СУНЦ УрФУ, 2019 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 МИ, ФМ, ФХ классы
Вариант 1

Часть 1

1. *(3 балла)* Вычислите $0,205^3 + 0,205 + 3 \cdot 0,795 \cdot 0,205 + 0,795^3 + 0,795$.

Решение. Конечно, не нужно выполнять действия столбиком! Заметим, что $0,205 + 0,795 = 1$. Введем обозначения $0,205 = a$ и $0,795 = b$ и упростим полученное выражение. Получим

$$a^3 + a + 3ab + b^3 + b = (a^3 + b^3) + (a + b) + 3ab = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a + b) + 3ab.$$

Заменим $a + b = 1$, получим $a^2 - ab + b^2 + 1 + 3ab = (a + b)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$.
Ответ. 2.

2. *(2 балла)* Два года подряд население увеличивалось на 20% ежегодно. На сколько процентов увеличилось население за эти два года?

Решение. Пусть первоначально население составляло x человек, тогда через год будет $1,2x$. Еще через год $1,2x + 1,2x \cdot 0,2 = 1,44x$. Значит, через два года население увеличилось на 44%.
Ответ. 44.

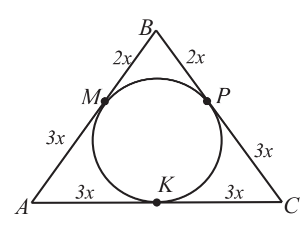
3. *(3 балла)* Найдите количество целых решений неравенства $x^3 \cdot |x^2 - 8x + 7| > 0$ на отрезке $[0; 6]$.

Решение. Заметим, что значение выражения $|x^2 - 8x + 7|$ неотрицательное, значит, чтобы неравенство выполнялось, необходимо и достаточно выполнение условий $x^3 > 0$ и $x^2 - 8x + 7 \neq 0$. При этом модуль раскрывать совсем не нужно! Получаем $\begin{cases} x^3 > 0, \\ x^2 - 8x + 7 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 7 \end{cases}$ На отрезке $[0; 6]$ указанным условиям удовлетворяют только точки 2, 3, 4, 5, 6. Всего 5 чисел.
Замечание. Можно было просто подставить все целые числа из отрезка $[0; 6]$ и проверить, верно ли исходное неравенство.
Ответ. 5.

4. *(2 балла)* Решите уравнение $\frac{5x^2+7x-6}{x+2} = x + 4$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ): $x \neq -2$. И это очень важно! Домножим на $x + 2$ обе части уравнения, раскроем скобки:
$5x^2 + 7x - 6 = (x + 2)(x + 4) \Leftrightarrow 5x^2 + 7x - 6 = x^2 + 6x + 8 \Leftrightarrow 4x^2 - x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7/4, \\ x = -2. \end{array} \right.$ Корень квадратного уравнения $x = -2$ посторонний по ОДЗ.
Ответ. $x = 7/4$.

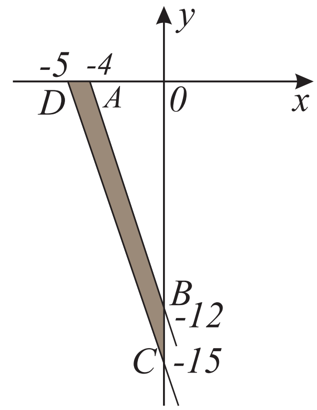
5. *(2 балла)* В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность, а точка касания делит боковую сторону треугольника на отрезки, длины которых относятся как $2 : 3$, считая от вершины B. Периметр треугольника 32. Найдите площадь треугольника и радиус вписанной окружности.



Решение. Обозначим длины отрезков на боковой стороне через $2x$ и $3x$, как показано на рисунке. Тогда по свойству отрезков касательных к окружности $KC = PC = AK = AM = 3x$, $BM = BP = 2x$. Тогда периметр треугольника равен $P_{\triangle ABC} = 2x+3x+3x+3x+3x+2x = 16x = 32$, откуда $x = 2$. Получаем $AB = BC = 10$ и $AC = 12$, находим высоту равнобедренного

треугольника ABC: $BK^2 = 10^2 - 6^2 = 64$, $BK = 8$. Вычисляем площадь ABC: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC{\cdot}BK = \frac{1}{2}{\cdot}12{\cdot}8 = 48$, а по формуле площади треугольника легко найти $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{32/2} = 3$.
Ответ. $S = 48$, $r = 3$.

6. *(3 балла)* Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $3x + y = -15$, $3x + y = -12$ и осями координат.



Решение. Выразим y из уравнений и построим графики получившихся функций: $y_1 = -3x - 15$, $y_2 = -3x - 12$. Графиками этих функций будут параллельные прямые, проходящие через точки пересечения графиков с осями. Находим эти точки: $y_1(0) = -15 \Rightarrow C(0, -15)$, $y_2(0) = -12 \Rightarrow B(0, -12)$, $-3x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow D(-5, 0)$, $-3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow A(-5, 0)$. Чтобы найти площадь закрашенного четырехугольника, нужно вычислить площадь $\triangle OCD$ и вычесть из нее площадь $\triangle AOB$. Получим $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 13,5$.
Ответ. $13,5$.

7. *(3 балла)* Упростите $\dfrac{(\sqrt{40} - 7) \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$.

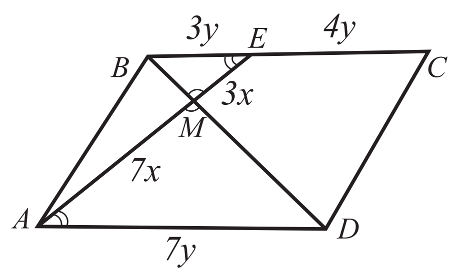
Решение. Выделим в первой скобке и под корнем в числителе полные квадраты, а в знаменателе вынесем $\sqrt{3}$ за скобку. Получим $\frac{(2\sqrt{10}-7)\cdot\sqrt{5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+2}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{(2\sqrt{10}-5-2)\cdot\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{-(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}} = \frac{-(5-2)}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.
Ответ. $-\sqrt{3}$.

8. *(2 балла)* Найдите такие x, при которых существует функция $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{1 - x}}$.

Решение. Как известно, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а знаменатель не может быть равен нулю. Получаем $\begin{cases} 4 - x^2 \geqslant 0, \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 1)$.

Ответ. $x \in [-2; 1)$.

9. *(3 балла)* На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка E, а отрезки AE и BD пересекаются в точке M, причем $AM : ME = 7 : 3$. Найдите отношение $S_{ABE} : S_{AECD}$.



Решение. Из параллельности прямых BC и AD следует подобие треугольников $\triangle AMD$ и $\triangle BME$ по двум углам. Откуда $\frac{AM}{ME} = \frac{AD}{BE} = \frac{7}{3}$. Обозначим $AD = 7y$, $BE = 3y$, тогда $EC = 4y$. Найдем $S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot h$, тогда площадь оставшейся трапеции равна $S_{AECD} = \frac{1}{2}(4y + 7y) \cdot h = \frac{11y \cdot h}{2}$. Получим $\frac{S_{ABE}}{S_{AECD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 3yh}{\frac{11}{2}\cdot yh} = \frac{3}{11}$.
Ответ. $3 : 11$.

10. *(2 балла)* У квадратного уравнения $x^2 + 3x - 5 = 0$ корни x_1 и x_2. Известно, что $-5x_1$ и $-5x_2$ являются корнями уравнения $x^2 - bx + c = 0$. Найдите $5b + c$.

Решение. По теореме Виета составим $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 \cdot x_2 = -5. \end{cases}$

Для второго уравнения $\begin{cases} (-5x_1) + (-5x_2) = b, \\ (-5x_1) \cdot (-5x_2) = c. \end{cases}$ Получаем $\begin{cases} -5(x_1 + x_2) = b, \\ 25(x_1 \cdot x_2) = c. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \cdot (-3) = b, \\ 25 \cdot (-5) = c. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} b = 15, \\ c = -125. \end{cases}$ Нужно найти $5b + c = 5 \cdot 15 - 125 = -50$.
Ответ. -50.

11. *(3 балла)* В замке проживал Кощей Бессмертный и несколько его жен. Средний возраст всех проживающих был равен 30 лет, а сразу после смерти Кощея средний возраст жен стал равен 20. Сколько жен было у Кощея на момент смерти, если он умер в возрасте 720 лет?

Решение. Пусть сумма возрастов всех жен Кощея равна m, а количество жен n. Составим средние арифметические для среднего возраста, по условию

$$\begin{cases} \dfrac{720+m}{n+1}=30, \\ \frac{m}{n}=20 \end{cases} \Rightarrow 720+20n=30(n+1) \Leftrightarrow 720=10n+30 \Leftrightarrow 10n=690 \Leftrightarrow n=69.$$

Ответ. 69.

Часть 2

12. *(6 баллов)* Даны функции $y=\frac{|x+2|}{x+2}$ и $y=(x+a)^2$.

а) Постройте график функции $y=\frac{|x+2|}{x+2}$. *(2 балла)*

б) Постройте график функции $y=(x+a)^2$ при $a=-2$. *(2 балла)*

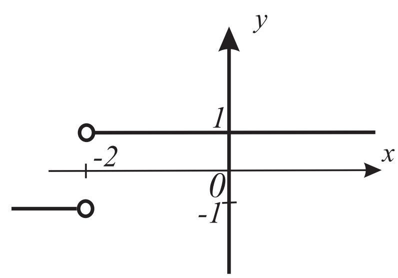
в) Найдите все значения a, при которых графики $y=\frac{|x+2|}{x+2}$ и $y=(x+a)^2$ имеют ровно одну общую точку. *(2 балла)*

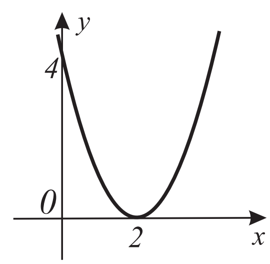
Решение. а) ОДЗ: $x\neq-2$. Раскроем модуль и получим 2 случая. Первый случай: $\begin{cases} x+2>0, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2, \\ y=1. \end{cases}$ Второй случай: $\begin{cases} x+2<0, \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2, \\ y=-1. \end{cases}$

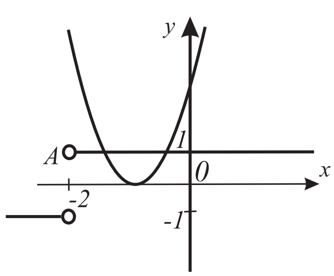
Точки на графике, в которых $x=-2$, нужно «выколоть».

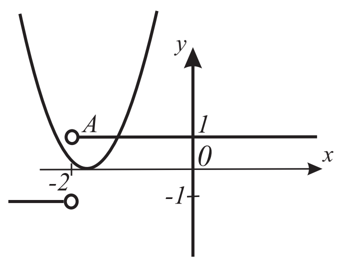
б) Уравнение $y=(x-2)^2$ задает параболу, полученную из графика $y=x^2$ сдвигом на 2 вправо вдоль Ox.

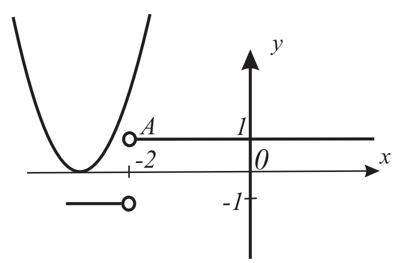
в) График $y=(x+a)^2$ с изменением a сдвигается вдоль Ox. График из пункта (а) и график $y=(x+a)^2$ имеют две общие точки, одну, или не пересекаются:











Найдем, при каких a график $y=(x-a)^2$ график проходит через точку $A(-2,1)$. Для этого нужно подставить координаты точки в уравнение:

$$1=(-2+a)^2 \Leftrightarrow 1=4-4a+a^2 \Leftrightarrow a^2-4a+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=1. \end{array} \right.$$

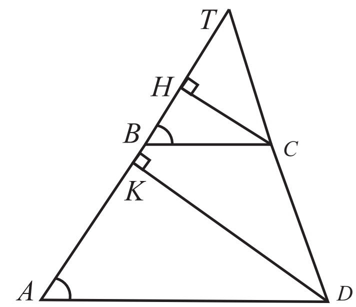
Значит, при $a\in[1;3)$ графики имеют ровно одну общую точку, так как при $a\geqslant 3$ графики не имеют имеют общих точек, а при $a<1$ у них две общие точки.

Ответ. $a\in[1;3)$.

13. *(6 баллов)* Из вершин C и D трапеции $ABCD$ на прямую, содержащую боковую сторону AB, опущены перпендикуляры $CH=3$ и $DK=5$. Площадь трапеции равна 16. Найдите длину боковой стороны AB.

Решение. Треугольники BHC и AKD подобны по двум углам, откуда $\frac{HC}{KD} = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}$. Продолжим прямые AB и CD до пересечения в точке T. Обозначим за S площадь треугольника BTC. Треугольники BTC и ATD подобны по двум углам, а коэффициент подобия равен $k = \frac{3}{5}$. Тогда $\frac{S_{BTC}}{S_{ATD}} = k^2 = \frac{9}{25}$, обозначим $S = S_{BTC}$ и получим $\frac{S}{S+16} = \frac{9}{25}$. Откуда $S = 9$, значит, $S_{ATD} = 9+16 = 25$. С другой стороны, $S_{BTC} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BT$, откуда $BT = \frac{2S}{CH} = 6$. Используя подобие треугольников BTC и ATD второй раз, получаем $\frac{BT}{AT} = \frac{3}{5}$, тогда $AT = 10$ и $AB = AT - BT = 4$.

Ответ. 4.



14. *(6 баллов)* Написано 2018-значное число. Каждые две соседние цифры этого числа (последовательно от первой цифры до последней) образуют число, которое делится или на 31, или на 19.

а) Может ли число быть составленным только из нечетных цифр? Если да – привести пример, если нет – объяснить, почему. *(2 балла)*

б) Может ли первой цифрой быть 8? Ответ объясните. *(2 балла)*

в) Найдите первую цифру числа, если его последняя цифра равна 6. Укажите все возможные варианты и объясните, почему другие варианты невозможны. *(2 балла)*

Решение. а) Двузначные числа, которые делятся на 31, это 31, 62, 93. Двузначные числа, делящиеся на 19, это числа 19, 38, 57, 76, 95. Составим число, состоящее только из нечетных цифр: $931\ldots93193193$, где на 2-й, 5-й, 8-й, ... позициях записана 3, на 1-й, 4-й, 7-й, ... позициях записана 9, а на оставшихся — 1. Группа 931 повторяется 672 раза, на конце 93, всего в числе $672 \cdot 3 + 2 = 2018$ цифр.

б) Нет, так как если первая цифра 8, то одно из двузначных чисел 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89 должно делиться либо на 31, либо на 19. А таких чисел нет.

в) Выпишем возможные цифры в числе. Число заканчивается на 6, значит, предпоследняя цифра 7, перед ней записана 5, перед 5 стоит 9, перед 9 в числе 1, перед 1 написана 3, а перед 3 снова 9: $9 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow 9 \leftarrow 5 \leftarrow 7 \leftarrow 6$. Других вариантов восстановления числа нет, поскольку единственные двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи и заканчивающиеся на 6, 7, 5, 9, 1 и 3 соответственно, это 76, 57, 95, 19, 31 и 93. Таким образом, число оканчивается на 576, перед этим комбинация 319 повторяется 671 раз, всего так записаны $671 \cdot 3 + 3 = 2016$ цифр, а вначале должны находиться цифры 1 и 9. Получаем, что первая цифра 1.

Ответ. а) да, например, $931\ldots93193193$; б) нет; в) 1.

15. *(4 балла)* Шести матросам поручили найти на острове сокровище. Двое с задачей справились. Опрашивая свидетелей, чтобы узнать, кто нашел клад, капитан команды получил следующие ответы: «1-й и 3-й», «2-й и 6-й», «2-й и 5-й», «1-й и 4-й», «1-й и 6-й». Известно, что в четырех из пяти ответов правильно указан один из счастливцев, а в одном ответе оба указаны неверно. Кто же нашел клад?

Решение. Предположим, что клад нашел 1-й матрос, тогда 3-й, 4-й и 6-й не нашли. Если 2-й матрос нашел клад, то не выполняется условие, что в одном утверждении оба матроса указаны неверно. Значит, 2-й не мог найти клад, а 5-й оказался счастливчиком. Итак, могли найти клад 1-й и 5-й. Покажем, что другие варианты невозможны.

Предположим, что 1-й не нашел клад, тогда из трех утверждений, где этот матрос упоминается, ровно в двух верно указан другой матрос, а третье утверждение содержит **оба** неверных ответа. Рассмотрим три случая.

1 случай. 3-й и 4-й нашли клад, а 6-й не нашел. Но тогда должен был найти клад и 2-й, противоречие.

2 случай. 4-й и 6-й нашли клад, а 3-й не нашел. Но тогда у 2-го клада нет и должен был найти клад и 5-й, противоречие.

3 случай. 3-й и 6-й нашли клад, а 4-й не нашел. Но тогда должен был найти клад и 5-й, противоречие.

Ответ. 1-й и 5-й.

СУНЦ УрФУ, 2019 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 МИ, ФМ, ФХ классы
Вариант 2

Часть 1

1. *(3 балла)* Вычислите $0,325^3 + 0,325 + 3 \cdot 0,325 \cdot 0,675 + 0,675^3 + 0,675$.

Решение. Конечно, не нужно выполнять действия столбиком! Заметим, что $0,325 + 0,675 = 1$. Введем обозначения $0,325 = a$ и $0,675 = b$ и упростим полученное выражение. Получим

$$a^3 + a + 3ab + b^3 + b = (a^3 + b^3) + (a + b) + 3ab = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a + b) + 3ab.$$

Заменим $a + b = 1$, получим $a^2 - ab + b^2 + 1 + 3ab = (a + b)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Ответ. 2.

2. *(2 балла)* Два года подряд банк начисляет на вклад 10% ежегодно. На сколько процентов увеличился вклад за эти два года?

Решение. Пусть первоначально вклад составлял x рублей, тогда через год будет $1,1x$. Еще через год $1,1x + 1,1x \cdot 0,1 = 1,21x$. Значит, через два года вклад увеличился на 21%.

Ответ. 21.

3. *(3 балла)* Найдите количество целых решений неравенства $x^7 \cdot |x^2 + 6x + 8| < 0$ на отрезке $[-7; -3]$.

Решение. Заметим, что значение выражения $|x^2 + 6x + 8|$ неотрицательное, значит, чтобы неравенство выполнялось, необходимо и достаточно выполнение условий $x^7 < 0$ и $x^2 + 6x + 8 \neq 0$. При этом модуль раскрывать совсем не нужно! Получаем $\begin{cases} x^7 < 0, \\ x^2 + 6x + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -2 \end{cases}$ На отрезке $[-7; -3]$ указанным условиям удовлетворяют только точки -7, -6, -5, -3. Всего 4 числа.

Замечание. Можно было просто подставить все целые числа из отрезка $[-7; -3]$ и проверить, верно ли исходное неравенство.

Ответ. 4.

4. *(2 балла)* Решите уравнение $\frac{4x^2+10x-6}{x+3} = x + 2$.

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ): $x \neq -3$. И это очень важно! Домножим на $x + 3$ обе части уравнения, раскроем скобки:

$4x^2 + 10x - 6 = (x + 2)(x + 3) \Leftrightarrow 4x^2 + 10x - 6 = x^2 + 5x + 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 4/3. \end{array}\right.$

Корень квадратного уравнения $x = -3$ посторонний по ОДЗ.

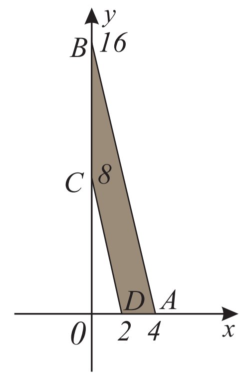
Ответ. $x = 4/3$.

5. *(2 балла)* В равнобедренный треугольник KLM ($KL = LM$) вписана окружность, а точка касания делит боковую сторону треугольника на отрезки, длины которых относятся как $1 : 4$, считая от вершины L. Периметр треугольника 36. Найдите площадь треугольника и радиус вписанной окружности.

Решение. Обозначим длины отрезков на боковой стороне через x и $4x$, как показано на рисунке. Тогда по свойству отрезков касательных к окружности $KQ = KT = MP = MT = 4x$, $LQ = LP = x$. Тогда периметр равен $P_{\triangle KLM} = x + 4x + 4x + 4x + 4x + x = 18x = 36$, откуда $x = 2$. Получаем $KL = LM = 10$ и $KM = 16$, находим высоту равнобедренного треугольника KLM: $LT^2 = 10^2 - 8^2 = 36$,

$LT=6$. Вычисляем площадь KLM:
$S_{\triangle KLM}=\frac{1}{2}KM\cdot LT=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 6=48$, а по формуле площади треугольника легко найти $r=\frac{S}{p}=\frac{48}{36/2}=8/3$. **Ответ.** $S=48$, $r=8/3$.

6. *(3 балла)* Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $4x+y=8$, $4x+y=16$ и осями координат.



Решение. Выразим y из уравнений и построим графики получившихся функций: $y_1=-4x+8$, $y_2=-4x+16$. Графиками этих функций будут параллельные прямые, проходящие через точки пересечения графиков с осями. Находим эти точки: $y_1(0)=8\Rightarrow C(0,8)$, $y_2(0)=16\Rightarrow B(0,16)$, $4x=8\Leftrightarrow x=2\Rightarrow D(2,0)$, $4x=16\Leftrightarrow x=4\Rightarrow A(4,0)$. Чтобы найти площадь закрашенного четырехугольника, нужно вычислить площадь $\triangle AOB$ и вычесть из нее площадь $\triangle COD$. Получим $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 16-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8=24$.
Ответ. 24.

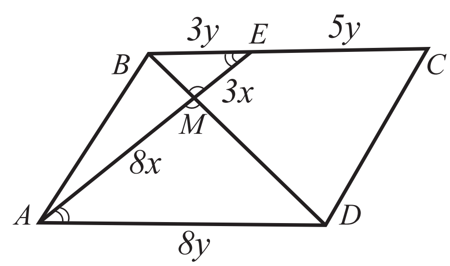
7. *(3 балла)* Упростите $\dfrac{(\sqrt{14}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}$.

Решение. Сначала вынесем из первой скобки $\sqrt{2}$ в числителе, а в знаменателе под корнем выделим полный квадрат; затем домножим на сопряженный к знаменателю множитель. Получим $\frac{(\sqrt{14}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{3+7-2\sqrt{21}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{21}-5)}{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{21}+10)\cdot(\sqrt{21}-5)}{7-3}=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{21}+5)\cdot(\sqrt{21}-5)}{4}=\frac{2\sqrt{2}(21-25)}{4}=-2\sqrt{2}$.
Ответ. $-2\sqrt{2}$.

8. *(2 балла)* Найдите такие x, при которых существует функция $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{2+x}}$.

Решение. Как известно, подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а знаменатель не может быть равен нулю. Получаем $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\ 2+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3,\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-2;3]$.
Ответ. $x\in(-2;3]$.

9. *(3 балла)* На стороне BC параллелограмма $ABCD$ взята точка E, а отрезки AE и BD пересекаются в точке M, причем $BM:MD=3:8$. Найдите отношение $S_{ABE}:S_{AECD}$.



Решение. Из параллельности прямых BC и AD следует подобие треугольников $\triangle AMD$ и $\triangle BME$ по двум углам. Откуда $\frac{AM}{ME}=\frac{MD}{BM}=\frac{8}{3}$. Обозначим $AD=8y$, $BE=3y$, тогда $EC=5y$. Найдем $S_{ABE}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 3y\cdot h$, тогда площадь оставшейся трапеции равна $S_{AECD}=\frac{1}{2}(5y+8y)\cdot h=\frac{13y\cdot h}{2}$. Получим $\frac{S_{ABE}}{S_{AECD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 3yh}{\frac{13}{2}\cdot yh}=\frac{3}{13}$.
Ответ. $3:13$.

10. *(2 балла)* У квадратного уравнения $x^2-5x+3=0$ корни x_1 и x_2. Известно, что $-2x_1$ и $-2x_2$ являются корнями уравнения $x^2-bx+c=0$. Найдите $b+2c$.

Решение. По теореме Виета составим $\begin{cases}x_1+x_2=5,\\ x_1\cdot x_2=3.\end{cases}$

Для второго уравнения $\begin{cases}(-2x_1)+(-2x_2)=b,\\ (-2x_1)\cdot(-2x_2)=c.\end{cases}$ Получаем $\begin{cases}-2(x_1+x_2)=b,\\ 4(x_1\cdot x_2)=c.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\cdot 5=b,\\ 4\cdot 3=c.\end{cases}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}b=-10,\\ c=12.\end{cases}$ Нужно найти $b+2c=2\cdot 12-10=14$.

Ответ. 14.

11. *(3 балла)* В пруду жила черепаха Тортилла и несколько лягушек. Средний возраст всех обитателей пруда составлял 20 лет, а сразу после смерти черепахи средний возраст лягушек составил 4 года. Сколько обитало в пруду лягушек, если черепаха Тортилла умерла в возрасте 340 лет?

Решение. Пусть сумма возрастов всех лягушек в пруду равна m, а количество лягушек n. Составим средние арифметические для среднего возраста, по условию

$$\begin{cases} \dfrac{340+m}{n+1}=20, \\ \frac{m}{n}=4 \end{cases} \Rightarrow 340+4n=20(n+1) \Leftrightarrow 340=16n+20 \Leftrightarrow 16n=320 \Leftrightarrow n=20.$$

Ответ. 20.

Часть 2

12. *(6 баллов)* Даны функции $y=\frac{|x+3|}{x+3}$ и $y=(x-a)^2$.

а) Постройте график функции $y=\frac{|x+3|}{x+3}$. *(2 балла)*

б) Постройте график функции $y=(x-a)^2$ при $a=-3$. *(2 балла)*

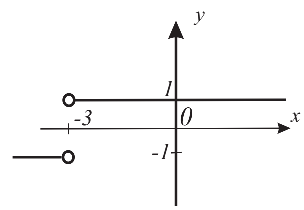
в) Найдите все значения a, при которых графики $y=\frac{|x+3|}{x+3}$ и $y=(x-a)^2$ имеют ровно одну общую точку. *(2 балла)*

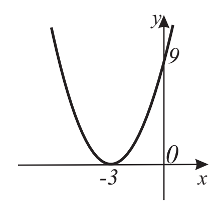
Решение. а) ОДЗ: $x\neq-3$. Раскроем модуль и получим 2 случая. Первый случай: $\begin{cases} x+3>0, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ y=1. \end{cases}$ Второй случай: $\begin{cases} x+3<0, \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3, \\ y=-1. \end{cases}$

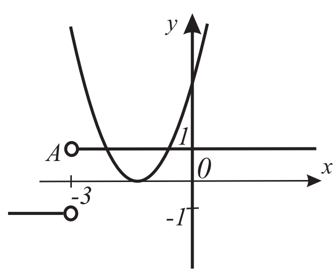
Точки на графике, в которых $x=-3$, нужно «выколоть».

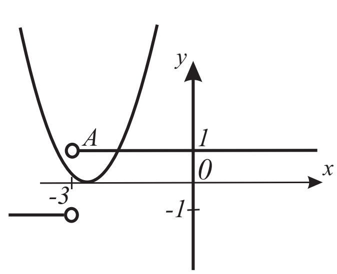
б) Уравнение $y=(x+3)^2$ задает параболу, полученную из графика $y=x^2$ сдвигом на 3 влево вдоль Ox.

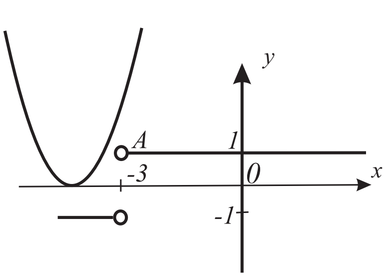
в) График $y=(x+a)^2$ с изменением a сдвигается вдоль Ox. График из пункта (а) и график $y=(x+a)^2$ имеют две общие точки, одну, или не пересекаются:











Найдем, при каких a график $y=(x-a)^2$ график проходит через точку $A(-3,1)$. Для этого нужно подставить координаты точки в уравнение:

$$1=(-3-a)^2 \Leftrightarrow 1=9+6a+a^2 \Leftrightarrow a^2+6a+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4, \\ a=-2. \end{array}\right.$$

Значит, при $a\in(-4;-2]$ графики имеют ровно одну общую точку, так как при $a\leqslant-4$ графики не имеют имеют общих точек, а при $a>-2$ у них две общие точки.

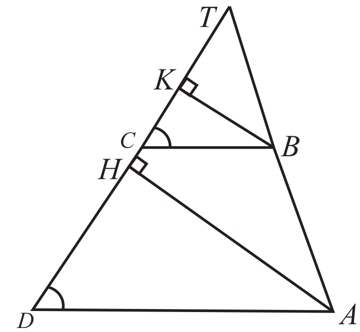
Ответ. $a\in(-4;-2]$.

13. *(6 баллов)* Из вершин A и B трапеции $ABCD$ на прямую, содержащую боковую сторону CD, опущены перпендикуляры $AH=6$ и $BK=2$. Площадь трапеции равна 20. Найдите длину боковой стороны CD.

Решение. Треугольники BKC и AHD подобны по двум углам, откуда $\frac{BC}{AD}=\frac{BK}{AH}=\frac{1}{3}$. Продолжим прямые AB и CD до пересечения в точке T. Обозначим за S площадь треугольника

BTC. Треугольники BTC и ATD подобны по двум углам, а коэффициент подобия равен $k = \frac{1}{3}$. Тогда $\frac{S_{BTC}}{S_{ATD}} = k^2 = \frac{1}{9}$, обозначим $S = S_{BTC}$ и получим $\frac{S}{S+20} = \frac{1}{9}$. Откуда $S = 5/2$, значит, $S_{ATD} = \frac{5}{2}+20 = 22\frac{1}{2}$. С другой стороны, $S_{BTC} = \frac{1}{2}\cdot CT\cdot BK$, откуда $CT = \frac{2S}{BK} = \frac{5}{2}$. Используя подобие треугольников BTC и ATD второй раз, получаем $\frac{CT}{DT} = \frac{1}{3}$, тогда $DT = 15/2$ и $CD = DT - CT = 5$.

Ответ. 5.



14. *(6 баллов)* Написано 2021-значное число. Каждые две соседние цифры этого числа (последовательно от первой цифры до последней) образуют число, которое делится или на 17, или на 28.

а) Может ли число быть составленным только из нечетных цифр? Если да – привести пример, если нет – объяснить, почему. *(2 балла)*

б) Может ли первой цифрой быть 3? Ответ объясните. *(2 балла)*

в) Найдите первую цифру числа, если его последняя цифра равна 7. Укажите все возможные варианты и объясните, почему другие варианты невозможны. *(2 балла)*

Решение. а) Двузначные числа, которые делятся на 28: 28, 56, 84. Двузначные числа, делящиеся на 17: 17, 34, 51, 68, 85. Число только из нечетных цифр составить нельзя, так как нет двузначных чисел, делящихся на 28 и записанных только нечетными цифрами, а из цифр чисел 17 и 51, делящихся на 17, нельзя составить число по указанным правилам (если число начинается с 17, то после 7 ничего не написать, а если число начинается с 51, то далее должна следовать 7, опять приходим к противоречию).

б) Нет, так как если первая цифра 3, то одно из двузначных чисел 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39 должно делиться либо на 17, либо на 28. Из этого списка подойдет только число 34, но тогда одно из двузначных чисел, делящихся на 17 или 28, должно начинаться с 4. А таких чисел нет.

в) Выпишем возможные цифры в числе. Число заканчивается на 7, значит, предпоследняя цифра 1, перед ней записана 5, перед 5 стоит 8, перед 8 — 2 или 6. Если перед 8 написана 2, то число продолжить нельзя, так как наименьшее число, делящееся на 17 и заканчивающееся на 2, равно 102, а для 28 наименьшее подходящее число — 112, т.е. не двузначное. Значит, перед 8 написана 6, перед 6 может быть только 5, а перед 5 обязательно 8: $6 \leftarrow 8 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 8 \leftarrow 5 \leftarrow 1 \leftarrow 7$. Других вариантов восстановления числа нет, так как на каждом шаге рассматриваются все возможные способы дописывания цифры, так чтобы двузначное число, получаемое в начале, делилось на 17 или 28. Посмотрим, какая же цифра на первом месте. Число заканчивается на 17, а $2019 = 2 + 673 \cdot 3$, значит вторая цифра равна 8, а перед ней может быть 6 или 2.

Ответ. а) нет; б) нет; в) 6 или 2.

15. *(4 балла)* Белоснежка прячется от королевы у двух из семи гномов по очереди. Королева отправила войско, чтобы узнать, где скрывается Белоснежка. Королева получила от воинов следующие донесения: « у 1-го и 3-го», «у 2-го и 6-го», «у 3-го и 4-го», «у 5-го и 7-го», «у 4-го и 5-го», «у 7-го и 3-го». Известно, что в пяти из шести ответов правильно указан один из гномов, а в одном ответе оба указаны неверно. Где же прячется Белоснежка?

Решение. Предположим, что Белоснежка появлялась у 3-го гнома, тогда у 1-го, 4-го и 7-й ее не нашли. Если она пряталась и у 2-го гнома, то не выполняется условие, что только в одном утверждении оба гнома указаны неверно. Значит, у 2-го гнома Белоснежки не было, а у 5-го она пряталась. Итак, Белоснежка могла скрываться у 3-го и 5-го. Покажем, что другие варианты невозможны.

Предположим, что у 3-го гнома Белоснежки не было, тогда из трех утверждений, где этот гном упоминается, ровно в двух верно указан другой гном, а третье утверждение содержит **оба** неверных ответа. Рассмотрим три случая.

1 случай. Белоснежка была у 1-го и 4-го гномов, а у 7-го не появлялась. Но тогда Белоснежка не скрывалась у 5-го и была у 2-го или 6-го гнома, противоречие.

2 случай. Белоснежка была у 4-го и 7-го гномов, а у 1-го не появлялась. Значит, в утверждении «у 1-го и 3-го» оба гнома указаны неверно, тогда Белоснежка была еще и у 2-го или 6-го гнома, снова противоречие.

3 случай. Белоснежка была у 1-го и 7-го гномов, а у 4-го не появлялась. Аналогично предыдущему случаю, Белоснежка должна была побывать еще у 2-го или 6-го гнома, противоречие.

Ответ. У 3-го и 5-го.

Критерии оценивания

1, **6**, **9**, **11**. *3 балла.*

2. *2 балла.*

3. *3 балла.* Если в ответе указаны верно все подходящие целые числа из отрезка, а не их количество – 2 балла.

4. *2 балла.* Если оба корня квадратного уравнения указаны – 1 балл.

5. *2 балла.* По 1 баллу за каждый ответ.

7. *3 балла.* Если потерян минус – 1 балл.

8. *2 балла.* Ответ отличается от верного конечным числом точек – 1 балл.

10. *2 балла.* Если коэффициенты найдены по отдельности или только один из коэффициентов – 1 балл.

12. *2 балла.* а) Если не исключены точки, но верные лучи прямых $y = 1$ и $y = -1$ найдены и построены – 1 балл. Если верно построен луч только одной прямой – 1 балл.
б) Верно построена парабола – 2 балла.
2 балла. в) Если ответ верный, но не обоснованный – 1 балл. Если обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным числом точек – 1 балл. Если график из пункта (а) построен неверно, но с учетом этого обоснованно получен ответ в пункте (в) – 1 балл.

13. *6 баллов.* Обоснованно найдена одна пара подобных треугольников – 1 балл. Найдены площади треугольников – 3 балла. Все шаги выполнены верно, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки или неверно записана формула площади (без 1/2)– 5 баллов.

14. а), б). Верное решение каждого из пунктов – по 2 балла. Только ответ «нет» или «да» без обоснования – 0 баллов.
2 балла. в) Есть верный ответ, но не обосновано отсутствие других ответов – 1 балл. Если обосновано, что число может начинаться с 6 (во втором варианте), но 2 не включено в ответ – 1 балл.

15. *4 балла.* Верный ответ – 1 балл. Есть попытка доказательства отсутствия других вариантов ответа, предусматривающая перебор нескольких случаев, но перебор не завершен или выполнен с ошибками – 2 балла.