Решения задач. День первый
7 класс. Группа 2

1. В Средиземье живут люди, эльфы, орки и гномы. Оркам все врут, а людям все говорят правду. Эльфы и гномы друг другу врут. Люди говорят правду гномам и эльфам. Орки эльфам врут, а гномам говорят правду. Собрались за круглым столом четыре воина: человек, орк, гном и эльф. Каждый сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». В Средиземье считается, что один меч лучше другого, если он и легче, и прочнее. Обязательно ли у одного воина меч лучше, чем у другого?

   Ответ: да, обязательно.

   Решение. Если орк и человек сидят рядом, то орк сказал человеку правду, а человек соврал. Значит меч орка и легче, и прочнее, чем меч человека. Если орк и человек сидят напротив, то рядом сидят орк и гном. Тогда орк сказал гному правду, а гном соврал. Значит меч орка и легче, и прочнее, чем меч гнома.

2. Шестизначное число называется *полупростым*, если оно не представимо в виде произведения трехзначного и четырехзначного чисел. Какое наибольшее количество полупростых чисел, идущих подряд, можно написать?

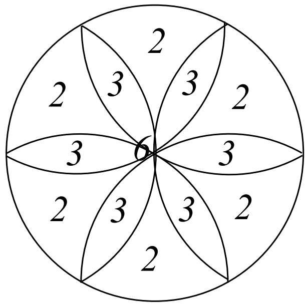
   Ответ: 99.

   Решение. Пример: числа от 100001 до 100099 включительно. Все эти числа лежат в промежутке от $100 * 1000$ до $100 * 1001$, поэтому не могут быть представлены в виде произведения трехзначного и четырехзначного чисел, так как $100 * 1000$ и $100 * 1001$ – два наименьших произведения трехзначного и четырехзначного чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих шестизначных чисел обязательно встретится число, делящееся на 100, которое не будет полупростым.

3. Лаборатория имеет форму правильного шестиугольника (т.е. все углы в нем равны и все стороны тоже равны) со стороной 4 метра. В углах лаборатории установили по прибору, показывающему количество тараканов на расстоянии не более 4 метров. Суммарно все шесть приборов показывают 8 тараканов. Сколько их может быть на самом деле? (Тараканы и приборы считаются точками.)

   Ответ: 2, 3, 4.

   Решение. На рисунке указаны области лаборатории и количество приборов, которые могут видеть таракана в данной области. Таким образом, каждый таракан может вносить в показания приборов 2, 3 или 6. Число 8 можно представить как сумму 2, 3 или 4 таких чисел: $6 + 2 = 3 + 3 + 2 = 2 + 2 + 2 + 2$, поэтому количество тараканов равно 2, 3 или 4.



4. Три купеческих сына получили в наследство от отца трое чашечных весов и 11 гирь весом 1 фунт, 2 фунта, ..., 11 фунтов. Каждому достались весы, а гири они разделили так, чтобы каждый мог взвесить на своих весах любой товар целого веса от 1 до k фунтов. Какое максимальное k они могли при этом получить? (Разумеется, при взвешивании гири можно класть на любую из чашек весов.)

   Ответ: 13.

   Решение. Покажем, что больше 13 получить нельзя. Поскольку гирь всего 11, кому-то достанется не более 3 гирь. При взвешивании каждую гирю можно положить на чашу с товаром, на противоположную чашу или не использовать. Таким образом получается не более чем $3^3 = 27$ различных взвешиваний. Таким образом будет взвешано не более 27 товаров разного веса. Среди них есть товар нулевого веса и товаров отрицательного веса столько же, сколько положительного. Следовательно, можно взвесить не более 13 товаров натурального веса.

   Покажем, как можно разделить гири, чтобы каждый мог взвесить товар весом от 1 до 13 фунтов.

   Первому: весом 1, 3 и 9 фунтов.

   Второму: весом 2, 4, 6 и 11 фунтов (все четные веса получаются из 2, 4 и 6, все нечетные – как 11 $\pm$ четный).

   Третьему: весом 5, 7, 8 и 10 фунтов (4 = 10 + 7 - 8 - 5, 6 = 5 + 8 - 7, 9 = 10 + 7 - 8, 11 = 10 + 8 - 7, 13 = 10 + 6 - 5).

8 класс. Группа 2

1. Шестизначное число называется *полупростым*, если оно не представимо в виде произведения трехзначного и четырехзначного чисел. Какое наибольшее количество полупростых чисел, идущих подряд, можно написать?

   Ответ: 99.

   Решение. Пример: числа от 100001 до 100099 включительно. Все эти числа лежат в промежутке от $100 * 1000$ до $100 * 1001$, поэтому не могут быть представлены в виде произведения трехзначного и четырехзначного чисел, так как $100 * 1000$ и $100 * 1001$ – два наименьших произведения трехзначного и четырехзначного чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих шестизначных чисел обязательно встретится число, делящееся на 100, которое не будет полупростым.

2. Действительные числа $a_1, a_2, ..., a_{2021}$ таковы, что

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2021}^2 = 1 \text{ и } a_1^4 + a_2^4 + ... + a_{2021}^4 = 1.$$

   Найдите все возможные значения суммы $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2021}^3$.

   Ответ: 1 или -1.

   Решение. Из неотрицательности квадрата и первого равенства следует, что для любого i выполняется неравенство $0 \leq a_i^2 \leq 1$, значит $0 \leq 1 - a_i^2$. Вычитая из первого равенства второе, получим

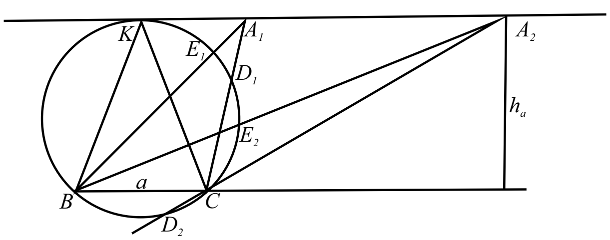
$$a_1^2(1 - a_1^2) + a_2^2(1 - a_2^2) + a_{2021}^2(1 - a_{2021}^2) = 0$$

В силу доказанных неравенств каждое слагаемое в такой сумме неотрицательно, но если хотя бы одно из них положительно, то сумма положительна, следовательно, все слагаемые равны нулю.

Решая уравнение $a_i^2(1-a_i^2)=0$, получим, что $a_i \in \{-1,0,1\}$. Подставив найденные значения a_i в первое уравнение, получим, что все a_i кроме ровно одного равны нулю. Тогда искомая сумма кубов равна 1 или -1.

3. Докажите, что среди всех треугольников с данными стороной a и высотой h_a наибольшую величину угла A имеет равнобедренный треугольник (h_a обозначает высоту, проведенную к стороне a, угол A лежит напротив стороны a).

   Решение. Пусть ABC – произвольный треугольник, где $BC=a$ - фиксированная сторона, $\angle A=\alpha$, $AH=h_a$ – высота, проведенная из точки A. Геометрическим местом точек M, для которых высота MBC, проведенная из M, равна h_a, являются две прямые, параллельные BC и находящиеся от нее на расстоянии h_a. Рассмотрим только одну из этих прямых, обозначим ее через l, тогда $A \in l$. Построим окружность ω, касающуюся l, где BC является хордой. Точку касания ω и l обозначим через K. Если $A \neq K$, т.е. A вне ω, то $\angle BAC < \angle BKC$ $(\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BC} - \overset{\smile}{E_1D_1}) < \frac{1}{2}\ \overset{\smile}{BC} = \angle BKC$ или $\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{BD_2} - \overset{\smile}{CE_2}) < \frac{1}{2}\ \overset{\smile}{BD_2} \leqslant \frac{1}{2}\ \overset{\smile}{BC} = \angle BKC)$. Таким образом, $\angle A=\alpha$ наибольший, если $A=K$. Отметим, что $\overset{\smile}{BK} = \overset{\smile}{KC} \Rightarrow BK=KC$, так как равные дуги стягиваются равными хордами, т.е. KBC – равнобедренный треугольник.



4. Лыжник проехал по горной трассе от A до B длиной 60 километров ровно за 5 часов. Вся трасса состоит только из подъемов и спусков. Все подъемы и спуски либо крутые, либо пологие. Суммарная длина участков каждого вида не менее 6 километров. На крутых спусках скорость лыжника 30 км/ч, а на пологих 20 км/ч. На крутых подъемах скорость лыжника 5 км/ч, а на пологих 10 км/ч. За какое минимальное и какое максимальное время лыжник проедет по той же трассе в обратном направлении от B до A?

   Ответ: минимум 5 часов, максимум 8 часов ровно.

   Решение. Пусть x, y, z, t — суммарные длины крутых спусков, пологих спусков, пологих подъемов и крутых подъемов соответственно. Тогда каждая из переменных не меньше, чем 6, кроме того имеем два уравнения:

$$x+y+z+t=60, \qquad (1)$$

$$\frac{x}{30}+\frac{y}{20}+\frac{z}{10}+\frac{t}{5}=5. \qquad (2)$$

Разность между домноженным на 60 вторым уравнением и удвоенным первым имеет вид:

$$y+4z+10t=180,$$

отсюда $y = 180 - 4z - 10t$ (3). Подставив это в первое уравнение, выразим $x = 3z + 9t - 120$ (4).

Время обратного движения равно

$$T = \frac{x}{5} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} + \frac{t}{30} = \frac{12(3z + 9t - 120) + 6(180 - 4z - 10t) + 3z + 2t}{60} = \frac{3z + 10t}{12} - 6.$$

Оценим $3z + 10t$ сверху и снизу, используя (3), (4) и то, что каждая переменная не меньше 6.

$$132 \le 120 + x + t = 3z + 10t = 180 - y - z \le 168.$$

Отсюда $5 \le T \le 8$.

Для того, чтобы показать достижимость полученных оценок укажем конкретные суммарные длины участков каждого вида.

Минимум достигается при $(x, y, z, t) = (6, 24, 24, 6)$, а максимум при $(x, y, z, t) = (33, 6, 6, 15)$.

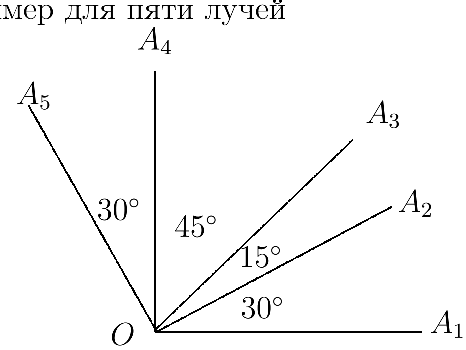
7 класс. Группа 1.

1. Из точки O провели лучи OA_1, ..., OA_n. Оказалось, что среди углов с вершиной O нашлись ровно два угла по $90°$, ровно два по $45°$, ровно два по $30°$. При каком наименьшем n это возможно?

   Ответ: 5.

   Решение.

   Пример для пяти лучей



   Покажем, что четырех лучей не достаточно.

   Рассмотрим два луча, образующие прямой угол. Введем на их основе прямоугольную систему координат. Пусть один из них это положительная полуось на оси Ox, а второй это положительная полуось на оси Oy. Если нет ни одного луча за пределами первого квадранта, то нет и второго прямого угла. Если же такой луч есть, то он образует с одним из лучей на осях угол более $90°$. Итак, кроме 6 требуемых углов, должен быть угол более $90°$, но 4 луча образуют всего 6 углов.

2. Вдоль всего берега озера Круглого стоят 50 домиков, в которых живут 80 коротышек. В каждом домике живет либо один, либо два коротышки, при этом нет двух домиков рядом, в которых по одному коротышке. На праздник каждый коротышка подарил по конфете каждому коротышке из обоих соседних домиков. Сколько конфет могло быть подарено? (Разумеется, каждая конфета дарится только один раз.)

   Ответ: 240.

Решение. Число подаренных конфет равно удвоенной сумме произведений чисел жителей во всех парах соседних домиков. Произведение чисел жителей в каждой паре соседних домиков равно 2 или 4. $2+2=2\cdot 2$. Поэтому произведение в каждой паре равно удвоенному числу жителей в домиках с двумя жителями. Тогда сумма произведений равна удвоенному числу жителей в домиках с двумя жителями. Всего таких домиков 30.

3. В Средиземье живут люди, эльфы, орки и гномы. Оркам все врут, а людям все говорят правду. Эльфы и гномы друг другу врут. Люди говорят правду гномам и эльфам. Орки эльфам врут, а гномам говорят правду. Собрались за круглым столом четыре воина: человек, орк, гном и эльф. Каждый сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». Затем пересели так, что двое, ранее сидевшие напротив, оказались рядом. Каждый снова сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». В Средиземье считается, что один меч лучше другого, если он и легче и прочнее. Не существует мечей равных по прочности или по легкости. Перечислите все пары воинов, в которых меч первого воина лучше меча второго.

   Ответ: (орк,человек) и (орк,гном).

   Решение. Если гном и орк хотя бы раз сидели напротив, то меч гнома превосходит все остальные по какому-то параметру. Действительно, человек соврал орку, орк соврал эльфу и эльф соврал гному. Но второй раз они сидят рядом, значит, меч орка лучше меча гнома. Действительно, орк сказал гному правду, а гном соврал. Значит меч орка и легче и прочнее, чем меч гнома. Полученное противоречие показывает, что орк и гном оба раза сидели рядом.

   Когда орк сидел напротив человека, орк сказал правду гному, гном сказал правду человеку, и человек сказал правду эльфу. Пусть в этот момент они говорили о прочности мечей (если это не так, то в рассуждении надо просто поменять местами прочность и легкость). Значит, меч орка самый прочный, затем идет меч гнома, затем меч человека, а меч эльфа самый непрочный. Когда они заговорили о легкости в той же рассадке, эльф сказал правду человеку, а человек гному, гном соврал орку, а орк эльфу. Значит меч эльфа самый легкий, а меч гнома самый тяжелый.

   Когда орк сидел напротив эльфа, человек не мог сидеть справа от эльфа иначе фраза эльфа "Мой меч прочнее твоего"была бы ложью эльфа человеку. Значит человек сидел от эльфа слева, а гном справа.Тогда человек соврал орку фразой: "Мой меч легче твоего."Следовательно, меч эльфа самый легкий, затем идет меч орка, затем меч человека, а меч гнома самый тяжелый.

   Таким образом сравнивая меч эльфа и любой из трех других нельзя сказать какой лучше. (В такой ситуации говорят, что мечи *несравнимы*). Про мечи человека и эльфа тоже сказать какой лучше, поскольку первый легче, а второй прочнее. Меч орка легче и прочнее как меча человека, так и меча гнома, значит он лучше каждого из них.

4. Три купеческих сына получили в наследство от отца трое чашечных весов и 11 гирь весом 1 фунт, 2 фунта, ..., 11 фунтов. Каждому достались весы, а гири они разделили так, чтобы каждый мог взвесить на своих весах любой товар целого веса от 1 до k фунтов. Какое максимальное k они могли при этом получить? (Разумеется при взвешивании гири можно класть на любую из чашек весов.)

   Ответ: 13.

Решение. Покажем, что больше 13 получить нельзя. Поскольку гирь всего 11, кому-то достанется не более 3 гирь. При взвешивании каждую гирю можно положить на чашу с товаром, на противоположную чашу или не использовать. Таким образом получается не более чем $3^3 = 27$ различных взвешиваний. Таким образом будет взвешано не более 27 товаров разного веса. Среди них есть товар нулевого веса и товаров отрицательного веса столько же, сколько положительного. Следовательно, можно взвесить не более 13 товаров натурального веса.

Покажем, как можно разделить гири, чтобы каждый мог взвесить товар весом от 1 до 13 фунтов.

Первому: весом 1, 3 и 9 фунтов.

Второму: весом 2, 4, 6 и 11 фунтов (все четные веса получаются из 2, 4 и 6, все нечетные – как 11 $\pm$ четный).

Третьему: весом 5, 7, 8 и 10 фунтов ($4 = 10 + 7$ - 8 - 5, $6 = 5 + 8$ - 7, $9 = 10 + 7$ - 8, $11 = 10 + 8$ - 7, $13 = 10 + 6$ - 5).

8 класс. Группа 1.

1. Клетки доски размером $n \times n$ раскрашены в три цвета следующим образом. Нижняя левая клетка зеленая, за ее исключением нижняя горизонталь красная, а левая вертикаль синяя. Раскраска прочих клеток определена так: если цвета нижнего и левого соседей клетки совпадают, то и сама эта клетка имеет тот же цвет, если разные — отличается по цвету от обоих. Может ли быть так, что какие-то две горизонтали окрашены одинаково?

   Ответ: нет.

   Решение. Заметим, что:
   (1) раскраска предыдущей горизонтали однозначно определяется раскраской следующей;
   (2) тогда если есть две одинаковых горизонтали, то некоторая горизонталь раскрашена так же, как нижняя (кроме самой левой клетки), т.е. красная, начиная со второй слева клетки;
   (3) но диагональ лево-низ — право-верх зеленая, т.е. хотя бы по одной зеленой клетке есть на всех горизонталях. Противоречие.

2. Касательная, проведенная к описанной окружности треугольника ABC через точку A, пересекает луч BC в точке D. На прямой AC отмечена точка E, принадлежащая описанной окружности треугольника ABD. Известно, что $AC = 4$, $CE = 8$, а касательная DL к описанной окружности ABC содержит биссектрису $\angle ADE$. Найдите углы треугольника ABC.

   Ответ: 90°, 30°, 60°.

   Решение. Пусть M – середина AC, K – точка пересечения DL с AE. По свойствам вписанных углов и углов между касательной и хордой, $\angle AED = \angle ABD = \angle DAE$, поэтому треугольник ADE – равнобедренный и биссектриса DK является в нем медианой и высотой. В частности, $DK \perp AE$, откуда $OL \parallel AE$. Тогда $AK = KE = 6$, $AM = 2$, $AO = OL = MK = 6 - 2 = 4 = 2AM$, откуда $\angle ABC = \angle AOM = 30°$. Значит, $\angle ADK = 60°$ и равнобедренный треугольник ADL ($AD = DL$) является равносторонним. Поэтому $\angle LBC = \angle LAC = \angle LAD - \angle KAD = 30° = \angle ABC$, т.е. BD биссектриса $\angle ABL$ и, таким образом, C – середина дуги AL описанной окружности треугольника ABC, откуда DB – биссектриса угла ADL и $\angle KDB = 30°$, тогда $\angle ACB = 60°$, а третий угол в треугольнике ABC равен $90°$.

3. В Средиземье живут люди, эльфы, орки и гномы. Оркам все врут, а людям все говорят правду. Эльфы и гномы друг другу врут. Люди говорят правду гномам и эльфам. Орки эльфам врут, а гномам говорят правду. Собрались за круглым столом четыре воина: человек, орк, гном и эльф. Каждый сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». Затем пересели так, что двое, ранее сидевшие напротив, оказались рядом. Каждый снова сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». В Средиземье считается, что один меч лучше другого, если он и легче, и прочнее. Не существует мечей равных по прочности или по легкости. Перечислите все пары воинов, в которых меч первого воина лучше меча второго.

   Ответ: (орк,человек) и (орк,гном).

   Решение. Если гном и орк хотя бы раз сидели напротив, то меч гнома превосходит все остальные по какому-то параметру. Действительно, человек соврал орку, орк соврал эльфу и эльф соврал гному. Но второй раз они сидят рядом, значит, меч орка лучше меча гнома. Действительно, орк сказал гному правду, а гном соврал. Значит меч орка и легче и прочнее, чем меч гнома. Полученное противоречие показывает, что орк и гном оба раза сидели рядом.

   Когда орк сидел напротив человека, орк сказал правду гному, гном сказал правду человеку, и человек сказал правду эльфу. Пусть в этот момент они говорили о прочности мечей (если это не так, то в рассуждении надо просто поменять местами прочность и легкость). Значит, меч орка самый прочный, затем идет меч гнома, затем меч человека, а меч эльфа самый непрочный. Когда они заговорили о легкости в той же рассадке, эльф сказал правду человеку, а человек гному, гном соврал орку, а орк эльфу. Значит меч эльфа самый легкий, а меч гнома самый тяжелый.

   Когда орк сидел напротив эльфа, человек не мог сидеть справа от эльфа иначе фраза эльфа «Мой меч прочнее твоего» была бы ложью эльфа человеку. Значит человек сидел от эльфа слева, а гном справа. Тогда человек соврал орку фразой «Мой меч легче твоего». Следовательно, меч эльфа самый легкий, затем идет меч орка, затем меч человека, а меч гнома самый тяжелый.

   Таким образом, сравнивая меч эльфа и любой из трех других, нельзя сказать, какой лучше. (В такой ситуации говорят, что мечи *несравнимы.*) Про мечи человека и эльфа тоже нельзя сказать, какой лучше, поскольку первый легче, а второй прочнее. Меч орка легче и прочнее как меча человека, так и меча гнома, значит он лучше каждого из них.

4. Три купеческих сына получили в наследство от отца трое чашечных весов и 11 гирь весом 1 фунт, 2 фунта, ..., 11 фунтов. Каждому достались весы, а гири они разделили так, чтобы каждый мог взвесить на своих весах любой товар целого веса от 1 до k фунтов. Какое максимальное k они могли при этом получить? (Разумеется при взвешивании гири можно класть на любую из чашек весов.)

   Ответ: 13.

   Решение. Покажем, что больше 13 получить нельзя. Поскольку гирь всего 11, кому-то достанется не более 3 гирь. При взвешивании каждую гирю можно положить на чашу с товаром, на противоположную чашу или не использовать. Таким образом получается не более чем $3^3 = 27$ различных взвешиваний. Таким образом будет взвешано не более 27 товаров разного веса. Среди них есть товар нулевого веса и товаров отрицательного веса столько же, сколько положительного. Следовательно, можно взвесить не более 13 товаров натурального веса.

Покажем, как можно разделить гири, чтобы каждый мог взвесить товар весом от 1 до 13 фунтов.

Первому: весом 1, 3 и 9 фунтов.

Второму: весом 2, 4, 6 и 11 фунтов (все четные веса получаются из 2, 4 и 6, все нечетные – как $11 \pm$ четный).

Третьему: весом 5, 7, 8 и 10 фунтов ($4 = 10 + 7 - 8 - 5$, $6 = 5 + 8 - 7$, $9 = 10 + 7 - 8$, $11 = 10 + 8 - 7$, $13 = 10 + 6 - 5$).

Старшая лига. Группа 2.

1. Оля рисует в тетради прямоугольники размером $a \times b$ клеток, где $a < b$, при различных a и b. Стороны прямоугольников рисуются исключительно вдоль линий сетки. Оля считает прямоугольник *интересным*, если НОД$(a, b) = 5$, а его диагональ не пересекает ровно 2020 клеток этого прямоугольника. Найдите все возможные значения сторон интересных прямоугольников. Если оказалось так, что только вершина клетки лежит на диагонали, то в этом случае не считается, что диагональ пересекает саму клетку.

   Ответ: $(5, 505)$, $(10, 225)$, $(15, 145)$, $(25, 85)$.

   Решение. Общее число клеток, через которые проходит диагональ, равно $a + b - 5$. В самом деле, прямоугольник содержит a горизонтальных линий сетки и b вертикальных. Прямая пересекает их все и каждый отрезок между соседними линиями лежит в одной клетке. Осталось только узнать, сколько раз она пересекает сразу две линии, то есть проходит через узел клетчатой сетки.

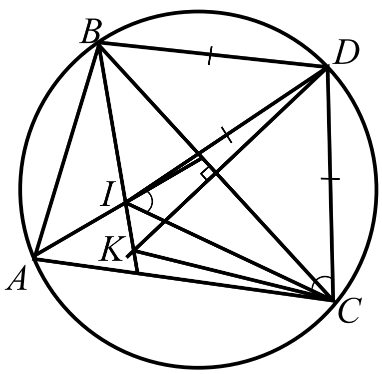
   Пусть первый узел, через который она проходит, имеет координаты $(x; y)$, тогда все остальные узлы имеют координаты вида $(kx; ky)$ (поскольку у прямой, проходящей через начало координат, отношение координат постоянно). Ясно, что x, y – взаимно простые числа, так как если они делятся на $d > 1$, то точка $\left(\frac{x}{d}; \frac{y}{d}\right)$ тоже лежит на диагонали. Тогда k обязано быть целым — иначе его знаменатель не сможет целиком сократиться и с x и с y и точка $(kx; ky)$ не будет иметь целые координаты. Итак, диагональ проходит в точности через узлы вида $(kx; ky)$. Значит $a = kx$, $b = ky$, причем x, y — взаимно просты. Это и означает, что $k =$ НОД(a, b). Итак, общее число пересечений с линиями составит $a + b -$ НОД(a, b) (мы вычитаем те, которые были посчитаны два раза и не учитываем начальную вершину прямоугольника, но учитываем конечную). Значит именно столько клеток и пересекает наша прямая. Перейдем теперь к задаче. По условию $ab - (a + b - 5) = 2020 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 = 2016 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 2016$. Учитывая, что $a < b$, $a, b \geqslant 1$, получаем следующие варианты:
   $a - 1 = 1$, $b - 1 = 2016$;
   $a - 1 = 2$, $b - 1 = 1008$;
   $a - 1 = 3$, $b - 1 = 672$;
   $a - 1 = 4$, $b - 1 = 504$;
   $a - 1 = 6$, $b - 1 = 336$;
   $a - 1 = 7$, $b - 1 = 288$;

$a-1=8$, $b-1=252$;
$a-1=9$, $b-1=224$;
$a-1=12$, $b-1=168$;
$a-1=14$, $b-1=144$;
$a-1=16$, $b-1=126$;
$a-1=18$, $b-1=112$;
$a-1=21$, $b-1=96$;
$a-1=24$, $b-1=84$;
$a-1=28$, $b-1=72$;
$a-1=32$, $b-1=63$;
$a-1=36$, $b-1=56$;
$a-1=42$, $b-1=48$.

Среди найденных вариантов наибольший общий делитель равен 5 в следующих случаях: $(5, 505)$, $(10, 225)$, $(15, 145)$, $(25, 85)$.

2. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Луч BI пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке K. Точка D — середина дуги описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку A. Докажите, что четырехугольник $IDCK$ вписанный.

   Решение. Так как $AB < AC$, точки A, B, I лежат по одну сторону от прямой KD. По лемме о трезубце, $BD = DI = DC$, следовательно треугольники BDC и DIC равнобедренные. Кроме того $KB = KC$ и $\triangle BKD = \triangle DKC$, учитывая, что CI и BI – биссектрисы углов в $\triangle ABC$, получаем: $\angle DIC = \angle DCI = \angle DCB + \angle BCI = \frac{180° - \angle BDC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = \frac{180° - \angle ABC}{2} = 90° - \frac{\angle ABC}{2} = 90° - \angle KBC = \angle BKD = \angle DKC$. Точки I, K лежат по одну сторону от DC и $\angle DIC = \angle DKC$, откуда получаем, что точки I, D, K, C лежат на одной окружности.



3. Найдите все такие многочлены $P(x)$, что для любого числа x верно:

$$P(7x) + P(4x) + P(2x) + P(x) = P(6x) + P(5x) + P(3x).$$

   Ответ: ноль и первой и второй степени с нулевым свободным членом.

   Решение. Очевидно, подходит нулевой многочлен. Пусть многочлен ненулевой, он имеет вид $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
   Тогда $a_n(7x)^n + a_{n-1}(7x)^{n-1} + ... + a_0 + a_n(4x)^n + a_{n-1}(4x)^{n-1} + ... + a_0 + a_n(2x)^n + a_{n-1}(2x)^{n-1} + ... + a_0 + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = a_n(6x)^n + a_{n-1}(6x)^{n-1} + ... + a_0 + a_n(5x)^n + a_{n-1}(5x)^{n-1} + ... + a_0 + a_n(3x)^n + a_{n-1}(3x)^{n-1} + ... + a_0$.

   Приведем подобные и получим

$a_n((7x)^n + (4x)^n + (2x)^n + x^n - (6x)^n - (5x)^n - (3x)^n) + ... + a_0 = 0$.
Остается рассмотреть $(7x)^k + (4x)^k + (2x)^k + x^k - (6x)^k - (5x)^k - (3x)^k$.
При $k = 1$: $7x + 4x + 2x + x = 6x + 5x + 3x$, верно при любом x.
При $k = 2$: $49x^2 + 16x^2 + 4x^2 + x^2 = 36x^2 + 25x^2 + 9x^2$, верно при любом x.
При $k > 2$: если x не равен 0, то можем на него сократить. Тогда рассмотрим функцию $f(k) = 7^k - 6^k - 5^k + 4^k - 3^k + 2^k + 1$. Докажем, что при $k > 2$ она принимает только положительные значения.
1) $7^k > 6^k + 5^k$ при любом натуральном $k > 2$ (можно доказать по индукции).
2) $4^k > 3^k$.
Значит, в остальных случаях равенство выполняться не будет: найдется x, не являющееся корнем $P(7x) + P(4x) + P(2x) + P(x) = P(6x) + P(5x) + P(3x)$.
В таком случае, нам подходят все линейные и квадратичные многочлены с $a_0 = 0$.
Теперь рассмотрим случай, когда $x = 0$. Но все слагаемые занулятся, кроме свободного члена, тогда $4a_0 = 3a_0$, а значит $a_0 = 0$.
Таким образом, подходят все линейные и квадратичные многочлены с нулевым свободным членом, а также $P(x) = 0$.

4. Два старателя Джон и Сэм нашли 21 самородок золота весом 1, 2,... 21 граммов. Джон показал свой револьвер и предложил Сэму игру: они по очереди, начиная с Джона, будут класть самородки на любую чашку двухчашечных весов, а в конце Джон заберет золото с той чашки, которая перевесит, а Сэму достанется золото со второй чашки. Сэм показал динамитную шашку и выторговал себе право класть каждый ход не по одному, а по два самородка на любые чашки (можно оба на одну). Сколько золота достанется Джону при правильной игре обоих? Конечно же, каждый из старателей хотел бы унести как можно больше золота.

   Ответ: 116 граммов.

   Решение. Поскольку суммарный вес самородков нечетный ($(1 + 21) * 21/2 = 231$ гр), на перевесившей чашке окажется хотя бы на 1 гр больше, чем на другой. Значит, Джон получит не менее 116 гр.

   Чтобы Сэм получил свои 115 гр он может действовать так. Разделить все самородки мысленно на 7 кучек. Первая: 21, 11, 10 гр. Вторая: 20, 18, 2 гр. Третья: 19, 16, 3 гр. Четвертая: 17, 15, 1 гр. Пятая: 14, 9, 5 гр. Шестая: 13, 7, 6 гр. Седьмая: 12, 8, 4 гр.

   Заметим, что в каждой кучке, кроме четвертой, вес самого тяжелого самородка равен сумме весов двух других, а в четвертой кучке вес самого тяжелого самородка отличается от суммы весов двух других на 1. Таким образом, если Сэм на взятие Джоном самородка из какой-то кучки будет раскладывать на весы два других самородка из той же кучи, он сможет обеспечить каждым ходом, кроме раскладывания четвертой кучи, уравновешивание хода Джона, а при раскладывании четвертой кучи разница весов может быть равна только 1 грамму.

5. В Средиземье живут люди, эльфы, орки и гномы. Оркам все врут, а людям все говорят правду. Эльфы и гномы друг другу врут. Люди говорят правду гномам и эльфам. Орки эльфам врут, а гномам говорят правду. Собрались за круглым столом четыре воина: человек, орк, гном и эльф. Каждый сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». Затем пересели так, что двое, ранее сидевшие напротив, оказались рядом. Каждый снова сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». В Средиземье считается, что один меч лучше другого, если он и легче, и прочнее. Не существует мечей

равных по прочности или по легкости. Перечислите все пары воинов, в которых меч первого воина лучше меча второго.

Ответ: (орк,человек) и (орк,гном).

Решение. Если гном и орк хотя бы раз сидели напротив, то меч гнома превосходит все остальные по какому-то параметру. Действительно, человек соврал орку, орк соврал эльфу и эльф соврал гному. Но второй раз они сидят рядом, значит, меч орка лучше меча гнома. Действительно, орк сказал гному правду, а гном соврал. Значит меч орка и легче и прочнее, чем меч гнома. Полученное противоречие показывает, что орк и гном оба раза сидели рядом.

Когда орк сидел напротив человека, орк сказал правду гному, гном сказал правду человеку, и человек сказал правду эльфу. Пусть в этот момент они говорили о прочности мечей (если это не так, то в рассуждении надо просто поменять местами прочность и легкость). Значит, меч орка самый прочный, затем идет меч гнома, затем меч человека, а меч эльфа самый непрочный. Когда они заговорили о легкости в той же рассадке, эльф сказал правду человеку, а человек гному, гном соврал орку, а орк эльфу. Значит меч эльфа самый легкий, а меч гнома самый тяжелый.

Когда орк сидел напротив эльфа, человек не мог сидеть справа от эльфа иначе фраза эльфа «Мой меч прочнее твоего» была бы ложью эльфа человеку. Значит человек сидел от эльфа слева, а гном справа. Тогда человек соврал орку фразой «Мой меч легче твоего». Следовательно, меч эльфа самый легкий, затем идет меч орка, затем меч человека, а меч гнома самый тяжелый.

Таким образом, сравнивая меч эльфа и любой из трех других, нельзя сказать, какой лучше. (В такой ситуации говорят, что мечи *несравнимы.*) Про мечи человека и эльфа тоже нельзя сказать, какой лучше, поскольку первый легче, а второй прочнее. Меч орка легче и прочнее как меча человека, так и меча гнома, значит он лучше каждого из них.

6. В лицее 4 десятых класса: А, Б, В и Г. Если взять любые два класса, то окажется, что пар знакомых учеников из разных классов по крайней мере в пять раз больше, чем пар незнакомых учеников из разных классов. Обязательно ли в этом лицее есть четверка попарно знакомых десятиклассников, которые все из разных классов?

   Ответ: да, обязательно.

   Решение. Пусть a, b, c, d — количества учеников в классах А, Б, В и Г, соответственно. Тогда всего четверок учеников из разных классов $X = abcd$. Четверок X_{ab}, в которых не знакомы ученики из классов А и Б не более, чем $(1/6 \cdot ab) \cdot cd$. Аналогично и для любой другой пары классов. Следовательно, $X_{ab} + X_{ac} + X_{ad} + X_{bc} + X_{bd} + X_{cd} \leq 6 \cdot (1/6)abc = X$. Если для каких-то двух классов нет ни одной пары незнакомых, то неравенство строгое. Значит нужная четверка найдется.

   В каждой паре классов есть хотя бы одна пара незнакомых. В этом случае заметим, что множество четверок, в которых не знакомы ученики из классов А и Б и множество четверок, в которых не знакомы ученики из классов В и Г пересекаются, а значит количество четверок, в которых есть хотя бы одна пара незнакомых строго меньше числа всех четверок.

Старшая лига. Группа 1.

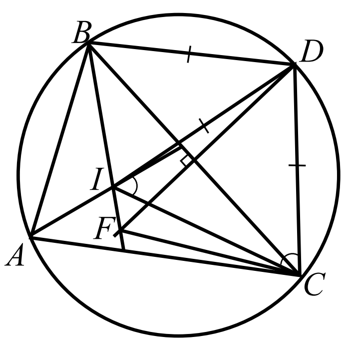
1. Найдите все натуральные n, представимые в виде $1+a^b+b^a$, где a, b – два наименьших натуральных делителя n, отличных от единицы.

   Ответ: 18.

   Решение. Пусть n – искомое число, тогда $n \vdots a$, $n \vdots b$. Без ограничения общности, пусть $1 < a < b$. Если НОД$(a,b) = d > 1$, то $n - a^b - b^a = 1 \vdots d$, что невозможно. Значит числа a, b взаимно просты, а поскольку они являются наименьшими делителями n, то они простые. Тогда из малой теоремы Ферма следует, что $n = 1 + a^b + b^a \equiv 1 + a \pmod b$, а значит $1 + a \vdots b$. Но $a < b$, поэтому $1 + a = b$, откуда $a = 2$, $b = 3$ и $n = 18$. Действительно, это число подходит, так как 2 и 3 являются его наименьшими натуральными делителями, отличными от единицы.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Луч AI пересекает описанную окружность в точке D. Прямая BI вторично пересекает описанную окружность треугольника DCI в точке K. Доказать, что $BK = KC$.

   Решение. Так как AI – биссектриса угла BAC, D – середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Обозначим через F точку пересечения луча BI и серединного перпендикуляра к стороне BC. Покажем, что точки D, I, F, C лежат на одной окружности. Так как $AB < AC$, точки A, B, I лежат по одну сторону от прямой FD. По лемме о трезубце, $BD = DI = DC$, следовательно треугольники BDC и DIC равнобедренные. Кроме того $FB = FC$ и $\triangle BFD = \triangle DFC$, учитывая, что CI и BI – биссектрисы углов в $\triangle ABC$, получаем: $\angle DIC = \angle DCI = \angle DCB + \angle BCI = \frac{180^\circ - \angle BDC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = \frac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ - \angle FBC = \angle BFD = \angle DFC$. Точки I, F лежат по одну сторону от DC и $\angle DIC = \angle DFC$, откуда получаем, что точки I, D, F, C лежат на одной окружности. Описанная окружность четырехугольника $IDCF$ совпадает с описанной окружностью треугольника IDC, а точки K, F лежат на этой окружности и на прямой BI. Поэтому они совпадают, но $BF = FC$, т.е. $BK = KC$.

3. В стране есть n городов, соединенных односторонними дорогами (может, в том числе, быть и так, что из одного города в другой проложена дорога и наоборот - тогда это две разные односторонние дороги). Известно, что для любой пары городов N, U существует не более, чем один путь от N до U (т.е. не может быть такой ситуации, когда можно добраться, например, из N в U одновременно напрямую по дороге и по какому-то пути, проходящему через другие города). Найдите наибольшее возможное количество дорог в этой стране.

   Ответ: $n^2/4$ для четных n и $(n-1)(n+1)/4$ для нечетных n.

   Решение. Задача эквивалентна следующей. Имеется орграф на n вершинах. Известно, что для любой пары вершин x, y существует не более, чем один путь от x до

y. Найдите наибольшее возможное количество ребер в этом графе. Оценка сверху. Назовем *домом* множество вершин, имеющих нулевую степень захода. Нетрудно видеть, что для всякой вершины v существует хотя бы одна «домашняя» вершина $d(v)$ такая, что существует путь $d(v)-v$. Преобразуем граф: все ребра uv заменим на ребра $d(u)v$. Легко показать, что количество ребер не изменилось, а свойство из условия по-прежнему выполняется. Все ребра теперь начинаются в доме и заканчиваются в его дополнении, откуда их количество не превосходит |дом|(n - |дом|), что дает оценку $n^2/4$ для четных n и $(n-1)(n+1)/4$ для нечетных n. Легко видеть, что эта оценка достигается.

4. В Средиземье живут люди, эльфы, орки и гномы. Оркам все врут, а людям все говорят правду. Эльфы и гномы друг другу врут. Люди говорят правду гномам и эльфам. Орки эльфам врут, а гномам говорят правду. Собрались за круглым столом четыре воина: человек, орк, гном и эльф. Каждый сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». Затем пересели так, что двое, ранее сидевшие напротив, оказались рядом. Каждый снова сказал соседу справа: «Мой меч прочнее твоего», а соседу слева: «Мой меч легче твоего». В Средиземье считается, что один меч лучше другого, если он и легче, и прочнее. Не существует мечей равных по прочности или по легкости. Перечислите все пары воинов, в которых меч первого воина лучше меча второго.

   Ответ: (орк,человек) и (орк,гном).

   Решение. Если гном и орк хотя бы раз сидели напротив, то меч гнома превосходит все остальные по какому-то параметру. Действительно, человек соврал орку, орк соврал эльфу и эльф соврал гному. Но второй раз они сидят рядом, значит, меч орка лучше меча гнома. Действительно, орк сказал гному правду, а гном соврал. Значит меч орка и легче и прочнее, чем меч гнома. Полученное противоречие показывает, что орк и гном оба раза сидели рядом.

   Когда орк сидел напротив человека, орк сказал правду гному, гном сказал правду человеку, и человек сказал правду эльфу. Пусть в этот момент они говорили о прочности мечей (если это не так, то в рассуждении надо просто поменять местами прочность и легкость). Значит, меч орка самый прочный, затем идет меч гнома, затем меч человека, а меч эльфа самый непрочный. Когда они заговорили о легкости в той же рассадке, эльф сказал правду человеку, а человек гному, гном соврал орку, а орк эльфу. Значит меч эльфа самый легкий, а меч гнома самый тяжелый.

   Когда орк сидел напротив эльфа, человек не мог сидеть справа от эльфа иначе фраза эльфа «Мой меч прочнее твоего» была бы ложью эльфа человеку. Значит человек сидел от эльфа слева, а гном справа. Тогда человек соврал орку фразой «Мой меч легче твоего». Следовательно, меч эльфа самый легкий, затем идет меч орка, затем меч человека, а меч гнома самый тяжелый.

   Таким образом, сравнивая меч эльфа и любой из трех других, нельзя сказать, какой лучше. (В такой ситуации говорят, что мечи *несравнимы.*) Про мечи человека и эльфа тоже нельзя сказать, какой лучше, поскольку первый легче, а второй прочнее. Меч орка легче и прочнее как меча человека, так и меча гнома, значит он лучше каждого из них.

5. В лицее 4 десятых класса: А, Б, В и Г. Если взять любые два класса, то окажется, что пар знакомых учеников из разных классов по крайней мере в пять раз больше,

чем пар незнакомых учеников из разных классов. Обязательно ли в этом лицее есть четверка попарно знакомых десятиклассников, которые все из разных классов?

Ответ: да, обязательно.

Решение. Пусть a, b, c, d — количества учеников в классах А, Б, В и Г, соответственно. Тогда всего четверок учеников из разных классов $X = abcd$. Четверок X_{ab}, в которых не знакомы ученики из классов А и Б не более, чем $(1/6 \cdot ab) \cdot cd$. Аналогично и для любой другой пары классов. Следовательно, $X_{ab} + X_{ac} + X_{ad} + X_{bc} + X_{bd} + X_{cd} \leq 6 \cdot (1/6)abc = X$. Если для каких-то двух классов нет ни одной пары незнакомых, то неравенство строгое. Значит нужная четверка найдется.

В каждой паре классов есть хотя бы одна пара незнакомых. В этом случае заметим, что множество четверок, в которых не знакомы ученики из классов А и Б и множество четверок, в которых не знакомы ученики из классов В и Г пересекаются, а значит количество четверок, в которых есть хотя бы одна пара незнакомых строго меньше числа всех четверок.

6. В двух соседних вершинах правильного 2020-угольника $A_1 ... A_{2020}$ стоят белая и черная фишки. Медведь и Сова по очереди передвигают любую из фишек на соседнюю вершину, если она свободна. Начинает Медведь. Проигрывает тот, после хода которого получилась уже встречавшаяся ранее позиция. Позицией называется пара (A_i, A_j) различных вершин 2020-угольника, где A_i занята белой фишкой, а в вершине A_j стоит черная фишка, например, (A_1, A_5) и (A_5, A_1) являются разными позициями. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Сова.

Решение. Обозначим вершины 2020-угольника так: A_1 — вершина, где первоначально стоит черная фишка, A_2 — вершина, где первоначально стоит белая фишка, A_3 — следующая соседняя с A_2, и т. д. При этом будем считать, что нумерация бесконечная, полагая $A_{i+2020} = A_i$. Назовем *дистанцией* между черной фишкой на вершине A_k и белой фишкой на вершине A_s остаток от деления на 2020 разности $s - k$. Таким образом дистанция – это целое число от 1 до 2019, первоначально равное 1.

Первые 2019 ходов Сова делает ход в ту же сторону, что и первый ход Медведя, но другой фишкой. Тогда любой ход Медведя со 2-го по 2020-й той фишкой, с которой он начинал, может быть сделан только в ту же сторону, что и первый. Если же Медведь сходит другой фишкой, то это будет ход, приводящий к повтору позиции после его предыдущего хода. Таким образом, после 2020-го хода медведя в игре встретились все позиции с дистанциями 1 и 2 и только они. 2020-й ход Совы увеличивает дистанцию на 1. После него в игре встретились все позиции с дистанциями 1 и 2 и еще одна позиция с дистанцией 3, из которой очередь хода у Медведя.

Пусть перед некоторым ходом Медведя в игре встретились все позиции с дистанциями $1, 2, ..., 2k$, фишки находятся в позиции с дистанцией $2k + 1$, а остальные позиции не встречались. Если Медведь сокращает дистанцию, то возникает повтор позиции. Пусть он увеличил дистанцию до $2k + 2$, сдвинув фишку F. Тогда Сова сокращает дистанцию до $2k + 1$, передвигая фишку $G \neq F$. Это будет новая позиция с дистанцией $2k + 1$. Если Медведь сократит дистанцию или сдвинет фишку G, возникнет повтор. Таким образом Медведь вынужден двигать фишку F, увеличивая дистанцию, Сова же в ответ может сокращать дистанцию, двигая G. После 2019 таких пар ходов и еще одного хода Медведя в игре встретились все позиции с дистанциями $1, 2, ..., 2k + 2$. Следующим ходом Сова увеличивает дистанцию до $2k + 3$, что всегда возможно в силу нечетности числа 2019. Остальные позиции в игре не встречались. Таким образом обоснован переход от k к $k+1$.

При $2k+1=2019$ любой ход Медведя уменьшает дистанцию, а, значит, приводит к повтору позиции.