Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Летняя школа
специализированного учебно-научного центра

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие

Екатеринбург
2014

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА (2014г)

П р о г р а м м а

Алгебра

1. Метод интервалов на прямой.

2. Метод областей на плоскости.

3. Задачи с параметром.

4. Расположение корней квадратного трехчлена.

5. Инвариант.

6. Графы.

7. Игры и стратегии.

Геометрия

8. Неравенство треугольника.

9. Вписанные углы, касательные, хорды, секущие.

А Л Г Е Б Р А

§1. Метод интервалов на прямой

1.1. Функции и их графики

Основные обозначения и определения. Множество всех действительных чисел будем обозначать через R. Часто мы будем рассматривать не все множество R, а некоторые его подмножества. Тот факт, что множество A содержится во множестве R, обозначают через $A \subseteq R$. Например, для множества всех целых чисел Z ($Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$) справедливо включение $Z \subseteq R$. В общем случае числовое множество A задается так: $A = \{x \in R : P(x)\}$, где $P(x)$ — некоторое свойство, которому удовлетворяют элементы множества A и только они. Например, отрезок от 1 до 2 можно определить так: $[1; 2] = \{x \in R : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$. Числовые множества связывают друг с другом посредством функций.

Определение. Пусть $A \subseteq R$. Функцией f на множестве A будем называть правило, по которому каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие единственное число $f(x)$ (функцию обозначают $f : A \to R$). При этом множество A называется областью определения функции f и обозначается через $D(f)$. Графиком функции $f : A \to R$ называют следующее подмножество координатной плоскости: $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in xOy : x \in A\}$.

Часто правило, о котором идет речь в определении функции, является алгебраическим выражением от переменной x. В этом случае мы будем говорить, что функция задана формулой. Вспомним некоторые функции из школьного курса, их свойства и графики.

Пример 1. Линейная функция задается формулой $f(x) = kx + b$. $D(f) = R$. $\Gamma(f)$ — прямая. Смысл коэффициентов k и b следующий: $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона $\Gamma(f)$ к оси Ox, а b задает смещение $\Gamma(f)$ относительно начала координат вдоль оси Oy (проще говоря, $b = f(0)$). При $k = 0$ прямая $\Gamma(f)$ параллельна оси Ox. На рис. 1 построен график линейной функции при $k < 0$, $b > 0$.

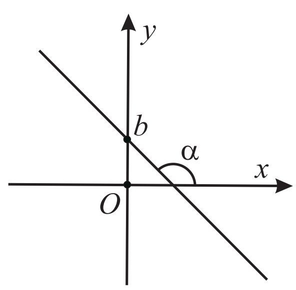


Рис. 1

Пример 2. Формула $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ задает квадратичную функцию. $D(f) = R$, $\Gamma(f)$ — парабола. Знак коэффициента a, как известно, указывает на направление ветвей параболы,

$c = f(0)$ — ордината точки пересечения параболы с осью Oy. С осью абсцисс $\Gamma(f)$ пересекается только при условии $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$ в точках $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$. Вершина параболы имеет координаты (x_0, y_0), где $x_0 = -b/(2a)$, а $y_0 = -D/(4a)$. На рис. 2 изображен график квадратичной функции при $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$.

Пример 3. Областью определения квадратного корня, т.е. функции $f(x) = \sqrt{x}$, является $R^+ = \{x \in R : x \geqslant 0\}$. $\Gamma(f)$ может быть получен симметрией относительно прямой $y = x$ из графика функции $y = x^2$, рассмотренной на множестве R^+. График $f(x) = \sqrt{x}$ изображен на рис. 3.

Пример 4. Функция обратной пропорциональной зависимости задается формулой $f(x) = k/x$, где $k \neq 0$. $D(f) = \{x \in R : x \neq 0\}$, $\Gamma(f)$ — гипербола, расположенная в первом и третьем координатных углах при $k > 0$, и во втором и четвертом — при $k < 0$. На рис. 4 как раз изображен последний случай.

Пример 5. Функция абсолютной величины, или модуля, определяется следующим образом: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Из определения немедленно следует неравенство $|x| \geqslant 0$ при всех $x \in R$. Кроме того, при решении некоторых уравнений полезно помнить о геометрическом свойстве модуля: $|x|$ — это расстояние на числовой прямой от x до 0. График абсолютной величины изображен на рис. 5.

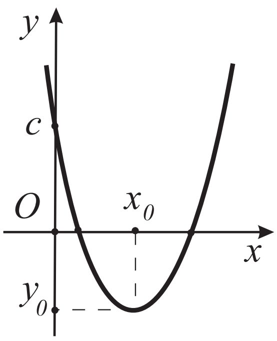


Рис. 2

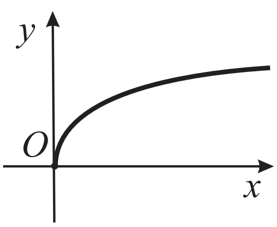


Рис. 3

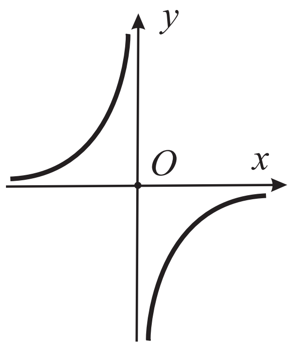


Рис. 4

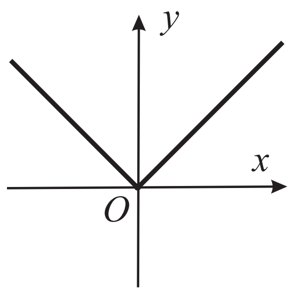


Рис. 5

1.2. Основные способы решения уравнений

Уравнение с одной переменной в общем виде выглядит так:

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые алгебраические выражения. Областью допустимых значений (сокращенно — ОДЗ) этого уравнения называют общую часть множеств $D(f)$ и $D(g)$, т.е. это все такие x, для которых одновременно определены левая и правая части уравнения. Корнем уравнения (1) (или его решением) называется такое x_0, что верно числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ называются равносильными (обозначается факт равносильности так: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$), если множество всех решений первого уравнения совпадает с множеством всех решений второго уравнения. Например, $x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$. Рассмотрим несколько стандартных способов решения уравнений.

I. *Переход к совокупности уравнений.* Через A обозначим ОДЗ уравнения $f(x) \cdot g(x) = 0$. Тогда на множестве A это уравнение равносильно совокупности уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ (напомним, что совокупность этих двух уравнений обозначается через $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ и решением совокупности является объединение решений каждого из ее уравнений). Например,

$$\frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3} = x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+3x+4 = x^3+4x^2+3x, \\ x \neq -1, x \neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3+3x^2-4 = 0, \\ x \neq -1, x \neq -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)(x+2)^2 = 0, \\ x \neq -1, x \neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

II. *Замена переменной.* Начнем с примера. Предположим, что нам необходимо решить уравнение

$$7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9.$$

Сделаем замену $y = x + 1/x$. Тогда $y^2 - 2 = x^2 + 1/x^2$. Поэтому данное уравнение сводится к $2y^2 - 7y + 5 = 0$. Откуда $y = 1$ или $y = 5/2$. Делая обратную замену, обнаруживаем, что корень $y = 1$ не дает решений относительно x, а из условия $y = 5/2$ получаем два искомых корня: $x = 2$, $x = 1/2$.

Итак, суть метода замены переменной в следующем: (а) выделение некоторого выражения относительно x (т.е. преобразование уравнения $f(x) = 0$ к равносильному $f(g(x)) = 0$); (б) нахождение $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — множества всех решений уравнения $f(y) = 0$, где $y = g(x)$; (в) “обратная замена”, т.е. нахождение решения совокупности уравнений $g(x) = y_1, \ldots, g(x) = y_n$.

Далее рассмотрим несколько типичных иррациональных уравнений и уравнений с модулем.

III. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$ Нетрудно заметить, что из последнего условия системы следует $f(x) \geqslant 0$. Поэтому при решении иррационального уравнения этим методом *не надо* находить ОДЗ исходного уравнения.

Пример 6. $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \neq 0, \\ \sqrt{x+5} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x > 0, \\ x + 5 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x = -1, x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

IV. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = \pm g(x). \end{cases}$ Справедливость этого метода сразу следует из геометрического свойства модуля.

Пример 7. $|3x+2| = x^2+x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leqslant -1, x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x + 2 = x^2 + x, \\ 3x + 2 = -x^2 - x \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}, \\ x = -2 - \sqrt{2}. \end{array} \right.$

V. $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$. Для решения этого уравнения достаточно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. На прямой нанести нули подмодульных выражений, а также точки, в которых подмодульные выражения не определены.
2. На каждом из получившихся промежутков определить знаки подмодульных выражений.
3. В соответствии со знаками из предыдущего пункта на каждом из получившихся промежутков раскрыть модули.

Пример 8. Решить уравнение $\left|x + \frac{1}{x}\right| - \left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{4}(x + 2)$. Второе подмодульное выражение обращается в ноль только при $x = \pm 1$, первое всегда отлично от нуля. Кроме того, в точке $x = 0$ подмодульные выражения не определены. Знаки подмодульных выражений на каждом из четырех промежутков (рис. 6) легко определяются подстановкой внутренних точек.

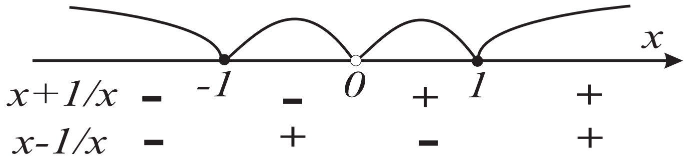


Рис. 6

Раскроем теперь модули на каждом из промежутков.

1 случай: $x \leqslant -1$. После раскрытия модулей получим $-2/x = (x+2)/4$. Последнее уравнение преобразуется к уравнению $x^2+2x+8=0$ без корней.

2 случай: $-1 < x < 0$. На этом промежутке получим $-2x = (x+2)/4$. Это уравнение имеет корень $x = -2/9$, который лежит в рассматриваемом промежутке.

3 случай: $0 < x \leqslant 1$. Получаем $2x = (x+2)/4$ или $x = 2/7$.

4 случай: $x > 1$. Раскрывая модули на этом последнем промежутке, получим уравнение $2/x = (x+2)/4$. Оно сводится к квадратному уравнению $x^2+2x-8=0$ с корнями $x=-4$ и $x=2$. Условию $x > 1$ удовлетворяет только $x = 2$.

Итак, искомые решения составляют множество $\{-2/9,\ 2/7,\ 2\}$.

1.3. Метод интервалов

Метод интервалов используется при решении неравенств довольно общего вида: $f(x) \geqslant g(x)$ (знак у неравенства может быть другим: $\leqslant, >, <$). Единственным ограничением на функции f и g является требование их непрерывности. Не будем давать строгое определение понятия непрерывной функции (это будет сделано в 11 классе), отметим только, что все элементарные функции (а именно такие и рассматриваются в школьном курсе математики) непрерывны на своей области определения.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов. Для решения неравенства $(*)$ $f(x) \geqslant g(x)$ (знак у неравенства может быть $\leqslant, >, <$) достаточно:

1. Нанести на прямую “выколотыми” все точки, которые не входят в ОДЗ неравенства $(*)$.
2. Решения уравнения $f(x) = g(x)$ нанести на прямую “закрашенными”, если знак у неравенства $(*)$ нестрогий, т.е. $\geqslant$ или $\leqslant$; в случае строго знака у исходного неравенства решения уравнения наносятся на прямую “выколотыми”.
3. Выбрав в каждом из получившихся промежутков по точке и подставив в исходное неравенство, убедиться, выполняется неравенство $(*)$ на каждом из этих промежутков, или нет.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих системе $\begin{cases} 6+x-x^2 \geqslant 0, \\ x \neq -5/2, x \neq -4. \end{cases}$ Ее множеством решением является отрезок $[-2;3]$.

2. Уравнение, соответствующее данному неравенству, равносильно на ОДЗ совокупности $\left[\begin{array}{l} 6+x-x^2=0, \\ 1/(2x+5)=1/(x+4) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3, \\ x=-1. \end{array} \right.$ Наносим найденные корни на прямую "закрашенными" (рис. 7).

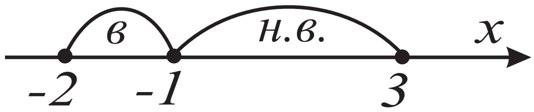


Рис. 7

3. Подставляя $x = -3/2$ и $x = 0$ в исходное неравенство, убеждаемся, что на интервале $(-2;-1)$ данное неравенство выполняется, а на интервале $(-1;3)$ оно не верно.

Ответ: $x \in [-2;-1] \cup \{3\}$

Замечание 1. У "нестрогих" неравенств (т.е. неравенств вида $f(x) \geqslant g(x)$ или $f(x) \leqslant g(x)$) могут быть изолированные корни ($x = 3$ — в предыдущем примере). Изолированными корнями будут те решения уравнения $f(x) = g(x)$, которые являются границей двух смежных интервалов, на которых исходное неравенство не выполняется или не определено.

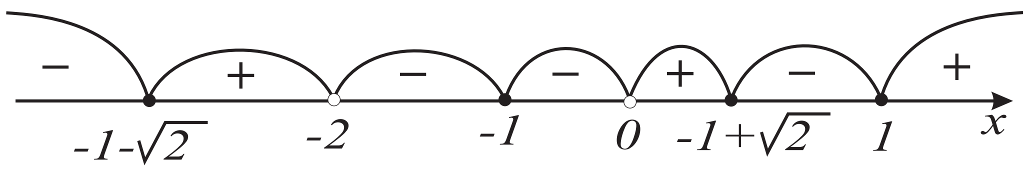
Замечание 2. Некоторые функции $F(x)$ можно представить в виде произведения $F(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k}$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $n_i \in N$ при $i \leqslant k$. Тогда натуральное число n_i называется кратностью корня x_i. Используя кратность корня, можно сформулировать правило расстановки знаков функции $F(x)$: знак функции при переходе через корень нечетной кратности меняется на противоположный, а при переходе через корень четной кратности остается неизменным.

Пример 10. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{x^2+2x} - (x^2+2x)(x-1) \leqslant 0$. После приведения к общему знаменателю и разложения на множители, получим

$$\frac{-(x-1)(x^2+2x+1)(x^2+2x-1)}{x(x+2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{x(x+2)} \geqslant 0.$$

Используя предыдущее замечание, имеем следующую расстановку знаков



Ответ: $x \in [-1-\sqrt{2}; -2) \cup \{-1\} \cup (0; -1+\sqrt{2}] \cup [1; \infty)$.

Задачи

Группа А

Решить методом интервалов следующие неравенства.

1.1. $(x+2)(x-2) \leqslant 0.$

1.2. $(x-4)(x+1) \geqslant 0$.

1.3. $(x-1)(x-2)(x+3) \geqslant 0.$

1.4. $(x+2)(x-4)(x-3) \leqslant 0.$

1.5. $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \geqslant 0.$

1.6. $(x+1)^7(x-2)^4(x+3)^3 \leqslant 0.$

1.7. $(3x^2-13x+4)(4x^2+12x+9) \leqslant 0.$

1.8. $(2x-5)(x^2-4)(x^3+8) < 0.$

1.9. $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2+3x+2} > 0.$

1.10. $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-6x+5} > 0.$

$$\mathbf{1.11.}\ \frac{x^2(x+2)^4(x+1)^6}{(x+6)(x-4)(x+3)(2-x)} \geqslant 0.$$

$$\mathbf{1.12.}\ \frac{(x+12)(x+1)^4(x+4)^3}{(x-1)^2(x-5)^6(x-3)^4} \leqslant 0.$$

1.13. $|x+1|+|x+2| \geqslant 2.$

1.14. $|x-1|-|x-2| < 1.$

1.15. $|x-2| \geqslant \frac{9}{|x-5|-3}.$

1.16. $x^2-|3x+2|+x \geqslant 0.$

1.17. $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \leqslant 1.$

1.18. $8+6|3-\sqrt{x+5}| > x.$

1.19. $\frac{x\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} \geqslant 0.$

1.20. $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x.$

1.21. $\sqrt{x^2+x-2} > x.$

1.22. $\frac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}} \leqslant 0.$

1.23. $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1.$

1.24. $|x^2+x| > |x^2-x|.$

1.25. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2} \geqslant 1.$

1.26. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x-2|} \geqslant 1.$

Группа Б

Решить методом интервалов следующие неравенства.

1.27. $\frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3} \geqslant x.$ **1.28.** $\frac{4x^2-1}{x^2-3x+2} > 1-2x.$

$$\mathbf{1.29}.\ (x^2-2x)(2x-2) - \frac{18x-18}{x^2-2x} \leqslant 0.$$

$$\mathbf{1.30}.\ (x^2+3x)(2x+3) - 16\frac{2x+3}{x^2+3x} \geqslant 0.$$

$$\mathbf{1.31}.\ x + \frac{4x^2+5x}{x^2-x-6} > \frac{9}{5x-15} + \frac{5x+1}{5x+10}.$$

$$\mathbf{1.32}.\ \frac{1}{x^2-x} + 1 > \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$

1.33. $7\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \leqslant 9.$ **1.34.** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2+x)^2} \leqslant \frac{10}{9}.$

1.35. $\frac{24}{x^2+2x-8} - \frac{15}{x^2+2x-3} \leqslant 2.$ **1.36.** $(x^2+2x)^2 - (x+1)^2 \geqslant 55.$

1.37. $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5} > 1.$ **1.38.** $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$

1.39. $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \geqslant \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}.$ **1.40.** $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^2}} \leqslant 0.$

§2. Метод областей на плоскости

Функции двух переменных. Координатную плоскость xOy будем обозначать через R^2. Запись $A \subseteq R^2$ означает, что A является плоской фигурой и состоит из некоторого множества упорядоченных пар. Пусть $A \subseteq R^2$, тогда функцией двух переменных $f(x,y) : A \to R$ называют правило, по которому каждой упорядоченной паре $(x,y) \in A$ ставится в соответствие единственное число $f(x,y)$. Как и для функции одной переменной, множество A называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$.

Например, функция $f(x,y) = x - y$ определена для любой пары $(x,y) \in R^2$, т.е. $D(f) = R^2$. Функция $g(x,y) = \sqrt{xy}$ определена только при $x \cdot y \geqslant 0$, поэтому $D(g)$ является объединением первой и третьей координатных четвертей. Для рассмотрения более сложных примеров, нам понадобится уравнение окружности.

Рассмотрим две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ координатной плоскости. Если прямая AB не параллельна координатным осям, легко получается прямоугольный треугольник ABC (на рис. 8 прямые AC и

BC параллельны координатным осям) с катетами, длины которых равны $AC = |x_2 - x_1|$ и $BC = |y_2 - y_1|$. Применяя теорему Пифагора, получим формулу для вычисления расстояния между точками A и B: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (эта формула остается верной и в случае, когда прямая AB параллельна одной из координатных осей). Поэтому точка $M(x, y)$ лежит на окружности с центром в $O'(x_0, y_0)$ и радиусом $R \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad \textit{(уравнение окружности).}$$

Хорошо известно, что кругом с центром в точке O' и радиусом $R \geqslant 0$ называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих неравенству $O'M \leqslant R$. Поэтому неравенство $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2$ на координатной плоскости задает круг с центром в $O'(x_0, y_0)$ и радиусом $R \geqslant 0$. Воспользуемся этим замечанием в следующем примере.

Пример 1. Найти области определения функций

$$f_1(x, y) = \sqrt{4x - x^2 - y^2} \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y}}.$$

Решение. Функция $f_1(x, y)$ определена, если $x^2 - 4x + y^2 \leqslant 0$ или $x^2 - 4x + 4 + y^2 \leqslant 4$. Последнее неравенство равносильно $(x - 2)^2 + y^2 \leqslant 2^2$ и задает на плоскости круг радиуса 2, с центром в точке $(2, 0)$ (рис. 9). Для функции f_2 получаем неравенство $x^2 + y^2 - 2x + 4y > 0$. Выделяя полные квадраты, приходим к $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 > (\sqrt{5})^2$. Это неравенство на плоскости задает область вне круга с центром в точке $(1, -2)$ и радиуса $\sqrt{5}$ (рис. 10).

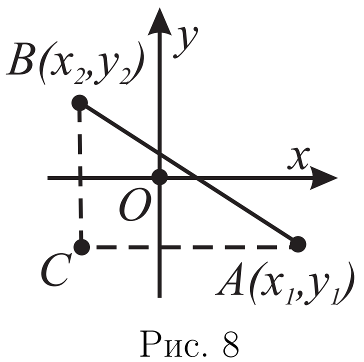


Рис. 8

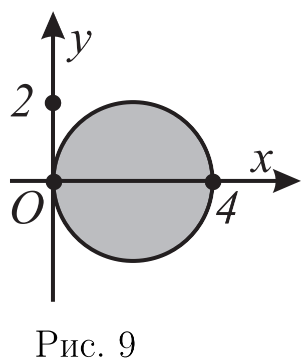


Рис. 9

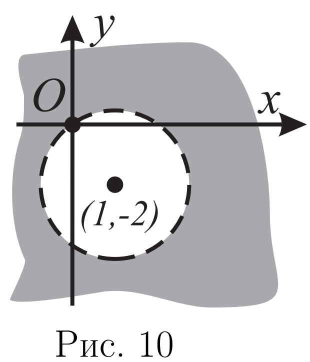


Рис. 10

Замечание. Обратите внимание, что граница круга на последнем рисунке не входит в область определения функции $f_2(x, y)$. Линии, не входящие в область определения функции, изображают **штриховыми**.

Уравнения с двумя переменными. Уравнение с двумя переменными в общем случае выглядит так:

$$f(x,y) = g(x,y). \tag{1}$$

Его ОДЗ — это общая часть областей определения функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, т.е. ОДЗ$(1) = D(f) \cap D(g)$. Решением уравнения (1) называется такая упорядоченная пара (x_0, y_0), что $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$. Два уравнения называются равносильными (или эквивалентными), если множества всех их решений совпадают. Как и прежде переход к равносильному уравнению (системе уравнений или совокупности уравнений) обозначается с помощью двойной стрелки: $\Leftrightarrow$.

Множество $\{(x,y) \in xOy : f(x,y) = g(x,y)\}$, состоящее из всех решений уравнения (1), будем называть *графиком* этого уравнения. Такое название выбрано не случайно. **Важным частным случаем** уравнений с двумя переменными являются уравнения вида $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция уже одной переменной. Множеством всех решений последнего уравнения является график функции $f(x)$. В общем случае график уравнения (1) является объединением нескольких линий на координатной плоскости, и обычно *для решения уравнений двух переменных достаточно из уравнения (1) найти зависимость (или несколько зависимостей) переменной y от x и на координатной плоскости изобразить график (соответственно, несколько графиков) полученной зависимости.* Кстати, не всегда удобно выражать y через x. Так, в следующем примере легко находятся зависимости x от y и строятся графики двух функций: $x = f_1(y)$ и $x = f_2(y)$.

Пример 2. На координатной плоскости изобразить множество всех решений уравнения $x^2 = y^4$.

Решение. Очевидно, что $x^2 = y^4 \Leftrightarrow (x-y^2)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y^2, \\ x = -y^2. \end{array}\right.$ Множество решений последней совокупности — это объединение пары парабол, общей осью симметрии которых является ось Ox (рис. 11).

Пример 3. На координатной плоскости изобразить множество всех решений уравнения $|x| + |y| = 1$.

Решение. Рассмотрим два случая раскрытия $|y|$. Первый случай: $y \geqslant 0$. Получаем $y = -|x| + 1$. Изображаем участок графика этой функции, лежащий не ниже оси Ox (т.е. получаем ломаную ABC на рис. 12а). Второй случай: $y < 0$. Получаем $y = |x| - 1$. Изображаем участок графика этой функции, лежащий ниже оси Ox (ломаная ADC на рис. 12б). Объединяя решения обоих случаев, получаем замкнутую ломаную $ABCDA$ (т.е. границу квадрата $ABCD$) на рис. 12в, которая и является искомой.

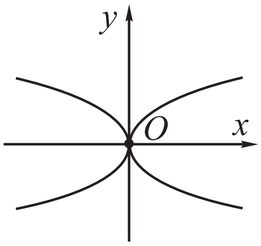


Рис. 11

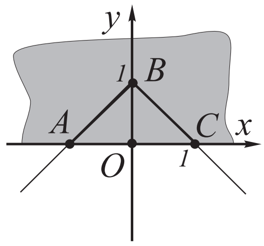


Рис. 12а

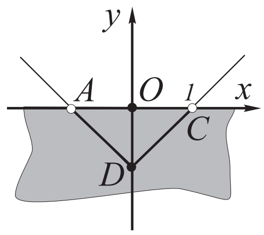


Рис. 12б

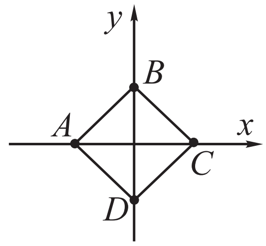


Рис. 12в

Сделаем два полезных замечания.

- Множеством всех решений неравенства с двумя переменными $y > f(x)$ ($y < f(x)$) является область координатной плоскости, лежащая выше (соответственно ниже) графика функции $f(x)$. В случае неравенства с нестрогим знаком к области добавляется график функции $f(x)$. Так, например, неравенству $y \geqslant x^2$ удовлетворяют все точки координатной плоскости выше параболы $y = x^2$, а также точки самой параболы. В примере 3 это замечание использовано при решении двух тривиальных неравенств: $y \geqslant 0$ и $y < 0$.

- При решении уравнений с двумя переменными будем считать зависимости y от x более предпочтительными (график $y = f(x)$ изображать обычно проще и его построение не требует дополнительных поворотов). Поэтому в примере 3 мы выражали y через x, а не наоборот.

Напомним основные способы преобразования графиков функций. В каждом из приведенных ниже способов мы считаем, что нам дан график функции $f(x)$, а также некоторая простая алгебраическая формула, выражающая "новую" функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$. Наша задача состоит в построении графика функции $g(x)$ по $\Gamma(f)$ и известной формуле.

Для решения этой задачи обсудим понятия переноса на вектор, симметрии относительно прямой и растяжения относительно прямой. Для задания вектора $\overrightarrow{v}$ достаточно указать координаты его конца, при этом мы считаем, что его начало совпадает с началом координат. Точка B получена из точки A переносом на вектор $\overrightarrow{v}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ (т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{v}$ совпадают по длине и направлению). Так, например, точка $B(-1, 4)$ получена из точки $A(1, 1)$ переносом на вектор $\overrightarrow{v} = (-2, 3)$. Понятно, что фигура Φ_2 получена переносом на вектор $\overrightarrow{v}$ из фигуры Φ_1, если она состоит из образов всех точек фигуры Φ_1 при этом переносе. Точки A и B называются симметричными относительно прямой l, если $(AB)\perp l$ и они расположены на одинаковом расстоянии, но по разные стороны от прямой l. И, наконец, точка B получена из точки A растяжением относительно прямой l в k раз ($k \neq 0$), если выполняются три условия: 1) $(AB)\perp l$, 2) расстояние от точки B до прямой l в $|k|$ раз больше расстояния от A до l, 3) точки A и B расположены по одну сторону от прямой l, при $k > 0$, и по разные — если $k < 0$.

I. $\boxed{f_1(x) = f(x) + a}$. Так как каждая точка $(x, f(x))$ графика функции f переходит в точку $(x, f(x) + a)$, лежащую уже на графике функции f_1, то $\Gamma(f_1)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **переносом на вектор** $\overrightarrow{v} = (0, a)$.

II. $\boxed{f_2(x) = f(x + a)}$. Заметим, что точка $(x + a, f(x + a))$ графика функции f, сдвигаясь на вектор $\overrightarrow{v} = (-a, 0)$ переходит в точку с координатами $(x, f(x+a))$, принадлежащую графику функции f_2. Поэтому $\Gamma(f_2)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **переносом на вектор** $\overrightarrow{v} = (-a, 0)$. Так, например, при $a > 0$ график функции f сдвигается влево на a единиц.

III. $\boxed{f_3(x) = -f(x)}$. Очевидно, что точки $(x, f(x))$ и $(x, -f(x))$ симметричны друг другу относительно оси Ox. Значит $\Gamma(f_3)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **отражением относительно оси** Ox.

IV. $\boxed{f_4(x) = f(-x)}$. При этом преобразовании точка $(-x, f(-x))$ графика функции $f(x)$ переходит в точку $(x, f(-x))$ графика функции f_4. Эти точки симметричны друг другу относительно оси Oy. Поэтому $\Gamma(f_4)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **отражением относительно оси** Oy.

V. $\boxed{f_5(x) = k \cdot f(x)}$ $(k \neq 0)$. Заметим, что точке $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$ будет соответствовать точка $(x, k \cdot f(x)) \in \Gamma(f_5)$. Первые координаты точек $(x, f(x))$ и $(x, k \cdot f(x))$ одинаковы, а вторые координаты отличаются в k раз, поэтому $\Gamma(f_5)$ **получается растяжением в** k **раз** $\Gamma(f)$ **относительно оси** Ox.

VI. $\boxed{f_6(x) = |f(x)|} = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$ Из определения функции f_6 следует, что точки $(x, f_6(x))$ и $(x, f(x))$ совпадают при $f(x) \geqslant 0$ и симметричны относительно оси Ox при $f(x) < 0$. Поэтому **для построения графика функции** f_6 **достаточно отразить относительно оси** Ox **только те участки графика функции** f**, которые расположены ниже оси** Ox**.** Остальные участки $\Gamma(f)$ остаются без изменения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Построить график функции $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$. После алгебраических преобразований $f(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 = 2(x + 1)^2 - 3$

заключаем, что $\Gamma(f)$ может быть построен из $\Gamma(x^2)$ (т.е. самой простой из парабол) за три шага: сначала сдвигаем $\Gamma(x^2)$ на 1 влево (т.е. получаем $\Gamma((x+1)^2)$), затем растягиваем $\Gamma((x+1)^2)$ в 2 раза относительно оси Ox (после этого у нас будет $\Gamma(2(x+1)^2)$) и, наконец, сдвигаем $\Gamma(2(x+1)^2)$ на 3 единицы вниз.

Пример 5. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Сначала немного изменим формулу, задающую эту функцию (это алгебраическое преобразование называется выделением целой части у дроби):

$$f(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Теперь легко указать способ построения $\Gamma(f)$ из обычной гиперболы — $\Gamma(1/x)$. На первом шаге сдвигаем $\Gamma(1/x)$ на 1 влево и получаем $\Gamma\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Затем отражаем этот график относительно оси абсцисс и получаем график $\Gamma\left(-\frac{1}{x+1}\right)$. На последнем шаге сдвигаем этот график на 1 вверх.

Совет: сами сделайте рисунки к последним двум примерам, причем результат после каждого шага изображайте на отдельном чертеже.

Задачи

Группа А

Изобразить на плоскости (OXY) множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям следующих уравнений.

2.1. $y = (x-2)^2 - 1$. **2.2.** $y = |x|$.

2.3. $y = |x+1|$. **2.4.** $y = |x-1| + 1$.

2.5. $y = ||x^2 - 4| - 1|$. **2.6.** $y = \frac{1}{x+1}$.

2.7. $y = \frac{x}{x+1}$. **2.8.** $y - x^2 = 0$.

2.9. $x - y^2 = 0$. **2.10.** $x(y-2) = 0$.

2.11. $x^2 + y^2 = 1$. **2.12.** $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$.

2.13. $|x| + |y| = 1$. **2.14.** $|x+1| + |y-3| = 3$.

2.15. $|x| + x = |y| + y$. **2.16.** $|x+y-1| + |x-y+1| = 0$.

Группа Б

Изобразить на плоскости (OXY) множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям следующих уравнений.

2.17. $|x-y|+|x+y|=4$.

2.18. $|y-x|+x+y=2$.

2.19. $(x-1)^2+(y+3)^2=0$.

2.20. $x^2+2x+y^2-4y-3=0$.

2.21. $x^2+4xy-5y^2=0$.

2.22. $|y^2-1|=|x+y|$.

2.23. $\sqrt{x+y}=\sqrt{|x|}$.

2.24. $y^2(y+1)(y-1)=x^2(x+1)(x-1)$.

2.25. $\sqrt{x+y}=x$.

2.26. $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=y$.

2.27. $|x+2|-|2x+8|=y$.

2.28. $x|2+2y|+1+y=0$.

2.29. $|x+3|-y|x-1|=4$.

2.30. $y|x+3|+2|x+4|=2$.

Неравенства с двумя переменными. Метод областей. Неравенство с двумя переменными в общем случае выглядит так:

$$f(x,y)\geqslant g(x,y) \quad \text{(знак может быть другим: } \leqslant,<,>\text{)}. \qquad (2)$$

Его ОДЗ — это общая часть областей определения функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, т.е. ОДЗ(2) $=D(f)\cap D(g)$. Решением неравенства (2) называется такая упорядоченная пара (x_0,y_0), что $f(x_0,y_0)\geqslant g(x_0,y_0)$. Для нахождения множества всех решений неравенства (2) удобно использовать аналог метода интервалов, который называется *методом областей* и представляет собой следующий алгоритм.

Для решения неравенства (2) достаточно сделать следующее.

1. Найти ОДЗ неравенства (2). Линии, **не входящие в ОДЗ** следует изобразить **штриховыми**.
2. Изобразить на плоскости линии, являющиеся графиком уравнения $f(x,y)=g(x,y)$. В случае нестрогого знака (т.е. $\geqslant$ или $\leqslant$) неравенства (2) эти линии следует изобразить сплошными, если же знак неравенства (2) строгий (т.е. $>$ или $<$), то — штриховыми.
3. Линии из предыдущих двух пунктов разбивают плоскость на области. Из каждой области следует выбрать по точке и подставить ее координаты в исходное неравенство (2) чтобы проверить: выполнено это неравенство в выбранной области, или нет. Заштриховать области, в которых неравенство (2) выполняется.

Замечание. Поскольку никакая из точек, лежащих на штриховой линии, не может быть решением неравенства, точки пересечения сплошных и штриховых линий на координатной плоскости следует изображать **"выколотыми"**.

Рассмотрим один пример использования метода областей.

Пример 6. Решить методом областей неравенство $\dfrac{xy+2y-y^3}{x^2+4x+y^2} \geqslant 0$.

Решение.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $x^2+4x+y^2 \neq 0$ или $x^2+4x+4+y^2 \neq 4$, т.е. $(x+2)^2+y^2 \neq 4$. Штриховой линией изображаем окружность с центром в точке $(-2,0)$ радиуса 2 (рис. 13).

2. Решая уравнение, соответствующее данному неравенству, получим на ОДЗ $xy+2y-y^3=0$ или $y(x+2-y^2)=0$. Графиком последнего уравнения является является ось Ox и парабола $x=y^2-2$. Точки пересечения этих линий с штриховой окружностью изображаем выколотыми (рис. 13).

3. Нарисованные линии разбивают плоскость на восемь областей. Из каждой области выбираем по точке и подставляем их координаты в данное неравенство.

$(1,1) \Rightarrow \frac{1\cdot(1+2-1)}{1+4+1} > 0$, т.е. неравенство выполняется.
$(1,-1) \Rightarrow \frac{-1\cdot(1+2-1)}{1+4+1} > 0$, т.е. неравенство не выполняется.
$(1,10) \Rightarrow \frac{10\cdot(1+2-100)}{1+4+100} < 0$, т.е. неравенство не выполняется.
$(1,-10) \Rightarrow \frac{-10\cdot(1+2-100)}{1+4+100} > 0$, т.е. неравенство выполняется.
$(-1,1/2) \Rightarrow \frac{0{,}5\cdot(-1+2-1/4)}{1-4+1/4} < 0$, т.е. неравенство не выполняется.
$(-1,-1/2) \Rightarrow \frac{-0{,}5\cdot(-1+2-1/4)}{1-4+1/4} > 0$, т.е. неравенство выполняется.
$(-2,1) \Rightarrow \frac{1\cdot(-2+2-1)}{4-8+1} > 0$, т.е. неравенство выполняется.
$(-2,-1) \Rightarrow \frac{-1\cdot(-2+2-1)}{4-8+1} < 0$, т.е. неравенство не выполняется.

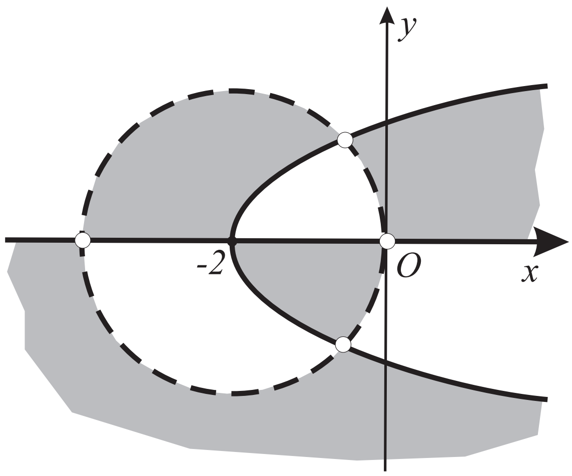


Рис. 13

Замечание. При решении нестрогих неравенств с двумя переменными, также как и в случае одной переменной, могут получиться изолированные решения. Примером может служить неравенство $y(x^2 + |y + 1|) \geqslant 0$. Дело в том, что графиком уравнения $x^2 + |y + 1| = 0$ является только одна точка — $(0, -1)$ (поскольку это уравнение может выполняться только в случае, когда одновременно $x^2 = 0$ и $|y + 1| = 0$). Поэтому решением неравенства $y(x^2 + |y + 1|) \geqslant 0$ будет верхняя полуплоскость и одна точка нижней полуплоскости — $(0, -1)$.

Задачи

Группа А

Решить методом областей следующие неравенства. Ответ изобразить на координатной плоскости.

2.31. $|x - y| + |x + y| > 4$. **2.32.** $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 \geqslant 0$.

2.33. $x^2 + y^2 \geqslant 2(|x| - |y|)$. **2.34.** $y \geqslant \frac{1}{x}$.

2.35. $xy \geqslant 1$. **2.36.** $x \geqslant \sqrt{4 - y^2}$.

2.37. $\sqrt{y - x - 1} < \sqrt{2 - x}$. **2.38.** $yx > 1$.

2.39. $|x^2 - 5x + 4| < y$. **2.40.** $|x - y| - 2y > |x - 3y|$.

2.41. $y\sqrt{x + 1} < 1$. **2.42.** $(y + 1)\sqrt{2 - x} < 1$.

Группа Б

Решить методом областей следующие неравенства. Ответ изобразить на координатной плоскости.

2.43. $\sqrt{y - x^2} > x + 1$. **2.44.** $x + 4y > 4\sqrt{yx}$.

2.45. $\frac{yx-(1-y)y}{yx-1} > 0$. **2.46.** $\frac{x-1}{y-1} + x < \frac{1}{1-y}$.

2.47. $3 - |x - y| > x^2$. **2.48.** $x + \sqrt{x^2 - 2yx} > 1$.

2.49. $|x - 3y| - |x + y| < 2y$. **2.50.** $|x + 2y| < \frac{8y^2}{|x-2y|}$.

2.51. $|1 + x| < yx$. **2.52.** $|x - 1| \geqslant yx$.

2.53. $|x^2 + y| \geqslant x$. **2.54.** $y + \frac{4y^2}{|x-2y|} \geqslant 0$.

2.55. $|1 - |x|| < y - x$. **2.56.** $2|x - y| < 2yx - x^2 - 1$.

2.57. $yx > \frac{1}{x}$. **2.58.** $\frac{yx+1}{yx-1} \geqslant \frac{y+1}{y-1}$.

2.59. $x^2 - 5xy + 6y^2 > 0$. **2.60.** $\frac{x^2+4y^2}{xy} \geqslant 5$.

§3. Задачи с параметром

Уравнения с параметром. В общем случае уравнение с переменной x и параметром a имеет вид

$$F(x, a) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, a)$ — некоторое алгебраическое выражение от x и a. *Решением* такого уравнения называется функция $x = f(a)$, определенная на некотором множестве $A \subseteq R$, при подстановке которой уравнение (1) превращается в тождество $F\Big(f(a), a\Big) = 0$ на всем множестве A. *Решить* уравнение (1) — это означает разбить всю действительную прямую R (область изменения параметра) на множества A, B, $C, \ldots$, на каждом из которых необходимо найти все решения этого уравнения, либо доказать, что решений не существует. Граничные точки множеств A, B, $C, \ldots$ принято называть *критическими значениями параметра*. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - a^4 = 0$.

Решение. $x^2 - a^4 = 0 \Leftrightarrow (x - a^2)(x + a^2) = 0 \Leftrightarrow x = a^2$ или $x = -a^2$, $a \in R$. В этом примере мы получили два решения $x = f_1(a)$ и $x = f_2(a)$ (где $f_1(a) = a^2$ и $f_2(a) = -a^2$), причем $A_1 = A_2 = R$. Критических значений параметра нет.

Ответ: $x = a^2$ или $x = -a^2$, при всех $a \in R$.

Пример 2. Решить уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$.

Решение. Для нахождения зависимости x от a необходимо разделить обе части этого уравнения на коэффициент при переменной x. Сначала рассмотрим случай, когда этот коэффициент обращается в ноль. При $a = 1$ получается уравнение $0 \cdot x = 0$, справедливое при всех $x \in R$. При $a = -1$ получаем уравнение $0 \cdot x = -2$ без корней. При всех остальных значений параметра получаем $x = (a - 1)/(a^2 - 1)$ или $x = 1/(a + 1)$. В этом примере на множестве $A = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ найдено решение $x = f(a) = 1/(a + 1)$. На одноточечном множестве $B = \{-1\}$ доказано, что нет решений, а на множестве $C = \{1\}$ уравнение справедливо при всех $x \in R$. Критическими значениями параметра являются $a = \pm 1$.

Ответ: при $a = 1$ уравнение справедливо при всех x; при $a = -1$ нет решений; при $a \neq \pm 1$ решением является $x = 1/(a + 1)$.

Пример 3. Решить уравнение $ax^2 - 2(a+1)x + a + 1 = 0$.

Решение. При $a = 0$ это уравнение превращается в линейное $-2x+1 = 0$ с корнем $x = 1/2$. Во всех остальных случаях уравнение будет квадратным, его дискриминант равен $D = 4a + 4$. Условию $D \geqslant 0$ удовлетворяют все $a \geqslant -1$. Таким образом, при $a < -1$ данное уравнение не имеет решений, а при $a \in [-1; 0) \cup (0; \infty)$ используя формулу корней квадратного уравнения, получаем $x_{1,2} = (a + 1 \pm \sqrt{a+1})/a$. В этом примере на множестве $A = [-1; 0) \cup (0; \infty)$ было найдено два решения $x = f_1(a)$ и $x = f_2(a)$ (где $f_1(a) = (a+1-\sqrt{a+1})/a$ и $f_2(a) = (a+1+\sqrt{a+1})/a$), на одноточечном множестве $B = \{0\}$ решение уравнения единственно — $x = 1/2$ и, наконец, при всех значений параметра из множества $C = (-\infty; -1)$ уравнение не имеет решений. Критическими значениями параметра являются $a = -1$ и $a = 0$.

Ответ: при $a = 0 \Rightarrow x = 1/2$; при $a < -1$ нет решений; при остальных значениях параметра решениями являются $x_{1,2} = (a + 1 \pm \sqrt{a+1})/a$.

Метод, с помощь которого были решены три предыдущих задачи, можно назвать *алгебраическим*. В этих примерах с помощью простых алгебраических преобразований от исходного уравнения по цепочке равносильных уравнений мы приходим к уравнению $x = f(a)$ (или совокупности уравнений), которое является решением уравнения с параметром. В дальнейшем мы будем использовать *графический* способ решения уравнений с параметром, который заключается в следующем.

1. От уравнения $F(x, a) = 0$ перейти к системе $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ y = a. \end{cases}$
2. На плоскости xOy построить график уравнения $F(x, y) = 0$.
3. Пересечь прямую $y = a$ с графиком уравнения $F(x, y) = 0$ и спроектировать это пересечение на ось Ox (т.е., фактически, найти первые координаты точек пересечения прямой $y = a$ с графиком уравнения $F(x, y) = 0$).

Решим графическим способом следующую задачу.

Пример 4. Решить уравнение $|2x - 1| + |x - 3| = x + a$.

Решение. 1. Перейдем к системе $\begin{cases} |2x - 1| + |x - 3| = x + y, \\ y = a. \end{cases}$

2. Необходимо построить график уравнения $|2x-1|+|x-3| = x+y$ или $y = |2x-1|+|x-3|-x$. Нулями подмодульных выражений будут $x = 1/2$ и $x = 3$. Знаки подмодульных выражений на каждом из трех промежутков определяются без труда.

	$x \leqslant 1/2$	$1/2 < x \leqslant 3$	$3 < x$
$2x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

Раскрывая модули на каждом из трех промежутков, получим

$$y = \begin{cases} 4-4x, & \text{если } x \leqslant 1/2, \\ 2, & \text{если } 1/2 < x \leqslant 3, \\ 2x-4, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке.

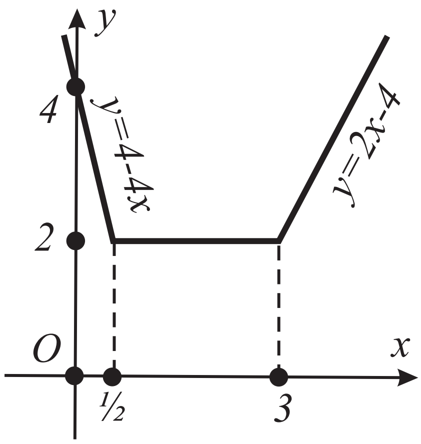


Рис. 14

3. Пересекая прямую $y = a$ с графиком уравнения, замечаем, что возможны три различных случая. При $a < 2$ пересечение пусто и поэтому данное уравнение решений не имеет. При $a = 2$ пересечением является отрезок и его проекцией на ось Ox являются $x \in [1/2; 3]$. Наконец, при $a > 2$ будут две точки пересечения. Первая точка определяется из системы $y = 4-4x$ и $y = a$, ее первая координата находится из уравнения $4-4x = a$ и равна $x = 1-a/4$. Вторая точка определяется из системы $y = 2x-4$ и $y = a$, ее первая координата находится из уравнения $2x-4 = a$ и равна $x = 2+a/2$.

Ответ: при $a < 2$ нет решений; при $a = 2 \Rightarrow x \in [1/2; 3]$;
при $a > 2 \Rightarrow x = 1-a/4$ или $x = 2+a/2$.

Замечание. Плоскость xOy предпочтительнее плоскости xOa в графическом способе решения по следующим двум причинам. Во-первых, прямая $y = a$ в плоскости xOy обозначает горизонтальную прямую, в плоскости xOa уравнение $a = a$ задает всю плоскость и формально преодолеть это затруднение непросто. Во-вторых, в уравнение с параметром $F(x, a) = 0$ переменные x и a входят *не равнозначно*. Связано это с необходимостью выразить x через a, а не наоборот. В плоскости xOa разный "статус" переменных x и a теряется, в то же время переход к системе $F(x, y) = 0$ и $y = a$ сохраняет информацию о том, что a является параметром.

Задачи

Группа А

Для каждого значения параметра a определить количество решений уравнений 3.1 — 3.12.

3.1. $a = (x-2)^2 - 1$. **3.2.** $a = |x|$.

3.3. $|x+1| = x - a$. **3.4.** $a = |x-1| + 1$.

3.5. $a = ||x^2 - 4| - 1|$. **3.6.** $\sqrt{x-a} = 3 - x$.

3.7. $a = \frac{x}{x+1}$. **3.8.** $a - x^2 = 0$.

3.9. $x - a^2 = 0$. **3.10.** $x(a-2) = 0$.

3.11. $x^2 + a^2 = 1$. **3.12.** $(x-1)^2 + (a-2)^2 = 9$.

3.13. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $|x| + |a| = 1$?

3.14. При каких значениях параметра a имеет два решения уравнение $|x+1| + |a-3| = 3$?

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию (3.15 — 3.22).

3.15. $|x| + x = |a| + a$. **3.16.** $|x+a-1| + |x-a+1| = 0$.

3.17. $|x-a| + |x+a| = 4$. **3.18.** $|a-x| + x + a = 2$.

3.19. $(x-1)^2 + (a+3)^2 = 0$. **3.20.** $x^2 + 2x + a^2 - 4a - 3 = 0$.

3.21. $x^2 + 4xa - 5a^2 = 0$. **3.22.** $|a^2 - 1| = |x+a|$.

Группа Б

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию (3.23 — 3.24).

3.23. $\sqrt{x+a} = \sqrt{|x|}$.

3.24. $a^2(a+1)(a-1) = x^2(x+1)(x-1)$.

3.25. При каких значениях параметра a имеет ровно два корня уравнение $\sqrt{x+a} = x$?

3.26. При каких значениях параметра a имеет больше трех решений уравнение $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$?

3.27. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $|x+2| - |2x+8| = a$?

3.28. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение $x|2+2a|+1+a=0$?

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию (3.29 — 3.30).

3.29. $|x+3|-a|x-1|=4$. **3.30.** $a|x+3|+2|x+4|=2$.

Неравенства с параметром. В общем случае неравенство с переменной x и параметром a имеет вид

$$F(x,a)\geqslant 0, \quad \text{(знак может быть другим: } \leqslant, <, >). \qquad (2)$$

где $F(x,a)$ — некоторое алгебраическое выражение от x и a. *Решением* такого неравенства будет промежуток (или объединение некоторого числа промежутков), границы которого являются функциями от параметра a (например $x\in[f(a);g(a)]$ или $x>f(a)$ и т.п.). Рассмотрим простой пример неравенства с параметром.

Пример 5. Решить неравенство $(a+1)x>a$.

Решение. Снова сталкиваемся с необходимостью разделить обе части неравенства на коэффициент при переменной x. При $a=-1$ получаем неравенство $0\cdot x>-1$, которое выполняется при всех $x\in R$. При $a<-1$ верно $a+1<0$, поэтому после деления на этот коэффициент и смены знака неравенства, получим $x<a/(a+1)$. При $a>-1$ верно $a+1>0$, поэтому после деления на этот коэффициент и сохранения знака неравенства, получим $x>a/(a+1)$.

Ответ: при $a<-1\Rightarrow x<a/(a+1)$; при $a=-1\Rightarrow x\in R$; при $a>-1\Rightarrow x>a/(a+1)$.

Графический метод также эффективен и при решении неравенств с параметром. В случае неравенства (2) он состоит в следующем.

1. От неравенства $F(x,a)\geqslant 0$ перейти к системе $\begin{cases} F(x,y)\geqslant 0, \\ y=a. \end{cases}$
2. На плоскости xOy методом областей решить неравенство $F(x,y)\geqslant 0$.
3. Пересечь прямую $y=a$ с областями, которые являются решением неравенства $F(x,y)\geqslant 0$, и спроектировать это пересечение на ось Ox.

Решим неравенство из предыдущего примера графическим способом.

Пример 6. Решить неравенство $(a+1)x > a$.

Решение. 1. Перейдем к системе $\begin{cases} (y+1)x > y, \\ y = a. \end{cases}$

2. Методом областей решим неравенство $(y+1)x > y$.

2.a. ОДЗ неравенства $(y+1)x > y$ состоит из всех точек плоскости xOy.

2.b. При решении уравнения $(y+1)x = y$ приходим к $(1-x)y = x$. Теперь замечаем, что при $x = 1$ последнее уравнение превращается в уравнение $0 \cdot y = 1$ без корней. Поэтому, разделив на $(1-x)$, приходим к равносильному уравнению $y = x/(1-x)$ или $y = (x-1)/(1-x) + 1/(1-x)$. График функции $y = -1 + 1/(1-x)$ изображаем штриховой линией.

2.c. Подставляя точки с координатами $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(3, -2)$, убеждаемся, что подходит только одна область, выделенная темным на рис.15.

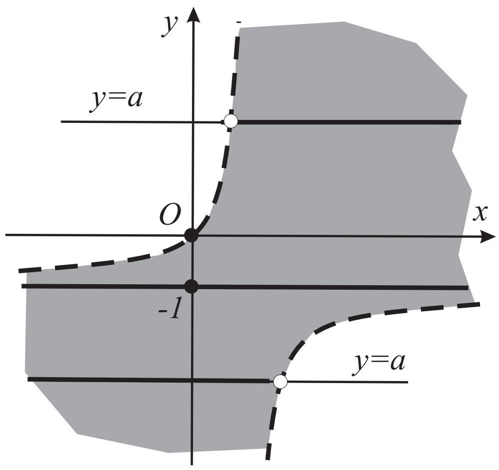


Рис. 15

3. При $a = -1$ прямая $y = a$ целиком содержится в выделенной области, поэтому решением неравенства будут все $x \in R$. При $a \neq -1$ прямая $y = a$ пересекается с графиком функции $y = x/(1-x)$ в точке с координатами $\Big(a/(a+1), a\Big)$. Теперь, пересекая прямую $y = a$ при $a < -1$ с выделенной областью и проектируя это пересечение на ось Ox, получим промежуток $x \in \Big(-\infty; a/(a+1)\Big)$. А при $a > -1$ получаем открытый луч $x \in \Big(a/(a+1); \infty\Big)$.

Ответ: при $a < -1 \Rightarrow x < a/(a+1)$; при $a = -1 \Rightarrow x \in R$; при $a > -1 \Rightarrow x > a/(a+1)$.

Задачи

Группа А

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию (3.31 — 3.42).

3.31. $|x-a|+|x+a|>4$.

3.32. $x^2+2x+a^2-4a-4 \geqslant 0$.

3.33. $x^2+a^2 \geqslant 2(|x|-|a|)$.

3.34. $a \geqslant \frac{1}{x}$.

3.35. $xa \geqslant 1$.

3.36. $x \geqslant \sqrt{4-a^2}$.

3.37. $\sqrt{a-x-1} < \sqrt{2-x}$.

3.38. $ax > 1$.

3.39. $|x^2-5x+4| < a$.

3.40. $|x-a|-2a > |x-3a|$.

3.41. $a\sqrt{x+1} < 1$.

3.42. $(a+1)\sqrt{2-x} < 1$.

Группа Б

Для каждого значения параметра a найти все x, удовлетворяющие условию (3.43 — 3.46).

3.43. $\sqrt{a-x^2} > x+1$.

3.44. $x+4a > 4\sqrt{ax}$.

3.45. $\frac{ax-(1-a)a}{ax-1} > 0$.

3.46. $\frac{x-1}{a-1} + x < \frac{1}{1-a}$.

3.47. При каких значениях параметра a имеет хотя бы одно отрицательное решение неравенство $3-|x-a| > x^2$?

3.48. При каких значениях параметра a в множестве решений неравенства

$$x+\sqrt{x^2-2ax} > 1$$

содержится промежуток $[1/4; 1]$?

Для каждого значения параметра a решить неравенство (3.49 — 3.60).

3.49. $|x-3a|-|x+a| < 2a$.

3.50. $|x+2a| < \frac{8a^2}{|x-2a|}$.

3.51. $|1+x| < ax$.

3.52. $|x-1| \geqslant ax$.

3.53. $|x^2+a| \geqslant x$.

3.54. $a+\frac{4a^2}{|x-2a|} \geqslant 0$.

3.55. $|1-|x|| < a-x$.

3.56. $2|x-a| < 2ax-x^2-1$.

3.57. $ax > \frac{1}{x}$.

3.58. $\frac{ax+1}{ax-1} \geqslant \frac{a+1}{a-1}$.

3.59. $x^2-5xa+6a^2 > 0$.

3.60. $\frac{x^2+4a^2}{xa} \geqslant 5$.

§4. Расположение корней квадратного трехчлена

Определение. Квадратным называется уравнение $ax^2+bx+c=0$ при $a \neq 0$.

Из свойств квадратичной функции немедленно получаем следующие утверждения о корнях квадратного уравнения.

I. Квадратное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

II. Квадратное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $D = 0$, причем этим решением будет $x = x_0 = (-b)/(2a)$.

III. Квадратное уравнение имеет два различных решения тогда и только тогда, когда $D > 0$, причем этими решениями являются числа $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$.

IV. x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Кстати, в случае совпадения корней квадратного уравнения между собой (т.е. когда $D = 0$ и $x_1 = x_2 = x_0$), разложение на множители также имеет место: $F(x) = a(x + b/2a)^2 = a(x - x_0)(x - x_0)$. Возможность разложить на множители квадратный трехчлен часто играет ключевую роль в решении задач. В качестве иллюстрации воспользуемся свойством IV при выводе теоремы Виета. Итак, x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Напомним, что два многочлена равны, если их коэффициенты при соответствующих степенях переменной одинаковы. Поэтому приравнивая коэффициенты при первой степени x, а также приравнивая свободные коэффициенты, получим систему $\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2), \\ c = ax_1x_2. \end{cases}$ Осталось сократить первое и второе уравнения системы на $-a$ и на a соответственно, что и завершит доказательство следующего утверждения, называющегося теоремой Виета.

V. Числа x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1x_2 = c/a. \end{cases}$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Разложить на множители квадратный трехчлен $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

Легко заметить, что $x = 1$ является корнем уравнения $f(x) = 0$. Из теоремы Виета следует, что $x_1 \cdot x_2 = 2/3$. Поэтому корнями данного квадратного трехчлена являются $x_1 = 2/3$ и $x_2 = 1$. Отсюда

$$f(x) = -3(x - 2/3)(x - 1).$$

Замечание: при разложении на множители не забывайте о старшем коэффициенте перед скобками! Так, в рассмотренном примере, $f(x) \neq (x - 2/3)(x - 1)$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых единственный корень имеет уравнение $\dfrac{x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a}{x - 2} = 0$.

ОДЗ этого уравнения являются все $x \neq 2$. В поиске корней уравнения $x^2-(2a+1)x+a(a+1) = 0$ нам поможет теорема Виета. Нетрудно заметить, что $x_1 = a$ и $x_2 = a + 1$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 2a + 1$ и $x_1x_2 = a^2 + a$. Поэтому $x_1 = a$ и $x_2 = a + 1$ являются нулями числителя. Всегда $a \neq a + 1$, поэтому уравнение $x^2 - (2a + 1)x + a(a + 1) = 0$ имеет два различных корня при всех значениях a. Но было бы ошибочно полагать, что исходное уравнение имеет всегда два решения. **Не забывайте об ОДЗ!** Так, например, если $x_1 = 2$, то исходное уравнение имеет только один корень — x_2. Если же $x_2 = 2$, то единственным решением данного уравнения будет x_1. Отсюда искомыми значениями параметра a будут два числа: $a = 2$ и $a = 1$.

Пример 3. Известно, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найти значение $x_1^3 + x_2^3$.

Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$. Выразим сумму $x_1^3 + x_2^3$ через $x_1 + x_2$ и x_1x_2. Это сделать несложно: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)([x_1 + x_2]^2 - 3x_1x_2) = -p(p^2 - 3q)$.

Пример 4. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Пусть $x^2+px+q = 0$ — искомое уравнение (p, q — рациональные числа). Домножив числитель и знаменатель данной нам дроби на $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ (т.е. на сопряженное к знаменателю), получим

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{3 - 5} = -4 + \sqrt{15}.$$

Поэтому $(-4 + \sqrt{15})^2 + p(-4 + \sqrt{15}) + q = 0$, т.е.

$$(31 - 4p + q) + (p - 8)\sqrt{15} = 0.$$

По условию p, q — рациональные числа, поэтому последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $p - 8 = 0$ и $31 - 4p + q = 0$. Отсюда $p = 8$ и $q = 1$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 7 = 0$ равна 10.

Из условия задачи следует, что корни уравнения должны существовать, поэтому должно выполняться неравенство $D = a^2 - 4a - 28 \geqslant 0$. Кроме того, используя равенство $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ и теорему Виета, получим $a^2 - 2a - 14 = 10$. Из последнего уравнения находим $a_1 = -4$ и $a_2 = 6$. Нетрудно заметить, что условию $D \geqslant 0$ удовлетворяет только a_1. Ответ: $a = -4$.

Теорема Виета позволяет легко находить знаки корней квадратного уравнения (конечно в том случае, когда они существуют), не находя при этом сами корни.

VI. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и положительны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -b/a > 0, \\ c/a > 0. \end{cases}$

Из существования положительных корней немедленно следует, что $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -b/a > 0$, $x_1x_2 = c/a > 0$. Докажем теперь обратное утверждение. Из условия $D \geqslant 0$ получаем существование корней x_1 и x_2. Неравенство $x_1x_2 = c/a > 0$ говорит о том, что x_1 и x_2 имеют одинаковый знак, а второе неравенство системы в дополнение к этому позволяет нам утверждать, что этот знак корней положителен. Аналогично доказываются следующие два утверждения.

VII. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и отрицательны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -b/a < 0, \\ c/a > 0. \end{cases}$

VIII. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ c/a < 0. \end{cases}$

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых решения уравнения $x^2 + 4x + 2a = 0$ существуют и отрицательны.

Из системы $\begin{cases} D = 16 - 8a \geqslant 0, \\ -4 < 0, \\ 2a > 0. \end{cases}$ получаем, что одновременно должно быть $a \leqslant 2$ и $a > 0$. Окончательно имеем, что корни данного уравнения существуют и отрицательны при $a \in (0; 2]$.

Предыдущие три утверждения позволяют выяснить, как расположены корни квадратного уравнения относительно нуля. Приведем несколько более общих утверждений о расположении корней квадратного трехчлена. Начнем со случая, когда корни x_1, x_2 расположены правее некоторого числа d.

IX. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ и x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$, $d \in R$. Тогда $x_1, x_2 > d$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > d, \\ f(d) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > d, \\ f(d) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 > d, \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}}$$

Следующее утверждение позволяет определить, когда корни x_1, x_2 расположены левее некоторого числа d.

X. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ и x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$, $d \in R$. Тогда $x_1, x_2 < d$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < d, \\ f(d) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < d, \\ f(d) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 < d, \\ a \cdot f(d) > 0. \end{cases}}$$

Следующее утверждение позволяет определить, когда корни x_1, x_2 расположены по разные стороны от некоторого числа d.

XI. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ и x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$, $d \in R$. Тогда $x_1 < d < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(d) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ f(d) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a \cdot f(d) < 0.}$$

И, наконец, последнее утверждение позволяет выяснить, когда корни x_1, x_2 расположены в интервале $(d; e)$.

XII. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ и x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = 0$, $d, e \in R$. Тогда $x_1, x_2 \in (d; e)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 \in (d; e), \\ f(d) > 0, \\ f(e) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 \in (d; e), \\ f(d) < 0, \\ f(e) < 0. \end{cases}$$

Задачи

Группа А

4.1. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите: а) ${x_1}^2+{x_2}^2$, б) ${x_1}^3+{x_2}^3$, в) $\dfrac{1}{q-x_1}+\dfrac{1}{q-x_2}$, г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$, д) $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$.

Найти все значения параметра a, при которых уравнение (4.2 — 4.3) имеет корни и определить знаки корней.

4.2. $x^2-2(a-1)x+2a+1=0$.

4.3. $(a-3)x^2-2(3a-4)x+7a-6=0$.

4.4. Найти все значения параметра a, при которых квадратный трехчлен $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$ положителен для любого x.

4.5. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2+x+1=0$ больше 2, а другой меньше 2.

4.6. При каком значении параметра a один корень уравнения $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ больше 1, а другой меньше 1?

4.7. Найти все значения a, для которых один корень уравнения $2ax^2-2x-3a-2=0$ больше 1, другой меньше 1?

4.8. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $(1+a)x^2-3ax+4a=0$ существуют и больше единицы.

4.9. При каких значениях параметра a существуют два различных корня уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ и оба они больше 1?

4.10. При каких значениях a существует единственный корень уравнения $x^2-ax+2=0$, удовлетворяющий условию $1<x<3$?

4.11. При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2-2ax+2-3a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству $x>1$?

4.12. При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2-(a+1)x+a=0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0<x<3$?

4.13. При каких a уравнение $2x^2-2(2a+1)x+a(a-1)=0$ имеет два корня x_1 и x_2, причем $x_1<a<x_2$?

4.14. Сколько корней меньше 1 в зависимости от параметра a имеет уравнение $(1+a)x^2-3ax+4a=0$?

4.15. Найдите все значения a, при которых существуют решения уравнения $x^2+x+a=0$ и все они больше a.

4.16. При каких a все корни уравнения $x^2-2ax+a^2-a=0$ существуют и расположены на отрезке $[-2,6]$?

4.17. При каких a существуют корни уравнения $x^2-2ax+a^2-2=0$ и все они расположены на отрезке $[2,5]$?

Группа Б

4.18. Сколько решений в зависимости от a имеет система $4x^2-2x+a=0$, $|x| \leqslant 1$?

4.19. Сколько решений в зависимости от a имеет система $x^2-2ax-1=0$, $|x| < 2$?

4.20. При каких a существуют два различных корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ и оба они принадлежат интервалу $(0; 3)$?

4.21. При каких значениях параметра a для всех x, таких, что $1 < x < 2$, выполняется неравенство $x^2 + ax + a^2 + 6a < 0$?

4.22. При каких a из $x < 1$ следует, что $1 - ax^2 \geqslant 0$?

4.23. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+(a+1)x-3 < 0$ выполняется при любом x меньше 2?

4.24. Найти все значения a, для которых неравенство $x^2 - ax + a > 0$ верно при всех $|x| < 1$.

4.25. Для каких a неравенство $(x-3a)(x+2a+1) < 0$ выполняется для всех x, таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$?

4.26. Для каких a неравенство $\dfrac{x^2+a^2}{a(x+6)} \geqslant 1$ выполняется для всех x, таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$?

4.27. Для каких a неравенство $x^2 + ax - 7a < 0$ выполняется при всех $1 < x < 2$?

4.28. При каких a, если выполняется неравенство $x^2-a(1+a^2)x+a^4 < 0$, то выполняется неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$?

4.29. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$ удовлетворяют также неравенству $x^2 \leqslant 9$?

§5. Инвариант

Начнем с примера.

Пример 1. (**Четность.**) На доске написано 11 чисел — 6 нулей и 5 единиц. Теперь 10 раз подряд выполняют такую операцию: зачеркивают любые два числа и, если они были одинаковы, дописывают к оставшимся числам один ноль, а если разные — единицу. Какое число получится в результате?

Решение. После каждой операции **сумма всех чисел** на доске обязательно остается **нечетной**, какой она и была в начале. Проверить это совсем нетрудно — сумма каждый раз меняется на 0 или 2. Значит, и после 10 операций оставшееся число должно быть нечетным, т.е. равным 1.

Определение. *Инвариантом* относительно некоторой операции называют свойство (четность, значение некоторого выражения и т.п.), которое сохраняется данной операцией.

Рассмотрим несколько примеров на часто встречающиеся инварианты: **четность, результат некоторой формулы, цвет**.

Пример 2. (**Значение выражения.**) В алфавите языка племени УЫУ всего две буквы: У и Ы. Причем этот язык обладает такими свойствами: если из слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно так же смысл слова не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Можно ли утверждать, что слова УЫЫ и ЫУУ имеют одинаковый смысл?

Решение. Обратите внимание, что при любой разрешенной нам операции добавления или выкидывания куска слова количества букв У и Ы в этом куске равны. Это означает, что **разность между числом букв У и букв Ы** в слове не изменяется. Проследите это на примере

$$\text{Ы} \to \text{ЫЫУ} \to \text{ЫУУЫЫЫУ} \to \text{ЫУЫЫУ}.$$

Во всех этих словах букв Ы на одну больше, чем букв У. Вернемся к решению. В слове УЫЫ разность равна (-1), а в слове ЫУУ равна 1. Значит, из слова УЫЫ нельзя разрешенными операциями получить слово ЫУУ, и следовательно, нельзя утверждать, что эти слова обязательно имеют одинаковый смысл.

Это решение иллюстрирует главную идею применения инварианта. Нам даны некие объекты, над которыми разрешено выполнять определенные операции, после чего задается вопрос — можно ли из одного объекта получить другой при помощи этих операций? Чтобы ответить на него, мы строим некоторую величину, которая не меняется при указанных операциях. Если значения этой величины для двух указанных объектов не равны, то, конечно, ответ на заданный вопрос отрицателен. Рассмотрим чуть более сложный пример на этот инвариант.

Пример 3. (**Значение выражения.**) На доске написаны числа: 1, 2, $3, \ldots,$ 19, 20. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a+b-1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

Решение. Для любого набора из n чисел на доске рассмотрим следующую величину X: **сумму всех чисел, уменьшенную на n**. Допустим, что с набором произведено описанное в условии преобразование. Как же изменится эта величина? Если сумма всех чисел набора, кроме a и b, равна S, то до преобразования величина X равнялась $S + a + b - n$, а после преобразования $X = S + (a + b - 1) - (n - 1) = S + a + b - n$. Итак, значение величины X не изменилось, она — инвариант. Исходно (для набора из условия задачи) $X = (1 + 2 + ... + 19 + 20) - 20 = 190$. Значит, и после 19 операций, когда на доске останется одно число p, X также будет равно 190. Но по своему определению, в этот момент X будет равно $p - 1$. Значит, $p = 191$. Следовательно, число, оставшееся на доске обязательно будет равно 191.

Конечно, главное в решении задач на инвариант, это — придумать сам инвариант. Это настоящее искусство, которым можно овладеть лишь при наличии известного опыта в решении подобных задач. Здесь очень важно не ограничивать фантазию. Не надо, однако, забывать о том, что

а) придумываемые величины должны быть инвариантны;

б) эти инварианты должны давать разные значения для двух данных в условии задачи объектов;

в) необходимо сразу определить класс объектов, для которых будет определяться наша величина.

Последний пункт относится к задачам, в которых инвариант надо вводить не для всех рассматриваемых объектов, а только для некоторого их подмножества (см., например, задачи 5.9 и 5.10).

Большое количество задач на инвариант решается с помощью инварианта специфического вида — так называемой "раскраски". Вот типичный пример:

Пример 4. (**Цвет.**) Фигура "верблюд" ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (т.е., она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом "верблюда" с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

Решение. Ответ: нельзя. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом "верблюд" ходит с одного поля на поле того же цвета; иными словами, **цвет поля**, на котором стоит "верблюд" — инвариант. Но так как два соседних поля имеют разную окраску, то пройти с одного на другое ходом "верблюда" невозможно.

Задачи

Группа А

5.1. На экспериментальной яблоне выросло 1000 апельсинов и 1000 бананов. Если сорвать с яблони два банана или два апельсина, то вырастет новый апельсин, а если сорвать банан и апельсин, то вырастет новый банан. Какой плод останется на яблоне через 1999 дней?

5.2. Круг разделили на 6 секторов, и в каждый из них поставили по фишке. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

5.3. Круг разделили на 6 секторов, и в каждый из них поставили по фишке. Разрешается за один ход сдвинуть любую фишку в соседний с ней сектор. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе ровно за 2010 ходов?

5.4. В таблице 8×8 одна из клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Разрешается за один ход поменять цвета всех клеток в каком-то одном столбце или в какой-то одной строке на противоположные. Доказать, что невозможно добиться того, чтобы после некоторого количества ходов все клетки стали белыми.

5.5. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 101$. Разрешается стереть любые два числа и вместо них написать разность этих чисел. Можно ли добиться того, чтобы через 100 ходов на доске осталось число 0?

5.6. На доске написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и на их место написать число $ab + a + b$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?

5.7. На доске написаны три числа: 2; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$. За один ход разрешается написать вместо этих чисел три новых числа, равные попарным полусуммам трех написанных чисел. Может ли после нескольких ходов получиться тройка 1; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$?

5.8. На доске написаны три числа: 2; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{2}$. За один ход разрешается заменить любые два их них суммой, деленной на $\sqrt{2}$ и разностью, деленной на $\sqrt{2}$, оставив третье число без изменения. Можно ли после некоторого числа ходов получить набор 1; $\sqrt{2}$; $1/\sqrt{2}$?

5.9. В каждой вершине куба записано некоторое число. За один шаг к двум числам, записанным в концах некоторого ребра, можно добавить по единице. Можно ли за несколько шагов сделать все числа равными, если в начале одно число было равно единице, а остальные — нулю? А если в начале единицами были два числа в вершинах, являющихся концами диагонали куба? А если в начале единицами были две вершины, являющиеся концами диагонали грани куба?

5.10. В вершинах правильного двенадцатиугольника расставлены числа $+1$ и -1, так, что во всех вершинах, кроме одной, стоят $+1$. Разрешается изменять знак у любых k подряд идущих вершин. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы единственное число -1 сдвинулось в соседнюю с исходной вершину, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 6$?

5.11. В таблице 3×3 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Разрешается за один ход поменять цвета всех клеток в каком-то одном столбце или в какой-то одной строке на противоположные. Возможно ли добиться того, чтобы после некоторого количества ходов все клетки стали белыми?

5.12. В квадратной таблице 4×4 расставлены знаки "$+$" и "$-$" причем в на пересечении первой строки и второго столбца стоит "$-$", а в остальных клетках доски стоит "$+$". Разрешается одновременно поменять все знаки на противоположные в любом столбце, в любой строке, и на любой линии, параллельной одной из диагоналей квадрата (в частности, разрешается поменять знак в любой угловой клетке). Можно ли такими операциями добиться того, чтобы во всех клетках таблицы стояли знаки "$+$"?

5.13. Зеленая фишка находится в левой нижней клетке доски размером 100×1999. За один ход разрешается передвинуть ее на одну из соседних по диагонали клеток. Можно ли добиться того, чтобы фишка попала в правый верхний угол?

5.14. На шахматной доске находится шахматный конь. Можно ли добиться того, чтобы после 100 ходов конь оказался бы на соседнем по горизонтали поле?

5.15. Дана шахматная позиция. Белые: Кр d2. Черные: Кр $a1$, К $g8$, п $a2$. Могут ли белые при своем ходе добиться ничьей?

5.16. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Доказать, что шахматный конь не может обойти всю такую доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу.

5.17. Из шахматной доски вырезали одну угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть покрыть без наложений прямоугольниками, составленными их трех клеток?

5.18. Три кузнечика играют в чехарду на плоскости. Каждую секунду один из них прыгает через какого-то из двух оставшихся в точку, симметричную его начальному положению. В начале кузнечики сидят в трех вершинах квадрата. Может ли какой-либо из них после некоторого количества прыжков оказаться в четвертой вершине квадрата?

Группа Б

5.19. В ряд стоят несколько фишек. Разрешается менять местами любые две соседние. После нескольких таких операций обнаружили, что все фишки оказались на своих местах. а) Доказать, что было сделано четное число перестановок. б) Останется ли утверждение верным, если местами можно менять любые две (не обязательно соседние) фишки?

5.20. В ряд написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2001$. Разрешается брать любые два числа и переставлять их в обратном порядке. Можно ли за $1999 \cdot 2001$ таких операций получить ряд $2001, 2000, \ldots, 2, 1$?

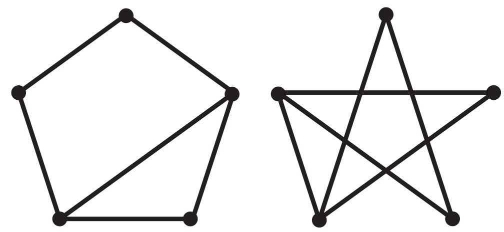
5.21. В городе разрешены только тройные обмены квартир. Можно ли с их помощью осуществить обычный двойной обмен?

5.22. Известно, что 2011 машин целый день ездили по круговой дороге, а вечером они оказались в тех же местах, откуда начинали. Доказать, что они совершили четное число обгонов.

§6. Графы

6.1. Введение

Представим себе несколько пуговиц, некоторые из которых соединены между собой резинками, а концы каждой резинки привязаны к разным пуговицам. Эта конструкция ближе всего к математическому понятию *графа*. Пуговицы принято называть *вершинами*, а резинки *ребрами*.



Эту конструкцию из-за свойств резинок можно по разному расположить в пространстве. Например при расположении одного и того же графа на плоскости можно получить следующие картинки.

На этих картинках точки соответствуют вершинам, а линии их соединяющие — ребрам. Ясно, что при изображении графа важно лишь наличие или отсутствие ребра между некоторой парой вершин, а не его длина или форма. Таким образом, задать граф значит указать все его вершины и описать все пары вершин, которые соединены ребрами. Если в графе n вершин, то они образуют $n(n-1)/2$ неупорядоченных пар, значит и число ребер в графе с n вершинами не может превосходить этого числа.

Ничего не мешает нам связать некоторые пары пуговиц двумя или большим числом резинок. Полученная конструкция соответствует понятию *мультиграфа* или графа с кратными ребрами. Задать мультиграф значит указать все его вершины и для каждой пары вершин указать количество соединяющих их ребер. Будем считать, что каждый граф является мультиграфом.

Две соединенные ребром вершины называются *смежными*. Вершина и ребро называются *инцидентными*, если вершина расположена на конце ребра. Число ребер, инцидентных некоторой вершине v, называется ее *степенью* и обозначается $deg(v)$. Например на приведенном выше рисунке каждый из графов (они одинаковые) имеет такой список степеней вершин $3, 3, 2, 2, 2$.

Заметим, что в любом мультиграфе число концов всех ребер равно сумме степеней всех вершин. Т.е. верна следующая

Лемма. *Сумма степеней всех вершин мультиграфа равно удвоенному числу ребер.*

Разделив сумму степеней вершин на сумму четных слагаемых, и сумму нечетных слагаемых, получим

Следствие. *В любом мультиграфе число вершин нечетной степени четно.*

Этот факт известен более 270 лет как лемма о рукопожатиях: “Число людей сделавших в своей жизни нечетное число рукопожатий четно”. Действительно, считая людей вершинами, а рукопожатия ребрами, получим нужный мультиграф.

Если удалить из (мульти)графа некоторые (возможно ни одного) ребра и некоторые вершины вместе со всеми выходящими из них ребрами, то получившийся (мульти)граф называют *подграфом* исходного.

Задачи

Группа A

6.1. Вершины графа — это океаны на Земле, а ребра — их соединения. Изобразить граф и найти степени его вершин.

6.2. Две клетки доски 8×8 соединены ребром, если шахматная фигура за 1 ход может попасть с одной на другую. Найдите число ребер описанного графа, если шахматная фигура — это а) король, б) конь, в) ладья, г) слон, д) ферзь.

6.3. В углах доски 3×3 стоят 4 шахматных коня: 2 белых сверху и 2 черных снизу. Можно ли, переставляя их по правилам, добиться того, чтобы каждая пара одноцветных коней оказалась в противоположных углах доски?

6.4. Можно ли на окружности расположить числа от 1 до 10 так, чтобы соседние числа отличались на 2 или на 3?

6.5. Существуют ли графы, степени вершин которых равны:
а) 4,4,4,4,2;
б) 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1;
в) 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1;
г) 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1;
д) 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2;
е) $1, 1, 2, 2, ..., n, n$?

6.6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

6.7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

6.8. В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше — синих или зеленых?

6.9. Можно ли создать разведывательную сеть из 15 агентов так, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими?

6.10. Можно ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно по 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

6.11. Существует ли граф, степени вершин которого попарно различны?

6.12. Каждый из 102 человек знаком не менее, чем с 68 другими (из этих 102). Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

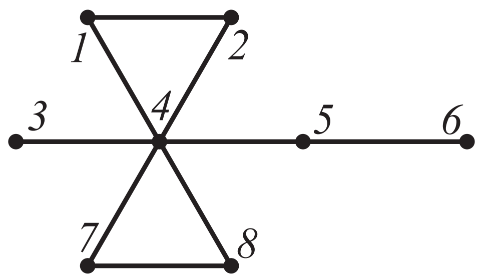
6.13. В революционной интернет-организации состоит 100 человек. Спецслужбы зафиксировали между ними 2501 контакт в соцсети. Докажите, что для организации дела о боевой группе спецслужбы могут выбрать троих революционеров попарно контактирующих в сети.

6.2. Маршруты и связность

Чередующаяся последовательность

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

вершин и ребер мультиграфа такая, что для каждого i от 1 до n ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i, называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_0 и v_n (или (v_0, v_n)-маршрутом). Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут называется *циклическим*, если $v_0 = v_n$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь — *простым циклом*. Число ребер в маршруте называется его *длиной*. Заметим, что в графе без кратных ребер для того чтобы задать маршрут достаточно указать лишь последовательность вершин $v_0, v_1, ..., v_n$.



В приведенном на этом рисунке примере (1, 2) и (1, 2, 4, 7) являются простыми цепями; (1, 2, 4, 7, 8, 4) — цепь, не являющаяся простой — вершина 4 повторяется 2 раза; (1, 2, 4, 7, 8, 4, 2) — маршрут, не являющийся цепью — ребра (2,4) и (4,2) повторяются дважды; (1, 2, 4, 1) — простой цикл.

Цикл, проходящий по всем ребрам графа называется *эйлеровым*. Цепь, проходящая по всем ребрам графа называется *эйлеровой*. Наличие эйлеровой цепи в графе эквивалентно тому, что граф можно нарисовать одним росчерком, т.е. не отрывая карандаша от плоского листа бумаги, и не проводя никакую линию более одного раза.

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Заметим, что если в графе есть вершина, соединенная маршрутами со всеми остальными вершинами, то граф связный. *Компонентой связности* графа G называется такой его связный подграф, к которому нельзя ничего добавить, чтобы снова получить связный подграф G. Граф называется *несвязным*, если число его компонент больше единицы.

Заметим, что если в графе нет вершин степени 0 и есть эйлерова цепь, то он обязательно связный. Действительно, любая вершина инцидентна ребру, значит, лежит на эйлеровой цепи, следовательно, между любой парой вершин есть маршрут вдоль эйлеровой цепи.

Для связного графа условие наличия эйлерового цикла выглядит так

Теорема Эйлера. *В связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда когда все степени его вершин четные.*

Доказательство. Если в графе есть эйлеров цикл, то рассмотрев произвольную вершину v, заметим, что он входит в v столько же раз сколько и выходит, но все входы и выходы он делает по разным ребрам и использует для этого все инцидентные вершине v ребра, значит $deg(v)$ четная.

Если в связном графе все степени вершин четны, то начав с некоторой вершины v_0 пойдем по графу, стирая за собой рёбра. Когда пришли в $v \neq v_0$, зашли в v на 1 раз больше, чем вышли из v, значит стерли нечетное число инцидентных v рёбер, следовательно, у v остались нестертые инцидентные рёбра и движение можно продолжить. То есть если процесс блуждания остановился, то мы вернулись в v_0 и стерли все инцидентные v_0 рёбра. Итак, пройден некоторый цикл P_0. Если все рёбра стерты, то P_0 эйлеров. Пусть остались нестёртые рёбра. Тогда на цикле P_0 есть вершина v_1, у которой остались нестертые инцидентные рёбра. Действительно, если остались лишь рёбра, соединяющие вершины вне P_0, то рёбер между вершинами из P_0 и вершинами с нестёртыми рёбрами вообще не было (мы же их не стирали), а это противоречит связности графа. Заметим, что после стирания P_0 у всех вершин по-прежнему чётная степень, ведь мы стёрли чётное число рёбер у каждой вершины.

Пойдем из v_1, стирая за собой рёбра. Рассуждая как в предыдущем абзаце, построим цикл C_1. Соединяя последовательно начало P_0 до v_1, цикл C_1 и конец P_0 от v_1, получим цикл P_1 с началом и концом как и у P_0, но большей длины. Получим процесс увеличения длины цикла, обрывающийся тогда и только тогда, когда цикл эйлеров. Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы содержит алгоритм построения эйлерового цикла в графе.

Следствие. *Связный граф с k вершинами нечетной степени можно нарисовать $k/2$ росчерками.*

Доказательство. Соединив $k/2$ ребрами пары вершин нечетной степени, получим граф с эйлеровым циклом. Добавленные ребра разбивают этот эйлеров цикл на $k/2$ цепей-росчерков не имеющих общих ребер. Следствие доказано.

Заметим, что каждая вершина нечетной степени должна содержать начало или конец росчерка, а значит меньшим, чем $k/2$ числом росчерков обойтись нельзя.

Задачи

Группа А

6.14. В графе 50 вершин, и степень каждой из них не менее 25. Докажите, что в таком графе есть цикл длины 4.

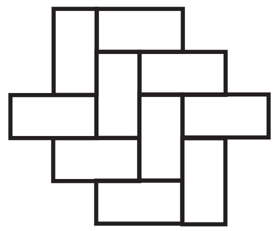
6.15. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.

6.16. Из куска арматуры длиной 12 метров требуется сварить каркас куба с ребром 1 метр. На какое наименьшее кисло кусков требуется предварительно разрезать арматуру?

6.17. Вершины графа — центры клеток шахматной доски, две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда шахматный конь может с одной на другую шагнуть за один свой ход. Каково минимальное число росчерков, необходимое для рисования этого графа?

6.18. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика — участок улицы длиной 100 м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы укатать асфальт на всех улицах, если по нормативам он должен не менее трех раз проехать по каждому участку?

6.19. Садовое товарищество разделено на участки 20×40 метров как показано на рисунке. За лето крот прорыл замкнутый туннель, не проходящий через угловые точки участков и пересекающий границу каждой пары участков. Какое минимальное число пересечений может иметь туннель с границами участков?



6.3. Компоненты и мосты

Заметим, что если к графу добавить новое ребро, соединяющее старые вершины, то никакая его компонента связности не может уменьшиться в размере, значит число его компонент связности не может увеличиться. Следовательно, при удалении любого ребра из графа число его компонент связности не может уменьшиться. Ребро, при удалении которого из графа число компонент увеличивается называется *мостом.* На предпоследнем рисунке ребра $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$ — мосты, а остальные нет.

Если ребро лежит в каком-нибудь цикле, то каждый маршрут, проходящий через него, можно провести в обход по циклу, а, значит, удаление этого ребра не нарушит никаких связей, т.е. не приведет к увеличению числа компонент. Следовательно, мост не лежит ни в каком цикле. Верно и обратное, удаление ребра e, не являющегося мостом, не должно разрушать связь между его концами, значит между его концами есть цепь без ребра e, следовательно, e лежит в цикле. Ясно, что при удалении моста из одной компоненты связности, содержащей концы моста получатся 2, каждая из которых содержит свой конец моста, а остальные компоненты связности не изменятся, тем самым число компонент связности увеличится на 1.

Следующая теорема дает оценку для числа ребер в графе.

Теорема об оценке. *В число ребер m графе с n вершинами и k компонентами связности удовлетворяет неравенствам*

$$n - k \leqslant m \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Доказательство оценки снизу. Допустим противное. Т.е. есть графы для которых оценка снизу неверна. Рассмотрим тот из них G, у которого самое маленькое число ребер. Ясно, что $m \neq 0$ иначе каждая вершина это отдельная компонента связности, а тогда $n - k = 0 = m$. Следовательно, в этом графе есть ребро, которое можно удалить, получив граф H. В графе H $(m-1)$ ребро, n вершин, а число компонент связности равно $(k+1)$ или k, в зависимости от того удален мост или не мост. В силу минимальности числа ребер в графе G, для графа H оценка уже верна, т.е. $n-k-1 \leqslant m-1$ или $n - k \leqslant m - 1$. В обоих случаях $n - k \leqslant m$.

Доказательство оценки сверху. Рассмотрим экстремальный пример, то есть граф с n вершинами, k компонентами связности и наибольшим (для этих n и k) числом ребер. Покажем, что в экстремальном примере не может быть двух больших (больше 1 вершины) компонент связности.

Пусть есть две компоненты. В первой p вершин, а во второй q, $p \geqslant q > 1$ и v — вершина второй компоненты. Удалим все ребра инцидентные v , и соединим v ребрами со всеми вершинами первой компоненты. В полученном графе столько же вершин и столько же компонент, что и в исходном. Число ребер увеличилось не менее чем на $p - q + 1$, а это положительное число. Противоречие с экстремальностью исходного графа.

То есть экстремальный пример имеет $k - 1$ вершину степени 0 и компоненту с $n - k + 1$ вершиной, а в ней не более, чем $(n-k)(n-k+1)/2$ ребер. Теорема доказана.

Задачи

Группа А

6.20. На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами a и b соединены ребром только в том случае, если одно из чисел a или b делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

6.21. Докажите, что граф с n вершинами, степень каждой из которых не менее $(n-1)/2$, связен.

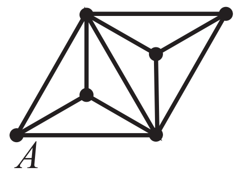
6.22. Из столицы государства выходит 15 внутренних авиалиний, из города Крайнего — одна, а из всех остальных городов — по 10. Докажите, что из столицы можно долететь до Крайнего (возможно с пересадками).

6.23. В стране работает три ГЭС и несколько угольных ТЭС. Потребителями электроэнергии являются города и ракетный завод. Некоторые пары электростанций, некоторые пары потребителей и некоторые пары электростанция-потребитель связаны ЛЭП. Известно, что от каждой ГЭС идет по 15 ЛЭП, от каждой ТЭС по 10 ЛЭП, от ракетного завода 5 ЛЭП и от каждого города по 2 ЛЭП. Докажите, что в случае полного отсутствия угля в стране ракетный завод не останется без энергии.

6.24. Может ли в графе быть мост, если степени всех его вершин равны: а) 5, б) 6?

6.25. В связном графе степени четырех вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4. Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на две одинаковые компоненты связности.

6.26. Докажите, что на ребрах любого связного графа можно так расставить стрелки, чтобы из некоторой вершины можно было добраться до любой другой.



6.27. Какова длина кратчайшего маршрута, начинающегося в точке A и проходящего по всем отрезкам фигуры, изображенной на рисунке справа? Эта фигура представляет собой ромб из двух равносторонних треугольников со стороной 3, отрезки соединяют вершины каждого треугольника с его центром.

6.28. Подземелье представляет собой квадрат 100×100 одинаковых квадратных залов-клеток. В центре стены между каждой парой соседних залов есть слабое место, в котором можно пробить проход. В других местах пробить проход невозможно. В четырех разных углах сидят 4 дракона — стража подземелья. Какое минимальное число проходов нужно проделать, чтобы обеспечить доступ хотя бы одного стража в каждый зал?

6.4. Деревья

Граф, не содержащий циклов, называется *лесом*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Таким образом, компонентами леса являются деревья.

Существует несколько вариантов определения дерева. Некоторые из них отражены в следующей теореме.

Теорема о деревьях. *Для графа G с n вершинами и m ребрами следующие утверждения эквивалентны:*

1) G — дерево;

2) G — связный граф и $m = n - 1$;

3) G — граф без циклов и $m = n - 1$;

4) любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная простая цепь;

5) G — такой граф без циклов, если пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Доказательство. Будем обозначать через $G - e$ граф, полученный из G удалением ребра e

1)→2). Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть $n > 1$, e —- ребро G. Поскольку G не содержит циклов, e — мост, значит, граф $G - e$, имеет ровно две компоненты T_1 и T_2, каждая из которых есть дерево. Пусть n_i — число вершин, а m_i число ребер дерева T_i $(i = 1, 2)$. По индуктивному предположению верно равенство $m_i = n_i - 1$. Далее имеем

$$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1.$$

2)→3). Допустим, что в графе G есть цикл и пусть е — ребро этого цикла. Тогда e не мост, значит граф $G - e$ связен и имеет $n - 2$ ребра, что противоречит теореме об оценке. Следовательно, G — граф без циклов.

3)→4). Пусть k — число компонент графа G. Его компоненты T_1, ..., T_k — деревья. Пусть n_i — число вершин, а m_i число ребер дерева T_i $(i = 1, ..., k)$. Поскольку T_i — дерево, то верно равенство $m_i = n_i - 1$. Теперь имеем

$$n - 1 = m = m_1 + m_2 + \ldots. + m_k = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) =$$

$$= (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = n - k,$$

т.е. $k = 1$. Итак, G — связный граф, и потому любые две несовпадающие вершины соединены в нем простой цепью.

4)$\to$5). Пара несовпадающих вершин, принадлежащих одному циклу, соединена, по меньшей мере, двумя простыми цепями. Следовательно, граф G без циклов. Пусть u и v — две его несмежные вершины. Соединим их ребром e, получим граф $G+e$. В G есть простая (u,v)–цепь, которая в $G+e$ дополняется до цикла. Этот цикл только один в силу единственности простой (u,v)-цепи в G.

5)$\to$1). Покажем, что граф G связен. Если это не так, то найдутся вершины u и v в разных компонентам связности графа G. Соединим их ребром e. В полученном графе $G+e$ ребро e — мост, значит, не лежит в цикле то граф, следовательно, в $G+e$ вообще нет циклов, что противоречит утверждению 5). Итак, G связен и потому является деревом.

Задачи

Группа A

6.29. Доказать, что во всяком дереве есть не менее 2 вершин степени 1.

6.30. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в графе есть цикл.

6.31. Найдите все попарно различные деревья с пятью вершинами.

6.32. Найдите все различные структурные формулы предельных углеводородов с общей формулой C_5H_{16}.

6.33. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.

6.34. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелетов, б)196 перелетов. Найдите такой граф авиалиний, по которому совершить требуемое путешествие за меньшее число перелетов невозможно.

6.35. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50 на 600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

§7. Игры и стратегии

Введение. Под игрой понимается процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Каждая из сторон имеет свою цель и использует некоторую стратегию, которая может вести к выигрышу или проигрышу — в зависимости от поведения других игроков.

В любой игре всегда точно определены исходные позиции (в том числе, игровой материал), результат игры (что именно считать выигрышем, а что поражением), какие действия можно совершать в ходе игры каждому из игроков. Всякая игра состоит из последовательности ходов, поочередно совершаемых каждым из игроков (правилами может быть предусмотрен "пропуск хода", но тогда можно считать, что это тоже некоторый ход данного игрока, не меняющий сложившуюся к этому моменту позицию). Мы будем рассматривать только *конечные игры*, т.е. игры, которые за конечное число шагов приводят к заключительной позиции, после чего игра прекращается. При этом заключительных позиций может быть несколько, а количество шагов, приводящих к какой-либо заключительной позиции, вполне может оказаться неизвестным заранее.

Перед каждым ходом игрок должен принять решение, какое действие он предпримет. Если принимающий решение игрок всегда точно знает, к какой позиции приведет выбранный им ход, то такая игра называется *игрой с полной информацией*. К играм с полной информацией относятся шахматы, шашки, Го, крестики-нолики и т.п. А домино и преферанс — игры с неполной информацией. Все спортивные игры — футбол, баскетбол, теннис и т.д. — тоже игры с неполной информацией: в ход игры может вмешаться даже природа. Хотя наше обсуждение годится для игр как с полной, так и неполной информацией, мы в основном будем рассматривать игры с полной информацией.

7.1. Дерево игры. Понятие стратегии

Начнем с простой игры. Имеется кучка из n камней, где $n > 3$. Первый игрок своим первым ходом делит эту кучку на две так, чтобы в каждой было не менее двух камней. Затем ход делает второй игрок, потом снова первый и т. д. Своим ходом игрок выбирает произвольную кучку, содержащую не менее четырех камней, и делит ее на две части так, чтобы в каждой было не менее двух камней. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

Ясно, что мы сейчас описали не одну игру, а много игр: для каждого конкретного n будет свой вариант игры. Пусть для примера $n = 9$. Проанализируем, как может проходить игра.

После хода первого игрока могут получиться три позиции: $(7; 2)$, $(6; 3)$ и $(5; 4)$. Изобразим это графом (рис. 16).

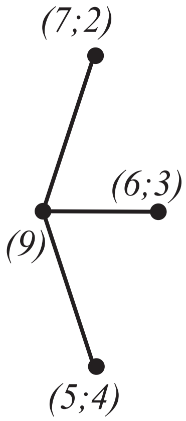


Рис. 16

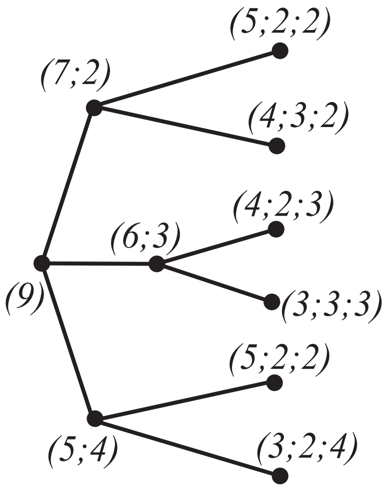


Рис. 17

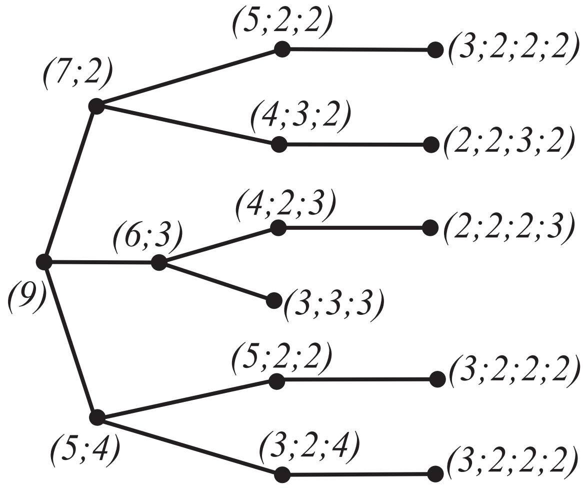


Рис. 18

Теперь для каждой позиции рассмотрим, что получится после хода второго игрока. Результат представлен на рисунке 17.

Из позиции $(3; 3; 3)$ дальнейший ход невозможен, т.е. в этой позиции выиграл второй игрок. В остальных случаях возможно продолжение. Результат представлен на рисунке 18. Позиции, которые получились в этих вариантах, заключительные. В них выигрывает первый игрок.

Построенное дерево вариантов называется *деревом игры*. Для любой игры с полной информацией существует дерево игры.

Анализ дерева игры показывает, что у первого игрока есть выигрышная стратегия: если первым ходом он разбивает кучку на две любым из двух способов — $(7; 2)$ или $(5; 4)$, то при любом ходе второго игрока он выигрывает.

Вообще, *выигрышной стратегией* для данного игрока называется такое правило совершения ходов этим игроком, при соблюдении которого он добивается выигрыша при любых ответных ходах другого игрока (или других игроков, если их несколько).

Для тех игр, где возможна ничья, цель игры может состоять в том, чтобы не проиграть противнику. Тогда естественно говорить о непроигрышной стратегии.

Задачи

Группа А

7.1. Постройте дерево игры, описанной в объяснительном тексте а) для $n = 8$; б) для $n = 11$; в) для $n = 13$. Для каждого из указанных n определите, какой из игроков имеет выигрышную стратегию.

7.2. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат две кучки камней, в одной m камней, в другой n камней. За один ход разрешается увеличить число камней в любой из двух кучек в 3 раза или добавить в любую из кучек 1 камень. Игроки делают ходы по очереди. Выигрывает тот, кому удастся своим ходом получить суммарное количество камней в обеих кучках, большее 20. Постройте дерево игры, если а) $m = n = 4$; б) $m = 2$, $n = 3$. Для каждой пары указанных значений m и n определите, какой из игроков имеет выигрышную стратегию.

7.3. Два игрока играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами $(x; y)$ в одну из трех точек: или в точку с координатами $(x + 3; y)$, или в точку с координатами $(x; y + 3)$, или в точку с координатами $(x; y + 4)$. Выигрывает игрок, после хода которого расстояние от фишки до точки с координатами $(0; 0)$ не меньше 10 единиц. Постройте дерево игры, если начальная позиция фишки а) $(1; 6)$; б) $(6; 1)$. Для каждой из указанных начальных позиций определите, какой из игроков имеет выигрышную стратегию.

7.4. Два игрока играют в следующую игру. Имеется кучка из n камней, где $n > 2$. Первый игрок своим первым ходом либо забирает из нее камень, либо делит эту кучку на две кучки, равные по числу камней (это действие допустимо, только если n четно). Затем ход делает второй игрок, потом снова первый и т. д. Своим ходом игрок выбирает произвольную кучку и либо забирает из нее камень, либо делит эту кучку на две кучки, равные по числу камней (это действие допустимо, только если число камней в выбранной кучке четно). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Постройте дерево игры, если а) $n = 4$; б) $n = 7$. Для каждого из указанных значений n определите, какой из игроков имеет выигрышную стратегию.

7.5. Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней, в первой из которых 2, во второй — 3, в третьей — 4 камня. У каждого игрока неограниченно много камней. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или удваивает число камней в какой-то кучке, или добавляет по два камня в каждую из кучек. Выигрывает игрок, после хода которого либо в одной из кучек становится не менее 15 камней, либо общее число камней во всех трех кучках становится не менее 25. Кто выигрывает при безошибочной игре обоих игроков — игрок, делающий первый ход или игрок, делающий второй ход? Каким должен быть первый ход выигрывающего игрока?

7.2. Построение стратегии

Для большинства игр осуществить полный перебор всевозможных последовательностей ходов, как правило, практически невозможно. Даже если в каждой позиции нужно делать выбор всего лишь из двух вариантов, то игра двух игроков, продолжающаяся n ходов, потребует рассмотрения $2n$ последовательностей. Уже при $n = 30$ (т.е. каждый игрок сделает всего по 15 ходов) требуется перебрать более миллиарда вариантов. Даже самые современные компьютеры "призадумаются", выполняя такую работу.

Давайте еще раз посмотрим на рисунки 17 и 18. Обратите внимание, что в различных последовательностях ходов возникают одинаковые позиции. Так, после второго хода (рис. 17) возможны всего три различных позиции: $(5; 2; 2)$, $(4; 3; 2)$ и $(3; 3; 3)$ — ясно, что позиции, записи которых отличаются только порядком чисел, одинаковы. А после третьего хода, если он возможен, вообще оказалась только одна позиция: $(3; 2; 2; 2)$. Но если позиции одинаковы, то и решение игрока, каким должен быть очередной ход, будет для них одинаковым. Тем самым, напрашивается вывод: анализировать надо не последовательности ходов, а позиции, которые могут реализоваться в ходе игры. Но вот что важнее.

В конечной игре с полной информацией для каждой позиции существует такая последовательность ходов, которая приводит к гарантированному оптимальному результату.

Чтобы проиллюстрировать обсуждаемые идеи, рассмотрим следующую простую игру. На прямоугольном клетчатом поле в некоторой клетке ставится фишка. За один ход ее разрешается переместить на любое количество клеток либо по горизонтали влево, либо по вертикали вниз, либо по диагонали влево и вниз. Два игрока по очереди делают ходы фишкой. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход.

Нетрудно видеть, что в этой игре ровно одна заключительная позиция — фишка стоит в левом нижнем углу. Для каждого игрока заключительная позиция имеет ровно одно значение — тот, кто привел фишку на это поле, выиграл; другой игрок проиграл. Каждая незаключительная позиция для игрока, который из этой позиции должен делать ход, будет выигрышной или проигрышной в зависимости от того, имеется ли для нее последовательность ходов, гарантирующая выигрыш. Давайте разметим клетки игрового поля, поставив знак $+$, если позиция, когда фишка стоит на этой клетке, является выигрышной, и знак $-$, если позиция проигрышная. Начнем разметку с левой нижней клетки: там, очевидно, стоит $-$. Но тогда во всех клетках вертикального, горизонтального и диагонального рядов, начинающихся с этой клетки, надо поставить $+$. Клетка, стоящая во втором ряду и третьем столбце, должна быть отмечена знаком $-$, поскольку из нее фишку можно передвинуть только в клетку, уже отмеченную знаком $+$, т.е. в клетку гарантированного выигрыша противника. Но тогда сразу же знаком $+$ надо отметить все еще непомеченные клетки второго ряда, третьего столбца и диагонали, проходящей через эту клетку влево-вверх (рис. 19*а*). На рисунке 19*б* приведена полная разметка некоторой части доски как угодно большого размера.

+		+						+
+		+					+	+
+		+				+	+	
+		+			+	+		
+		+		+	+			
+		+	+	+				
+		+	+					
+	+	-	+	+	+	+	+	+
-	+	+	+	+	+	+	+	+

а)

+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	-	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	-	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	-	+
+	+	+	+	+	-	+	+	+
+	-	+	+	+	+	+	+	+
+	+	-	+	+	+	+	+	+
-	+	+	+	+	+	+	+	+

б)

Рис. 19. Разметка игрового поля выигрышными ($+$) и проигрышными ($-$) позициями

Теперь вместо того, чтобы анализировать всевозможные последовательности ходов, достаточно знать проигрышные позиции: стратегия игры состоит в том, чтобы своим ходом поставить фишку на клетку, отмеченную знаком $-$. Эту стратегию можно оформить следующим алгоритмом.

Алгоритм Стратегия+

```
{ Делать пока (фишка не стоит в левом нижнем углу)
  { Если (фишка стоит на клетке, отмеченной знаком +) то
    { перевести ее, следуя правилам игры, на клетку,
      отмеченную знаком −;
    }
    иначе
    { перевести ее, следуя правилам игры, на любую другую клетку;
    } (* Легко видеть, что по способу заполнения поля невозможно
      перевести фишку из ‘‘проигрышной’’ клетки в ‘‘проигрышную’’ *)
  }
}
```

Найти стратегию и показать, что она приводит к успеху далеко не всегда так просто, как в только что рассмотренной игре. Вот другая игра.

Имеется два набора камней. Игроку за один ход разрешается взять либо любое количество камней из одного набора, либо из двух наборов сразу одинаковое количество камней. Проигрывает тот, кому на очередном ходе будет нечего брать.

Каждую позицию в этой игре естественно описать парой чисел, указывающих, сколько камней осталось в каждом наборе после очередного хода. Попытаемся составить список проигрышных позиций. Первая из них очевидна: $(0,0)$. Следующая, как нетрудно видеть, $(1,2)$, а также симметричная ей $(2,1)$. Затем идет пара позиций $(3,5)$ и $(5,3)$. Затем — $(4,7)$ и $(7,4)$. Затем... Тут приходится задуматься надолго.

Но если задуматься, то можно заметить, что эта игра по существу не отличается от предыдущей: каждой позиции (x, y) данной игры мы можем сопоставить положение $(x + 1, y + 1)$ фишки в игре на клетчатом поле. Допустимые действия игрока в каждой из игр в точности соответствуют друг другу. Так что эти две игры можно назвать *эквивалентными*.

Ясно, что каждая проигрышная позиция в одной игре в точности соответствует проигрышной позиции в другой. Теперь уже несложно продолжить список проигрышных позиций в игре с двумя кучками камней: $(6,10)$ и $(10,6)$, $(8,13)$ и $(13,8)$ и т.д.

Такая замена одного процесса (и вовсе не обязательно игрового) другим довольно часто оказывается весьма полезной для исследовательских целей.

Обдумывая рассмотренный пример игры, можно прийти к выводу, что стратегией естественно называть некоторый *алгоритм планирования*. Ясно, что это определение годится и для игр с неполной информацией — мы всё равно можем (и должны) каким-то образом планировать, какой ход сделать в той или иной позиции. Правда, для таких игр бывает естественно рассматривать не какую-то одну стратегию, а некоторое множество стратегий S, каждая из которых однозначно определяет, какой ход следует выбрать в каждой позиции, которая может возникнуть в игре. Для каждой стратегии существует некоторый гарантированный результат игры — это минимальный результат среди всех результатов, которые получаются, если рассмотреть все варианты игры противника при данной стратегии. Дж. фон Нейман (более известный школьникам как автор принципов архитектуры ЭВМ) предложил выбирать такую стратегию, которая обеспечивает наибольший гарантированный результат. Такое определение наилучшей стратегии предполагает проведение полного перебора вариантов игры. Однако, количество таких вариантов обычно так велико, что с их перебором не может справиться ни человек, ни компьютер. Человек интуитивно отбрасывает неперспективные, по его мнению, варианты. При этом слово “интуитивно” вовсе не является синонимом слова “неосознанно”: человек может руководствоваться вполне четко сформулированными критериями отбора вариантов, но сами эти критерии не являются логически обоснованными. Такие критерии называют эвристиками. Иными словами можно сказать, что эвристика — это некое правило, сокращающее число потенциальных вариантов перебора. Формализованные эвристики нередко служат основой для создания эффективных алгоритмов, однако надо помнить, что применение эвристик не гарантирует получение правильного результата. Огромна роль эвристик в творчестве. Как отмечал один из величайших математиков А. Пуанкаре, основное в творчестве — это умение обнаруживать полезные комбинации без перебора всех возможных.

Задачи

Группа А

7.6. Рассмотрите игру, описанную в задании 7.3. Для всех таких пар (m, n), у которых $m + n < 15$, составьте для игрока, который в этой игре делает ход первым, список проигрышных позиций. (Совет: удобно изображать позиции точками на координатной плоскости.)

7.7. Рассмотрите игру, описанную в задании 7.2. Для всех таких пар (m, n), у которых $m + n < 20$, составьте для игрока, который в этой игре делает ход первым, список проигрышных позиций. (Совет: удобно каждую пару (m, n) изображать точкой на координатной плоскости.)

7.8. На рисунке 20 представлено поле, составленное из клеток. На клетке, отмеченной буквой Ф, стоит фишка. Игроки по очереди передвигают эту фишку на любое количество клеток вправо, верх или вниз, но не более чем на k клеток и не выходя за пределы поля. Если очередной ход выполняется из клетки, для которой есть несколько вариантов движения, то игрок имеет право выбрать любой из них; менять направление в процессе выполнения хода запрещено. Проигрывает тот игрок, который не сможет сделать очередной ход.

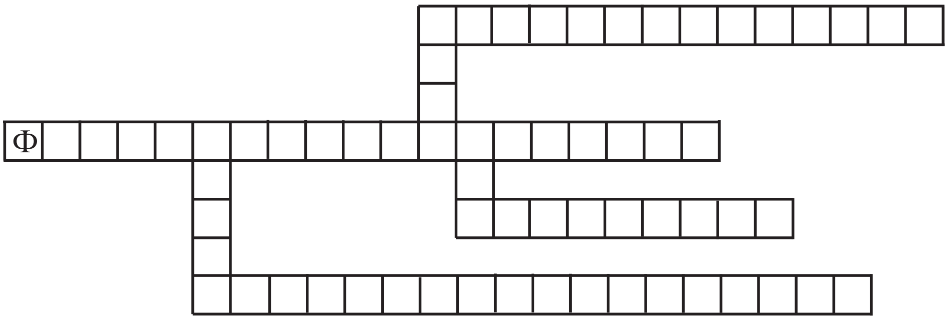


Рис. 20

а) Отметьте на поле позиции, проигрышные для игрока, делающего первый ход, и определите, имеется ли у какого-то из двух игроков — игрока, который ходит первым, или игрока, который ходит вторым, — выигрышная стратегия в этой игре при $k = 4$.

б) Выполните такое же задание, как в пункте (а), при $k = 6$.

7.9. На рисунке 21 представлено поле, составленное из клеток. На клетке, отмеченной буквой Ф, стоит фишка. Игроки по очереди передвигают эту фишку на любое количество клеток вправо, верх или вниз, но не более чем на k клеток и не выходя за пределы поля. Выполняя ход, игрок может изменять направление движения, повернув на 90° (но не на 180°). Проигрывает тот игрок, который не сможет сделать очередной ход.

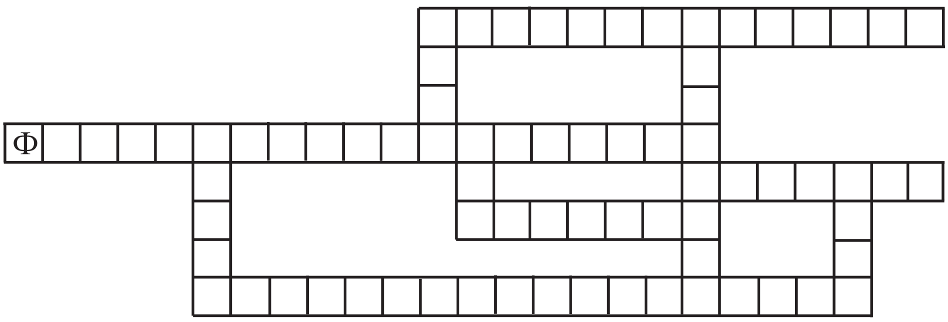


Рис. 21

а) Отметьте на поле позиции, проигрышные для игрока, делающего первый ход, и определите, имеется ли у какого-то из двух игроков — игрока, который ходит первым, или игрока, который ходит вторым, — выигрышная стратегия в этой игре при $k = 4$.

б) Выполните такое же задание, как в пункте (а), при $k = 6$.

7.10. *Игра Ним.* Два игрока играют в следующую игру. Перед ними лежат три кучки камней, в одной k камней, в другой m камней, в третьей n камней. За один ход разрешается из любой кучки взять любое количество камней. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход (т.е. камни кончились). Составьте список проигрышных позиций, если а) $k = 2$; $m = 4$; $n = 6$; б) $k = 3$; $m = 5$; $n = 7$.

7.3. Инвариант стратегии

Начнем с примера — с игры Ним, для которой проигрышные позиции вы выписали, выполнив задание 7.10 (б). Вот какой список у вас должен был получиться:

$$(0;0;0),\ (0;1;1),\ (0;2;2),\ (0;3;3),\ (0;4;4),\ (0;5;5),$$
$$(1;2;3),\ (1;4;5),\ (2;4;6),\ (2;5;7),\ (3;4;7),\ (3;5;6).$$

Мы выписали позиции, расположив внутри каждой из них числа в порядке неубывания. Ясно, что проигрышными будут и любые позиции, полученные из перечисленных произвольной перестановкой чисел.

Запишем каждое число в двоичной системе. Для тройки $(2;4;6)$, к примеру, получится так: $(010;100;110)$. А теперь выполним поразрядное сложение. Поразрядное — значит без переноса единицы в старший разряд. Такое сложения договоримся обозначать $\oplus$. Имеем:

$$010 \oplus 100 \oplus 110 = 000.$$

Проделайте это для любой позиции из приведенного списка, и вы убедитесь, что в результате всегда будут получаться только нули. Возникает гипотеза, что нами обнаружен некое обще свойство всех проигрышных позиций — поразрядная сумма двоично записанных чисел данной позиции должна быть нулевой.

Как же обосновать нашу гипотезу? Как вообще обосновывать гипотезу, что некоторое свойство P определяет проигрышные позиции? Для этого надо убедиться в справедливости двух утверждений:

1) при любом ходе из позиции, обладающей свойством P, появится позиция, не обладающая этим свойством (т.е. противник не может перевести вас в проигрышную позицию);

2) из любой позиции, не обладающей свойством P, можно перейти в позицию, обладающую этим свойством (т.е. своим очередным ходом вы можете поставить противника в проигрышную ситуацию).

Справедливость первого утверждения для нашей гипотезы почти очевидна. Действительно, уменьшив какое-либо число в позиции, обладающей сформулированным свойством, мы цифру 1 в старшем разряде обязательно заменим на цифру 0, и, следовательно, сумма цифр в этом разряде уже перестанет быть нулем.

Пусть теперь перед нами позиция, не обладающая данным свойством. Рассмотрим те разряды, в которых сумма отлична от нуля, и рассмотрим самый левый из этих разрядов. Выберем то число из трех, для которого в этом разряде стоит 1 — такое число есть, ибо иначе сумма цифр в этом разряде была бы равна 0. Перестроим выбранное нами число следующим образом. В каждом том разряде этого числа, где сумма отлична от нуля, заменим цифру на “противоположную”, т.е. 1 заменяем на 0, а 0 на 1. Получившаяся запись — это, как нетрудно понять, и есть то количество камней, которое нам требуется иметь в данной кучке, чтобы получить позицию, имеющую указанное выше свойство. К примеру, для позиции $(1;3;4)$ имеем:

$$001 \oplus 011 \oplus 100 = 110.$$

В результате поразрядного сложения самая левая 1 стоит в третьем разряде. Из наших трех чисел в третьем разряде 1 имеет число 100. Производим в нем замену цифр: первая цифра заменяется нулем, вторая — единицей, а третья остается без изменений. В итоге получается 010, т.е. число 2. Значит, в четвертой кучке надо оставить два камня из четырех. Получится позиция $(1;3;2)$, проигрышность которой нам, конечно, уже известна.

Свойство, которое сохраняется у объекта при выполнении над ним заданной операции, называется, как вы помните, инвариантом. В нашем случае все проигрышные позиции обладают тем свойством, что поразрядная сумма двоично записанных чисел данной позиции равна нулю. Это инвариант стратегии.

После того, как найден инвариант, стратегия строится легко: надо всегда перед ходом противника создавать позицию, обладающую найденным инвариантом.

Разумеется, найти стратегический инвариант не просто. Нередко в этом помогают соображения, связанные со свойством симметрии. Рассмотрим для примера такую игру.

В каждой клетке доски 11×11 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество, но не менее двух, подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Играют двое; ходы делают по очереди. Выигрывает снявший последнюю шашку. Кто выигрывает при правильной игре?

Выигрывает игрок, делающий первый ход. Этим ходом он снимает все шашки, стоящие на вертикали, проходящей через центр доски. После этого конфигурация шашек распадается на две симметричные части: левую и правую. На любой ход второго игрока первый отвечает ходом в другой половине доски так, чтобы сохранялась симметрия расположения шашек. Ясно, что пока у второго игрока будет иметься возможность сделать ход, у первого игрока также будет возможность хода. А стратегическим инвариантом здесь является осевая симметрия конфигурации игрового материала.

Впрочем, симметрия может применяться не в буквальном, геометрическом смысле, а как некое наводящее соображение. Вот пример еще одной игры.

Имеются две одинаковые коробки конфет. Каждый из двух игроков по очереди своим ходом съедает из какой-либо коробки какое захочет количество конфет (при следующем ходе коробка не обязана быть той же самой). Проигрывает тот, кому не удается сделать очередной ход, поскольку конфеты кончились.

Каждая позиция в этой игре после очередного хода какого-либо игрока описывается парой натуральных чисел (m, n), где m — число конфет в первой коробке, а n — число конфет во второй коробке. Начальная позиция описывается парой вида (a, a).

Проанализируем несколько позиций. Ясно, что позиции $(0, n)$ и $(m, 0)$ выигрышны для игрока, который будет делать ход — он просто забирает все оставшиеся конфеты. А вот позиция $(1, 1)$ для такого игрока проигрышна — он ведь может съесть конфету только из одной коробки, после чего его противник выигрывает. И позиция $(2, 2)$ тоже проигрышная — съешь две конфеты, сразу проиграешь, а если съешь одну, то противник съест тоже одну из другой коробки, после чего попадаешь в проигрышную позицию $(1, 1)$. Легко теперь догадаться, что любая позиция вида (x, x) проигрышная для того, кто в этой позиции будет делать ход — сколько бы конфет ни съесть из одного набора, противник съест столько же из другого. В этом как раз и проявляется некая симметрия ответного хода второго игрока по отношению к ходу первого игрока. Вывод же таков: если игрок, делающий в начальной ситуации ход вторым, придерживается указанного правила, то он выигрывает, как бы ни играл первый игрок. Иными словами, у второго игрока имеется выигрышная стратегия. Стратегии, в которых инвариантом выступает симметрия в том или ином смысле, называются *симметричными стратегиями.*

Задачи

Группа А

Во всех описываемых играх играют два игрока, которые делают ходы по очереди; пропускать ход запрещено.

7.11. *Игра Баше.* Имеется кучка из n камней. За один ход разрешается взять из нее не более k камней. Играют двое; ходы делают по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

а) Выпишите проигрышные позиции для $k = 4$ и $n = 20$; для $k = 7$ и $n = 30$. У кого из играющих есть выигрышная стратегия в каждом из указанных случаев?

б) Найдите инвариант проигрышных позиций и сформулируйте выигрышную стратегию для произвольной пары (k, n).

7.12. *Обобщенная игра Баше.* Имеется кучка из n камней. Играют двое; ходы делают по очереди. За один ход первому игроку разрешается взять из нее не более k камней, второму игроку — не более m камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Найдите инвариант проигрышных позиций и сформулируйте выигрышную стратегию для произвольной тройки (k, m, n).

7.13. На прямоугольный стол по очереди выкладываются пятаки, причем никакой пятак не должен налегать на ранее положенные монеты. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7.14. На окружности расставлено 20 точек. За один ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Играют двое; ходы делают по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У какого игрока в этой игре имеется выигрышная стратегия?

7.15. а) В ряд лежат несколько монет, каждые две соседние монеты касаются друг друга. За ход разрешается брать одну монету или две соприкасающиеся монеты. Играют двое; ходы делают по очереди. Проигрывает тот, кому нечего брать. У какого игрока в этой игре имеется выигрышная стратегия?

б) По окружности лежат несколько монет каждые две соседние монеты касаются друг друга. За ход разрешается брать одну монету или две соприкасающиеся монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Выигрывает тот, кто берет последнюю монету. У какого игрока в этой игре имеется выигрышная стратегия?

7.16. Двое по очереди ставят крестики и нолики в клетки доски 9×9. Начинающий ставит крестики, его соперник — нолики. В конце подсчитывается, сколько имеется строчек и столбцов, где крестиков больше, чем ноликов — это очки набранные первым игроком. Количество строчек и столбцов, где ноликов больше — очки второго. Тот из игроков, кто наберет больше очков, побеждает. Кто выигрывает при правильной игре?

Группа Б

7.17. Двое по очереди разламывают шоколадку. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1. Определить, кто выигрывает при правильной игре, если

а) шоколадка имеет размеры 10×5;

б) шоколадка имеет размеры 9×5;

в) шоколадка имеет размеры $m \times n$, где $m > 1$ и $n > 1$.

7.18. Дан пирог, разрезанный на $m \times n$ клеток, у которого отравлен левый нижний кусочек. За один ход разрешается съесть весь кусок пирога вправо-вверх, начиная с любой клетки. Проигрывает тот, кто съест отравленный кусок. Определить, кто выигрывает а) при $m = n$; б) при $m = 2$ и произвольном n; в) для произвольных m и n.

7.19. На столе лежит кучка из 2013 однорублевых монет. Двое по очереди берут любое число монет, не превышающее 55. При этом запрещается повторять последний ход противника. Проигрывает тот, кто очередным ходом не может взять хотя бы один рубль. Кто выигрывает при правильной игре — первый или второй игрок? Как он должен играть, чтобы выиграть?

7.20. Имеется кучка из n камней, где $n > 3$. Первый игрок своим первым ходом делит эту кучку на две так, чтобы в каждой было не менее двух камней. Затем ход делает второй игрок, потом снова первый и т.д. Своим ходом игрок выбирает произвольную кучку, содержащую не менее четырех камней, и делит ее на две части так, чтобы в каждой было не менее двух камней. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Для произвольного начального числа камней в кучке определите в зависимости от этого числа, у какого игрока имеется выигрышная стратегия.

7.21. На координатной плоскости стоит фишка. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами $(x; y)$ в одну из трех точек: или в точку с координатами $(x + 3; y)$, или в точку с координатами $(x - 1; y + 4)$, или в точку с координатами $(x + 2; y + 2)$. Выигрывает игрок, после хода которого расстояние от фишки до точки с координатами $(0; 0)$ не меньше 11 единиц. Кто выигрывает в этой игре — игрок, который ходит первым, или игрок, который ходит вторым, — если начальная позиция фишки

а) $(0, 4)$; б) $(1, 0)$; в) $(1; 2)$; г) $(1, 4)$; д) $(2, 2)$; е) $(3, -3)$.

7.22. Докажите, что игра, описанная в задании 7.21, конечна, независимо от того, какова начальная позиция фишки.

7.23. Рассмотрим еще раз игру, описанную в задании 7.21. Пусть игрок, выигрывающий в этой игре, получает приз, равный сумме координат той точки, в которой он оказался в момент выигрыша. Выигрывающий игрок стремится получить максимальный приз. Проигрывающий игрок стремится, чтобы величина приза у его противника была минимальна. Как он должен играть в каждой из тех позиций, которые указаны в задании 7.21, чтобы добиться своей цели? Какой приз при этом может гарантировать себе выигрывающий игрок?

Геометрия

§8. Неравенство треугольника

Начнем этот параграф с известного утверждения о сравнении в треугольнике длин сторон и величин противолежащих им углов.

Лемма 1. *В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > AB$ тогда и только тогда, когда угол B больше угла C.*

Предположим сначала, что $AC > AB$ и выберем на стороне AC такую точку D, что $AD = AB$ (рис. 22). Угол ADB является внешним углом треугольника BDC, поэтому $\widehat{C} < \widehat{ADB} = \widehat{ABD} < \widehat{B}$. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $\widehat{B} > \widehat{C}$. Предположив противное, т.е. $AC \leqslant AB$ по уже доказанной части утверждения получаем $\widehat{B} \leqslant \widehat{C}$. Последнее противоречит условию $\widehat{B} > \widehat{C}$. Лемма доказана.

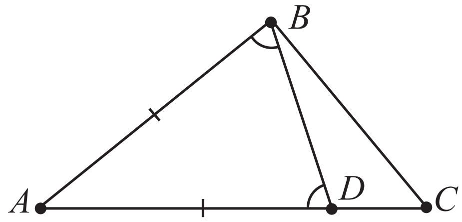


Рис. 22

Теорема 1 (неравенство треугольника). *В любом треугольнике сумма длин двух его сторон всегда больше длины третьей его стороны.*

Будем считать, что $[AC]$ — бо́льшая сторона треугольника и докажем, что $AB + BC > AC$. Снова воспользуемся рис. 22. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} < 90°$. Значит, $\widehat{BDC} > 90°$ и по предыдущей лемме $BC > CD$. Откуда $AB + BC > AD + DC = AC$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если хотя бы одна вершина ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ не лежит на прямой (A_1A_n), то $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

Действительно, если некоторая вершина A_i не лежит на прямой (A_1A_n), то, применяя теорему 1 к треугольнику $A_1A_iA_n$, получим $A_1A_n < A_1A_i + A_iA_n$. Рассматривая теперь две ломаные $A_1 \ldots A_i$ и $A_i \ldots A_n$, содержащие уже меньшее количество звеньев, приходим к неравенствам $A_1A_i \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{i-1}A_i$ и $A_iA_n \leqslant A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \ldots + A_{n-1}A_n$. Таким образом, $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

Следствие 2. Пусть ABC — произвольный треугольник, AC — его наибольшая сторона. Тогда $AB + BC > AC$.

Следствие 3. Точка B лежит между точками A и C тогда и только тогда, когда $AB + BC = AC$.

Следствие 4. Положительные числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$.

Следствие 5. Положительные числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда выполнено двойное неравенство $|a-b|<c<a+b$.

Задачи

Группа А

8.1. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3,8$, $BC = 0,6$. Найти длину стороны AC, если ее длина выражается целым числом.

8.2. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где нужно построить колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшая?

8.3. Доказать, что медиана треугольника меньше полусумм сторон, выходящих из той же вершины, но больше разности полупериметра и длины стороны, к которой проведена эта медиана.

8.4. В некотором поселке четыре дома: столовая, баня, клуб и почта. Расстояние между баней и клубом рано 1000м, между клубом и почтой — 500 м, между баней и столовой — 200 м , между столовой и почтой — 300м. На каком расстоянии находятся баня и почта?

8.5. а) По разные стороны от прямолинейного шоссе расположены две деревни. В каком месте на шоссе надо построить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от деревень до автобусной остановки была наименьшей (шириной шоссе пренебречь)? б) Где нужно построить автобусную остановку, если деревни расположены по одну сторону от шоссе?

8.6. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5?

8.7. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и каждый пошел по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 км/ч, а Пятачок — 4 км/ч. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.

Группа Б

8.8. На сторонах прямого угла с вершиной в точке O выбраны точки A и B. Точка C лежит во внутренней области угла. Докажите, что полупериметр треугольника ABC больше OC.

8.9. Внутри квадрата выбрана произвольная точка. Доказать, что расстояние от этой точки до любой вершины меньше суммы расстояний до трех других вершин.

8.10. Внутри квадрата $ABCD$ найдите все точки X, для которых выполняется равенство $AX + CX = BX + DX$.

8.11. Пусть a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что существуют положительные числа x, y, z такие, что $a = x+y$, $b = y+z$, $c = x + z$.

8.12. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике сумма длин сторон меньше удвоенной суммы длин диагоналей, но больше суммы диагоналей.

8.13. Внутри острого угла выбрана точка C. Построить на сторонах угла точки A и B так, чтобы треугольник ABC имел наименьший периметр.

8.14. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что если периметр треугольника ABD меньше периметра треугольника ACD, то $AB < AC$.

8.15. Докажите, что удвоенный периметр выпуклого пятиугольника больше суммы длин его диагоналей.

8.16. Два поселка расположены по разные стороны от реки с параллельными прямолинейными берегами. В каком месте на реке нужно построить мост, чтобы путь от одного поселка до другого был наименьший?

§9. Вписанные углы, касательные, хорды

Напомним, что угол AOB называется *центральным* углом окружности $\omega(O, r)$. Угол ABC является *вписанным* в окружность ω, когда выполняются два условия: вершина угла принадлежит ω, и каждая из его сторон пересекает окружность еще в одной точке, отличной от вершины B, или касается окружности ω. Часть окружности, заключенная внутри угла называется дугой, на которую опирается этот угол. Для доказательства следующей теоремы потребуется свойство внешнего угла треугольника. Напомним, что угол, смежный с одним из внутренних углов треугольника ABC называется *внешним* углом треугольника. Из того факта, что сумма углов треугольника равна 180°, немедленно следует, что величина внешнего угла равна сумме двух углов этого треугольника, не смежных с ним.

Теорема 1. *Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

Первый случай. Пусть центр окружности, точка O, лежит на стороне вписанного угла ABC (рис. 23). Тогда $\angle AOC$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, поэтому $\widehat{AOC} = \widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 2\widehat{ABC}$.

Второй случай. Пусть теперь точка O лежит внутри угла ABC. Проведем луч $[BO)$ (рис. 24) и воспользуемся предыдущим результатом:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOD} + \widehat{COD} = 2\widehat{ABD} + 2\widehat{DBC} = 2\widehat{ABC}.$$

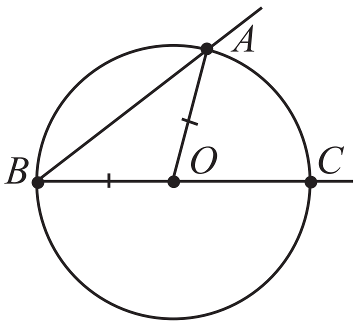


Рис. 23

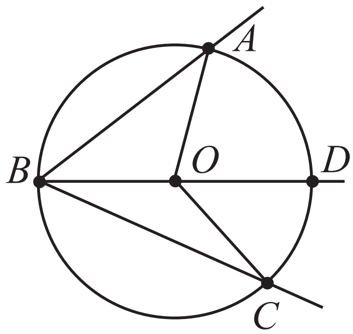


Рис. 24

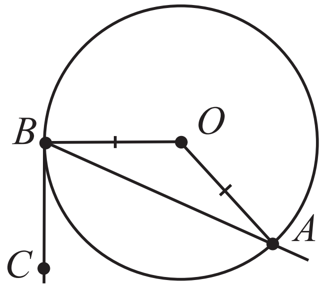


Рис. 25

Третий случай. Точка O находится вне $\angle ABC$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему случаю.

Четвертый случай. Пусть одна из сторон угла касается окружности (рис. 25). Тогда из равенств $\widehat{AOB} = 180^\circ - 2\widehat{OBA}$ и $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{OBA}$ получаем требуемое $\widehat{AOB} = 2\widehat{ABC}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести несколько следствий. Напомним, что величина дуги — это величина центрального угла, опирающегося на эту дугу. Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 1.

Следствие 1. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую опирается этот угол.

Следствие 2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Можно легко усилить предыдущее следствие: если дуги окружности равны между собой, то равны любые вписанные углы, опирающиеся на эти дуги.

Следствие 3. Пусть окружность $\omega(O, r)$ построена на отрезке $[AB]$ как на диаметре (т.е. точка O — это середина отрезка $[AB]$ и $r = AB/2$) и точка C не лежит на прямой (AB). Тогда $C \in \omega \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90°$.

Действительно, если $C \in \omega$, то по предыдущей теореме получаем $\widehat{ACB} = \widehat{AOB}/2 = 90°$. При доказательстве обратного утверждения предположим, что $\widehat{ACB} = 90°$ и $C \notin \omega$. Если точка C лежит вне окружности ω, то по крайней мере один из отрезков $[AC]$ или $[BC]$ пересечет окружность по своей внутренней точке. На рис.26 точка D — внутренняя точка отрезка $[AC]$, лежащая на окружности. Уже доказано, что $\widehat{ADB} = 90°$. Но $\angle ADB$ является внешним углом треугольника BCD, отсюда получаем противоречивое неравенство $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$. Похожим образом получается противоречие и в случае, когда точка C лежит внутри окружности ω. Следствие 3 доказано.

Применение следствия 3 к прямоугольным треугольникам дает нам важное их свойство: *центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы.*

Всякий ли четырехугольник можно вписать в окружность? Ответ на этот вопрос — в следующем утверждении.

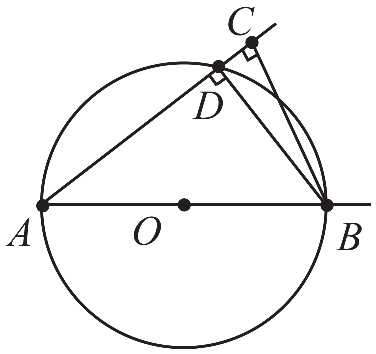


Рис. 26

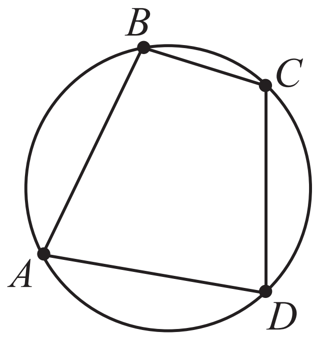


Рис. 27

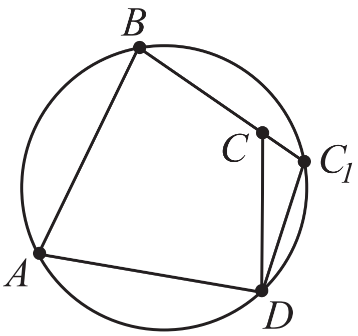


Рис. 28

Следствие 4. Четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в окружность в том и только в том случае, когда сумма его противоположных углов равна $180°$.

Пусть $ABCD$ вписан в окружность (рис. 27). Тогда $\angle BAD$ и $\angle BCD$ опираются на дуги, объединение которых есть окружность, поэтому $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360°/2 = 180°$. Аналогично $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180°$.

Пусть теперь $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$, но четырехугольник $ABCD$ вписанным не является. Опишем окружность ω около $\triangle ABD$ и рассмотрим только случай, когда точка C лежит внутри этой окружности (рис. 28). Если C_1 — точка пересечения луча $[BC)$ с окружностью ω, то из условия и уже доказанной части утверждения получаем $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ = \widehat{BAD} + \widehat{BC_1D}$. Отсюда $\widehat{BCD} = \widehat{BC_1D}$, а это противоречит неравенству $\widehat{BCD} > \widehat{BC_1D}$ (угол BCD — внешний угол $\triangle CDC_1$). Следствие 4 доказано.

Следствие 5. Пусть ω — окружность, описанная около треугольника ABC, а точка D лежит вместе с точкой C по одну сторону от прямой AB. Тогда $D \in \omega$ в том и только в том случае, когда $\angle ACB = \angle ADB$.

Рассмотрим теперь несколько задач, в решении которых используются свойства вписанных углов.

Пример 1. Из точки B, лежащей вне окружности, выходят лучи BA и BC, пересекающие эту окружность. Выразить величину угла ABC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Решение. Обозначим точки так, как это сделано на рис. 29 и выразим величину угла ABC через величины дуг AC и DE (договоримся градусную величину дуги AB обозначать через $\smile AB^\circ$). Проведем отрезок $[AE]$. Тогда $\angle AEC$ — внешний угол $\triangle ABE$, поэтому $\widehat{ABC} = \widehat{AEC} - \widehat{BAE} = (\smile AC^\circ - \smile DE^\circ)/2$.

Пример 2. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

Решение. Продолжим отрезок AO до пересечения с описанной окружностью в точке D (рис. 30). Отрезок AD является диаметром описанной окружности, поэтому $\widehat{ACD} = 90^\circ$. Поскольку углы ADC и ABC опираются на одну дугу, то они между собой равны. Отсюда

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ADC} = \widehat{OAC}.$$

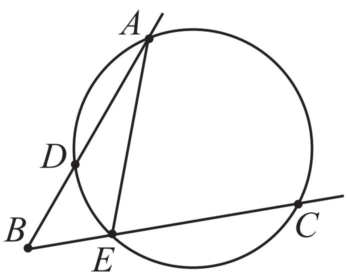


Рис. 29

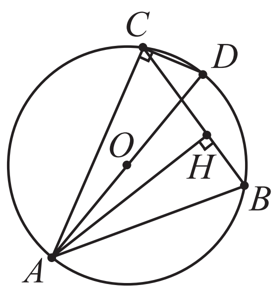


Рис. 30

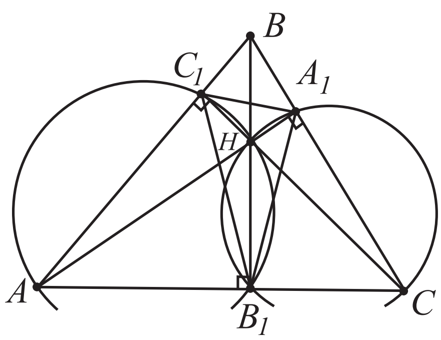


Рис. 31

Пример 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Обозначим точку пересечения высот треугольника ABC через H (рис. 31) и докажем, что $\angle HB_1C_1 = \angle HB_1A_1$. Заметим, что из равенства $\widehat{AB_1H} + \widehat{AC_1H} = 180^\circ$ следует, что четырехугольник AB_1HC_1 можно вписать в окружность. Углы $\angle HB_1C_1$ и $\angle HAC_1$ в этой окружности опираются на одну дугу, поэтому равны между собой. Аналогично доказывается равенство $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$. Осталось проверить, что $\angle HAC_1 = \angle HCA_1$. Но это равенство очевидно следует из подобия прямоугольных треугольников BAA_1 и BCC_1.

Из теоремы 1 можно вывести утверждение о пересекающихся хордах окружности (теорема 2) и теорему о касательной и секущей, проведенных к окружности из некоторой внешней точки (теорема 3).

Теорема 2. *Пусть M — общая точка хорд $[AB]$ и $[CD]$ некоторой окружности ω (рис. 32). Тогда $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что из равенств $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ следует, что треугольники AMD и CMB подобны. А пропорция $AM/MC = MD/MB$ влечет требуемое равенство. Теорема доказана.

Теорема 3. *Из точки A, внешней точки окружности ω, проведены к этой окружности касательная и секущая. Пусть B — точка касания, а C и D — точки пересечения секущей с окружностью (рис.33). Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$.*

Пусть $C \in [AD]$, тогда $\triangle ABC \sim \triangle ABD$. Действительно, кроме общего угла, эти треугольники имеют еще одну пару равных углов: $\angle ADB$ и $\angle ABC$ (эти вписанные углы опираются на одну дугу). Из пропорции $AB/AC = AD/AB$ следует $AB^2 = AC \cdot AD$. Теорема доказана.

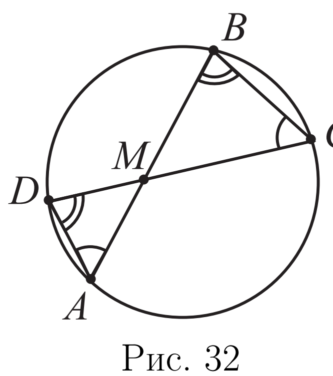


Рис. 32

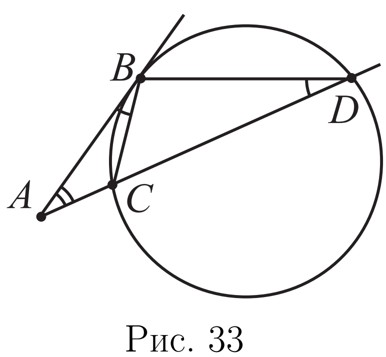


Рис. 33

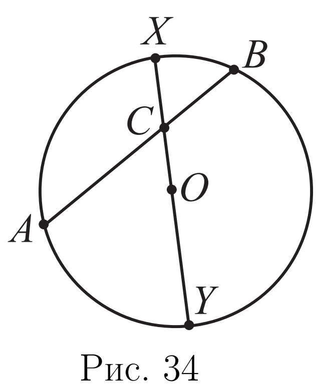


Рис. 34

Пример 4. Центр O данной окружности радиуса R соединен с точкой

C, произвольно взятой на хорде AB. Доказать, что $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$.

Решение. Обозначим через X и Y точки пересечения прямой (OC) с данной окружностью (рис. 34). По теореме 2 имеем $CA \cdot CB = CX \cdot CY = (R - OC)(R + OC) = R^2 - OC^2$. Поэтому $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$.

Следующая простая теорема полезна своими многочисленными приложениями.

Теорема 4. *Из точки A, внешней точки окружности $\omega(O, R)$, проведены касательные (AB) и (AC) к этой окружности (B и C — точки касания). Тогда $AB = AC$.*

Справедливость этой теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOC (у них общая гипотенуза и равные между собой катеты OB и OC).

Теорема 5. *В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны между собой, т.е. $AB + CD = AD + BC$.*

Предположим сначала, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность (рис. 35). Используя равенство отрезков касательных из одной точки к окружности, обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 35. Тогда $AB + CD = x + y + z + t$ и $AD + BC = x + t + y + z$, откуда и следует требуемое равенство $AB + CD = AD + BC$.

Пусть теперь справедливо равенство $AB + CD = AD + BC$. Докажем, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Предположим, что этого сделать нельзя. Тогда существует окружность ω, касающаяся трех сторон этого четырехугольника и не пересекающая четвертую сторону (первый случай) или пересекающая ее в двух точках (второй случай). Доказательство обоих случаев схожи, поэтому мы рассмотрим только первый из них. Пусть ω касается сторон $[AB]$, $[BC]$, AD и не пересекает $[CD]$ (рис. 36). Выберем на лучах $[BC)$ и $[AD)$ точки C_1 и D_1 так, что прямая (C_1D_1) касается окружности ω. Обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 36. Тогда равенство $AB + CD = AD + BC$ принимает вид $a + c = b + d \quad (1)$. Поскольку в четырехугольник ABC_1D_1 вписана окружность, верно $a + c_1 = (b - x) + (d - y) \quad (2)$. Вычитая из (1) равенство (2), получаем $c - c_1 = x + y$ или $c = x + y + c_1$, что противоречит следствию теоремы о неравенстве треугольника. Теорема доказана.

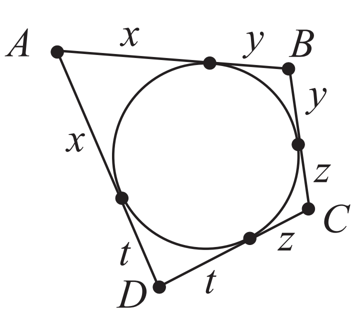


Рис. 35

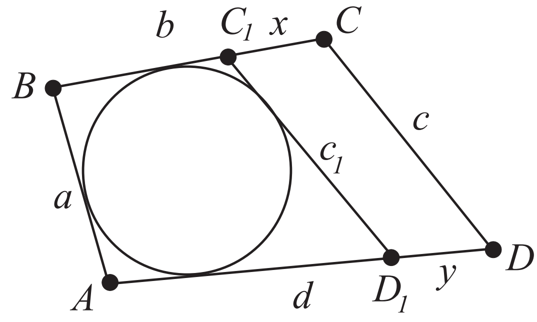


Рис. 36

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используются приведенные выше факты.

Пример 5. В треугольник ABC вписана окружность. Она касается стороны $[AB]$ в точке K. Доказать, что $AK = p - a$, где $a = BC$ и p — полупериметр $\triangle ABC$.

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника так, как это указано на рис. 37. Пусть также $b = AC$ и $c = AB$. Из теоремы 4 сразу следуют равенства $AK = AL$, $BK = BM$ и $CL = CM$. Отсюда $2AK = AK + AL = c - BK + b - CL = c + b - a = (a + b + c) - 2a$. Поэтому $AK = p - a$.

Пример 6. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Точки A, C и D расположены на окружности, касающейся AB и CB (рис. 38). Угол ABC равен $120°$, а высота в треугольнике ACD, опущенная на строну AD, равна 1. Найти длину отрезка CD.

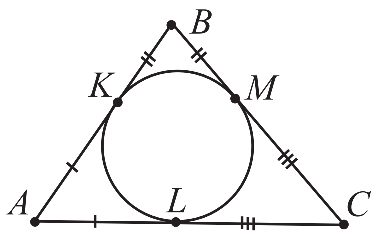


Рис. 37

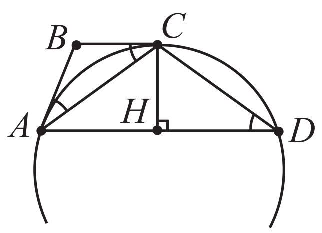


Рис. 38

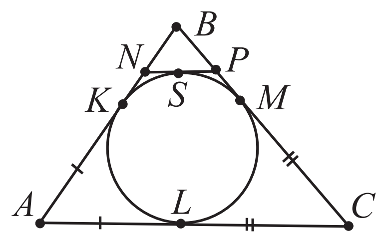


Рис. 39

Решение. Из предыдущей теоремы получаем, что $AB = BC$, а из условия $\widehat{ABC} = 120°$ заключаем, что $\widehat{BCA} = 30°$. Углы BCA и CDA вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\widehat{CDA} = 30°$. И по свойству прямоугольного треугольника с углом $30°$ получаем, что $CD = 2CH = 2$.

Пример 7. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4 см. Найти основание треугольника.

Решение. Обозначим точки так, как это указано на рис. 39 и пусть P_{ABC} и P_{BNP} — периметры $\triangle ABC$ и $\triangle BNP$. Найдем $x = AC$. Заметим, что $BK + BM = P_{ABC} - 2AL - 2CL = 20 - 2x$. Кроме того,

$$P_{BNP} = BN+NS+SP+PB = BN+NK+PM+PB = BK+BM = 20-2x.$$

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle BNP$ получаем

$$\frac{2,4}{x} = \frac{P_{PNB}}{P_{ABC}} = \frac{20-2x}{20}.$$

Отсюда $x^2 - 10x + 24 = 0$ или $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

Задачи

Группа А

9.1. Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Выразить величину угла BAC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричному ему относительно вершины A.

9.2. Из точки P, расположенной внутри острого угла BAC, опущены перпендикуляры PC_1 и PB_1 на прямые AB и AC. Доказать, что $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

9.3. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Доказать, что CO — биссектриса угла ACB.

9.4. Центр вписанной окружности треугольника ABC симметричен центру описанной окружности относительно стороны AB. Найти углы треугольника ABC.

9.5. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Докажите, что если $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$, то $AC = BC$.

9.6. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E; AD – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AE = ED$.

9.7. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность. Прямая l касается этой полуокружности в точке C. Из точек A и B на прямую l опущены перпендикуляры AM и BN. Пусть D — проекция точки C на AB. Доказать, что $CD^2 = AM \cdot BN$.

9.8. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Доказать, что AC параллельна BD.

9.9. Доказать, что биссектрисы углов любого четырехугольника образуют вписанный четырехугольник.

9.10. Через середину C дуги AB проводят две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D, E и хорду AB — в точках F и G. Доказать, что четырехугольник $DEGF$ может быть вписан в окружность.

9.11. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. AB — общая касательная этих окружностей, не проходящая через M (A и B — точки касания). Доказать, что M лежит на окружности с диаметром AB.

9.12. Через точку O проведены три прямые, попарные углы между которыми равны 60^0. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки A на эти прямые, служат вершинами правильного треугольника.

9.13. N диаметров делят окружность на равные дуги. Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки M внутри окружности на эти диаметры, являются вершинами правильного многоугольника.

9.14. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle BAC$ — прямой) двигается по плоскости таким образом, что вершины B и C скользят по сторонам заданного прямого угла. Доказать, что геометрическим местом точек A является некоторый отрезок и найти его длину.

9.15. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. A_1, B_1, C_1, D_1 — середины дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Найти угол между прямыми A_1C_1 и B_1D_1.

9.16. Две окружности касаются в точке A. К ним проведена общая (внешняя) касательная, касающаяся окружностей в точках C и D. Доказать, что $\angle CAD = \pi/2$.

9.17. AB и CD — диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Доказать, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

9.18. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, но не на отрезке AB. Доказать, что длины отрезков касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

9.19. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом (т.е. ни одна из них не лежит внутри другой). Найти длину общей касательной к этим окружностям.

9.20. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы.
а) Доказать, что радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $(a+b-c)/2$.
б) Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $(a+b+c)/2$.

9.21. Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром в точке O (B и C — точки касания). Выбирается произвольная точка X дуги BC. Через X проведена касательная, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Доказать, что периметр треугольника AMN не зависит от выбора точки X.

9.22. Две непересекающиеся окружности вписаны в угол.
а) К этим окружностям проведена общая внутренняя касательная. Обозначим точки пересечения этой касательной со сторонами угла через A_1 и A_2, а точки касания — через B_1 и B_2. Доказать, что $A_1B_1 = A_2B_2$.
б) Через две точки касания окружностей со сторонами угла, лежащие на разных сторонах этого угла и на разных окружностях, проведена прямая. Доказать, что эта прямая высекает на окружностях хорды равной длины.

9.23. На окружности взяты точки A, B, C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что $AC \cdot AD/AM = BC \cdot BD/BM$.

9.24. Две окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 касаются в точке A. Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке A_1 и S_2 в точке A_2. Доказать, что прямая O_1A_1 параллельна прямой O_2A_2.

9.25. Три окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друг друга в трех различных точках. Доказать, что прямые, соединяющие точку касания S_1 и S_2 с двумя другими точками касания, пересекают окружность S_3 в точках, являющихся концами ее диаметра.

9.26. Две касающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найти периметр треугольника OO_1O_2.

Группа Б

9.27. Доказать, что во всяком остроугольном треугольнике точки, симметричные с точкой пересечения высот относительно трех сторон треугольника, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

9.28. Окружность S_1 касается сторон угла ABC в точках A и C. Окружность S_2 касается прямой AC в точке C и проходит через точку B, окружность S_1 она пересекает в точке M. Докажите, что прямая AM делит отрезок BC пополам.

9.29. В треугольнике ABC угол B равен $60°$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OD = OE$.

9.30. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны $40°$: BD – биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.

9.31. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O ее описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

9.32. Через точку M, лежащую внутри окружности S, проведена хорда AB; из точки M опущены перпендикуляры MP и MQ на касательные, проходящие через точки A и B. Докажите, что величина $1/PM + 1/QM$ не зависит от выбора хорды, проходящей через точку M.

9.33. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности еще раз в точках P и Q (P на прямой BM, Q на прямой BN). Доказать, что отрезки MP и NQ равны.

9.34. Доказать, что если через одну из точек пересечения двух окружностей провести диаметр в каждой окружности, то прямая, соединяющая другие концы этих диаметров, пройдет через вторую точку пересечения этих окружностей.

9.35. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Пусть AB — хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T. Доказать, что MT — биссектриса угла AMB.

9.36. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?

9.37. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Доказать, что длина отрезка AK не зависит от выбора точки D.

9.38. Дана окружность и точки P,K вне ее. Через точку P проведена секущая PAB (A, B — точки на окружности) и построена окружность, проходящая через точки K, A, B. Доказать, что все такие окружности походят, кроме K, еще через одну общую точку, не зависящую от выбора секущей PAB.

Список литературы

1. **Агаханов Н.Х. и др.** Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: Заключительные этапы. – МЦНМО, 2010.

2. **Алфутова Н.Б., Устинов А.В.** Алгебра и теория чисел для математических школ. – МЦНМО, 2001.

3. **Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В.** Дискретная математика: Графы, матроиды, алгоритмы. – Лань, 2010.

4. **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасеченко П.И.** Задачи по математике: Уравнения и неравенства. – М.: Наука, 1987.

5. **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасеченко П.И.** Задачи по математике: Алгебра. – М.: Наука, 1987.

6. **Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В.** Ленинградские математические кружки. – Киров: АСА, 1994.

7. **Горбачев Н.В.** Сборник олимпиадных задач по математике. – МЦНМО, 2004.

8. **Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.** Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

9. **Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасеченко П.И.** Нестандартные методы решений уравнений и неравенств. – М.: Наука, 1991.

10. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. Ч. 1. – М.: Наука, 1991.

11. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. Ч. 2. – М.: Наука, 1991.

12. **Расин В.В.** Лекции по алгебре: Натуральные и целые числа. Неравенства. Отображения множеств. Числовые функции. – Екатеринбург: УрГУ, 2000.

13. Сборник задач по алгебре и началам анализа. Составители: **Ануфриенко С.А., Гольдин А.М., Гулика С.В., Кремешкова С.А., Нохрин С.Э., Расин В.В., Смирнова Е.В., Шапиро О.Е.** – Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 2007.

14. Сборник задач по геометрии. Составители: **Ануфриенко С.А., Гольдин А.М., Гулика С.В., Кремешкова С.А., Расин В.В., Смирнова Е.В.** – Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 2008.

Составители: **Д.С. Ананичев, С.А. Ануфриенко, А.Г. Гейн**

Оригинал-макет подготовлен **С.А. Ануфриенко**
с использованием системы TEX.

Подписано в печать 5.06.2014. Формат 60×84 1/16.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Тираж экз.
Издательско-полиграфический центр УрФУ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
rio@mail.ustu.ru