$, $s_5 = 7$, $s_6 = 7$, $s_7 = 7$, $s_8 = 7$, $s_9 = 3$, $s_{10} = 1$.

Еще раз используя то, что остаток от деления на 8 произведения $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ равен 1, получаем, что R равно остатку от деления на 8 произведения $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (3 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1$, т.е. $R = 5$.

4. Вовочка нашел дипломат, кодовый замок которого содержит 3 цифры от 1 до 8. Немного покопавшись в замке, Вовочка добился того, что замок откроется, если набрать комбинацию, которая отличается от правильной не более чем в одной цифре. За какое теперь минимальное число попыток Вовочка сможет гарантированно открыть дипломат?

   Ответ: 32 попытки.

   Решение. Покажем сначала, что 32 попыток достаточно. Заметим, что набор: 111, 133, 155, 177, 317, 331, 353, 375, 515, 537, 551, 573, 713, 735, 757, 771, открывает замок, если в правильном коде есть хотя бы две нечетных цифры. Аналогично строится открывающий набор для правильного кода с двумя четными цифрами.

   Докажем, что меньшее число попыток не гарантируют открытие замка. Обозначим $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ через M.

   Покажем, что если для некоторого $a \in M$ попыток вида $a**$ меньше 4-х, то общее число попыток не менее 34. Без ограничения общности, $a = 1$.

   Пусть попыток вида $1**$ три. Т.е. отсутствуют все кроме $1ab$, $1cd$ и $1ef$. Тогда для открытия замка с кодом $1xy$ при $x \in M \setminus \{a, c, e\}$ и $y \in M \setminus \{b, d, f\}$ должна быть сделана попытка вида txy при $t \in M \setminus \{1\}$. Таких попыток 25. Кроме того, для открытия замка с кодом $2xy$ при $x \in M \setminus \{a, c, e\}$ и $y \in \{b, d, f\}$ или при $x \in \{a, c, e\}$ и $y \in M \setminus \{b, d, f\}$ должна быть сделана попытка вида txy при $t \in M \setminus \{1\}$. Таких попыток 6. Всего не менее $3 + 25 + 6 = 34$.

   Пусть попыток вида $1**$ не более двух. Т.е. отсутствуют все кроме может быть $1ab$ и $1cd$. Тогда для открытия замка с кодом $1xy$ при $x \in M \setminus \{a, c\}$ и $y \in M \setminus \{b, d\}$ должна быть сделана попытка вида txy при $t \in M \setminus \{1\}$. Таких попыток уже 36.

   Итак либо попыток не менее 34, либо для каждого $a \in M$ попыток вида $a**$ не меньше 4-х, т.е. всего не менее 32.

5. Художник Дима выработал свой особый художественный стиль. Каждая его инсталляция представляет собой ровно 6 разных прямых на бесконечной плоскости холста. Художественный критик Петя упрекнул Диму в однообразии, на что Дима возразил, что каждая его картина уникальна тем, что на ней число точек пересечения прямых отличается от такого же числа на других картинах. Какое максимальное число картин мог нарисовать Дима в своем стиле?

   Ответ: 13 картин.

   Решение. Максимальное число точек пересечения 15, минимальное 0. Реализуются все возможности кроме 2, 3 и 4.

   0 — все параллельны.

   1 — все проходят через одну точку.

   5 — пятерка параллельных прямых и непараллельная им прямая.

   6 — пятерка прямых, проходящих через одну точку A и непараллельная им прямая, не проходящая через A.

7 — четверка параллельных, на одной из которых лежит точка A и еще пара, проходящих через точку A.

8 — четверка параллельных и пара параллельных.

9 — две тройки параллельных.

10 — тройка параллельных и тройка пересекающихся в одной точке (не лежащей на параллельных прямых), каждая из которых пересекает каждую из параллельных.

11 — две тройки пересекающихся в одной точке (одна тройка в одной точке, другая в другой) и нет пар параллельных.

12 — ровно три пары параллельных.

13 — ровно одна тройка пересекающихся в одной точке и нет пар параллельных.

14 — ровно одна пара параллельных и нет трех пересекающихся в одной точке.

15 — нет пар параллельных и трех пересекающихся в одной точке.

Пусть на картине есть две точки пересечения прямых A и B. Покажем, что найдутся еще хотя бы три точки пересечения.

Во-первых заметим, что точки A и B тогда можно выбрать так, что прямая AB нарисована. Действительно, если это не так, то через A проведены хотя бы две прямые a и b, но проходящая через B прямая c не может быть параллельна им обеим, поэтому, переобозначив через A точку пересечения c с одной из них получим, $c = AB$.

Основной случай: Допустим сначала, что нет ни одной нарисованной прямой, которая не проходит ни через A ни через B. Тогда без ограничения общности через A проходит три или четыре прямых a_i $i = 1, 2...$ (кроме AB), и через B проходит одна или две прямых b_j (кроме AB). При этом каждая прямая b_j параллельна не более чем одной прямой a_i, т.е. число пар параллельных не превосходит числа прямых b_j. Таким образом точек пересечения a_i и b_j не менее трех.

Допустим теперь, что где-то на рисунке есть треугольник XYZ. Если есть какая-то прямая, не проходящая ни через X, ни через Y, ни через Z, то на ней есть хотя бы две точки пересечения со сторонами треугольника XYZ.

Если через какую-то из вершин треугольника XYZ не проходит ни одна из трех оставшихся прямых, то после переименования вершин мы попадаем в основной случай.

Пусть через каждую из вершин треугольника XYZ проходит ровно одна прямая из трех оставшихся. Если среди этих трех прямых хотя бы две не параллельны противолежащим (по точке, через которую они проходят) сторонам, то точек пересечения не менее пяти. Пусть теперь хотя бы две параллельны. Тогда пять прямых из шести изображают параллелограмм $XYZT$ с диагональю XZ. Если шестая прямая (проходящая через Y) параллельна XZ, то она пересекает прямую ZT в точке отличной от Z и T, иначе она пересекает XZ в точке отличной от X и Z.

Осталось рассмотреть случай, когда на рисунке нет ни одного треугольника. Значит каждая прямая параллельна либо AB либо прямой a_1. В частности b_1 параллельна a_1. Если все 3 оставшиеся прямые параллельны a_1, то на рисунке пять точек пересечения. Иначе их не менее восьми.

6. В свободных клетках доски 2021×2021 по очереди Медведь рисует крестики, а Сова нолики. Начинает Медведь. Если в конце Медведь сможет так соединить центры

некоторых пар соседних по стороне клеток с крестиками, что получится замкнутая ломаная, то он выиграл. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Сова.

Решение. Стратегия Совы. Сова мысленно покрывает всю доску «кирпичной кладкой», т.е. разбивает всю доску на строки, затем каждую четную строку разбивает на пары соседних клеток («кирпичей»), и каждую нечетную строку без обоих крайних клеток разбивает на пары соседних клеток. После каждого хода Медведя сделанного в еще полностью чистый «кирпич» Сова ставит свой нолик во вторую клетку того же «кирпича». Если Медведь ставит крестик в крайнюю клетку нечетной строки или в кирпич, где уже стоит нолик, то Сова ходит куда угодно.

Заметим, что при таких действиях Совы ни в каком «кирпиче» не могут появиться 2 крестика. Пусть Медведю при этом удалось, соединяя центры соседних клеток с крестиками, нарисовать замкнутую ломаную. Рассмотрим самую нижнюю клетку, центр которой является вершиной ломаной. Ясно, что такая клетка не может быть единственной. Действительно, в ней должны заканчиваться два звена. Оба они не могут быть вертикальными в силу выбора клетки, значит хотя бы одно из них горизонтальное, следовательно, соседняя по горизонтали клетка тоже является самой нижней из содержащих вершины ломаной.

Если есть хотя бы три таких самых нижних клетки подряд, то две их них образуют один «кирпич» и не могут обе содержать крестики. Противоречие. Если, же нижних клеток, стоящих подряд всего две, то между ними одно звено ломаной, от концов которого звенья идут вверх. Следовательно, имеются четыре крестика в клетках с общей вершиной. Но четыре такие клетки содержат один «кирпич» целиком. Противоречие.