В. В. Расин

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Екатеринбург
2005

Федеральное агенство по образованию
Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

В. В. Расин

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Екатеринбург
2005

УДК 517.13(075.3)
ББК 22.13
Р 241

Подготовлено на кафедре
математики СУНЦ УрГУ

В. В. Расин. Действительные числа. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2005. – 47 с.

Рецензенты: кафедра высшей математики УгТУ-УПИ, канд. физ.-мат. наук, доцент
А. Е. Шнейдер

Учебное пособие посвящено строгому изложению теории действительных чисел. Множество всех действительных чисел вводится как множество всех бесконечных десятичных дробей без девятки в периоде. Определяются операции над действительными числами (сложение, умножение, деление, возведение в степень) и проверяются основные свойства этих операций.

Пособие предназначено для учащихся 10-11 классов, обучающихся в физико-математических классах лицеев и гимназий, а также для учителей математики.

Содержание

Предисловие

В учебном пособии рассматривается построение поля действительных чисел исходя из поля рациональных чисел. Известны способы такого построения, восходящие к Р.Дедекинду, К.Вейерштрассу и Г.Кантору. Мы придерживаемся способа, предложенного К.Вейерштрассом и основанного на применении бесконечных десятичных дробей.

В основе изложения, принятого нами, лежит утверждение о том, что всякое непустое ограниченнон подмножество множества всех бесконечных десятичных дробей имеет точную верхнюю грань. В дальнейшем это утверждение активно применяется для определения операций на указанном множестве и для доказательства основных свойств этих операций.

1. Конечные десятичные дроби

Напомним, что конечная десятичная дробь – это рациональное число вида $p \cdot 10^{-k}$, где $p, k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$. Хорошо известно, что всякую конечную десятичную дробь $r = p \cdot 10^{-k}$ можно записать в следующем виде

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k},$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ – целые числа, причем $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, если $1 \leqslant i \leqslant k$. Заметим, что a_0 – целая часть числа r.

Обычно для обозначения конечной десятичной дроби r используют более короткую запись: $r = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k$.

Отметим, что знак числа относится к целой его части. Например, отрицательное число $-0,7$ мы записываем в виде $\overline{1},3$ (черточка над 1 означает, что целая часть этого числа отрицательна).

Множество всех конечных десятичных дробей будем обозначать через F. Для каждого $k \geqslant 0$ рассмотрим следующее подмножество в F:

$$F_k = \{d_0, d_1 d_2 \ldots d_{i-1} d_i \,|\, i \leqslant k\}.$$

Это множество состоит из конечных десятичных дробей, имеющих после десятичной запятой не более чем k разрядов. Заметим, что F_0 совпадает с множеством $\mathbb{Z}$.

Предложение 1. *При любом $k \geqslant 0$ непустое ограниченное сверху множество $X \subset F_k$ имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Покажем сначала, что указанным свойством обладает непустое ограниченное сверху подмножество X из $F_0 = \mathbb{Z}$. Проверку этого утверждения удобно разбить на два случая.

1. $X \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. В этом случае множество всех верхних граней X в $\mathbb{Z}$ состоит из натуральных чисел и потому имеет наимень-

ший элемент m. Ясно, что $m \in X$; значит, m – наибольший элемент множества X.

2. $X \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Если $0 \in X$, то 0 является наибольшим элементом в X. Пусть $0 \notin X$. Рассмотрим множество

$$Y = \{-x \,|\, x \in X\}.$$

Тогда $Y \subseteq \mathbb{N}$, поэтому Y имеет наименьший элемент m. Ясно, что $-m$ является наибольшим элементом X.

Пусть теперь X – непустое ограниченное сверху подмножество X из F_k при $k \geqslant 1$. Рассмотрим множество

$$Y = \{y \,|\, y = 10^k \cdot x \ \text{ для некоторого } \ x \in X\}.$$

Ясно, что Y – непустое ограниченное сверху множество целых чисел. Выше было доказано, что Y имеет наибольший элемент m. Тогда $m/10^k$ – наибольший элемент множества X.

Заметим, что множество F свойством, сформулированным в предложении 1, не обладает. В самом деле, рассмотрим следующее множество конечных десятичных дробей:

$$C = \{0,\underbrace{11\ldots1}_{k} \,|\, k \geqslant 1\}.$$

Нетрудно видеть, что любой элемент множества C меньше, чем $0,2$, т. е. C ограничено сверху. Попробуйте доказать самостоятельно, что это множество не имеет наибольшего элемента.

2. Представление рациональных чисел бесконечными десятичными периодическими дробями

Пусть $r = p/q$ – произвольное рациональное число. Записывая рациональное число в виде обыкновенной дроби, мы всегда будем предполагать, что знак числа отнесен к числителю, т. е. $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

В этом пункте будет показано, что каждому рациональному числу $r = p/q$ можно естественным образом сопоставить бесконечную десятичную периодическую дробь

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \ldots$$

таким образом, что

$$\frac{p}{q} = \sup\{a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Удобно считать, что дробь p/q несократима; это значит, что ее числитель и знаменатель взаимно просты.

Для каждого $k \geq 0$ обозначим через u_k целую часть числа $10^k \cdot r$; иными словами, $u_k = [10^k \cdot r]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $10^k \cdot r$.

Рассмотрим бесконечную последовательность $(a_k | k \geq 0)$, где

$$a_0 = u_0, \qquad a_k = u_k - 10u_{k-1}, k \geqslant 1,$$

и установим некоторые свойства этой последовательности.

Лемма 1. *При любом* $k \geqslant 1$ *выполнено двойное неравенство* $0 \leqslant a_k \leqslant 9$.

Доказательство. Используя определение целой части, имеем

$$u_{k-1} \leqslant 10^{k-1} r < u_{k-1} + 1,$$

откуда после умножения на 10 получаем двойное неравенство

$$10u_{k-1} \leqslant 10^k r < 10u_{k-1} + 10. \tag{1}$$

Учитывая, что u_k – наибольшее целое число, не превосходящее $10^k r$, а $u_k + 1$ – наименьшее целое число, большее чем $10^k r$, из двойного неравенства (1) получаем $10u_{k-1} \leqslant u_k$ и $u_k + 1 \leqslant \leqslant 10u_{k-1} + 10$. Отсюда $0 \leqslant u_k - 10u_{k-1} \leqslant 9$.

Лемма 2. *При любом $k \geqslant 1$ выполнено равенство*

$$u_k = 10^k a_0 + 10^{k-1} a_1 + 10^{k-2} a_2 + \ldots + 10 a_{k-1} + a_k.$$

Для доказательства этой леммы нужно в правую часть равенства подставить выражения $a_0 = u_0$, $a_1 = u_1 - 10u_0$, $\ldots$, $a_k = u_k - 10u_{k-1}$, а затем раскрыть скобки и привести подобные.

С учетом неравенств, установленных в лемме 1 число

$$10^{k-1} a_1 + 10^{k-2} a_2 + \ldots + 10 a_{k-1}$$

можно записать в виде $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k}$ (так обычно обозначают число, цифрами которого являются $a_1, \ldots, a_k$; заметим, что в данном случае одна или несколько старших цифр могут быть равны нулю). Итак, для любого $k \geqslant 0$

$$u_k = 10^k a_0 + \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}. \tag{2}$$

Из леммы 2 легко получается следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любых $k \geq 0$ и $n \geq 1$ выполнено равенство*

$$u_{k+n} - 10^n u_k = 10^{n-1} a_{k+1} + 10^{n-2} a_{k+2} + \ldots + 10 a_{k+n-1} + a_{k+n}.$$

Лемма 4. *Существуют такие натуральные числа m и n, что для любого $l > m$ выполнено равенство $a_{l+n} = a_l$.*

Доказательство. Предположим сначала, что рациональное число $r = p/q$ можно представить в виде конечной десятичной дроби $a_0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k$. Легко понять, что эта возможность реализуется, когда q можно записать в виде $2^i \cdot 5^j$ ($i, j \geqslant 0$). Пусть $l \geqslant k$. Тогда $u_l = 10^l \cdot r$ является целым числом. Отсюда следует, что при $l \geqslant k$ выполнены равенства

$$a_{l+1} = u_{l+1} - 10 \cdot u_l = 10^{l+1} \cdot r - 10 \cdot 10^l \cdot r = 0.$$

Стало быть, числу r ставится в соответствие бесконечная десятичная периодическая дробь, периодом которой является число 0.

Пусть теперь q имеет простой делитель, отличный от 2 и от 5. Рассмотрим остатки от деления чисел вида $10^l \cdot p$ на число q. Поскольку такие остатки образуют конечное множество, найдутся различные l_1, l_2, для которых $10^{l_1} \cdot p$, $10^{l_2} \cdot p$ имеют одинаковые остатки при делении на q; это означает, что разность чисел $10^{l_1} \cdot p - 10^{l_2} \cdot p$ делится на q. Пусть m, n – такие наименьшие числа, что разность

$$10^{m+n} \cdot p - 10^m \cdot p = 10^m \cdot (10^n - 1)p$$

делится на q. Нетрудно видеть, что при любом $l \geqslant m$ разность

$$10^{l+n} \cdot p - 10^l \cdot p = 10^l \cdot (10^n - 1)p \tag{3}$$

также делится на q. Пусть $k \geqslant m$. Тогда

$$u_{k+n} \leqslant \frac{10^{k+n} \cdot p}{q} < u_{k+n} + 1; \tag{4}$$

$$u_k + 1 > \frac{10^k \cdot p}{q} \geqslant u_k. \tag{5}$$

Вычитая из двойного неравенства (4) двойное неравенство (5), получим

$$u_{k+n} - u_k - 1 < \frac{10^k (10^n - 1)p}{q} < u_{k+n} - u_k + 1. \tag{6}$$

Поскольку $10^k(10^n - 1)p/q$ – целое число, из двойного неравенства (6) вытекает, что

$$u_{k+n} - u_k = \frac{10^k (10^n - 1)p}{q}. \tag{7}$$

Аналогично

$$u_{k+n+1} - u_{k+1} = \frac{10^{k+1}(10^n - 1)p}{q}. \qquad (8)$$

Из (7), (8) следует

$$u_{k+n+1} - u_{k+1} = 10 \cdot (u_{k+n} - u_k),$$

или, после очевидных преобразований,

$$u_{k+n+1} - 10 \cdot u_{k+n} = u_{k+1} - 10 \cdot u_k.$$

Положив $l = k + 1$, имеем $a_{l+n} = a_{k+n+1} = u_{k+n+1} - 10 \cdot u_{k+n}$, $a_l = a_{k+1} = u_{k+1} - 10 \cdot u_k$. Следовательно, для любого $l > m$ выполнено равенство $a_l = a_{l+n}$.

Последовательность (a_k), обладающую свойством, указанным в лемме 4, называют периодической с периодом n.

Определение. Число $r^{(k)} = 10^{-k} \cdot u_k$, $k \geqslant 0$ называется приближением к рациональному числу $r = p/q$ по недостатку с точностью 10^{-k}.

Поскольку $u_k \leqslant 10^k \cdot r < u_k + 1$, имеем

$$r^{(k)} \leqslant r < r^{(k)} + 10^{-k}. \qquad (9)$$

Определение. Число $r^{(k)} + 10^{-k}$, $k \geqslant 0$ называется приближением к рациональному числу $r = p/q$ по избытку с точностью 10^{-k}.

При доказательстве леммы 1 было установлено, что при $k \geqslant 1$ выполнены следующие неравенства

$$10u_{k-1} \leqslant u_k \leqslant 10^k r < u_k + 1 \leqslant 10u_{k-1} + 10,$$

откуда вытекают неравенства

$$r^{(k-1)} \leqslant r^{(k)} \leqslant r < r^{(k)} + 10^{-k} \leqslant r^{(k-1)} + 10^{-(k-1)}. \qquad (10)$$

Неравенства (10) означают, что последовательность приближений по недостатку является неубывающей, а последовательность приближений по избытку – невозрастающей. Заметим, что из леммы 1 вытекает равенство

$$r^{(k)} = a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k. \tag{11}$$

Из вышеизложенного вытекает, что рациональное число r однозначно определяет последовательность $(r^k | k \geqslant 0)$ своих приближений по недостатку. Верно и обратное: каждое рациональное число однозначно определяется последовательностью приближений по недостатку. Это вытекает их следующего утверждения.

Лемма 5. *Пусть r – произвольное рациональное число. Если $(r^k | k \geqslant 0)$ – последовательность его приближений по недостатку, то выполнено равенство*

$$r = \sup\{r^{(k)} \,|\, k \geqslant 0\}.$$

Доказательство. Из неравенств (9) вытекает, что число r является верхней гранью множества $\{r^{(k)} \,|\, k \geqslant 0\}$. Проверим, что r – наименьшая из верхних граней. Если $s < r$, то найдется такое j, что $r - s > 10^{-j}$, т. е. $r > s + 10^{-j}$. Поскольку $r^{(j)} + 10^{-j} > r$, имеем $r^{(j)} > s$.

Используя (11) и лемму 5, получаем

$$r = \sup\{a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \,|\, k \geqslant 0\}. \tag{12}$$

Итак, каждому рациональному числу $r = p/q$ мы сопоставили бесконечную периодическую дробь $a_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots$ таким образом, что выполнено равенство (12). Если m, n – наименьшие натуральные числа со свойством: $a_{l+n} = a_l$ при $l > m$, то такую бесконечную периодическую дробь будем обозначать как $a_0, a_1 \dots a_m(a_{m+1} \dots a_{m+n})$. Упорядоченный набор цифр $(a_{m+1}, \ldots, a_{m+n})$ будет называться периодом данной бесконечной периодической дроби.

Например, рациональным числам $1/7$ и $5/12$ сопоставляются бесконечные периодические дроби $0,(142857)$ и $0,41(6)$ соответственно.

Возникает вопрос: какими могут быть периоды бесконечных десятичных дробей, сопоставленных рациональным числам? Чтобы ответить на этот вопрос, сначала докажем, что 9 не может быть периодом никакой такой дроби. Рассуждая "от противного предположим, что нашлось такое рациональное число $r = p/q$, что сопоставленная ему бесконечная десятичная дробь имеет 9 в качестве периода. Тогда существует наименьшее натуральное число m со свойством $a_i = 9$, если $i \geqslant m$. Легко видеть, что

$$r^{(i)} + 10^{-i} = r^{(m-1)} + 10^{-(m-1)} \tag{13}$$

при $i \geqslant m - 1$. Иными словами, все приближения по избытку с точностью 10^{-i} при $i \geqslant m - 1$ совпадают. Выберем $k \geqslant m$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$10^{-k} < r^{(m-1)} + 10^{-(m-1)} - r.$$

Тогда

$$r^{(k)} + 10^{-k} \leqslant r + 10^{-k} < r^{(m-1)} + 10^{-(m-1)},$$

что противоречит равенству (13).

Теперь проверим, что любая бесконечная десятичная периодическая дробь

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m (a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+n}),$$

не содержащая 9 в периоде, сопоставляется некоторому рациональному числу r. Условие, что эта дробь не содержит 9 в периоде, означает, что среди цифр a_{m+1}, a_{m+2}, $\ldots a_{m+n}$ хотя бы одна цифра отлична от 9.

Пусть $M = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m}$, $N = \overline{a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+n}}$. Рассмотрим рациональное число

$$r = a_0 + \frac{M}{10^m} + \frac{N}{10^m \cdot (10^n - 1)}. \tag{14}$$

Можно проверить (мы опустим соответствующие вычисления), что для любого $k \geqslant 0$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} u_{m+kn} &= [10^{m+kn} \cdot r] = a_0 \cdot 10^{m+kn} + M \cdot 10^{kn} + \\ &+ N \cdot (10^{(k-1)n} + 10^{(k-2)n} + \ldots 10^n + 1), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u_{m+(k+1)n} &= [10^{m+(k+1)n} \cdot r] = a_0 \cdot 10^{m+(k+1)n} + M \cdot 10^{(k+1)n} + \\ &+ N \cdot (10^{kn} + 10^{(k-1)n} + \ldots 10^n + 1). \end{aligned} \tag{16}$$

Из равенств (15) и (16) получаем

$$u_{m+(k+1)n} - 10^n \cdot u_{m+kn} = N. \tag{17}$$

С учетом леммы 3 равенство (17) означает, что бесконечная десятичная периодическая дробь, соответствующая указанному в равенстве (14) числу r, имеет своим периодом число $N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}$.

3. Определение действительного числа

В предыдущем пункте было установлено биективное отображение множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел на множество всех бесконечных периодических дробей, не имеющих числа 9 в периоде.

Рассмотрим множество всех бесконечных десятичных дробей (в том числе и непериодических). Исключая из этого множества все бесконечные десятичные периодические дроби, имеющие девятку в периоде, мы получим множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. Учитывая результаты предыдущего пункта, рациональные числа можно отождествить с бесконечными десятичными периодическими дробями; в частности, конечные десятичные дроби могут быть отождествлены с бесконечными дробями, имеющими ноль в периоде.

Две бесконечные десятичные дроби будем считать *равными*, если у них все соответствующие десятичные разряды совпадают.

Определим на множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел отношение порядка.

Пусть c, d – различные действительные числа. Существует такое целое неотрицательное число k, что $c_k \neq d_k$ и $c_i = d_i$ при $i < k$. Положим $c < d$, если $c_k < d_k$. Как обычно, тот факт, что $c < d$ или $c = d$ будем обозначать $c \leqslant d$.

Лемма 1. *Отношение $\leqslant$ является на множестве $\mathbb{R}$ является отношением линейного порядка.*

Доказательство. Необходимо убедиться в том, что отношение $\leqslant$ рефлексивно, антисимметрично, транзитивно и линейно.

Поскольку для любого $a \in \mathbb{R}$ неравенство $a \leqslant a$ очевидно выполнено, данное отношение рефлексивно.

Линейность этого отношения вытекает непсредственно из его определения, а антисимметричность является простым следствием линейности.

Проверим, что отношение $\leqslant$ транзитивно. Пусть $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$. Легко проверить, что если среди чисел a, b, c по крайней мере два равных, то $a \leqslant c$. Пусть $a < b$ и $b < c$. Тогда существуют такие числа k и l, что $a_k < b_k$, $b_l < c_l$ и при всех $i < k$, $j < l$ выполнены равенства $a_i = b_i$ и $b_j = c_j$. Без ограничения общности можно считать, что $k \leqslant l$. Если $k = l$, то требуемое неравенство очевидно. Пусть $k < l$. Тогда $a_k < b_k$, $b_k = c_k$ и при любом $i < k$ имеет место равенство $a_i = b_i = c_i$. Отсюда немедленно вытекает, что $a < c$.

Определение. Число a называется положительным (отрицательным), если $a > 0$ (соответственно $a < 0$) .

Множество всех положительных (отрицательных) действительных чисел будет обозначаться как $\mathbb{R}^+$ (соответственно $\mathbb{R}^-$).

Определение. Пусть $d = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n \ldots$ – произвольное действительное число. Конечная десятичная дробь $d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n$ называется *приближением числа d по недостатку с точностью* 10^{-n}.

Такое приближение будет обозначаться через $d^{(n)}$.

Лемма 2. *Пусть c, d – произвольные действительные числа. Тогда*

1) *если $c < d$, то существует такое m, что $c^{(m-1)} = d^{(m-1)}$ и $c^{(m)} < d^{(m)}$;*

2) *если $c \leqslant d$, то $c^{(k)} \leqslant d^{(k)}$ для любого $k \geqslant 0$;*

3) *если $c^{(k)} < d^{(k)}$ для некоторого k, то $c < d^{(k)}$ и $c^{(k)} < d$.*

Лемма 2 является простым следствием определения порядка на множестве $\mathbb{R}$ и определения приближения по недостатку. Доказательство этой леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 3. *Если d – действительное число, то*

$$d^{(k)} \leqslant d < d^{(k)} + 10^{-k}$$

для любого целого неотрицательного числа k.

Доказательство. Неравенство $d^{(k)} \leqslant d$ очевидно. Проверим неравенство $d < d^{(k)} + 10^{-k}$. Пусть $c = d^{(k)} + 10^{-k}$. Тогда $d^{(k)} < c^{(k)} = c$. В силу пункта 3 леммы 2 получаем $d < c$.

Лемма 4. *Если d – действительное число, k, n – неотрицательные целые числа и $k < n$, то $d^{(n)} + 10^{-n} \leqslant d^{(k)} + 10^{-k}$.*

Доказательство. Пусть $x = d^{(k)}$, $y = d^{(n)}$. Поскольку

$$y \cdot 10^n = d_0 \cdot 10^n + \overline{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n},$$

$$x \cdot 10^n = d_0 \cdot 10^n + \overline{d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k} \cdot 10^{n-k},$$

имеем

$$\begin{aligned} y \cdot 10^n - x \cdot 10^n &= \overline{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n} - \overline{d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k} \cdot 10^{n-k} \\ &= \overline{d_{k+1} d_{k+2} \ldots d_{n-1} d_n} < 10^{n-k} \end{aligned}$$

(последнее неравенство выполнено, так как натуральное число $\overline{d_{k+1} d_{k+2} \ldots d_{n-1} d_n}$ имеет $n-k$ цифр). Следовательно,

$$(y-x)10^n \leqslant 10^{(n-k)} - 1,$$

откуда $y - x \leqslant 10^{-k} - 10^{-n}$, или $y + 10^{-n} \leqslant x + 10^{-k}$.

Из лемм 3 и 4 следует, что для любого $d \in \mathbb{R}$ выполнена цепочка неравенств,

$$d^{(k)} \leqslant d^{(n)} \leqslant d < d^{(n)} + 10^{-n} \leqslant d^{(k)} + 10^{-k}, \qquad (18)$$

если $n \geqslant k$.

Лемма 5. *Если $c < d$, то существует такое натуральное m, что $c^{(m)} + 10^{-m} < d^{(m)}$.*

Доказательство. Поскольку $c < d$, существует такое $k \geqslant 0$, что $c^{(k)} < d^{(k)}$. Если $c^{(k)} + 10^{-k} < d^{(k)}$, то положим $m = k$.

Пусть $c^{(k)} + 10^{-k} = d^{(k)}$. Из леммы 4 следует, что для любого $p > 0$ выполнено неравенство

$$c^{(k+p)} + 10^{-(k+p)} \leqslant c^{(k)} + 10^{-k}. \qquad (19)$$

Проверим теперь, что при некотором значении p последнее неравенство является строгим. Рассуждая "от противного", предположим, что при любом p имеет место равенство

$$c^{(k+p)} + 10^{-(k+p)} = c^{(k)} + 10^{-k}.$$

Отсюда

$$10^{k+p} c^{(k+p)} - 10^{k+p} c^k = 10^p - 1.$$

Поскольку $c = c_0, c_1c_2 \ldots c_{n-1}c_n \ldots$, имеем

$$10^p - 1 = \overline{c_{k+1}c_{k+2} \ldots c_{k+p}}.$$

Но $10^p - 1$ – число, состоящее из p девяток. Поэтому $c_{k+1} = \ldots = c_{k+p} = 9$. Так как в полученных соотношениях p – любое натуральное число, то бесконечная десятичная дробь c имеет в периоде цифру 9, что невозможно. Таким образом, в (19) при некотором p имеет место строгое неравенство. Стало быть, в этом случае $m = k + p$.

Лемма 6. *Пусть $c, s \in \mathbb{R}$, s – положительная конечная десятичная дробь и существует последовательность (x_n), состоящая из конечных десятичных дробей и такая, что*

$$x_n \leqslant c \leqslant x_n + s \cdot 10^{-n}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $c = \sup\{x_n \,|\, n \geqslant 0\}$.

Доказательство. Ясно, что c – верхняя грань множества $X = \{x_n \,|\, n \geqslant 0\}$. Проверим, что c – наименьшая из верхних граней множества X. Пусть $y < c$. В силу леммы 5 найдется конечная десятичная дробь r (одно из приближений с избытком для y), удовлетворяющая неравенствам $y < r < c$. Тогда для некоторого натурального m выполнено неравенство $r + 10^{-m} \leqslant c$. Найдем такое k, что $s < 10^k$, Тогда неравенство

$$r + 10^{-m} < x_n + 10^{k-n}$$

выполнено при всех n. Подставив в это неравенство $n = k + m$, получим $r < x_{k+m}$. Тем самым доказано, что c – точная верхняя грань множества $X = \{x_n \,|\, n \geqslant 0\}$.

Из леммы 6 немедленно вытекает следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть $c, d, s \in \mathbb{R}$, s – положительная конечная десятичная дробь и существует последовательность (x_n), состоящая из конечных десятичных дробей, и такая, что*

$$x_n \leqslant c, d \leqslant x_n + s \cdot 10^{-n}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $c = d$.

Пусть d – произвольное действительное число. Рассмотрим множество

$$A_d = \{d^{(k)} \mid k \geqslant 0\}.$$

Предложение 2. *Для любого действительного числа d выполнено равенство $d = \sup A_d$.*

Доказательство. Ясно, что d – верхняя грань множества A_d. Проверим, что d – точная верхняя грань этого множества. Пусть $x < d$. Из определения порядка на множестве $\mathbb{R}$ следует существование такого k, что $x^{(k)} < d^{(k)}$. В силу леммы 2 из неравенства $x^{(k)} < d^{(k)}$ следует неравенство $x < d^{(k)}$. Но $d^{(k)} \in A_d$, стало быть в A_d найден элемент больший, чем x. Таким образом, $d = \sup A_d$.

Пусть $(d_0, d_1, \, \ldots \, d_n \, \ldots)$ – бесконечная последовательночть чисел, причем $d_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant d_i \leqslant 9$ при $i \geqslant 1$. Обозначим через A множество $\{d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-1} d_k \mid k \geqslant 0\}$.

Предложение 3. *Множество A имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Возможны два случая.

Случай 1. Существует такое $k \geqslant 1$, что $d_i = 9$ при $i \geqslant k$ и $d_{k-1} \neq 9$. Пусть $a = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1} + 10^{-(k-1)}$. Проверим, что $a = \sup A$. Для этого достаточно установить два следующих свойства числа a:

(i) a – верхняя грань множества A;

(ii) для любого $x < a$ существует такой элемент $y \in A$, что $x < y$.

Проверим выполнение свойства (i). Пусть t – произвольный элемент из A, т. е.

$$t = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{s-1} d_s.$$

Если $s \leqslant k - 1$, то $t \leqslant d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$ и неравенство $t < a$ очевидно. Если же $s \geqslant k$, то требуемое неравенство из (18), поскольку любое приближение по недостатку строго меньше любого приближения по избытку.

Приступим к проверке свойства (ii). Рассмотрим произвольное действительное число x, меньшее, чем a. Если $x^{(k-1)} < d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$, то $x < d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$. Тогда полагая $y = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$, получим $y \in A$ и $x < y$. Пусть теперь $x^{(k-1)} = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$. Напомним, что $d_i = 9$, если $i \geqslant k$. Так как $x \in \mathbb{R}$, то x не содержит цифру 9 в периоде. Отсюда и из равенства $x^{(k-1)} = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{k-2} d_{k-1}$ следует, что найдется $l \geqslant k$, для которого

$$x^{(l-1)} = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{l-2} d_{l-1}, \quad x^{(l)} < d_0, d_1 d_2 \ldots d_{l-1} d_l.$$

Тогда $x < d_0, d_1 d_2 \ldots d_{l-1} d_l$. Поэтому в качестве y можно взять число $d_0, d_1 d_2 \ldots d_{l-1} d_l$.

Случай 2. Для любого $k \geqslant 1$ найдется такое $l > k$, что $d_l < 9$. Тогда бесконечная десятичная дробь

$$d = d_0, d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n \ldots$$

не содержит цифры 9 в периоде и потому принадлежит множеству $\mathbb{R}$. Стало быть, в этом случае $A = A_d$ (см. определение множества A_d на с. 17) и потому применимо предложение 2. Отсюда $a = d$.

Теорема 1. *Всякое непустое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть X – непустое ограниченное сверху множество действительных чисел. Для каждого целого неотрицательного числа k введем в рассмотрение множество

$$X_k = \{y \mid y = x^{(l)} \text{ для некоторого } x \in X, l \leqslant k\}.$$

Ясно, что для каждого $k \geqslant 0$ множество X_k непусто, ограничено сверху и $X_k \subset F_k$ (определение множества F_k см. на с. 4). В силу предложения 1 каждое из этих множеств имеет наибольший элемент $\max X_k$. Ясно, что существует такой элемент $d_k \in X$, что $\max X_k = d_k^{(k)}$. Убедимся в том, что при любом $k \geqslant 0$ выполнено равенство

$$d_{k+1}^{(k)} = d_k^{(k)}. \tag{20}$$

В самом деле, поскольку $d_{k+1}^{(k)}, d_k^{(k)} \in X_k$ и $d_k^{(k)}$ – наибольший элемент X_k, имеем $d_{k+1}^{(k)} \leqslant d_k^{(k)} \in X_k$. Если

$$d_{k+1}^{(k)} < d_k^{(k)}, \tag{21}$$

то в силу п. 3 леммы 2 получаем, что $d_{k+1} < d_k^{(k)}$, откуда $d_{k+1}^{(k+1)} < d_k^{(k)}$. С другой стороны, имеет место включение $X_k \subseteq$ $\subseteq X_{k+1}$, поэтому $d_k^{(k)} \leqslant d_{k+1}^{(k+1)}$. Полученное противоречие доказывает равенство (20).

Выполнение равенства (20) означает, что $d_{k+1}^{(k+1)}$ получается из $d_k^{(k)}$ приписыванием цифры в последний разряд. Поэтому к множеству $A = \{d_k^{(k)} \mid k \geqslant 0\}$ применимо предложение 3; следовательно, существует $a = \sup A$.

Проверим, что

$$a = \sup X.$$

Сначала убедимся, что a – верхняя грань множества X. Пусть x – произвольный элемент множества X. Если $x = a$, то доказывать нечего. Пусть $x \neq a$. Обозначим через k наименьшее целое неотрицательное число со свойством: $x^{(k)} \neq a^{(k)}$. Тогда $x^{(k)} \in X_k$ и потому

$$x^{(k)} \leqslant d_k^{(k)} = \max X_k.$$

Рассмотрим два случая.

1. $x^{(k)} < d_k^{(k)}$. Тогда в силу п. 3 леммы 2 имеем $x < d_k^{(k)}$. Поскольку $d_k^{(k)} \leqslant a$, получаем, что $x < a$.

2. $x^{(k)} = d_k^{(k)}$. Так как $x^{(k)} \neq a^{(k)}$ и $d_k^{(k)} \leqslant a$, имеем $d_k^{(k)} < a^{(k)}$. Следовательно, $x^{(k)} < a^{(k)}$ и потому $x < a$.

Таким образом, a – верхняя грань множества X.

Осталось проверить, что a – наименьшая из верхних граней множества X. Пусть $y < a$. Поскольку a – точная верхняя грань множества A, найдется такое целое неотрицательное число k, для которого $y < d_k^{(k)}$. Отсюда следует, что $y < d_k$, причем $d_k \in X$. Тем самым проверено, что a – наименьшая из верхних граней множества X.

4. Сложение действительных чисел

Пусть d – произвольное действительное число. Свяжем с числом d множество

$$L_d = \{x \,|\, x \leqslant d \text{ и } x \text{ – конечная десятичная дробь } \}.$$

Легко проверить, что $d = \sup L_d$.

Пусть c, d – произвольные действительные числа. Рассмотрим множество

$$L_c + L_d = \{x + y \,|\, x \in L_c, y \in L_d\}.$$

Ясно, что множество $L_c + L_d$ ограничено сверху.

Определение. Число s называется суммой чисел c, d, если $s = \sup(L_c + L_d)$.

Лемма 1. *Если $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, то $a + c \leqslant b + d$.*

Доказательство. Так как $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, то $L_a \subseteq L_b$, $L_c \subseteq L_d$. Поэтому $L_a + L_b \subseteq L_c + L_d$.

Для произвольных числовых множеств X и Y обозначим через $X + Y$ множество $\{x + y \,|\, x \in X, y \in Y\}$.

Предложение 4. *Пусть X, Y – непустые ограниченные сверху множества. Тогда $X + Y$ ограничено сверху и*

$$\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c = \sup X$, $d = \sup Y$. Из леммы 1 вытекает, что $c + d$ – верхняя грань множества $X + Y$. Проверим, что $c + d$ является точной верхней гранью этого множества. Пусть $z < c + d$. Так как $c + d = \sup(L_c + L_d)$, существуют конечные десятичные дроби $r_1 \leqslant c$, $r_2 \leqslant d$, для которых $z < r_1 + r_2$. Из свойств приближений по избытку следует, что найдется такое k, что $z < z^{(k)} + 10^{-k} < r_1 + r_2$. Поскольку $z^{(k)} + 10^{-k}$, $r_1 + r_2$ – конечные десятичные дроби, можно найти такое $m \geqslant k$, что $z^{(k)} + 10^{-k} + 2 \cdot 10^{-m} < r_1 + r_2$. Полагая $r_1' = r_1 - 10^{-m}$, $r_2' = r_2 - 10^{-m}$, получим $z < z^{(k)} + 10^{-k} < r_1' + r_2'$. Поскольку $r_1' < c$, $r_2' < d$, существуют такие $x \in X$, $y \in Y$, что $r_1' < x$, $r_2' < y$. Таким образом, $z < x + y$.

Следующие утверждения (леммы 2 – 4) показывают, что сложение действительных чисел обладает привычными свойствами.

Лемма 2. *Если a, b, c – произвольные действительные числа, то выполнены равенства $a + b = b + a$ и $(a + b) + c = = a + (b + c)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 4, имеем

$$a + b = \sup(L_a + L_b) = \sup(L_b + L_a) = b + a;$$

$$(a + b) + c = \sup L_{a+b} + \sup L_c = \sup(L_a + L_b) + \sup L_c = \\ = \sup((L_a + L_b) + L_c)).$$

Аналогично

$$a + (b + c) = \sup L_a + \sup L_{b+c} = \sup L_a + \sup(L_b + L_c) = \\ = \sup(L_a + (L_b + L_c)).$$

Поскольку $(L_a + L_b) + L_c = L_a + (L_b + L_c)$, получаем требуемое равенство.

Лемма 3. *Для произвольного действительного числа a выполнено равенство $a + 0 = a$.*

Доказательство. Пусть $x_n = a^{(n)} - 10^{-n}$. Из неравенств

$$a^{(n)} \leqslant a < a^{(n)} + 10^{-n}, \quad -10^{-n} < 0 < 10^{-n}$$

немедленно вытекают неравенства

$$x_n < a < x_n + 3 \cdot 10^{-n}, \quad x_n < a + 0 < x_n + 3 \cdot 10^{-n}.$$

Применяя лемму 7 из п. 3, получим требуемое равенство.

Для произвольного действительного числа c рассмотрим множество

$$N_c = \{-r \,|\, r > c \text{ и } r \text{ – конечная десятичная дробь}\}.$$

Нетрудно проверить, что множество N_c ограничено сверху. В самом деле, зафиксируем конечную десятичную дробь s меньшую, чем c. Тогда для любого $t \in N_c$ имеем $-t > c > s$, откуда $t < -s$. Стало быть, $-s$ – верхняя грань множества N_c. Таким образом, множество N_c действительно ограничено сверху и потому существует такое d, что $d = \sup N_c$.

Проверим, что $c + d = 0$. Действительно, при любом $m \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$c^{(m)} \leqslant c < c^{(m)} + 10^{-m}. \tag{22}$$

Из неравенства $c^{(m)} \leqslant c$ следует, что $-c^{(m)}$ – верхняя грань множества N_c, поэтому $d \leqslant -c^{(m)}$. Неравенство

$$c < c^{(m)} + 10^{-m}$$

означает, что $-c^{(m)} - 10^{-m}$ принадлежит N_c и потому $-c^{(m)} - 10^{-m} \leqslant d$. Таким образом,

$$-c^{(m)} - 10^{-m} \leqslant d \leqslant -c^{(m)}. \tag{23}$$

Складывая почленно неравенства (22) и (23), получим

$$-10^{-m} \leqslant c + d \leqslant 10^{-m}. \tag{24}$$

Поскольку наряду с неравенством (24) имеет место очевидное неравенство $-10^{-m} \leqslant 0 \leqslant 10^{-m}$, к числам $c+d$, 0 и последовательности $x_m = -10^{-m}$ применима лемма 7 из п. 3. Стало быть, $c+d=0$.

Лемма 4. *Для любого действительного числа c существует единственное число d такое, что $c+d=0$.*

Доказательство. Выше было проверено, что такое число d существует. Пусть $c+d=0$, $c+d_1=0$. Тогда

$$d = d+0 = d+(c+d_1) = (d+c)+d_1 = 0+d_1 = d_1.$$

Этим доказана единственность числа, удовлетворяющего требованиям леммы.

Такое число d обычно называют *противоположным* числу a и обозначают $-a$.

Из лемм 2 – 4 вытекает

Теорема 2. *Множество $\mathbb{R}$ является абелевой группой относительно операции сложения.*

Определение. Число c называется разностью чисел a, b, если $c+b=a$.

Как обычно, разность чисел a, b обозначается $a-b$.

Предложение 5. *Пусть a, b, c – произвольные действительные числа. Тогда*

1) *уравнение $x+c=d$ имеет единственное решение;*
2) $-(a+b) = -a-b$*;*
3) *если $a+c=b+c$, то $a=b$.*

Доказательство. 1. Ясно, что $x = d+(-c)$ является решением уравнения. С другой стороны, если $x+c=d$, то $x = x+c+(-c) = d+(-c)$.

2. Так как

$$(a+b)+(-a-b) = a+(b+(-b))+(-a) = a+0+(-a) = 0,$$

то числа $-(a+b)$, $-a-b$ являются противоположными к числу $a+b$ и потому совпадают.

3. Прибавив к обеим частям равенства $a+c=b+c$ число $-c$, получим $a=b$.

Предложение 6. *Пусть a, b, c, d – произвольные действительные числа. Тогда*

1) *если $a<b$, то $a+c<b+c$;*

2) *если $a<b$, $c<d$, то $a+c<b+d$;*

3) $a>b \Leftrightarrow a-b>0$*;*

4) $a>b \Leftrightarrow -a<-b$.

Доказательство. 1. Если $a<b$, то в силу леммы 1 имеем $a+c \leqslant b+c$. Равенство $a+c=b+c$ выполняться не может, поэтому $a+c<b+c$.

2. Используя пункт 1, имеем $a+c<b+c$ и $b+c<b+d$; отсюда $a+c<b+d$.

3. Неравенство $a-b>0$ получается из неравенства $a>b$ прибавлением к обеим частям числа $-b$. Обратный переход осуществляется, если к обеим частям неравенства $a-b>0$ прибавить b.

4. Непосредственно следует из п. 3, так как $a-b=(-a)-(-b)$.

Абсолютная величина (модуль) действительного числа a определяется стандартно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Следующее утверждение показывает, что при определении суммы двух действительных чисел можно было обойтись приближениями по недостатку.

Предложение 7. *Если a, b – произвольные действительные числа, то*

$$a+b=\sup\{a^{(n)}+b^{(n)} \mid n \geqslant 0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Складывая неравенства $a^{(n)} \leqslant a < < a^{(n)} + 10^{-n}$, $b^{(n)} \leqslant a < b^{(n)} + 10^{-n}$, получим

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leqslant a + b < a^{(n)} + b^{(n)} + 2 \cdot 10^{-n}.$$

Последнее неравенство выполнено при любом $n \geqslant 0$, поэтому к числу $a+b$ и последовательности $x_n = a^{(n)} + b^{(n)}$ применима лемма 6.

5. Умножение действительных чисел

Для произвольного положительного действительного числа a рассмотрим множество

$$L_a^+ = \{r \,|\, 0 < r \leqslant a \text{ и } r \in F\}.$$

Ясно, что $a = \sup L_a^+$.

Нетрудно видеть, что для любых положительных чисел c, d множество

$$L_c^+ \cdot L_d^+ = \{r_1 \cdot r_2 \,|\, r_1 \in L_c^+, r_2 \in L_d^+\}$$

непусто и ограничено сверху.

О п р е д е л е н и е. Число $c \cdot d = \sup(L_c^+ \cdot L_d^+)$ называется произведением положительных чисел c, d.

Из этого определения вытекает

Лемма 1. *Если* $0 < a \leqslant b$ *и* $0 < c \leqslant d$, *то* $a \cdot c \leqslant b \cdot d$.

Пусть X, Y – множества, состоящие из положительных чисел. Положим

$$X \cdot Y = \{x \cdot y \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Если множество X одноэлементно, т. е. $X = \{a\}$, то вместо $\{a\} \cdot Y$ будем писать $a \cdot Y$.

Предложение 8. *Пусть X, Y – непустые ограниченные сверху множества, состоящие из положительных чисел. Тогда множество $X \cdot Y$ ограничено сверху и*

$$\sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y.$$

Доказательство. Пусть $c = \sup X$, $d = \sup Y$. Если $x \in X$, $y \in Y$, то в силу леммы 1 имеем $x \leqslant c$, $y \leqslant d$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Поэтому $c \cdot d$ – верхняя грань множества $X \cdot Y$. Проверим, что $c \cdot d$ – точная верхняя грань этого множества. Пусть $z < c \cdot d$. Поскольку $c \cdot d = \sup(L_c^+ \cdot L_d^+)$, существуют такие конечные десятичные дроби r_1, r_2, что $0 < r_1 \leqslant c$, $0 < r_2 \leqslant d$ и $z < r_1 \cdot r_2$. Пусть r – приближение по избытку к числу z, для которого $z < r < r_1 \cdot r_2$. Найдем натуральное число m так, чтобы

$$(r_1 + r_2) \cdot 10^{-m} < r_1 \cdot r_2 - r.$$

Если $r_1' = r_1 - 10^{-m}$, $r_2' = r_2 - 10^{-m}$, то

$$r_1' \cdot r_2' = r_1 \cdot r_2 - (r_1 + r_2) \cdot 10^{-m} + 10^{-2m} > r_1 \cdot r_2 - (r_1 + r_2) \cdot 10^{-m} > r.$$

Так как $0 < r_1' < c$, $0 < r_2' < d$, то найдутся такие $x \in X$, $y \in Y$, что $0 < r_1' < x$, $0 < r_2' < y$. Отсюда при помощи леммы 1 получим $x \cdot y \geqslant r_1' \cdot r_2'$. Учитывая, что $r_1' \cdot r_2' > r$ и $r > z$, окончательно получаем требуемое неравенство $x \cdot y > z$.

Предложение 9. *Если a, b – положительные действительные числа, то $a \cdot b = \sup\{a^{(n)} \cdot b^{(n)} \mid n \geqslant 0\}$.*

Доказательство. Из положительности чисел a, b вытекает, что их приближения по недостатку $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ неотрицательны при любом n. Перемножая двойные неравенства

$$a^{(n)} \leqslant a < a^{(n)} + 10^{-n}, \quad b^{(n)} \leqslant b < b^{(n)} + 10^{-n},$$

получим

$$a^{(n)} \cdot b^{(n)} \leqslant a \cdot b < a^{(n)} \cdot b^{(n)} + (a^{(n)} + b^{(n)} + 10^{-n}) \cdot 10^{-n}. \quad (25)$$

Пусть $s = a^{(0)} + b^{(0)} + 2$. С использованием леммы 4 из п. 3 получаем

$$a^{(n)} + b^{(n)} + 10^{-n} < a^{(n)} + b^{(n)} + 2 \cdot 10^{-n} < a^{(0)} + b^{(0)} + 2.$$

Из двойного неравенства (25) имеем

$$a^{(n)} \cdot b^{(n)} \leqslant a \cdot b < a^{(n)} \cdot b^{(n)} + s \cdot 10^{-n}.$$

Полученное неравенство показывает, что к числу $a \cdot b$ и последовательности $(a^{(n)} \cdot b^{(n)})$ применима лемма 7 из п. 3. Поэтому $a \cdot b = \sup\{a^{(n)} \cdot b^{(n)} \mid n \geqslant 0\}$.

Теперь определим произведение произвольных действительных чисел x, y. Положим

$$x \cdot y = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \\ |x| \cdot |y|, & \text{если } x, y \text{ одного знака}, \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если } x, y \text{ разных знаков}. \end{cases}$$

Из этого определения вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *Для произвольных действительных чисел a, b выполнены следующие равенства:*

1) $0 \cdot a = 0$;
2) $1 \cdot a = a$;
3) $(-1) \cdot a = -a$;
4) $(-a) \cdot b = -a \cdot b$;
5) $(-1) \cdot (a + b) = -a - b$.

Доказательство. 1. Непосредственно вытекает из определения произведения произвольных действительных чисел.

2. Пусть $X = \{1\}$, $Y = L_a^+$. Тогда $X \cdot Y = Y$. Используя предложение 8, получим

$$a = \sup Y = \sup(X \cdot Y) = \sup X \cdot \sup Y) = 1 \cdot a.$$

3. Пусть $a \neq 0$. Имеем

$$(-1) \cdot a = \begin{cases} -|a|, & \text{если } a \text{ положительно}, \\ |a|, & \text{если } a \text{ отрицательно}. \end{cases}$$

4. Числа a, b могут иметь одинаковые или различные знаки. При доказательстве необходимо рассмотреть эти два случая.

5. Из равенства 3) следует, что $(-1) \cdot (a + b) = -(a + b)$. Применение предложения 5 завершает доказательство.

Лемма 3. *Для произвольных действительных чисел a, b, c выполнены следующие равенства:*

1) $a \cdot b = b \cdot a$; 2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Доказательство. 1. Если $a, b > 0$, то $a \cdot b = \sup(L_a^+ \cdot L_b^+)$, $b \cdot a = \sup(L_b^+ \cdot L_a^+)$. Поскольку $L_a^+ \cdot L_b^+ = L_b^+ \cdot L_a^+$, имеем $a \cdot b = b \cdot a$. Если $a, b < 0$, то $a \cdot b = |a| \cdot |b| = |b| \cdot |a| = b \cdot a$. Если же a, b имеют разные знаки, то $a \cdot b = -|a| \cdot |b| = -|b| \cdot |a| = b \cdot a$.

2. Если одно из чисел a, b, c равно нулю, то равенство очевидно. Предположим, что числа a, b, c положительны. Так как умножение на множестве конечных десятичных дробей обладает свойством ассоциативности, равенство

$$(L_a^+ \cdot L_b^+) \cdot L_c^+ = L_a^+ \cdot (L_b^+ \cdot L_c^+)$$

легко проверяется. Используя предложение 8, имеем

$$\sup((L_a^+ \cdot L_b^+) \cdot L_c^+) = \sup(L_a^+ \cdot L_b^+) \cdot \sup(L_c^+) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Аналогично

$$\sup((L_a^+ \cdot (L_b^+ \cdot L_c^+) = \sup(L_a^+) \cdot \sup(L_b^+ \cdot L_c^+) = a \cdot (b \cdot c).$$

Таким образом, при положительных a, b, c требуемое равенство выполнено.

Пусть теперь a, b, c – произвольные отличные от нуля действительные числа. Если среди этих чисел одно или три отрицательных числа, то из определения произведения действительных чисел с учетом доказанного выше вытекает, что

$$(a \cdot b) \cdot c = -|a| \cdot |b| \cdot |c| = a \cdot (b \cdot c);$$

в противном случае

$$(a \cdot b) \cdot c = |a| \cdot |b| \cdot |c| = a \cdot (b \cdot c).$$

Лемма 4. *Если $0 < a < 1$, то последовательность u_n, заданная рекуррентными соотношениями $u_{n+1} = 1 + (1-a) \cdot u_n$, если $n \geqslant 1$, и $u_1 = 1$, ограничена сверху.*

Доказательство. Легко видеть, что все члены этой последовательности больше, чем 1. Обозначим через m такое натуральное число, что $10^{-m} < a$ и проверим, что при любом натуральном n выполнено неравенство $u_n \leqslant 10^m$. При $n = 1$ это неравенство очевидно. Пусть $n \geqslant 1$ и $u_n \leqslant 10^m$. Тогда

$$u_{n+1} = 1 + (1-a) \cdot u_n \leqslant 1 + (1 - 10^{-m}) \cdot 10^m = 10^m.$$

Лемма 5. *Для любого действительного числа $a \neq 0$ существует такое единственное число b, что $a \cdot b = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < a < 1$. Пусть u_n – последовательность из леммы 4. В силу леммы 4 множество $U = \{u_n \,|\, n \geqslant 1\}$ ограничено сверху и состоит из положительных чисел. Тогда существует $b = \sup U$. Ясно, что $\sup\{1 + (1-a) \cdot u_n \,|\, n \geqslant 1\} = 1 + (1-a) \cdot b$. Поэтому из равенства $u_{n+1} = 1 + (1-a) \cdot u_n$ получаем

$$b = 1 + (1-a) \cdot b, \qquad b = 1 + b - a \cdot b, \qquad a \cdot b = 1.$$

Заметим, что при преобразовании выражения $(1-a) \cdot b$ нам пришлось воспользоваться законом дистрибутивности (см. ниже лемму 6).

Пусть $a > 1$. Тогда существует такое m, что $a < 10^m$, откуда $a \cdot 10^{-m} < 1$. В силу предыдущих рассуждений найдется такое d, что $a \cdot 10^{-m} \cdot d = 1$. Таким образом, в этом случае $b = 10^{-m} \cdot d$. Если $a < 0$, то для некоторого d выполнено равенство $(-a) \cdot d = 1$. Отсюда $a \cdot (-d) = 1$, т. е. $b = -d$.

Проверка единственности не представляет труда. В самом деле, если наряду с равенством $a \cdot b = 1$ выполнено равенство $a \cdot b_1 = 1$, то

$$b = b \cdot 1 = b \cdot a \cdot b_1 = 1 \cdot b_1 = b_1.$$

Такое число b называется обратным к a и обозначается a^{-1}.

Из лемм 3, 5 вытекает

Теорема 3. *Множество* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *всех отличных от нуля действительных чисел является абелевой группой относительно операции умножения.*

Лемма 6. *Пусть a, b, c – произвольные действительные числа. Тогда $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.*

Доказательство. Проверка равенства в случаях, когда $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ или $b + c = 0$ очень проста и оставляется читателю. Прежде чем переходить к рассмотрению других возможностей, сделаем следующее замечание. Предположим, что для некоторых a, b, c доказываемое равенство выполнено. Тогда

$$(-a) \cdot (b + c) = (-1) \cdot (a \cdot (b + c)) = (-1) \cdot (a \cdot b + a \cdot c) =$$

$$= (-a) \cdot b + (-a) \cdot c,$$

$$a \cdot (-b - c) = (-1)(a \cdot (b + c)) = (-1)(a \cdot b + a \cdot c) =$$

$$= (-1) \cdot (a \cdot b) + (-1) \cdot (a \cdot c) = a \cdot (-b) + a \cdot (-c).$$

Из этих равенств вытекает, что если все числа a, b, c, $b + c$ отличны от нуля, то можно считать, что $a > 0$ и $b + c > 0$. Предположим сначала, что все числа a, b, c положительны. Нетрудно видеть, что выполнено включение

$$L_a^+ \cdot (L_b^+ + L_c^+) \subseteq (L_a^+ \cdot L_b^+) + (L_a^+ \cdot L_c^+). \tag{26}$$

В самом деле, если $r \in L_a^+ \cdot (L_b^+ + L_c^+)$, то $r = r_1 \cdot (r_2 + r_3)$, где $r_1 \in L_a^+, r_2 \in L_b^+, r_3 \in L_c^+$. Так как $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$, то $r \in (L_a^+ \cdot L_b^+) + (L_a^+ \cdot L_c^+)$. Из включения (26) следует, что $a \cdot (b + c) \leqslant a \cdot b + a \cdot c$.

Проверим обратное неравенство. Пусть $r \in (L_a^+ \cdot L_b^+) + (L_a^+ \cdot L_c^+)$. Тогда $r = r_1 \cdot r_2 + r_1' \cdot r_3$, где $r_1, r_1' \in L_a^+$, $r_2 \in L_b^+$, $r_3 \in$

$\in L_c^+$. Считая без ограничения общности, что $r_1 \geqslant r_1'$, получим $r \leqslant r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 + r_3) \leqslant a \cdot (b + c)$. Этим доказано, что $a \cdot (b+c)$ – верхняя грань множества $(L_a^+ \cdot L_b^+) + (L_a^+ \cdot L_c^+)$. Поэтому $a \cdot b + a \cdot c \leqslant a \cdot (b + c)$.

Осталось рассмотреть случай, когда отрицательно либо b, либо c. Будем считать, что $b > 0$, $c < 0$. Пусть $b_1 = b + c$, $c_1 = -c$. Тогда $b_1, c_1 > 0$, поэтому $a \cdot (b_1 + c_1) = a \cdot b_1 + a \cdot c_1$. Отсюда $a \cdot b = a \cdot (b + c) + a \cdot (-c)$. Так как $a \cdot (-c) = -a \cdot c$, получим $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$.

Из теорем 2, 3 и леммы 6 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является полем.*

Определение. Пусть a, b – произвольные действительные числа, причем $b \neq 0$. Число c называется *частным от деления a на b*, если $a = b \cdot c$.

Предложение 10. *Пусть a, b, c – произвольные действительные числа. Тогда*

1) *если $c \neq 0$, то уравнение $x \cdot c = d$ имеет единственное решение;*

2) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$*;*

3) *если $a \cdot c = b \cdot c$ и $c \neq 0$, то $a = b$.*

Предложение 11. *Если a, b, c, d – произвольные действительные числа, то*

1) *если $a < b$ и $c > 0$, то $a \cdot c < b \cdot c$;*

2) *если $0 < a < b$, $0 < c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$;*

3) *если $0 < a < b$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n < b^n$;*

4) *если $a > b > 0$, то $a^{-1} < b^{-1}$.*

Доказательства этих двух утверждений аналогичны доказательствам предложений 5, 6.

6. Степень действительного числа с рациональным показателем

Напомним сначала определения степени действительного числа с произвольным целым показателем.

Для произвольных $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ положим

1. $a^{n+1} = a^n \cdot a$, $a^1 = a$;

2. $a^{-m} = 1/a^m$, $a^0 = 1$ (здесь $a \neq 0$).

Пусть n – натуральное число, $n > 1$.

Определение. Число b называется корнем n-й степени из числа a, если $b^n = a$.

Таким образом, корень n-й степени из числа a – это решение уравнения $x^n = a$.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть c – положительное действительное число. Для любого натурального n найдется такое действительное число d, что*

1) *если $0 < c < 1$, то $c < d^n < 1$;*

2) *если $c > 1$, то $1 < d^n < c$.*

Доказательство. 1. Будем искать d в виде $1 - a$, где $0 < a < 1$. Из неравенства Бернулли следует, что

$$d^n = (1-a)^n > 1 - na.$$

Для того, чтобы d удовлетворяло неравенству $d^n > c$, достаточно выполнения неравенства $1 - na > c$ или равносильного неравенства $a < (1-c)/n$. Поскольку число $(1-c)/n$ положительно, существует положительное число a, удовлетворяющее неравенству $a < \min(1, (1-c)/n)$. Отсюда очевидно вытекает и существование числа d с требуемым свойством.

2. При $c > 1$ выполнено неравенство $0 < 1/c < 1$. Поэтому существует такое g, что $1/c < g^n < 1$. Отсюда $1 < (1/g)^n < c$, т. е. $d = 1/g$.

Теорема 5. *Для любого положительного числа a существует единственный корень n-й степени из a.*

Доказательство. Пусть сначала $a > 1$. Введем множество

$$R_a = \{x \mid x^n \leqslant a \text{ и } x > 0\}.$$

Ясно, что $1 \in R_a$ и $a < a^n$. Поэтому R_a непусто и ограничено сверху. Значит, существует число $b = \sup R_a$. Если $b^n < a$, то $a/b^n > 1$, и поэтому в силу леммы 1 найдется такое d, что

$$a/b^n > d^n > 1,$$

откуда $a > (b \cdot d)^n > b^n$. Таким образом, $b \cdot d \in R_a$ и $b \cdot d > b$, что невозможно. Если $b^n > a$, то $a/b^n < 1$. В силу леммы 1 существует такое d, что

$$a/b^n < d^n < 1,$$

откуда $a < (b \cdot d)^n < b^n$. Отсюда следует, что $b \cdot d < b$, и потому $b \cdot d \in R_a$. Полученное включение противоречит неравенству $(b \cdot d)^n > a$.

Таким образом, $b^n = a$.

Проверим единственность положительного корня n-й степени из положительного числа a. Пусть $b_1^n = a$, $b_2^n = a$, $b_1, b_2 > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $b_1 \leqslant b_2$. Если $b_1 < b_2$, то из предложения 11 следует, что $b_1^n < b_2^n$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $1/a > 1$, и потому $d^n = 1/a$, для некоторого d. Отсюда

$$(1/d)^n = a.$$

Пусть a – неотрицательное действительное число.

Определение. Неотрицательный корень n-й степени из числа a называется арифметическим корнем n-й степени.

Арифметический корень n-й степени из a обозначается через $\sqrt[n]{a}$.

Теперь мы можем определить степень положительного числа с произвольным рациональным показателем. Пусть $a > 0$, $r = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Тогда a^r определено равенством

$$a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Теорема 6. *Пусть a, b – положительные действительные числа, а c, d – рациональные числа. Тогда*

1) $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$;
2) $(a^c)^d = a^{c \cdot d}$;
3) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$;
4) $(a/b)^c = a^c/b^c$;
5) *если* $c < d$, *то* $a^c < a^d$ *при* $a > 1$ *и* $a^c > a^d$ *при* $0 < a < 1$;
6) *если* $0 < a < b$, *то* $a^c < b^c$ *при* $c > 0$ *и* $a^c > b^c$ *при* $c < 0$.

Доказательство этого утверждения проводится в несколько этапов. Сначала все перечисленные в теореме свойства проверяются для натуральных показателей x, y при помощи метода математической индукции. Затем эти свойства распространяются на степени с целыми показателями. И наконец, при помощи теоремы 5 все свойства доказываются для степеней с произвольными рациональными показателями.

Предложение 12. *Пусть $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$, $x > -1$, $x \neq 0$. Тогда*

1) $(1+x)^r > 1 + rx$, *если* $r > 1$ *или* $r < 0$;
2) $(1+x)^r < 1 + rx$, *если* $0 < r < 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $0 < r < 1$. Пусть $r = m/n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $0 < m < n$. Для проверки требуемого утверждения воспользуемся неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(неравенство записано в предположении, что не все числа равны между собой). Полагая в этом неравенстве $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-m} = 1$, $a_{n-m+1} = a_{n-m+2} = \ldots = a_n = 1 + x$, получим

$$(1+x)^r = \sqrt[n]{(1+x)^m} < \frac{(n-m)+m(1+x)}{n} = \frac{n+mx}{n} = 1 + \frac{m}{n}x = 1 + rx.$$

Таким образом, случай $0 < r < 1$ рассмотрен полностью.

Пусть $r > 1$. Полагая $s = 1/r$ и учитывая, что $0 < s < 1$, получим

$$(1+rx)^s < 1 + srx = 1 + x.$$

Поскольку r положительно, то

$$(1+x)^r > (1+rx)^{rs} = 1 + rx.$$

Теперь допустим, что $r < 0$. Достаточно рассмотреть лишь те значения r, при которых $1 + rx > 0$ (в противном случае доказываемое неравенство очевидно). Найдем такое натуральное число $n > 1$, что $-r/n < 1$. Тогда по доказанному выше имеем $(1+x)^{-r/n} < 1 - rx/n$. Так как $1 - rx/n > 0$, то

$$(1+x)^{r/n} > \frac{1}{1 - rx/n}.$$

Поделив обе части очевидного неравенства $1 - r^2x^2/n^2 < 1$ на положительное число $1 - rx/n$, получим

$$\frac{1}{1 - rx/n} > 1 + rx/n.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{r/n} > \frac{1}{1 - rx/n} > 1 + rx/n.$$

Отсюда

$$(1+x)^r > (1 + rx/n)^n > 1 + rx,$$

что и требовалось доказать.

Ясно, что предложение 12 – это обобщение хорошо знакомого нам неравенства Бернулли для натурального показателя.

7. Степень положительного числа с произвольным показателем

Пусть a, d – действительные числа, $a > 0$. Если $a > 1$, то положим

$$a^d = \sup\{a^r \mid r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\}.$$

Если $0 < a < 1$, то

$$a^d = 1/(1/a)^d.$$

Отметим сразу, что в случае, когда s – рациональное число, значение выражения a^s, полученное при помощи данного определения, и его значение, полученное из определения п. 6, совпадают. В частности, $a^1 = a$ и $a^0 = 1$, если $a \neq 0$.

Из определения непосредственно вытекает

Лемма 1. *Если $a > 1$ и $c \leqslant d$, то $a^c \leqslant a^d$.*

Лемма 2. *Если $a > 1$, то $x = y \Leftrightarrow a^x = a^y$ и $x < y \Leftrightarrow \Leftrightarrow a^x < a^y$.*

Доказательство. Ясно, что $x = y \Rightarrow a^x = a^y$. Проверим, что из неравенства $x < y$ следует неравенство $a^x < a^y$. В силу леммы 5 из п. 3 найдутся такие конечные десятичные дроби r и s, что $x \leqslant r < s \leqslant y$ (напр., $r = x^{(m)} + 10^{-m}$, $s = y^{(m)}$ при подходящем m). Используя лемму 1 и теорему 6, получим

$$a^x \leqslant a^r < a^s \leqslant a^y.$$

Отсюда $a^x < a^y$.

Пусть теперь $a^x < a^y$. В силу доказанного выше имеем $x = = y \Rightarrow a^x = a^y$ и $y < x \Rightarrow a^y < a^x$. Поэтому $x < y$. Если $a^x = = a^y$, то неравенства $x < y$ и $y < x$ приводят к противоречию. Поэтому $x = y$.

Используя лемму 2, легко получить следующее утверждение.

Предложение 13. *Пусть* $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. *Тогда*

1) $x = y \Leftrightarrow a^x = a^y$;

2) *если* $a > 1$, *то* $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$;

3) *если* $0 < a < 1$, *то* $x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$.

Лемма 3. 1) *если* $a > 1$, *то для любого* $c > 1$ *найдется такое* n, *что* $a^{1/n} < c$;

2) *если* $0 < a < 1$, *то для любого* $0 < c < 1$ *найдется такое* n, *что* $a^{1/n} > c$.

Доказательство. 1. Так как $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$. Поэтому в силу неравенства Бернулли $(1 + \alpha/n)^n > 1 + \alpha$, откуда

$$a^{1/n} = (1 + \alpha)^{1/n} < 1 + \alpha/n.$$

Нетрудно видеть, что неравенства $1 + \alpha/n < c$ и $n > (c-1)/\alpha$ равносильны. Поэтому при всех n, удовлетворяющих условию $n > (c-1)/\alpha$, выполнено неравенство $a^{1/n} < c$.

2. Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$. Поэтому найдется такое n, что $(1/a)^{1/n} < 1/c$. Отсюда $a^{1/n} > c$.

Из леммы 3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4. *Если* a *– положительное действительное число, то* $0 < a < 1 \Rightarrow \sup\{a^{1/n} \mid n \geqslant 1\} = 1$ *и* $a > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \inf\{a^{1/n} \mid n \geqslant 1\} = 1$.

Доказательство. Пусть $0 < a < 1$. Если b – положительное число и $b < 1$, то в силу леммы 3 найдется такое n, что $b < a^{1/n}$. Поскольку 1 – верхняя грань множества $\{a^{1/n} \mid n \geqslant 1\}$, равенство $\sup a^{1/n} = 1$ доказано.

Второе утверждение проверяется аналогично.

Лемма 5. *Пусть* a, b *– положительные числа,* $b > 1$, (x_n) *– произвольная последовательность. Тогда*

1) *если при любом натуральном* n *выполнены неравенства* $0 < x_n \leqslant a \leqslant x_n \cdot b^{1/n}$, *то* $\sup\{x_n \mid n \geqslant 1\} = a$;

2) *если при любом натуральном n выполнены неравенства $0 < x_n \cdot b^{-1/n} \leqslant a \leqslant x_n$, то $\inf\{x_n \,|\, n \geqslant 1\} = a$.*

Доказательство. Пусть $\sup\{x_n \,|\, n \geqslant 1\} = d$. Ясно, что $d \leqslant a$. Осталось проверить, что предположение $d < a$ приводит к противоречию. Используя условие, получаем, что неравенства

$$b^{1/n} \geqslant \frac{a}{x_n} \geqslant \frac{a}{d} > 1$$

выполнены при любом натуральном n (при проверке этих неравенств следует помнить, что все числа, в них участвующие, положительны). Теперь видно, что $\inf\{b^{1/n} \,|\, n \geqslant 1\} \geqslant a/d > 1$. Однако полученное неравенство противоречит лемме 4. Таким образом, утверждение 1) доказано. Утверждение 2) проверяется аналогично.

Следствие. *Если $0 < a < 1$ и $d > 0$, то*

$$a^d = \inf\{a^r \,|\, r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\}$$

.

Лемма 6. *Пусть $a, d \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Для любого натурального n выполнены неравенства*

$$a^{d^{(n)}} \leqslant a^d < a^{d^{(n)}} \cdot a^{1/n}.$$

Доказательство. Поскольку $10^n = (1+9)^n > 1+9n > n$, имеем $10^{-n} < 1/n$. Отсюда

$$d^{(n)} \leqslant d < d^{(n)} + 10^{-n} < d^{(n)} + 1/n.$$

При помощи леммы 2 получаем требуемые неравенства.

Теорема 7. *Пусть a, b, c, d – действительные числа, причем a, b положительны. Тогда*

1) $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$;
2) $a^{-d} = (1/a)^d$;
3) $(a^c)^d = a^{c \cdot d}$;

4) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$;
5) $(a/b)^c = a^c/b^c$;
6) *если* $c < d$, *то* $a^c < a^d$ *при* $a > 1$ *и* $a^c > a^d$ *при* $0 < a < 1$;
7) *если* $0 < a < b$, *то* $a^c < b^c$ *при* $c > 0$ *и* $a^c > b^c$ *при* $c < 0$.

Доказательство. Отметим сразу, что равенства 1)–4) очевидно выполняются, если $a = 1$ или $b = 1$. Поэтому при доказательстве этих равенств будем считать, что $a, b \neq 1$.

1. Если $a > 1$, то в силу леммы 6 выполнены неравенства

$$a^{c^{(n)}} \leqslant a^c < a^{c^{(n)}} \cdot a^{1/n} \quad a^{d^{(n)}} \leqslant a^d < a^{d^{(n)}} \cdot a^{1/n}.$$

Перемножая почленно эти неравенства и используя свойства степеней с рациональными показателями (см. теорему 6), получим

$$a^{c^{(n)}+d^{(n)}} \leqslant a^c \cdot a^d < a^{c^{(n)}+d^{(n)}} \cdot (a^2)^{1/n}. \tag{27}$$

Кроме того,

$$c^{(n)} + d^{(n)} \leqslant c + d < c^{(n)} + d^{(n)} + 2/n,$$

откуда

$$a^{c^{(n)}+d^{(n)}} \leqslant a^{c+d} < a^{c^{(n)}+d^{(n)}} \cdot (a^2)^{1/n}. \tag{28}$$

Неравенства (27) и (28) показывают, что к числам $a^c \cdot a^d$ и a^{c+d} применима лемма 5, откуда следует совпадение этих чисел.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда

$$(a^c)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^c, \quad (a^d)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^d, \quad (a^{c+d})^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)^{c+d}.$$

Так как $1/a > 1$, выполнено равенство

$$\left(\frac{1}{a}\right)^c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^d = \left(\frac{1}{a}\right)^{c+d}.$$

Отсюда $(a^c)^{-1} \cdot (a^d)^{-1} = (a^{c+d})^{-1}$. Возводя обе части этого равенства в степень -1, получим требуемое равенство.

2. Пусть $a > 1$. В силу леммы 6 для любого натурального n выполнены неравенства

$$a^{d^{(n)}} \leqslant a^d < a^{d^{(n)}} \cdot a^{1/n}. \tag{29}$$

Поскольку $-d^{(n)} - 1/n < d \leqslant -d^{(n)}$, имеем

$$a^{-d^{(n)}} \cdot a^{-1/n} < a^{-d} \leqslant a^{-d^{(n)}}. \tag{30}$$

Перемножая неравенства (29) и (30), получим неравенство

$$a^{-1/n} < a^d \cdot a^{-d} < a^{1/n},$$

выполняющееся при любом натуральном n. Пусть $x_n = a^{-1/n}$. Тогда

$$x_n < a^d \cdot a^{-d} < x_n \cdot (a^2)^{1/n}.$$

Применяя теперь лемму 5, получим, что

$$a^d \cdot a^{-d} = \sup\{x_n \,|\, n \geqslant 1\} = \sup\{a^{-1/n} \,|\, n \geqslant 1\} = 1.$$

Из равенства $a^d \cdot a^{-d} = 1$ следует, что $a^{-d} = 1/a^d$.

Предположим, что $0 < a < 1$. Тогда $1/a > 1$ и в силу доказанного выше имеем

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-d} = \frac{1}{(1/a)^d} = a^d.$$

Отсюда

$$a^{-d} = \frac{1}{(1/a)^{-d}} = \frac{1}{a^d}.$$

3. Пусть сначала $a > 1$. Тогда

$$(a^{c^{(n)}})^{d^{(n)}} \leqslant (a^c)^d < (a^{c^{(n)}+1/n})^{d^{(n)}+1/n}.$$

Обозначим через s конечную десятичную дробь большую чем $c + d + 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\left(c^{(n)} + \frac{1}{n}\right)\left((d^{(n)} + \frac{1}{n}\right) &= c^{(n)} \cdot d^{(n)} + \frac{(c^{(n)} + d^{(n)})}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \\ &\leqslant c^{(n)} \cdot d^{(n)} + \frac{(c^{(n)} + d^{(n)} + 1)}{n} \leqslant \\ &\leqslant c^{(n)} \cdot d^{(n)} + \frac{s}{n}.\end{aligned}$$

Из полученного неравенства с использованием свойств степеней с рациональными показателями имеем

$$a^{c^{(n)}\cdot d^{(n)}} \leqslant (a^c)^d < a^{c^{(n)}\cdot d^{(n)}} \cdot (a^s)^{1/n}. \tag{31}$$

Проводя аналогичные вычисления можно получить, что

$$a^{c^{(n)}\cdot d^{(n)}} \leqslant a^{c\cdot d} < a^{c^{(n)}\cdot d^{(n)}} \cdot (a^s)^{1/n}. \tag{32}$$

Неравенства (31) и (32) показывают, что к числам $(a^c)^d$ и $a^{c\cdot d}$ применима лемма 5; отсюда вытекает равенство этих чисел.

Случай, когда $0 < a < 1$, оставляется читателю в качестве несложного упражнения.

4. Если $a, b > 1$, то рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют утверждать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$(a\cdot b)^{c^{(n)}} \leqslant (a\cdot b)^c < (a\cdot b)^{c^{(n)}} \cdot (a\cdot b)^{1/n},$$

$$(a\cdot b)^{c^{(n)}} \leqslant a^c\cdot b^c < (a\cdot b)^{c^{(n)}} \cdot (a\cdot b)^{1/n}.$$

Как и выше, отсюда следует, что $(a\cdot b)^c = a^c\cdot b^c$.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Если $a\cdot b > 1$, то без ограничения общности можно считать, что $a > 1$, $b < 1$. Тогда

$$(a\cdot b)^c \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^c = a^c,$$

откуда

$$(a\cdot b)^c = a^c \cdot \frac{1}{(1/b)^c} = a^c\cdot b^c.$$

Случай, когда $a\cdot b < 1$, читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.

5. Пусть $g = a/b$. Тогда

$$a^c = (b\cdot g)^c = b^c\cdot g^c = b^c\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

Отсюда очевидно вытекает требуемое равенство.

6. Следует из леммы 2.

7. Поскольку $c > 0$, найдется такое рациональное число r, что $0 < r < c$. Так как $b/a > 1$, то из теоремы 6 следует, что $(b/a)^r > 1$. Из леммы 2 вытекает, что $(b/a)^c > (b/a)^r$. Поэтому $(b/a)^c > 1$. Если $c < 0$, то $(b/a)^{-c} > 1$. Отсюда немедленно вытекает требуемое неравенство.

Теорема 8. *Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Для любого положительного b существует единственное число x, для которого $a^x = b$.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Рассмотрим множество

$$L = \{z \,|\, a^z \leqslant b\}.$$

Проверим, что L непусто и ограничено сверху. Если $b < 1$, то 1 – верхняя грань L. Кроме того, существует натуральное m, для которого $\sqrt[m]{b^{-1}} < a$. Отсюда $a^{-m} < b$, т. е. $-m \in L$.

Если $b > 1$, то $0 \in L$, т. е. $L \neq \emptyset$. Далее заметим, что для некоторого натурального k имеем $b^{1/k} < a$, откуда $b < a^k$. Последнее неравенство означает, что k – верхняя грань L.

Проверим теперь что $x = \sup L$ удовлетворяет равенству

$$a^x = b.$$

Если $a^x < b$, то $b/a^x > 1$. Поэтому для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$b/a^x > a^{1/n},$$

т. е. $b > a^{x+1/n}$, откуда $x + 1/n \in L$. Это противоречит определению x. Аналогично опревергается неравенсто $a^x > b$.

Таким образом, существование числа x, удовлетворяющего равенству $a^x = b$ при $a > 1$ доказано.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда найдется x, для которого

$$(a^{-1})^x = b^{-1}.$$

Отсюда $1/a^x = 1/b$, т. е. $a^x = b$.

Единственность такого числа следует из леммы 2.

8. Неравенство Бернулли для произвольного показателя. Неравенство Юнга

Теорема 9. *Пусть* $x, d \in \mathbb{R}$, $x > -1$, $x \neq 0$. *Тогда*
1) $(1+x)^d > 1 + dx$, *если* $d > 1$ *или* $d < 0$;
2) $(1+x)^d < 1 + dx$, *если* $0 < d < 1$.

Доказательство. Пусть $0 < d < 1$. Если $x > 0$, то

$$(1+x)^d = \sup\{(1+x)^r \,|\, 0 < r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\},$$

$$1 + dx = \sup\{1 + xr \,|\, 0 < r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\}.$$

Если же $-1 < x < 0$, то

$$(1+x)^d = \inf\{(1+x)^r \,|\, 0 < r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\}$$

(см. следствие из леммы 5),

$$1 + dx = \inf\{1 + xr \,|\, 0 < r \leqslant d \text{ и } r \in \mathbb{Q}\}.$$

Поскольку для любого рационального r, $0 < r < 1$, выполнено неравенство $(1+x)^r < 1 + rx$ (см. предложение 12), в обоих случаях получаем $(1+x)^d \leqslant 1 + dx$. Проверим, что на самом деле это неравенство строгое. Пусть s – такое рациональное число, что $d < s < 1$. Тогда $(1+x)^{d/s} \leqslant 1 + dx/s$. Так как s – рациональное число, имеем $(1 + dx/s)^s < 1 + dx$. Из двух последних неравенств следует, что $(1+x)^d < 1 + dx$.

Доказательство неравенства Бернулли в случаях, когда $d > 1$ или $d < 0$ оставляется читателю, ибо соответствующие рассуждения аналогичны тем, что применялись при доказательстве предложения 12.

Теорема 10. *Пусть* $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $\alpha + \beta = 1$. *Тогда*
1) $x^\alpha y^\beta > \alpha x + \beta y$, *если* $\alpha > 1$ *или* $\alpha < 0$;
2) $x^\alpha y^\beta < \alpha x + \beta y$, *если* $0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Отметим сначала,что если $z > 0$ и $z \neq 1$, то $z^d > 1-d+dz$, если $d < 0$ или $d > 1$, и $z^d < 1-d+dz$, если $0 < d < 1$. Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 9, если воспользоваться равенством $z = 1+(z-1)$.

Пусть числа α, β удовлетворяют равенству $\alpha+\beta = 1$. Ясно, что одно из этих чисел положительно. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha > 0$. Рассмотрим случай, когда $\alpha > 1$. Тогда

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} > 1 - \alpha + \alpha \cdot \frac{x}{y}.$$

Умножая обе части полученного неравенства на y и учитывая, что $\beta = 1 - \alpha$, получим

$$x^{\alpha} y^{\beta} > \alpha x + \beta y.$$

Второй случай рассматривается аналогично.

9. Логарифмы

Пусть a, b – положительные действительные числа, $a \neq 1$.

Определение. Число c называется *логарифмом* числа b по основанию a, если $a^c = b$.

Для обозначения логарифма b по основанию a используется запись $\log_a b$.

Из определения логарифма вытекают следующие равенства:

$$1)\ a^{\log_a b} = b; \qquad 2)\ \log_a a^x = x.$$

Равенство 1) часто называют *основным логарифмическим тождеством.* Обратим внимание читателя, что эти равенства имеют смысл, только если $a, b > 0$, $a \neq 1$.

Теорема 11. *Пусть a, b, k, x, y – действительные числа, $a, b, x, y > 0$, $a, b \neq 1$. Тогда*

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

3) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$,

4) $\log_{(a^k)} x = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a x$,

5) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$,

6) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Доказательство. Проверим равенства 1 - 6. Пусть $c = \log_a x$, $d = \log_a y$. Тогда $x = a^c$, $y = a^d$. Отсюда $xy = a^{c+d}$, $x/y = a^{c-d}$. Из определения логарифма следует, что $c + d = \log_a(xy)$, $c - d = \log_a(x/y)$. Таким образом, равенства 1, 2 доказаны.

Чтобы проверить равенства 3, 4, заметим, что из равенства $x = a^c$ следуют равенства $x^k = a^{kc}$ и $x = (a^k)^{c/k}$ (в последнем равенстве $k \neq 0$). По определению логарифма из этих равенств следует, что $kc = \log_a x^k$ и $c/k = \log_{(a^k)} x$.

Перейдем к проверке равенства 5. Поскольку $x = a^{\log_a x}$, $a = b^{\log_b a}$, имеем $x = b^{\log_a x \cdot \log_b a}$. Отсюда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Поделив обе части этого равенства на $\log_b a$, получим требуемое. Если теперь в равенстве 5 положить $x = b$, то получим равенство 6.

10. Показательная функция

Определение. Функция вида $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется *показательной*.

Вместо a^x мы часто будем писать $\exp_a x$. Показательную функцию $y = \exp_a x$ часто называют *экспонентой* по основанию a.

Перечислим свойства показательной функции.

1. $D(\exp_a) = \mathbb{R}$;

2. $E(\exp_a) = (0; +\infty)$;

3. Показательная функция возрастает на множестве $\mathbb{R}$, если $a > 1$, и убывает на том же множестве, если $0 < a < 1$;

4. Показательная функция выпукла вниз на множестве $\mathbb{R}$.

Свойства 1 - 3 вытекают из свойств степеней с произвольным действительным показателем (см. п. 7).

Проверим свойство 4. Пусть $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, причем $x_1 \neq x_2$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда $0 < \lambda_1 < 1$, и в силу неравенства Юнга имеем

$$(a^{x_1})^{\lambda_1} \cdot (a^{x_2})^{\lambda_2} < \lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2}.$$

Поскольку $(a^{x_1})^{\lambda_1} \cdot (a^{x_2})^{\lambda_2} = a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}$, получаем неравенство

$$a^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} < \lambda_1 a^{x_1} + \lambda_2 a^{x_2},$$

означающее выпуклость вниз показательной функции.

График показательной функции изображен на рис. 1.

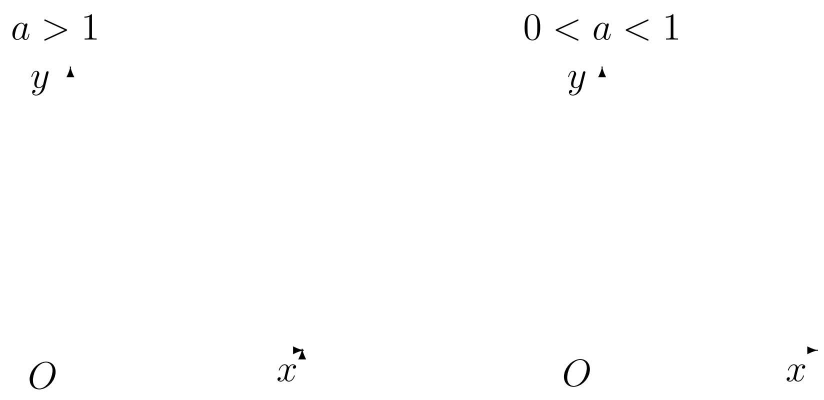

Рис. 1

11. Логарифмическая функция

Определение. Функция вида $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется *логарифмической.*

Поскольку $\exp_a(log_a x) = x$ при $x > 0$ и $\log_a(exp_a x) = x$ (см. п. 9), функции $y = \exp_a x$ и $y = \log_a x$ являются взаимно обратными.

Перечислим свойства логарифмической функции.

1. $D(\log_a) = (0; +\infty)$;

2. $E(\log_a) = \mathbb{R}$;

3. Логарифмическая функция возрастает на множестве $(0; +\infty)$, если $a > 1$, и убывает на том же множестве, если $0 < a < 1$;

4. Логарифмическая функция выпукла вверх на множестве $(0; +\infty)$, если $a > 1$, и выпукла вниз на том же множестве, если $0 < a < 1$.

Эти свойства непосредственно вытекают из соответствующих свойств показательной функции. Мы проверим лишь свойство 4. Пусть $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, причем $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 >$ > 0 и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Используя доказанную в п. 10 выпуклость вниз показательной функции, имеем

$$a^{\lambda_1 \log_a x_1 + \lambda_2 \log_a x_2} < \lambda_1 a^{\log_a x_1} + \lambda_2 a^{\log_a x_2},$$

откуда, после очевидных преобразований, получаем

$$a^{\lambda_1 \log_a x_1 + \lambda_2 \log_a x_2} < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

Прологарифмируем последнее неравенство по основанию a. Если $a > 1$, то $\lambda_1 \log_a x_1 + \lambda_2 \log_a x_2 < \log_a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, если же $0 < a < 1$, то $\lambda_1 \log_a x_1 + \lambda_2 \log_a x_2 > \log_a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$.

График логарифмической функции показан на рис. 2.

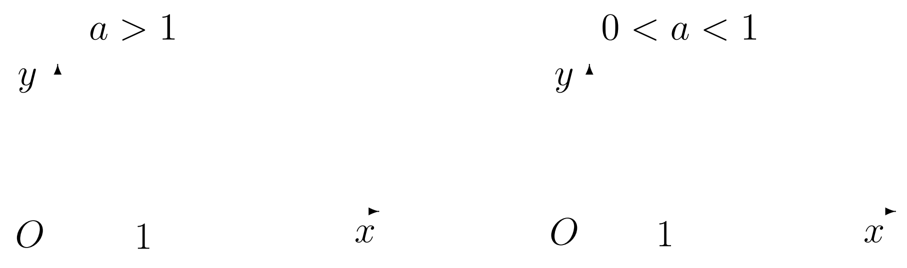

Рис. 2