В. В. Расин

ЛЕКЦИИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Аксиомы планиметрии.
Преобразования плоскости

Учебное пособие

Екатеринбург
2011

Министерство науки и образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет

Специализированный учебно-научный центр

В. В. Расин

ЛЕКЦИИ ПО ГЕОМЕТРИИ

Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости

Екатеринбург

2011

УДК 512(075.8)
Р 241

Подготовлено на кафедре математики СУНЦ УрФУ

Расин В. В. Лекции по геометрии: Аксиомы планиметрии. Преобразования плоскости: Учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011. 164 с.

В пособии подробно обсуждаются аксиомы планиметрии и следствия из них. Кроме того, большое внимание уделено двум важным типам преобразований плоскости – движениям и подобиям.

Для школьников, учителей и студентов.

Рецензенты: кафедра математики Института развития регионального образования; *А.Г.Гейн*, профессор кафедры алгебры и дискретной математики Уральского государственного университета

Предисловие

Учебное пособие написано на основе лекций, неоднократно прочитанных автором школьникам десятых физико-математических классов Специализированного учебно-научного центра Уральского государственного университета. Оно включает в себя четыре главы: аксиомы планиметрии (глава 1), окружность (глава 2), движения плоскости (глава 3) и преобразования подобия плоскости (глава 4).

В первой главе на основе системы аксиом, близкой к системе аксиом Д.Гильберта (см. [2]), строится достаточно представительный "кусок"планиметрии. Заметим сразу, что вопрос о том, какую систему аксиом предпочтительней использовать в школьной геометрии, неоднократно обсуждался (см., напр., [3, 4, 6]). Выбор, сделанный автором, мотивируется тем, что сходная система аксиом используется в большинстве отечественных учебников по геометрии. В пособии несколько изменена традиционная форма аксиомы непрерывности. Для этого на ориентированной прямой вводится отношение линейного порядка, а затем постулируется существование точной верхней грани ограниченного сверху множества точек ориентированной прямой. Такой подход имеет, на наш взгляд, следующие преимущества. Во-первых, достаточно рано появляется возможность обсудить понятие точной верхней грани ограниченного сверху подмножества в произвольном линейно упорядоченном множестве, во-вторых, при построении множества всех действительных чисел (см. [5]) в 11 классе будет доказано свойство этого множества, аналогичное принятой здесь аксиоме непрерывности. Кроме того, перед введением аксиомы параллельных целесообразно ввести и обсудить так называемую абсолютную геометрию, представляющую собой совокупность всех следствий из аксиом первых четырех групп (см. п. 1.21). Цель этой главы понятна. Она предназначена для того, чтобы продемонстрировать способному школьнику аксиоматический метод “в действии”. В существующих школьных учебниках по геометрии та или иная система аксиом, разумеется, формулируется, однако из аксиом выводятся лишь простейшие следствия. Поэтому, когда в дальнейшем начинается получение теорем, авторам вольно или невольно приходится использовать недоказанные утверждения или плохо определенные понятия. В данном пособии, оставаясь на достаточно высоком уровне строгости, мы доводим изложение материала до того предела, начиная с которого можно использовать стандартные учебники геометрии для физико-математических классов.

Во второй главе обсуждаются некоторые понятия, связанные с окружностью. Отметим наиболее важные из рассмотренных здесь вопросов: взаимное расположение окружности и прямой, взаимное расположение двух окружностей, длина окружности, длина дуги.

Третья глава посвящена подробному изучению движений плоскости. Раннее знакомство с этой темой, как нам представляется, очень полезно для школьников, серьезно интересующихся математикой и физикой. Изложение начинается определением зеркальной симметрии и проверкой того, что зеркальная симметрия является движением. Затем доказывается, что всякое движение является композицией не более чем трех зеркальных симметрий. Развитая здесь техника позволяет достаточно просто описать основные типы движений и их композиций, а также доказать теорему о классификации конечных групп движений.

В четвертой главе изучаются преобразования подобия плоскости. Здесь подробно обсуждаются свойства гомотетий и устанавливается связь между преобразованиями подобия и движениями. Кроме того, доказывается, что сохранение углов при действии на них преобразований подобия является характеристическим свойством таких преобразований.

Автор выражает глубокую признательность профессорам Л.Н.Шеврину, Ю.Н.Мухину А.Г.Гейну и доценту И.О.Корякову, прочитавшим рукопись и высказавшим замечания, способствовавшие ее улучшению.

1. Аксиомы планиметрии

1.1. Об аксиоматическом построении геометрии

При изложении планиметрии мы считаем заданным некоторое множество π, называемое *плоскостью.* Элементы этого множества – *точки. Фигура* – произвольное множество точек, т.е. произвольное подмножество плоскости. Некоторые фигуры (точки, прямые) и некоторые отношения между фигурами (отношение "лежать между" для точек, отношение конгруэнтности для сегментов и углов) объявляются первоначальными и не определяются. Некоторые свойства первоначальных фигур и отношений описываются *аксиомами.* Аксиомы подобраны таким образом, что из них при помощи математических рассуждений, не делая никаких дополнительных допущений, можно построить привычную планиметрию. Это означает возможность дать *определения* всем известным геометрическим объектам и получить свойства этих объектов, доказав соответствующие *теоремы.* Такой способ изложения геометрии называется *аксиоматическим методом.* Разумеется, аксиоматический метод применим не только при изложении геометрии, но и в других разделах современной математики.

Впервые такой способ изложения геометрии предложил древнегреческий ученый Евклид, живший в III в. до н. э. Хотя аксиоматический метод был известен задолго до Евклида, последовательное применение этого метода в геометрии вызвало восхищение среди современников, а книга "Начала" на протяжении столетий была, по существу, единственным учебником по геометрии. К сожалению, как выяснилось впоследствии, несмотря на стройность и красоту, работа Евклида имела некоторые пробелы. Принятых Евклидом аксиом было недостаточно для получения всех известных теорем. Кроме того, Евклид пытался дать определения всем понятиям, которые он использовал, в том числе и упомянутым выше первоначальным понятиям.

Усовершенствованием и уточнением системы аксиом геометрии занимались многие известные математики. Но лишь в конце XIX в. выдающемуся немецкому математику Давиду Гильберту удалось завершить эту работу. В своей книге "Основания геометрии" он предложил полный список аксиом, позволяющий доказать все известные геометрические факты. Эта система аксиом (с небольшими изменениями) положена в основу нашего дальнейшего изложения.

1.2. Аксиомы соединения

Эта группа аксиом описывает основные свойства прямых. Как мы знаем, каждая прямая является множеством точек. Тот факт, что точка A принадлежит прямой l, будет в дальнейшем обозначаться как $A \in l$. Если $A \in l$, то можно также говорить, что "точка A лежит на прямой l", "прямая l проходит через точку A".

I_1. *Для любых двух различных точек A, B существует единственная прямая l, проходящая через обе точки.*

Эта прямая будет обозначаться (AB).

I_2. *Любая прямая содержит по крайней мере две различные точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Заметим, что из аксиомы I_1 следует, что любые три точки, не лежащие на одной прямой, попарно различны.

Точки, принадлежащие одной прямой, будем называть *коллинеарными* точками.

Предложение 1.1. *Две различные прямые имеют не более одной общей точки.*

Читатель без труда выведет это утверждение из аксиомы I_1.

1.3. Аксиомы порядка

В этом разделе при помощи аксиом порядка вводится отношение "лежать между" на множестве точек плоскости. Следует отметить, что это отношение связывает между собой три точки плоскости.

II_1. Если точка B лежит между точками A и C, то A, B, C – различные коллинеарные точки.

II_2. Если точка B лежит между точками A и C, то B лежит между C и A.

II_3. Для любых различных точек A, B существует такая точка C, что B лежит между A и C.

II_4. Среди трех попарно различных коллинеарных точек A, B, C существует одна и только одна, лежащая между двумя другими.

Если точка B лежит между точками A, C, будем говорить, что B *разделяет* A, C.

Определение. Пусть A, B – две различные точки. Множество, состоящее из точек A, B и всех точек, лежащих между точками A, B, называется *отрезком* и обозначается $[AB]$ или $[BA]$.

Точка M, лежащая между A, B, называется *внутренней* точкой отрезка $[AB]$; точки A, B – его *концами*; все остальные точки прямой (AB) называются *внешними* точками этого отрезка.

Множество, состоящее из всех внутренних точек отрезка $[AB]$, называется *интервалом* и будет обозначаться через $]AB[$ или $]BA[$.

Двухэлементное множество $\{A, B\}$ будем называть *сегментом.* Обозначение для такого сегмента: AB или BA.

Определение. Точки A, B *разделены* прямой l, если l проходит через внутреннюю точку отрезка $[AB]$.

Для прямой l и отрезка $[AB]$ есть три взаимоисключающие возможности: либо отрезок $[AB]$ содержится в прямой l, либо $[AB]$ и l имеют единственную общую точку, либо $[AB]$ и l не имеют общих точек. В том случае, когда прямая и отрезок имеют единственную общую точку, говорят, что прямая *пересекает* отрезок.

Отношение "лежать между" должно обладать следующим свойством: для любых различных точек A, B существует точка C, лежащая между A, B. Оказывается, это свойство нельзя вывести из аксиом II_1 – II_4. Поэтому придется ввести еще одну аксиому.

II_5. *Пусть A, B, C – неколлинеарные точки. Если прямая l разделяет точки A, B и не проходит через точку C, то l разделяет либо B и C, либо A и C.*

Пусть A, B, C – неколлинеарные точки. Как обычно, фигура, являющаяся объединением трех отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, называется треугольником. Точки A, B, C – вершины треугольника, отрезки $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ – его стороны; обозначение для такого треугольника обычное: $\triangle ABC$.

Аксиому II_5 можно теперь сформулировать так: *если прямая не проходит через вершины треугольника ABC и пересекает сторону $[AB]$, то эта прямая пересечет одну из двух других сторон.*

Из такой формулировки аксиомы II_5 легко вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть прямая l не проходит через вершины треугольника ABC. Если l не пересекает две стороны этого треугольника, то она не пересекает и третью сторону.*

А может ли прямая пересечь все три стороны некоторого треугольника? Предыдущий опыт подсказывает, что это невозможно. Оказывается, аксиома II_5 позволяет получить строгое доказательство такой невозможности.

Предложение 1.3. *Пусть прямая l не проходит через вершины треугольника ABC. Тогда l не может пересечь все три стороны этого треугольника.*

Доказательство. Рассуждая "от противного", предположим, что найдутся треугольник ABC и прямая l такие, что l пересекает стороны $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ в точках K, L, M соответственно. Без ограничения общности можно считать, что точка L лежит между точками K, M. Применим аксиому II_5

к треугольнику AKM и прямой $m = (BC)$. Прямая m пересекает сторону $[KM]$ этого треугольника и не пересекает сторону $[AM]$. Поэтому прямая m должна пересечь сторону $[AK]$ в точке B. Значит, B – внутренняя точка отрезка AK. Используя аксиому II_4, получим, что K не является внутренней точкой отрезка $[AB]$. Противоречие.

Следующее утверждение показывает, что каждый отрезок содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Предложение 1.4. *Для любых различных точек A, B существует точка C, разделяющая точки A, B.*

Доказательство. Пусть точка G не лежит на прямой (AB) (рис. 1). В силу аксиомы II_3 найдутся такие точки F и H, что G разделяет A и F, а B разделяет F и H. Из аксиомы II_4 следует, что точка H не лежит между точками B и F. Применив к прямой (GH) и треугольнику AFB аксиому II_5, получим, что прямая (GH) пересекает отрезок $[AB]$ в некоторой точке C.

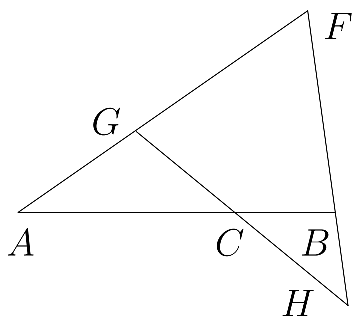


Рис. 1

1.4. Взаимное расположение отрезков на прямой

Здесь мы продолжим изучение свойств отношения "лежать между" на множестве точек.

Предложение 1.5. *Если A, B, C, D – различные коллинеарные точки, причем $B \in]AC[$ и $D \in]AB[$. Тогда $B \in]CD[$.*

Доказательство. Используя аксиомы I_2 и II_3, найдем точки G, F так, что $G \notin (AC)$ и G лежит между D и F (рис. 2). Так как D разделяет точки A, B, то в силу аксиомы II_4 точка B не может лежать между точками A и D; таким образом, прямая (FB) не пересекает отрезок $[AD]$. Из выбора точки F следует, что (FB) не пересекает и отрезок $[GD]$. Стало быть, прямая (FB) не пересекает две стороны треугольника AGD.

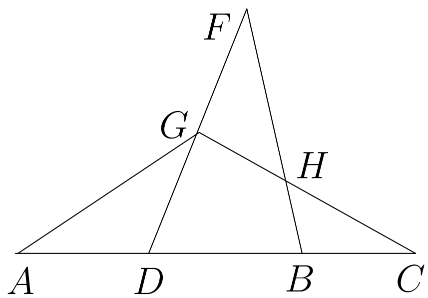


Рис. 2

Используя предложение 1.2, получаем, что прямая (FB) не пересекает отрезок $[AG]$. Из условия следует, что (FB) пересекает отрезок $[AC]$. Применив аксиому II_5 к прямой (FB) и треугольнику AGC, получим, что (FB) обязана пересечь отрезок $[GC]$ в точке H.
Теперь заметим, что прямая (FB) не пересекает $[GD]$ и пересекает $[GC]$. Из аксиомы II_5 следует, что (FB) должна пересечь отрезок $[CD]$. Поскольку B – единственная точка пересечения прямых (FB) и (AC), то $B \in]CD[$.

Предложение 1.6. *Пусть B – внутренняя точка отрезка $[AC]$. Тогда*

(a) $]AB[\cap]BC[=\emptyset$;

(b) $[AB] \subseteq [AC], \ [BC] \subseteq [AC]$;

(c) $[AB] \cup [BC] = [AC]$.

Доказательство. (a) Пусть $D \in]AB[$. Из предложения 1.5 следует, что $B \in]CD[$. Применив аксиому II_4, получим, что D не разделяет B и C, откуда $D \notin]BC[$.

(b) Пусть $D \in [AB]$. Если $D = A$ или $D = B$, то включение $D \in [AC]$ очевидно. Предположим, что D – внутренняя точка отрезка $[AB]$. Найдем точки G, F так, что $G \notin (AC)$ и G разделяет A и F (рис. 3). Прямая (DG) пересекает стороны $[AF]$, $[AB]$ треугольника AFB; используя предложение 1.3, получим, что (DG)не пересекает $[FB]$. Так как в силу п. (a) $D \notin$ $\notin [BC]$, то (DG) не пересекает две стороны треугольника FBC. Из предложения 1.2 получаем, что (DG) не пересекает и сторону $[FC]$ этого треугольника. Применение аксиомы II_5 к прямой (DG) и треугольнику AFC позволяет заключить, что (DG) пересекает сторону $[AC]$ этого треугольника. Значит, $D \in [AC]$. Итак, включение $[AB] \subseteq [AC]$ доказано. Включение $[BC] \subseteq [AC]$ проверяется аналогично.

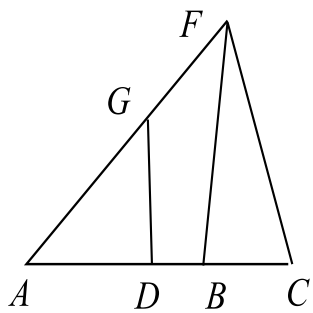


Рис. 3

(c) Так как $[AB] \subseteq [AC]$ и $[BC] \subseteq \subseteq [AC]$, то $[AB] \cup [BC] \subseteq [AC]$.

Проверим обратное включение. Пусть $D \in [AC]$. Если $D \in \in [BC]$, то доказывать нечего. Предположим, что $D \notin [BC]$, и воспользуемся рис. 3, построенным при рассмотрении п. (b). Многократно применяя предложение 1.2 и аксиому II_5 к прямой (DG) и треугольникам AFC, FBC и AFB, получим, что прямая (DG) пересекает отрезок $[AC]$. Детали доказательства оставляются читателю в качестве упражнения.

В заключение этого раздела докажем следующее важное утверждение.

Предложение 1.7. *Любой отрезок является бесконечным множеством.*

Доказательство. Пусть $[A_0B_0]$ – данный отрезок. Методом математической индукции легко проверяется следующее утверждение: для любого натурального числа n на отрезке $[A_0B_0]$ существуют такие точки B_1, B_2, ..., B_n, что B_i лежит между A_0 и B_{i-1}. При проверке базы индукции необходимо использовать предложение 1.4; доказательство шага индукции основывается на применении включения (b) из предложения 1.6.

1.5. Лучи. Взаимное расположение лучей на прямой

Пусть точки O, A, B лежат на прямой l, причем $A, B \neq O$. Будем говорить, что A, B *лежат по одну сто-*

рону от точки O (обозначение $A \underset{O}{\sim} B$), если либо $A = B$, либо $O \notin [AB]$.

Из этого определения следует, что для любой точки A прямой l, отличной от точки и O, выполнено соотношение $A \underset{O}{\sim} A$.

Кроме того, для любых точек $A, B \in l$ из $A \underset{O}{\sim} B$ следует $B \underset{O}{\sim} A$.

Первое этих свойств, как мы знаем, называется *рефлексивностью*, второе – *симметричностью.*

Проверим, что отношение $\underset{O}{\sim}$ обладает еще одним важным свойством, называемым *транзитивностью.*

Лемма 1. *Если $A \underset{O}{\sim} B$ и $B \underset{O}{\sim} C$, то $A \underset{O}{\sim} C$.*

Доказательство. Если точки A, B, C различны, то из аксиомы II_4 следует, что в точности одна из этих точек лежит между двумя другими. Применение п. (b) и (c) из предложения 1.6 показывает, что выполнен один из трех случаев: $[AC] \subseteq [AB]$, $[AC] \subseteq [BC]$, $[AC] = [AB] \cup [BC]$. Из этих соотношений видно, что, предположив включение $O \in [AC]$, мы получим либо $O \in [AB]$, либо $O \in [BC]$. Оба эти включения противоречат условию.

Случай, когда среди точек A, B, C есть две совпадающие, читатель без труда рассмотрит самостоятельно.

Таким образом, отношение $\underset{O}{\sim}$ на множестве всех точек прямой l, отличных от точки O, является отношением эквивалентности.

Пусть l – произвольная прямая и $O \in l$. Если $A \in l$ и $A \neq O$, то множество $\{X | X \underset{O}{\sim} A\}$ называется *открытым лучом с началом в точке* O и обозначается $]OA)$. Нетрудно понять, что открытый луч с началом в точке O – это один из классов эквивалентности отношения $\underset{O}{\sim}$. *Замкнутый луч* $[OA)$ получается из открытого луча $]OA)$ добавлением начала O.

Лемма 2. *Пусть O – произвольная точка прямой l, $A, B \in l$ и $A, B \neq O$. Лучи $]OA)$ и $]OB)$ совпадают в том и только том случае, когда $A \underset{O}{\sim} B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если лучи $]OA)$ и $]OB)$ совпадают, то $B \in]OA)$. Из полученного включения следует, что $A \underset{O}{\sim} B$.

Пусть теперь $A \underset{O}{\sim} B$ и X – произвольная точка прямой l, отличная от точки O. Из леммы 1 и симметричности данного отношения следует, что соотношения $X \underset{O}{\sim} A$ и $X \underset{O}{\sim} B$ равносильны. Отсюда вытекает, что

$$X \in]OA) \iff X \underset{O}{\sim} A \iff X \underset{O}{\sim} B \iff X \in]OB).$$

Стало быть, $]OA) =]OB)$.

Лемма 3. *Пусть O, A, B – произвольные точки прямой l, причем O лежит между A, B. Тогда $]OA) \cap]OB) = \emptyset$ и $[OA) \cup [OB) = l$.*

Лемма 3 проверяется аналогично лемме 2. Соответствующее доказательство оставляется читателю в качестве несложного упражнения.

Из лемм 2, 3 вытекает следующее важное утверждение.

Предложение 1.8. *Произвольная точка O прямой l определяет два открытых луча, причем каждая точка прямой, отличная от O, принадлежит в точности одному из этих лучей.*

Иными словами, отношение $\underset{O}{\sim}$ имеет в точности два класса эквивалентности.

Лучи, о которых идет речь в предложении 1.8 (а также соответствующие им замкнутые лучи), будем называть *взаимно дополнительными*. Часто взаимно дополнительные открытые лучи с началом в точке O будут обозначаться l_O и l'_O

Изучим теперь взаимное расположение двух различных лучей произвольной прямой.

Предложение 1.9. *Пусть l_A, l_B – различные лучи прямой l. Тогда*

(a) *если $B \in l_A$, $A \notin l_B$, то $l_B \subset l_A$;*

(b) *если $B \notin l_A$, $A \notin l_B$, то $l_A \cap l_B = \emptyset$;*

(c) *если $B \in l_A$, $A \in l_B$, то $l_A \cap l_B =]AB[$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Пусть C – произвольная точка луча l_B, отличная от точки B. По условию $A \notin l_B$, поэтому точка B разделяет точки A, C. Из аксиомы II_4 теперь следует, что $C \underset{A}{\sim} B$. Но $B \in l_A$, стало быть, и $C \in l_A$. Таким образом проверено, что любая точка луча l_B принадлежит лучу l_A. Значит, луч l_B является подмножеством луча l_A.

(b) Так как $B \notin l_A$, то $B \in l'_A$. Учитывая, что $A \notin l_B$, мы видим, что к лучам l'_A и l_B можно применить утверждение п. (a). Поэтому $l_B \subset l'_A$. Отсюда следует, что $l_A \cap l_B \subset l_A \cap l'_A = \emptyset$.

(c) Предположим сначала, что $X \in l_A \cap l_B$. Это означает выполнение двух включений $X \in l_A$ и $X \in l_B$. Так как по условию $B \in l_A$, $A \in l_B$, то $X \underset{A}{\sim} B$ и $X \underset{B}{\sim} A$. Применение аксиомы II_4 показывает, что точка X лежит между точками A,B, т. е. $X \in [AB]$.

Пусть теперь X – точка интервала $]AB[$, т. е. X разделяет точки A, B. Но тогда $X \underset{A}{\sim} B$ и $X \underset{B}{\sim} A$. Соотношение $X \underset{A}{\sim} B$ означает, что X, B принадлежат одному и тому же лучу с началом в точке A; поскольку $B \in l_A$, имеем $X \in l_A$. Аналогично проверяется, что $X \in l_B$. Таким образом, проверено, что любая внутренняя точка отрезка $[AB]$ принадлежит множеству $l_A \cap l_B$.

Заметим, что из предложения 1.9 вытекает следующее утверждение: *если $l_A \subset l_B$, то $A \in l_B$.*

В самом деле, предположим, что $A \notin l_B$. Поскольку лучи l_A и l_B различны, имеем $A \neq B$. Для точки B имеется две возможности: либо $B \in l_A$, либо $B \notin l_A$. В силу предложения 1.9 в первом случае получаем $l_B \subset l_A$, а во втором случае – $l_A \cap l_B = \emptyset$. Таким образом, из предположения $A \notin l_B$ следует, что включение $l_A \subset l_B$ не выполняется.

Предложение 1.10. *Пусть A, B, C – различные точки прямой l. Рассмотрим такие лучи l_B, l_C, что $A \notin l_B$, $A \notin l_C$. Точка B лежит между A и C в том и только том случае, если $l_C \subset l_B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B лежит между A и C. Тогда A, C принадлежат дополнительным лучам с началом B. Так как $A \notin l_B$, то $C \in l_B$. Далее, поскольку C не лежит между A, B, эти точки принадлежат одному из лучей с началом C. Но $A \notin l_C$, поэтому $B \notin l_C$. Таким образом, к лучам l_B, l_C применим пункт (а) предложения 1.9, откуда $l_C \subset l_B$.

Пусть $l_C \subset l_B$. Тогда $C \in l_B$. Так как $A \notin l_B$, то A, C принадлежат разным лучам с началом в точке B, поэтому B лежит между A, C.

1.6. Полуплоскости

Пусть l – произвольная прямая, A, B – точки, не принадлежащие прямой l. Будем говорить, что точки A, B *лежат по одну сторону* от прямой l (обозначение $A \underset{l}{\sim} B$), если либо $A = B$, либо $[AB] \cap l = \emptyset$.

Ясно, что это отношение рефлексивно и симметрично. Проверим, что оно транзитивно.

Лемма 1. *Если $A \underset{l}{\sim} B$ и $B \underset{l}{\sim} C$, то $A \underset{l}{\sim} C$.*

Доказательство. Если точки A, B, C неколлинеарны, то утверждение сразу следует из предложения 1.2. Пусть точки A, B, C коллинеарны. Тогда существует прямая m, содержащая эти точки. Если $m \cap l = \emptyset$, то доказываемое утверждение очевидно. Если же $m \cap l = \{O\}$, то требуемое сразу следует из леммы 1 п. 1.5.

Из леммы 1 вытекает, что отношение $\underset{l}{\sim}$ на множестве $\pi \setminus l$ является отношением эквивалентности.

Пусть l – произвольная прямая плоскости. Для любой точки A, не лежащей на прямой l, рассмотрим множество $]lA) = \{X | X \underset{l}{\sim} A\}$, являющееся, как мы знаем, классом эквивалентности отношения $\underset{l}{\sim}$. Это множество обычно называют *открытой полуплоскостью с границей* l. *Замкнутая полуплоскость* $[lA)$ получается из открытой добавлением прямой l.

Пусть A, B – точки, не принадлежащие прямой l. Имеются две взаимоисключающие возможности: либо A, B лежат по одну сторону от прямой l, либо эта прямая разделяет точки

A, B. Используя свойства классов эквивалентности, получаем, что

1) если A, B лежат по одну сторону от прямой l, то $]lA) = \\ =]lB)$;

2) если прямая l разделяет точки A, B, то $]lA)$, $]lB)$ не имеют общих точек.

Это означает, что отношение $\underset{l}{\sim}$ имеет ровно два класса эквивалентности. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.11. *Любая прямая l определяет две открытые полуплоскости, причем каждая точка плоскости, не принадлежащая прямой l, содержится в точности в одной из этих полуплоскостей.*

Полуплоскости, о которых идет речь в предложении 1.11, называются *взаимно дополнительными.* В дальнейшем одна из таких полуплоскостей будет обозначаться как π_l, а вторая – π'_l.

1.7. Ориентация прямой

О п р е д е л е н и е. Лучи l_A, l_B называются *сонаправленными (одинаково ориентированными)*, если один из них содержится в другом.

Если лучи l_A, l_B сонаправлены, то будем писать $l_A \uparrow\uparrow l_B$.

Лемма 1. *Пусть l_A и l_B – произвольные лучи прямой l. Если $l_A \uparrow\uparrow l_B$, то $l'_A \uparrow\uparrow l'_B$.*

Предложение 1.12. *Пусть l_A, l_B, l_C – произвольные лучи прямой l. Тогда*

(a) $l_A \uparrow\uparrow l_A$ *(рефлексивность);*

(b) *если $l_A \uparrow\uparrow l_B$, то $l_B \uparrow\uparrow l_A$ (симметричность);*

(c) *если $l_A \uparrow\uparrow l_B$ и $l_B \uparrow\uparrow l_C$, то $l_A \uparrow\uparrow l_C$ (транзитивность).*

Доказательство. Выполнение утверждений (a), (b) очевидно. Проверим утверждение (c). Отметим прежде всего, что точки A, B, C можно считать попарно различными (подумайте, почему). Условие $l_A \uparrow\uparrow l_B$ и $l_B \uparrow\uparrow l_C$ означает, что выполнена одна из четырех возможностей:

(1) $l_A \subset l_B$ и $l_B \subset l_C$; (3) $l_B \subset l_A$ и $l_C \subset l_B$;

(2) $l_A \subset l_B$ и $l_C \subset l_B$; (4) $l_B \subset l_A$ и $l_B \subset l_C$.

Нетрудно видеть, что в случаях (1), (3) один из двух лучей l_A и l_C обязательно содержится в другом. Поэтому в каждом из этих случаев соотношение $l_A \uparrow\uparrow l_C$ очевидным образом выполнено.

Рассмотрим случай (2). Имеем $A \in l_B$, $C \in l_B$, поэтому точка B не лежит между точками A, C. Из аксиомы II_4 следует, что либо A лежит между B и C, либо C лежит между B и A. Учитывая, что $B \notin l_A$ и $B \notin l_C$, применим предложение 1.10. Тогда либо $l_C \subset l_A$, либо $l_A \subset l_C$, т. е. $l_A \uparrow\uparrow l_C$. Переходя к рассмотрению возможности (4), заметим, что условие $l_B \subset l_A$ и $l_B \subset l_C$ эквивалентно условию $l'_B \supset l'_A$ и $l'_B \supset l_C$, откуда $l'_A \uparrow\uparrow l'_C$ и, значит, $l_A \uparrow\uparrow l_C$.

Предложение 1.13. *Для любых лучей l_A, l_B прямой l либо $l_B \uparrow\uparrow l_A$, либо $l_B \uparrow\uparrow l'_A$.*

Доказательство. Если $A = B$, то либо $l_B = l_A$, либо $l_B = l'_A$.

Пусть $A \neq B$. Возможны два случая: $B \in l_A$ или $B \in l'_A$.

Рассмотрим первый случай, когда $B \in l_A$. Если $A \notin l_B$, то в силу пункта (a) предложения 1.9 выполнено включение $l_B \subset l_A$, т. е. $l_B \uparrow\uparrow l_A$. Если же $A \in l_B$, то $A \notin l'_B$, и значит, $l'_B \subset l_A$. Отсюда $l'_A \subset l_B$, т. е. $l_B \uparrow\uparrow l'_A$.

Второй случай рассматривается совершенно аналогично.

Определение. Прямая l, на которой зафиксирован луч l_O, называется *ориентированной прямой*.

Поскольку лучи l_O и l'_O, очевидно, не являются сонаправленными, из предложения 1.13 немедленно вытекает, что множество всех лучей ориентированной прямой распадается на два класса:

- класс лучей, сонаправленных с лучом l_O;
- класс лучей, сонаправленных с лучом l'_O.

Если луч l_B сонаправлен с лучом l_O, то говорят, что l_B имеет *положительное направление*; в противном случае l_B имеет *отрицательное направление.*

Определение. Упорядоченная пара различных точек A, B называется *направленным сегментом* и обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Ясно, что направленному сегменту $\overrightarrow{AB}$ однозначно сопоставляется луч $]AB)$. Это обстоятельство позволяет дать определение сонаправленности для двух направленных сегментов: направленные сегменты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются сонаправленными ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), если таковыми являются лучи $]AB)$ и $]CD)$. Если A, B – точки ориентированной прямой, то $\overrightarrow{AB}$ имеет положительное (отрицательное) направление одновременно с лучом $]AB)$

Определение. Пусть A, B – различные точки ориентированной прямой l. Будем говорить, что A *предшествует* B, если луч $]AB)$ имеет положительное направление.

Если A предшествует B на ориентированной прямой, то будем писать $A < B$.

Предложение 1.14. *Пусть l – ориентированная прямая. Тогда*

(a) *для любых точек $A, B \in l$ выполнено одно из трех соотношений $A < B$, $A = B$, $B < A$;*

(b) *для любых точек $A, B, C \in l$ из соотношений $A < B$, $B < C$ следует $A < C$.*

Доказательство. Проверим свойство (a). Пусть l_O – луч, задающий ориентацию прямой l. Если $A \neq B$, то имеется в точности две возможности: либо $]AB) \uparrow\uparrow l_O$, либо $]BA) \uparrow\uparrow l_O$. В первом случае выполнено соотношение $A < B$, во втором – $B < A$.

Убедимся в справедливости свойства (b). Поскольку $A < B$ и $B < C$, имеем $]AB) \uparrow\uparrow l_O$ и $]BC) \uparrow\uparrow l_O$. Используя симметричность и транзивность отношения сонаправленности лучей, получаем $]AB) \uparrow\uparrow]BC)$. Поскольку один из этих двух лучей содержится в другом и $B \in]AB)$, имеем $]BC) \subset]AB)$, и потому $C \in]AB)$. Таким образом, точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Отсюда, как мы знаем, следует, что лучи $]AC)$ и $]AB)$ совпадают. Следовательно, $]AC) \uparrow\uparrow l_O$, т. е. $A < C$.

1.8. Углы. Флаги

В этом разделе мы вспомним определение угла и введем важное для дальнейшего изложения понятие флага. Это понятие будет использовано в п. 1.9 для того, чтобы ввести понятие ориентации плоскости.

Пусть l, m – две различные прямые, пересекающиеся в точке O, $a = l_O$, $b = m_O$ – лучи с началом в точке O.

О п р е д е л е н и е. *Угол с вершиной O и сторонами a, b* – это фигура, состоящая из двух лучей a, b.

Угол с вершиной O и сторонами a, b обозначается $\angle aOb$; иногда будет использоваться упрощенное обозначение для такого угла: $\angle ab$. Если $A \in a$, $B \in b$ и $A, B \neq O$, то можно использовать обозначение $\angle AOB$.

Пусть дан угол AOB, $l = (AO)$, $m = (OB)$. Обозначим через π_l, π_m полуплоскости с границами l, m соответственно, причем эти полуплоскости выбраны так, что $B \in \pi_l$, $A \in \pi_m$.

О п р е д е л е н и е. Множество $\pi_l \cap \pi_m$ называется *внутренней областью угла AOB*.

О п р е д е л е н и е. Множество $\pi_l' \cup \pi_m'$ называется *внешней областью угла AOB*.

Иногда бывает удобно рассматривать нулевые и развернутые углы. *Нулевой угол* образован двумя совпадающими лучами; *развернутый угол* состоит из двух дополнительных лучей. Внутренняя область нулевого угла – пустое множество. Внутренней областью развернутого угла естественно считать одну из полуплоскостей, границей которой является прямая, содержащая стороны этого угла.

В дальнейшем полезным окажется понятие ориентированного угла.

О п р е д е л е н и е. Упорядоченная пара лучей a, b, имеющих общее начало, называется *ориентированным углом.*

Обозначение: $\measuredangle ab$.

Таким образом, ориентированный угол $\measuredangle ab$ имеет начальную сторону a и конечную сторону b.

Лемма 1. *Пусть aOb – произвольный угол, отличный от развернутого, $A \in a$, $B \in b$, причем $A, B \neq O$. Если X лежит между A, B, то X принадлежит внутренней области угла aOb.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через l, m прямые, содержащие лучи a, b соответственно. Полуплоскости π_l, π_m выберем так, чтобы выполнялись включения $A \in \pi_m$, $B \in \pi_l$. Тогда внутренняя область угла aOb есть $\pi_l \cap \pi_m$. Точки B, X лежат по одну сторону от прямой l и $B \in \pi_l$, поэтому $X \in \pi_l$. Аналогично проверяется, что $X \in \pi_m$. Стало быть, $X \in \pi_l \cap \pi_m$.

Предложение 1.15. *Пусть луч n_O проходит через внутреннюю область угла aOb. Если $A \in a$, $B \in b$, то точки A, B лежат по разные стороны от прямой n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a = l_O$, $b = m_O$, $a \subset \pi_m$, $b \subset \pi_l$. Тогда внутренняя область угла aOb есть $\pi_l \cap \pi_m$. На луче b', дополнительном к лучу b, возьмем произвольную точку B' (рис. 4). В силу леммы 1 все внутренние точки отрезка $[AB']$ лежат во внутренней области угла aOb', а потому эти точки содержатся как в полуплоскости π'_l, дополнительной к π_l, так и в полуплоскости π_m. Отсюда следует, что луч n_O не имеет общих точек с отрезком $[AB']$.

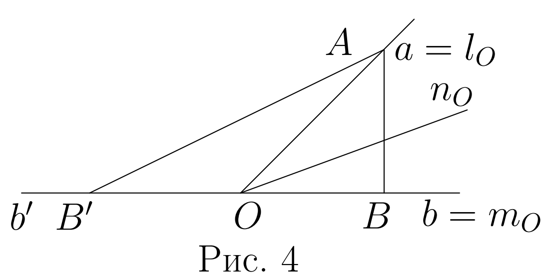


Рис. 4

Кроме того, луч n'_O, дополнительный к лучу n_O, содержится в полуплоскости π'_m, дополнительной к π_m, и потому также не имеет с отрезком $[AB']$ общих точек. Значит, $[AB'] \cap n = \emptyset$. Стало быть, точки A, B' лежат по одну сторону от прямой n. Так как B, B' лежат по разные стороны от n, то A, B также лежат по разные стороны от прямой n.

Пусть дан произвольный угол aOb. Будем говорить, что луч d с началом в точке O *разделяет* лучи a, b, если d проходит во внутренней области этого угла.

Пусть l – некоторая прямая, O – точка этой прямой, l_O – один из лучей с началом O, π_l – одна из полуплоскостей с границей l.

Определение. *Флаг* $\mathcal{F}$ – это объединение луча l_O и π_l.

Такой флаг $\mathcal{F}$ будет обозначаться парой (π_l, l_O). Луч l_O часто будет называться *древком*, а точка O – *началом* флага $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ и $\mathcal{F}' = (\pi_l', l_O')$, то флаги $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ называются *дополнительными*.

Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_O)$ и $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_O)$ – два флага, имеющих общее начало O.

Определение. Флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ называются *одинаково ориентированными*, если выполнено одно из трех условий:

(1) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, т. е. $l_O = m_O$ и $\pi_l = \pi_m$;

(2) $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ – дополнительные флаги, т. е. $l_O = m_O'$ и $\pi_l = \pi_m'$;

(3) прямые l, m различны, и либо $m_O \subset \pi_l$, $l_O \subset \pi_m'$, либо $l_O \subset \pi_m$, $m_O \subset \pi_l'$.

Следующее утверждение сразу вытекает из определения одинаково ориентированных флагов.

Предложение 1.16. *Пусть на прямой l выбрана точка O. Тогда флаг (π_l, l_O) не является одинаково ориентированным как с флагом (π_l', l_O), так и с флагом (π_l, l_O').*

Предложение 1.17. *Если флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированы, то флаг $\mathcal{F}_1$ одинаково ориентирован с флагом $\mathcal{F}_2'$, дополнительным к флагу $\mathcal{F}_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_O)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_O)$ Предположим сначала, что прямые l, m различны. Так как

$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированные флаги, то выполнена одна из двух возможностей:

(a) $m_O \subset \pi_l$, $l_O \subset \pi'_m$; (b) $l_O \subset \pi_m$, $m_O \subset \pi'_l$.

Нетрудно видеть, что условие (a) равносильно условию (c) $m'_O \subset \pi'_l$, $l_O \subset \pi'_m$, а условие (b) – условию (d) $l_O \subset \pi_m$, $m'_O \subset \pi_l$.

Поскольку $\mathcal{F}'_2 = (\pi'_m, m'_O)$, выполнение одного из условий, (c) или (d), означает, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}'_2$ одинаково ориентированы.

Допустим теперь, что прямые l, m совпадают. Тогда либо $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, либо $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}'_2$. В обоих случаях доказываемое утверждение очевидно.

Следующее утверждение легко вытекает из предыдущего.

Предложение 1.18. *Если флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированы, то одинаково ориентированы и дополнительные к ним флаги $\mathcal{F}'_1$, $\mathcal{F}'_2$.*

Отношение одинаковой ориентированности на множестве флагов, имеющих общую вершину, очевидно, рефлексивно и симметрично. Проверим, что оно транзитивно.

Предложение 1.19. *Пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ – произвольные флаги с общим началом. Если флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы с флагом $\mathcal{F}_2$, то флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_O)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_O)$, $\mathcal{F}_3 = (\pi_n, n_O)$. Предположим, что l, m, n – попарно различные прямые. Прямые l и m делят плоскость на четыре части, являющиеся внутренними областями следующих углов $l_O m_O$, $l'_O m_O$, $l_O m'_O$, $l'_O m'_O$. Заменяя при необходимости флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$ дополнительными к ним флагами и используя предложения 1.17 и 1.18, можно считать без ограничения общности, что луч n_O лежит во внутренней области угла $l_O m_O$. Поскольку флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированы, выполнено одно из двух условий:

(1) $m_O \subset \pi_l,\ l_O \subset \pi'_m$; (2) $m_O \subset \pi'_l,\ l_O \subset \pi_m$.

Пусть выполнено условие (1). В этом случае внутренняя область угла $l_O m_O$ есть множество $\pi_l \cap \cap \pi'_m$ (рис. 5). Поэтому $n_O \subset \pi_l \cap \pi'_m$, т. е. $n_O \subset \pi_l$ и $n_O \subset \pi'_m$. Поскольку флаги $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы и $n_O \subset \pi'_m$, имеем $m_O \subset \pi_n$. Однако, прямая n, очевидно, разделяет лучи l_O и m_O, поэтому $l_O \subset \pi'_n$. Выполнение соотношений $l_O \subset \pi'_n$ и $n_O \subset \pi_l$ означает, что $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы.

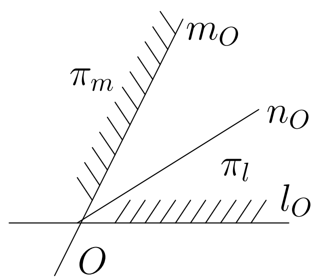


Рис. 5

Пусть теперь выполнено условие (2). Тогда внутренняя область угла $l_O m_O$ есть $\pi'_l \cap \pi_m$. Поэтому $n_O \subset \pi'_l$, $n_O \subset \pi_m$. Из одинаковой ориентированности флагов $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ и условия $n_O \subset \pi_m$ следует, что $m_O \subset \pi'_n$. Так как лучи l_O и m_O лежат по разные стороны от прямой n, из включения $m_O \subset \pi'_n$ вытекает, что $l_O \subset \pi_n$. Поскольку $n_O \subset \pi'_l$, окончательно получаем, что $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы.

Случай, когда среди прямых l, m, n есть совпадающие, оставляется читателю в качестве упражнения.

Выше (см. предложение 1.16) было отмечено, что флаги $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ и $\mathcal{G} = (\pi'_l, l_O)$ противоположно ориентированы. Оказывается, множество всех флагов с началом в точке O можно разбить на два класса: один из классов содержит все флаги одинаково ориентированные с $\mathcal{F}$, другой – все флаги одинаково ориентированные с $\mathcal{G}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.20. *Пусть дан произвольный флаг $\mathcal{H} = (\pi_m, m_O)$. Тогда $\mathcal{H}$ одинаково ориентирован в точности с одним из флагов $\mathcal{F}$ или $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что прямые m и l различны. Без ограничения общности можно считать, что $m_O \subset \pi_l$. Для луча l_O есть лишь две возможности: $l_O \subset \pi'_m$ или $l_O \subset \pi_m$. В первом случае $\mathcal{H}$ одинаково ориентирован с $\mathcal{F}$, во втором – с $\mathcal{G}$.

Случай, когда прямые совпадают, читатель без труда рассмотрит сам.

Осталось заметить, что $\mathcal{H}$ не может быть одинаково ориентирован с обоими флагами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$. В самом деле, если бы $\mathcal{H}$ оказался одинаково ориентирован как с $\mathcal{F}$, так и с $\mathcal{G}$, то из предложения 1.19 следовало бы, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ одинаково ориентированы. Однако последнее утверждение противоречит предложению 1.16.

В следующем разделе понятие одинаковой ориентированности будет распространено на произвольные флаги; там же будет доказана теорема 1.1, обобщающая предложение 1.19.

1.9. Ориентация плоскости

В предыдущем разделе дано определение одинаковой ориентированности флагов, имеющих общее начало. Теперь мы распространим это понятие на произвольные флаги.

Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$ – произвольные флаги. Если $A = B$, то применяется определение из 1.8. Пусть $A \neq B$. Вводя обозначение $n = (AB)$, рассмотрим пару сонаправленных лучей n_A, n_B (рис. 6). Флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ будем называть одинаково ориентированны, если можно так выбрать полуплоскость π_n, что флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1 = (\pi_n, n_A)$, а также флаги $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2 = (\pi_n, n_B)$ одинаково ориентированы в смысле определения из разд. 1.8.

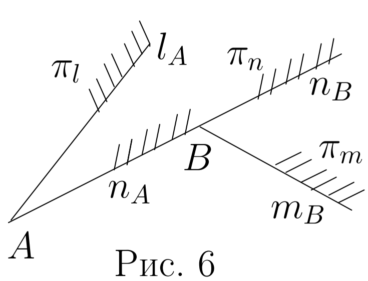


Рис. 6

Легко видеть, что определенное таким образом отношение одинаковой ориентированности на множестве флагов рефлексивно и симметрично. Нашей целью является проверка того, что это отношение транзитивно.

В дальнейшем иногда будет использоваться следующее полезное замечание. Пусть $\mathcal{F} = (\pi_l, l_A)$ – некоторый флаг. Если $B \in l_A$, $C \in \pi_l$, то очевидно, что упорядоченная тройка точек (A, B, C) однозначно определяет флаг $\mathcal{F}$. Учитывая это обстоятельство, для флага $\mathcal{F}$ можно использовать альтернативное обозначение (A, B, C).

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определения.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$ *– одинаково ориентированные флаги,* $n = (AB)$, n_A, n_B *– сонаправленные лучи и флаг* $\mathcal{F}_1$ *одинаково ориентирован с флагом* $\mathcal{G}_1 = (\pi_n, n_A)$. *Тогда флаги* $\mathcal{F}_2$ *и* $\mathcal{G}_2 = (\pi_n, n_B)$ *одинаково ориентированы.*

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$, $\mathcal{F}_3 = (\pi_n, m_C)$ *– такие флаги, что точки* A, B, C *коллинеарны. Если* $\mathcal{F}_1$ *одинаково ориентирован с* $\mathcal{F}_2$, *а* $\mathcal{F}_2$ *одинаково ориентирован с* $\mathcal{F}_3$, *то* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_3$ *одинаково ориентированы.*

Доказательство. Если среди точек A, B, C есть совпадающие, то утверждение непосредственно вытекает из определения одинаковой ориентированности флагов.

Пусть точки A, B, C различны. Обозначим через p прямую, содержащую эти точки, а через p_A, p_B, p_C сонаправленные лучи. Рассмотрим флаг $\mathcal{G}_1 = (\pi_p, p_A)$, одинаково ориентированный с флагом $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$. Из леммы 1 следует, что флаги $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{G}_2 = (\pi_p, p_B)$ одинаково ориентированы. Еще раз применяя лемму 1 к флагам $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3 = (\pi_p, p_C)$, заключаем, что флаги $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{G}_3$ одинаково ориентированы. Теперь ясно, что флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы по определению.

Лемма 3. *Пусть флаги* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$ *имеют началом точку* A, *а флаги* $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$ *– точку* B. *Если пары флагов* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{F}_2$ *и* $\mathcal{G}_2$ *одинаково ориентированы, то флаги* $\mathcal{G}_1$ *и* $\mathcal{G}_2$ *также одинаково ориентированы.*

Доказательство. Если точки A, B совпадают, требуемое сразу следует из предложения 1.19. Пусть точки A, B различны, $n = (AB)$, n_A, n_B – сонаправленные лучи. Рассмотрим такую полуплоскость π_n, что флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{H}_1 = (\pi_n, n_A)$ одинаково ориентированы. Из предложения 1.19 вытекает одинаковая ориентированность флагов $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{H}_1$. Применяя лемму 1 к флагам $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2 = (\pi_n, n_B)$, получим, что флаги $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{H}_2$ одинаково ориентированы. В силу предложения 1.19 флаги $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{H}_2$ также одинаково ориентированы. Теперь видно, что $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ по определению имеют одинаковую ориентацию.

Лемма 4. *Пусть A, B, C – произвольные неколлинеарные точки. Тогда флаги (A, B, C), (B, C, A), (C, A, B) одинаково ориентированы.*

Доказательство. Пусть $n = (AB)$, $l = (BC)$. Выберем на прямых n и l лучи n_A, n_B и l_B так, что $B \in n_A$, $A \notin n_B$, $C \in l_B$ (рис. 7). Кроме того, зафиксируем такие полуплоскости π_n, π_l так, что $C \in \pi_n$, $A \in \pi_l$. Заметим, что из предложения 1.9 вытекает включение $n_B \subseteq n_A$, т. е. лучи n_A, n_B сонаправлены. Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_n, n_A)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_l, l_B)$, $\mathcal{G} = (\pi_n, n_B)$. Проверим, что флаги $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}$ одинаково ориентированы. В самом деле, $A \in \pi_l$ и $A \notin n_B$; из этих соотношений вытекает, что $n_B \subset \pi_l'$. Аналогично, $C \in \pi_n$ и $C \in l_B$, откуда $l_B \subset \pi_n$. Применяя определение одинаковой ориентированности флагов с общим началом, получаем требуемое. Теперь нетрудно видеть, что флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированы по определению. Осталось заметить, что $(A, B, C) = \mathcal{F}_1$, $(B, C, A) = \mathcal{F}_2$.

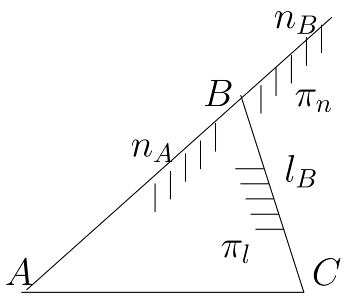


Рис. 7

Одинаковая ориентированность двух других пар флагов проверяется аналогично.

Следующее утверждение дополняет лемму 4. Оно легко получается комбинацией определения одинаково ориентированных флагов с произвольными началами и предложения 1.16.

Лемма 5. *Пусть A, B, C – произвольные неколлинеарные точки. Тогда флаги (A, B, C), (B, A, C) противоположно ориентированы.*

Теорема 1.1. *Если флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, а также флаги $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы, то и флаги $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы.*

Доказательство. Обозначим через A, B, C начала флагов $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ соответственно. В случае, когда точки A, B, C коллинеарны, достаточно применить лемму 2. Пусть точки A, B, C неколлинеарны. Предположим сначала, что флаг $\mathcal{F}_1$ одинаково ориентирован с флагом (A, B, C). Применив лемму 3 к флагам $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, (A, B, C), (B, C, A), получим, что флаги $\mathcal{F}_2$ и (B, C, A) одинаково ориентированы. Аналогично, применение этой леммы к флагам $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, (B, C, A), (C, A, B) позволяет заключить, что флаги $\mathcal{F}_3$, (C, A, B) также одинаковы ориентированы. Наконец, рассмотрев флаги (A, B, C), $\mathcal{F}_1$, (C, A, B), $\mathcal{F}_3$, при помощи той же леммы приходим к выводу, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ одинаково ориентированы.

Случай, когда флаги $\mathcal{F}_1$ и (B, A, C) одинаково ориентированы, рассматривается аналогично.

Зафиксируем на плоскости произвольный флаг $\mathcal{F}^+ = (\pi_l, l_O)$ и рассмотрим флаг $\mathcal{F}^- = (\pi_l', l_O)$. Выше было отмечено (см. п. 1.8), что флаги $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$ не являются одинаково ориентированными.

Предложение 1.21. *Любой флаг $\mathcal{G}$ одинаково ориентирован в точности с одним из флагов $\mathcal{F}^+$ или $\mathcal{F}^-$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} = (\pi_m, m_A)$. С учетом предложения 1.20 достаточно рассмотреть случай, когда $A \neq O$. Если $n = (AO)$, то однозначно определена такая полуплоскость π_n, что флаги $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}_1 = (\pi_n, n_A)$ одинаково ориентированы. Рассмотрим флаг $\mathcal{G}_2 = (\pi_n, n_O)$. Из предложения 1.20 следует, что флаг $\mathcal{G}_2$ одинаково ориентирован либо с $\mathcal{F}^+$, либо с $\mathcal{F}^-$. Теперь ясно, что аналогичным свойством обладает и флаг $\mathcal{G}$.

Определение. Плоскость, на которой зафиксирован некоторый флаг $\mathcal{F}^+$, называется *ориентированной* плоскостью.

На ориентированной плоскости множество всех флагов разбивается на два непересекающихся класса. Один класс составляют флаги, одинаково ориентированные с $\mathcal{F}^+$ (их называют *положительно ориентированными*); другому классу принадлежат флаги, одинаково ориентированные с $\mathcal{F}^-$ (они называются *отрицательно ориентированными*). Часто флаги, не являющиеся одинаково ориентированными, называют *противоположно ориентированными.*

Покажем, что на ориентированной плоскости множество всех ориентированных углов разбивается на два класса – класс углов, имеющих положительную ориентацию, и класс углов, имеющих отрицательную ориентацию.

Пусть дан ориентированный угол $\alpha = \measuredangle l_O m_O$, где прямые l, m предполагаются различными. Пусть π_l – полуплоскость с границей l, содержащая луч m_O. Сопоставим ориентированному углу α флаг $\mathcal{F}_\alpha = (\pi_l, l_O)$ и назовем этот флаг соответствующим данному углу.

Будем говорить, что ориентированный угол α имеет *положительную (отрицательную) ориентацию,* если флаг $\mathcal{F}^+$, задающий ориентацию плоскости, и флаг $\mathcal{F}_\alpha$, соответствующий углу α, одинаково (противоположно) ориентированы.

Заметим, что ориентированный развернутый угол мы считаем имеющим положительную ориентацию.

1.10. Многоугольники

Пусть $[A_1A_2]$, $[A_2A_3], \ldots ,[A_{n-1}A_n]$ – конечное множество отрезков. Отрезки $[A_{i-1}A_i]$, $[A_iA_{i+1}]$, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, будем называть соседними. Мы не исключаем случая, когда $A_1 = A_n$; тогда отрезки $[A_{n-1}A_1]$, $[A_1A_2]$ также будут считаться соседними.

Определение. *Ломаной* $A_1A_2\ldots A_n$ назвается объединение отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3], \ldots$, $[A_{n-1}A_n]$ при условии, что соседние отрезки не лежат на одной прямой.

Отрезки, образующие ломаную, часто называют ее *звеньями*; концы звеньев называют *вершинами* ломаной.

Нетрудно понять, что звенья ломаной, не являющиеся соседними, могут иметь общие точки. В таком случае говорят, что ломаная имеет *самопересечения.*

Определение. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений.

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые ломаные.

Определение. Ломаная $A_1A_2\dots A_n$ называется *замкнутой*, если $A_1 = A_n$.

Определение. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником.*

Многоугольник с различными вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$ будет обозначаться $A_1A_2\dots A_n$.

Для многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ и прямой l имеются две возможности: либо многоугольник содержится в одной из двух замкнутых полуплоскостей с границей l, либо каждая из двух открытых полуплоскостей с той же границей содержит точки многоугольника. В первом случае будем говорить, что многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ *расположен по одну сторону* от прямой l, а во втором – что прямая l *разделяет* данный многоугольник.

Определение. Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от каждой из прямых $(A_1A_2), \dots , (A_{n-1}A_n), (A_nA_1)$.

Отрезок $[A_iA_j]$ называется диагональю выпуклого многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, если вершины A_i, A_j не являются смежными.

Отметим следующее простое, но важное свойство выпуклого многоугольника.

Лемма 1. *Если прямая l не содержит ни одну из сторон выпуклого многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, то l имеет с многоугольником не более двух общих точек.*

Доказательство. Пусть l имеет с данным многоугольником общие точки X, Y, Z; можно считать, что Y лежит между X и Z. Предположим, что Y принадлежит стороне $[A_iA_{i+1}]$. Из условия леммы следует, что прямые l и (A_iA_{i+1}) различны. Таким образом, точки X, Z лежат по разные стороны от прямой (A_iA_{i+1}), что противоречит выпуклости данного многоугольника.

Пусть Q – выпуклый многоугольник. Свяжем с Q два множества: *внутреннюю область* $I(Q)$ и *внешнюю область* $O(Q)$. По определению точка X принадлежит множеству $I(Q)$, если любая прямая, проходящая через X, имеет с многоугольником Q две общие точки; точка X содержится во множестве $O(Q)$, если некоторая прямая, проходящая через X, не имеет с Q общих точек. Легко понять, что множества Q, $I(Q)$, $O(Q)$ попарно не пересекаются.

Проверим, что сами множества $I(Q)$ и $O(Q)$ пустыми не являются. Для этого понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $Q = A_1A_2\dots A_n$ – выпуклый многоугольник, l – прямая, пересекающая Q в двух точках X, Y. Ясно, что l делит многоугольник Q на две ломаные с концами X, Y. Добавляя к каждой из этих ломаных отрезок $[XY]$, получим две замкнутые ломаные Q_1, Q_2. Из леммы 1 следует, что Q_1, Q_2 также выпуклые многоугольники. Будем говорить, что такая прямая *разбивает* Q на многоугольники Q_1 и Q_2.

Лемма 2. *Если прямая l пересекает сторону $[A_iA_{i+1}]$ выпуклого многоугольника $Q = A_1A_2\dots A_n$ в точке X, отличной от вершин A_i, A_{i+1}, то l имеет с этим многоугольником еще одну общую точку.*

Доказательство. Для простоты будем считать, что точка X лежит на стороне $[A_1A_2]$. Пусть l не имеет с многоугольником общих точек, отличных от X. Это означает, в частности, что l не пересекает отрезки $[A_2A_3], \dots ,[A_{n-1}A_n]$, $[A_nA_1]$. Отсюда вытекает, что точки A_2, $A_3, \dots$, A_n, A_1 лежат в одной и той же полуплоскости π_l. Мы получили, что A_2 и A_1 принадлежат π_l; последнее утверждение противоречит тому, что l пересекает отрезок $[A_1A_2]$.

Лемма 3. *Пусть X, Y – различные точки выпуклого многоугольника Q, не лежащие на одной стороне. Если Z – произвольная точка из интервала $]XY[$, то любая прямая, проходящая через Z, имеет с многоугольником две общие точки.*

Доказательство. Обозначим через l прямую (XY), а через m – произвольную прямую, проходящую через точку Z. С учетом леммы 1 достаточно убедиться в том, что прямая m имеет с многоугольником не менее двух общих точек. Если $m = l$, то доказывать нечего. Пусть $m \neq l$. Прямая l разбивает многоугольник Q на два выпуклых многоугольника Q_1 и Q_2, причем $[XY]$ – общая сторона этих многоугольников. Применяя к каждому из многоугольников Q_1, Q_2 и прямой m лемму 2, получим, что m имеет с многоугольниками Q_1, Q_2 общие точки W_1, W_2 соответственно, причем эти точки отличны от Z. Поскольку многоугольники Q_1, Q_2 принадлежат различным полуплоскостям с границей l, тем же свойством обладают и точки W_1, W_2. Значит, эти точки различны. Кроме того, понятно, что точки W_1, W_2 принадлежат многоугольнику Q.

Из доказательства леммы 3 вытекает

Лемма 4. *Пусть X, Y – различные точки выпуклого многоугольника Q, не лежащие на одной стороне. Если Z – произвольная точка из интервала $]XY[$, то любой луч с началом в точке Z имеет с многоугольником единственную общую точку.*

Лемма 5. *Пусть X, Y – различные точки выпуклого многоугольника Q, не лежащие на одной стороне. Если Z – произвольная точка прямой (XY), не принадлежащая отрезку $[XY]$, то существует прямая, проходящая через Z и не пересекающая многоугольник.*

Доказательство. Так как X, Y, Z – коллинеарные точки и Z не лежит между X и Y, то либо X лежит между Z, Y, либо Y лежит между Z, X. Без ограничения общности можно считать, что выполнена первая возможность. Предположим, что X лежит на стороне $[A_iA_{i+1}]$ выпуклого многоугольника $Q = A_1A_2 \ldots A_n$. Легко проверить, что $Z \notin l = (A_iA_{i+1})$. Рассмотрим прямые $m_j = (ZA_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Так как многоугольник Q и точка Z лежат по разные стороны от прямой l, каждая из прямых m_j пересекает прямую l в точке M_j. Ориентируем прямую l выбором некоторого луча. Тогда множество точек такой прямой линейно упорядочено отношением предшествования; конечное множество точек $\{M_j | 1 \leqslant j \leqslant n\}$ имеет наименьший элемент M_k и наибольший элемент M_l $(1 \leqslant k, l \leqslant n)$. Нетрудно понять, что каждая точка многоугольника Q либо лежит на сторонах угла $M_k Z M_l$, либо содержится в его внутренней области. Обозначим через n произвольную прямую, проходящую через точку Z и не пересекающую внутреннюю область угла $M_k Z M_l$. Ясно, что n не имеет общих точек с многоугольником Q.

Понятно, что из лемм 3, 5 вытекает непустота внутренней и внешней областей выпуклого многоугольника.

Следующие два утверждения характеризуют внутреннюю и внешнюю области.

Предложение 1.22. *Точка Z принадлежит внутренней области выпуклого многоугольника Q тогда и только тогда, когда любой луч с началом в точке Z имеет с Q единственную общую точку.*

Доказательство. Пусть Z принадлежит внутренней области выпуклого многоугольника Q. Рассмотрим произвольный луч l_Z. Из определения внутренней области многоугольника вытекает, что прямая l пересекает многоугольник Q в двух точках X и Y. В силу леммы 5 точка Z должна быть внутренней точкой отрезка $[XY]$. Отсюда следует, что в точности одна из точек X, Y принадлежит лучу l_Z.

Обратно, пусть l – произвольная прямая, проходящая через точку Z. Каждый из лучей l_Z, l'_Z имеет с многоугольником по одной общей точке. Отсюда следует, что прямая l пересекает Q в двух точках. Таким образом, Z принадлежит внутренней области данного многоугольника.

Предложение 1.23. *Точка Z принадлежит внешней области выпуклого многоугольника Q тогда и только тогда, когда любой луч, имеющий начало в точке Z и пересекающий многоугольник во внутренней точке некоторой стороны, имеет с многоугольником две общие точки.*

Доказательство. Пусть Z принадлежит внешней области выпуклого многоугольника Q. Рассмотрим произвольный луч l_Z, пересекающий многоугольник во внутренней точке X некоторой стороны. Легко проверить, что l не содержит ни одну из сторон многоугольника. В силу леммы 2 прямая l и многоугольник Q имеют еще одну общую точку Y. При помощи леммы 3 получаем, что Z – внешняя точка отрезка $[XY]$. Отсюда следует, Y принадлежит лучу l_Z. Таким образом, луч l_Z и многоугольник имеют две общие точки.

Проверим обратное утверждение. Пусть A_1, A_2, A_3 – три соседние вершины многоугольника. Так как эти три точки неколлинеарны, найдутся по крайней мере две из них, неколлинеарные с точкой Z. Для определенности будем считать, что $Z \notin (A_1A_2)$. Если X – внутренняя точка стороны $[A_1A_2]$, то луч $l_Z =]ZX)$ пересекает многоугольник еще в одной точке Y. Из леммы 3 вытекает, что Z – внешняя точка отрезка $[XY]$. Остается применить лемму 5.

Скажем, что ломаная L и многоугольник Q *находятся в общем положении,* если никакое звено ломаной не проходит через вершины многоугольника Q и не имеет ни с одной из сторон общего отрезка.

Из предложений 1.22, 1.23 легко получить следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Выпуклый многоугольник разбивает множество не принадлежащих ему точек плоскости на две области – внешнюю и внутреннюю. При этом точки X, Y принадлежат разным областям в том и только том случае, когда всякая ломаная, соединяющая точки X, Y и находящаяся с многоугольником в общем положении, имеет с ним нечетное число общих точек.*

В заключение заметим, что понятия внешней и внутренней области могут быть введены для произвольного многоугольника. Будем говорить, что точка Z лежит во внутренней (соответственно внешней) области многоугольника Q, если любой луч l_Z, не проходящий через вершины многоугольника и не содержащий его сторон, имеет с ним нечетное (соответственно четное) число общих точек. В этом определении считается, что число элементов пустого множества равно нулю.

Используя такое определение, для произвольного многоугольника можно доказать утверждение, аналогичное теореме 1.2.

1.11. Аксиомы конгруэнтности

Два сегмента или два угла могут находиться в отношении, называемом конгруэнтностью и обозначаемом символом $\cong$.

Содержание этого понятия описывается аксиомами конгруэнтности.

III_1. Пусть даны сегмент AB и луч l_C. Тогда на l_C существует такая точка D, что $CD \cong AB$. Отношение конгруэнтности на множестве сегментов рефлексивно, т. е. всякий сегмент конгруэнтен самому себе.

III_2. Если $A_1B_1 \cong A_2B_2$ и $A_2B_2 \cong A_3B_3$, то $A_3B_3 \cong A_1B_1$.

III_3. Если точка B лежит между точками A, C, точка B_1 – между точками A_1, C_1, то из соотношений $AB \cong A_1B_1$, $BC \cong \cong B_1C_1$ следует $AC \cong A_1C_1$.

III_4. Пусть даны угол $\angle aCb$ и флаг $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$. Тогда в полуплоскости π_l существует единственный луч m_O такой, что $\angle aCb \cong \angle l_O m_O$. Отношение конгруэнтности на множестве углов рефлексивно и симметрично.

III_5. Если в треугольниках $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполнены соотношения $AB \cong A_1B_1$, $AC \cong A_1C_1$ и $\angle BAC \cong \cong \angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$.

В дальнейшем мы увидим, что геометрические свойства конгруэнтных фигур (сегментов и углов) совершенно идентичны, хотя такие фигуры могут быть различны с теоретико-множественной точки зрения. Несмотря на это, иногда вместо термина "конгруэнтный" будет использоваться термин "равный".

Применительно к направленным сегментам и ориентированным углам вместо термина "конгруэнтный" будет применяться термин "эквиполлентный".

Определение. Направленные сегменты $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ называются *эквиполлентными* ($\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$), если $AB \cong CD$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

В определении предполагается, что направленные сегменты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой. Ниже (см. разд. 1.24) это определение будет распространено и на случай, когда данные направленные сегменты не обязательно лежат на одной прямой.

Определение. Ориентированные углы $\measuredangle ab$, $\measuredangle cd$ называются *эквиполлентными* ($\measuredangle ab \equiv \measuredangle cd$), если они имеют одинаковую ориентацию и $\angle ab \cong \angle cd$.

Приступим к получению следствий из аксиом конгруэнтности.

Из аксиомы III_1 вытекает, что отношение конгруэнтности рефлексивно на множестве отрезков, а из аксиомы III_4 следует рефлексивность этого отношения на множестве углов.

Из аксиомы III_2 легко получается симметричность и транзитивность отношения конгруэнтности на множестве отрезков.

Предложение 1.24. *Пусть A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 – произвольные сегменты. Тогда*

(a) *если $A_1B_1 \cong A_2B_2$, то $A_2B_2 \cong A_1B_1$;*

(b) *если $A_1B_1 \cong A_2B_2$ и $A_2B_2 \cong A_3B_3$, то $A_1B_1 \cong A_3B_3$.*

Доказательство. (a) С учетом рефлексивности отношения $\cong$ имеем $A_1B_1 \cong A_2B_2$ и $A_2B_2 \cong A_2B_2$. Применяя аксиому III_2, получаем $A_2B_2 \cong A_1B_1$.

(b) Пусть $A_1B_1 \cong A_2B_2$ и $A_2B_2 \cong A_3B_3$. Из аксиомы III_2 вытекает, что $A_3B_3 \cong A_1B_1$. Поскольку симметричность проверена в п. (a), имеем $A_1B_1 \cong A_3B_3$.

Уточним аксиому III_1.

Предложение 1.25. *Пусть даны сегмент AB и луч l_C. Тогда на l_C существует единственная точка D такая, что $CD \cong AB$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование точки D гарантируется аксиомой III_1. Покажем, что такая точка единственна. Предположим, что на луче $l_C = [CD)$ существует такая точка $D_1 \neq D$, что $CD_1 \cong AB$. В силу предложения 1.24 $CD_1 \cong CD$. Пусть F – точка, не лежащая на прямой (AB). В одной из полуплоскостей с границей $l = (CD)$ найдем такой луч m_C, что $\angle l_C m_C \cong \angle BAF$. Существование такого луча следует из аксиомы III_4.

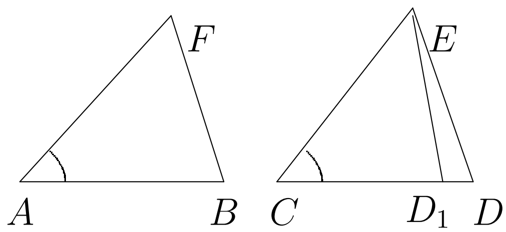


Рис. 8

На луче m_C по аксиоме III_1 найдется такая точка E, что $AF \cong CE$ (рис. 8). Применяя аксиому III_5 сначала к треугольникам AFB и CED, а затем к треугольникам AFB и CED_1, получим $\angle AFB \cong \angle CED$, $\angle AFB \cong \angle CED_1$. Пусть π_l – полуплоскость с границей (CE), содержащая точки D и D_1. Лучи $[ED)$ и $[ED_1)$ содержатся в полуплоскости π_l и образуют с лучом $[EC)$ углы, конгруэнтные углу AFB. Последнее утверждение противоречит аксиоме III_5.

Предложение 1.26. *Пусть $A_1B_1 \cong A_2B_2$, точки C_1, C_2 принадлежат лучам $[A_1B_1)$, $[A_2B_2)$ соответственно, $A_1C_1 \cong$ $\cong A_2C_2$. Если C_1 лежит между A_1, B_1, то C_2 лежит между A_2, B_2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка C_2 не может совпасть с точкой B_2, ибо в противном случае $A_2B_2 \cong A_2C_2$, откуда, используя соотношения $A_1B_1 \cong A_2B_2$, $A_2C_2 \cong A_1C_1$ и применяя предложение 1.24, получим, что $A_1B_1 \cong A_1C_1$. Однако, последнее соотношение противоречит предложению 1.25, так как B_1, C_1 – различные точки луча $[A_1B_1)$.

Проверим, что случай, когда B_2 лежит между A_2, C_2 также невозможен. Пусть c – луч с началом в точке C_2, не содержащий точку A_2, a – луч с началом в точке A_2, содержащий точку C_2. В силу предложения 1.9 имеем $c \subset a$. Если B_2 лежит между A_2, C_2, то $B_2 \in a$, $B_2 \notin c$. На луче c существует такая точка B', что $C_2B' \cong C_1B_1$. Очевидно, что $B' \neq B_2$ и $B' \in a$. Поскольку $A_1C_1 \cong A_2C_2$ и $C_1B_1 \cong$ $\cong C_2B'$, по аксиоме III_2 получаем $A_1B_1 \cong A_2B'$. Но $A_1B_1 \cong$ $\cong A_2B_2$, откуда $A_2B_2 \cong A_2B'$, что противоречит предложению 1.25.

Предложение 1.27. *Если в треугольнике ABC выполнено соотношение $AB \cong BC$, то $\angle BAC \cong \angle BCA$.*

Доказательство. Применяя к треугольникам ABC и CBA аксиому III_5, получим требуемое.

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будем называть конгруэнтными, если выполнены соотношения: $AB \cong$ $\cong A_1B_1$, $AC \cong A_1C_1$, $BC \cong B_1C_1$, $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB \cong \angle A_1C_1B_1$.

Теорема 1.3. *Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены соотношения $AB \cong A_1B_1$, $AC \cong A_1C_1$ и $\angle BAC \cong$ $\cong \angle B_1A_1C_1$, то такие треугольники конгруэнтны.*

Доказательство. Соотношения для углов сразу следуют из аксиомы III_5. Проверим конгруэнтность сегментов BC и B_1C_1. По аксиоме III_1 на луче $[B_1C_1)$ существует такая точка C_2, что $BC \cong B_1C_2$ (см. рис. 9). Поскольку $AB \cong A_1B_1$ и $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_2$, применяя к треугольникам ABC и $A_1B_1C_2$ аксиому III_5, получим, что $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_2$.

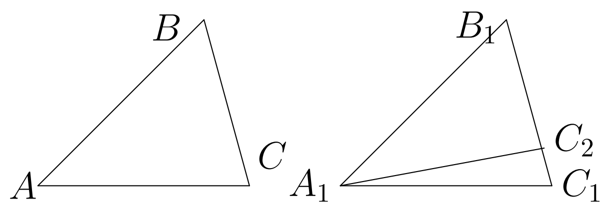


Рис. 9

Так как по условию $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$, то получено противоречие с аксиомой III_4.

Теорема 1.4. *Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены соотношения $AB \cong A_1B_1$, $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$,*

$\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$, *то такие треугольники конгруэнтны.*

Доказательство. На луче $[A_1C_1)$ существует такая точка C_2, что $A_1C_2 \cong AC$ (рис. 10). Применив к треугольникам ABC и $A_1B_1C_2$ теорему 1.3, получим, что $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_2$.

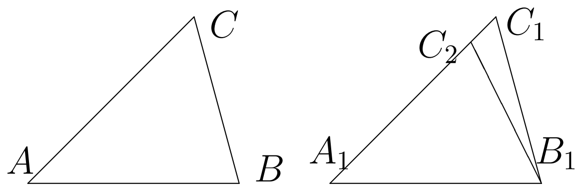


Рис. 10

Так как по условию $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$, то углы $A_1B_1C_2$ и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны углу ABC, имеют общую сторону $[B_1A_1)$ и отложены от этой стороны в одну и ту же полуплоскость. Поэтому из аксиомы III_4 вытекает, что $[B_1C_1) = [B_1C_2)$, откуда $C_1 = C_2$. Таким образом, к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ применима теорема 1.3.

Теоремы 1.3, 1.4 часто называют первым и вторым признаками конгруэнтности треугольников.

Предложение 1.28. *В произвольном треугольнике ABC из соотношения $\angle BAC \cong \angle BCA$ следует соотношение $AB \cong BC$.*

Доказательство. Применяя к треугольникам BAC и BCA теорему 1.4, получим требуемое соотношение.

Определение. Пусть a, b, c – различные лучи с общим началом в точке O. Если лучи a, c дополнительны, то углы aOb, cOb называются *смежными*.

Предложение 1.29. *Если два угла конгруэнтны, то и смежные к ним углы конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть даны конгруэнтные углы aOb и $a_1O_1b_1$ (рис. 11). Докажем, что смежные к ним углы cOb и $c_1O_1b_1$ также конгруэнтны. Отметим на лучах a, b, c точки A,

B, C соответственно. Пусть $A_1 \in a_1$, $B_1 \in b_1$, $C_1 \in c_1$, причем $O_1A_1 \cong OA$, $O_1B_1 \cong OB$, $O_1C_1 \cong OC$. К треугольникам OAB, $O_1A_1B_1$ применима теорема 1.3, поэтому $AB \cong A_1B_1$ и $\angle OAB \cong \angle O_1A_1B_1$. Из аксиомы III_3 следует, что $AC \cong A_1C_1$. Стало быть, к треугольникам ABC, A_1B_{11} также применима теорема 1.3, откуда $BC \cong B_1C_1$ и $\angle OBC \cong \angle O_1B_1C_1$. Поскольку $CO \cong C_1O_1$, из треугольников BOC, $B_1O_1C_1$ получаем требуемое.

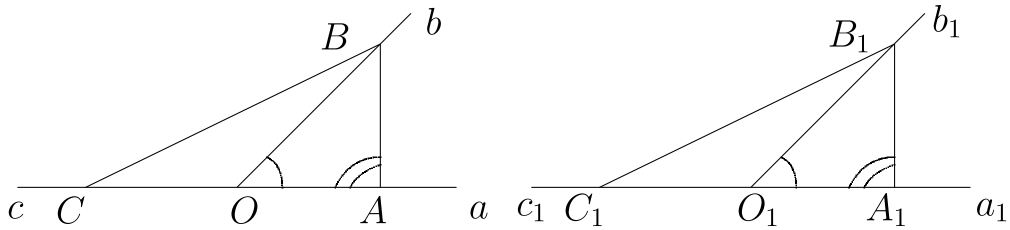


Рис. 11

Определение. Углы aOb, cOd называются *вертикальными углами*, если лучи c, d дополнительны к лучам a, b соответственно.

Предложение 1.30. *Вертикальные углы конгруэнтны.*

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из предложения 1.29.

Предложение 1.31. *Пусть aOb, $a_1O_1b_1$ – произвольные углы. Допустим, что луч c с вершиной O разделяет лучи a, b, а луч c_1 с вершиной O_1 разделяет лучи a_1, b_1. Тогда*

(a) *если $\angle aOc \cong \angle a_1O_1c_1$, $\angle cOb \cong \angle c_1O_1b_1$, то $\angle aOb \cong$ $\cong \angle a_1O_1b_1$;*

(b) *если $\angle aOb \cong \angle a_1O_1b_1$, $\angle aOc \cong \angle a_1O_1c_1$, то $\angle cOb \cong$ $\cong \angle c_1O_1b_1$.*

Доказательство. Проверим утверждение (a). Для этого возьмем на лучах a, b точки A, B соответственно. Тогда отрезок $[AB]$ имеет с лучом c общую точку C. Теперь найдем на лучах a_1, b_1, $_1$ точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы $OA \cong O_1A_1$, $OB \cong$ $\cong O_1B_1$, $OC \cong O_1C_1$ (см. рис. 12). Применяя к треугольникам

OCB и $O_1C_1B_1$ первый признак конгруэнтности треугольников, получим $BC \cong B_1C_1$, $\angle OBC \cong \angle O_1B_1C_1, \angle OCB \cong \cong \angle O_1C_1B_1$.

Аналогично, рассматривая $\triangle OCA$ и $\triangle O_1C_1A_1$, получим $AC \cong A_1C_1$, $\angle OAC \cong \angle O_1A_1C_1$, $\angle OCA \cong \angle O_1C_1A_1$. Поскольку $\angle BCO \cong \angle B_1C_1O_1$, $\angle ACO \cong \angle A_1C_1O_1$ и $\angle BCO$, $\angle ACO$ – смежные углы, то $\angle B_1C_1O_1$, $\angle A_1C_1O_1$ также являются смежными. Отсюда следует, что точки A_1, C_1, B_1 лежат на одной прямой, причем C_1 лежит между A_1, B_1.

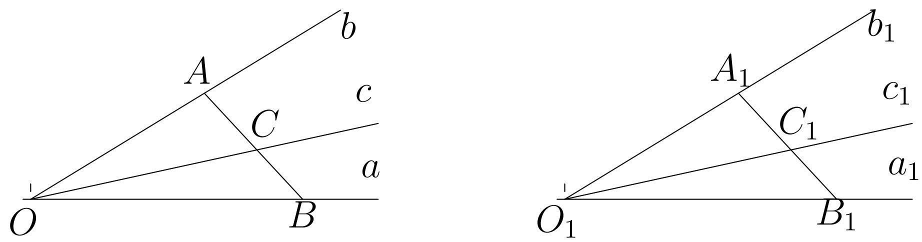


Рис. 12

Так как $BC \cong B_1C_1$ и $CA \cong C_1A_1$, на основании аксиомы III_3 заключаем, что $AB \cong A_1B_1$. Кроме того, выше было доказано, что $\angle OBC \cong \angle O_1B_1C_1$ и $\angle OAC \cong \angle O_1A_1C_1$. Таким образом, к треугольникам OAB и $O_1A_1B_1$ применим второй признак конгруэнтности; значит, $\angle AOB \cong \angle A_1O_1B_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение (b) доказывается аналогично. Это доказательство оставляем читателю в качестве полезного упражнения.

Лемма 1. *Пусть треугольники ABC и ABC_1 таковы, что $AC \cong AC_1$, $BC \cong BC_1$ и точки C, C_1 лежат по разные стороны от прямой (AB). Тогда треугольники ABC и ABC_1 конгруэнтны.*

Доказательство. Обозначим через F точку пересечения прямых (AB) и (CC_1). Возможны три случая: (1) F – внутренняя точка отрезка $[AB]$; (2) F совпадает с одним из концов отрезка $[AB]$; (3) F – внешняя точка этого отрезка.

Пусть имеет место случай (1). Тогда луч $[CC_1)$ проходит во внутренней области угла ACB, а луч $[C_1C)$ – во внутренней области угла AC_1B (рис. 13). Треугольники ACC_1 и BCC_1, очевидно, равнобедренные, поэтому, в силу предложения 1.27, имеем

$$\angle ACC_1 \cong \angle AC_1C, \quad \angle BCC_1 \cong \angle BC_1C.$$

Применение предложения 1.31 показывает, что $\angle ACB \cong \cong \angle AC_1B$. Поэтому, по теореме 1.3, треугольники ABC и ABC_1 конгруэнтны.

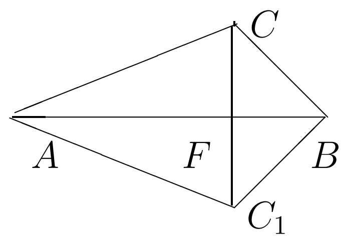


Рис. 13

В случае (2) можно без ограничения общности считать, что $F = A$. Тогда точка A лежит на основании равнобедренного треугольника BCC_1. Поэтому $\angle ACB \cong \angle AC_1B$, откуда следует конгруэнтность данных треугольников.

Случай (3) может быть рассмотрен аналогично случаю (1).

Теорема 1.5. *Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены соотношения $AB \cong A_1B_1$, $AC \cong A_1C_1$, $BC \cong \cong B_1C_1$, то такие треугольники конгруэнтны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что выполнено, например, соотношение $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$, тогда к данным треугольникам можно будет применить первый признак конгруэнтности.

Пусть D_1 – такая точка, что D_1, C_1 лежат по одну сторону от прямой (A_1B_1) и выполнены соотношения

$$\angle D_1A_1B_1 \cong \angle CAB, \quad A_1D_1 \cong AC.$$

Тогда треугольники $A_1B_1D_1$ и ABC конгруэнтны, поэтому $B_1D_1 \cong BC$. Но по условию $BC \cong B_1C_1$, значит, $B_1D_1 \cong \cong B_1C_1$.

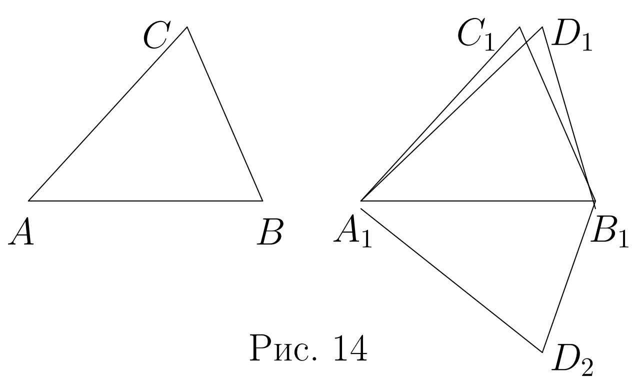


Рис. 14

Обозначим через D_2 такую точку (рис. 14), что D_1, D_2 лежат по разные стороны от прямой (A_1B_1) и выполнены соотношения

$$\angle D_1A_1B_1 \cong \angle D_2A_1B_1, \quad A_1D_1 \cong A_1D_2.$$

Легко видеть, что треугольники $A_1B_1D_1$, $A_1B_1D_2$ конгруэнтны, поэтому $B_1D_1 \cong B_1D_2$. Учитывая полученное ранее соотношение $B_1D_1 \cong B_1C_1$, имеем $B_1D_2 \cong B_1C_1$. Кроме того, легко проверяется, что $A_1D_2 \cong A_1C_1$. Значит, к треугольникам $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_2$ применима лемма 1. Поэтому $\angle B_1A_1C_1 \cong \angle B_1A_1D_2$. В силу выбора точки D_2 выполнено соотношение $\angle B_1A_1D_1 \cong \angle B_1A_1D_2$. Из аксиомы III_4 следует, что лучи $[A_1D_1)$ и $[A_1C_1)$ совпадают. Так как по построению $\angle D_1A_1B_1 \cong \angle CAB$, то $\angle C_1A_1B_1 \cong \angle CAB$.

Теорему 1.5 часто называют третьим признаком конгруэнтности треугольников.

Следствие 1. *Если $\angle aOb \cong \angle a_1O_1b_1$ и $\angle a_1O_1b_1 \cong \angle a_2O_2b_2$, то $\angle aOb \cong \angle a_2O_2b_2$.*

Доказательство. Найдем такие точки $A \in a$, $A_1 \in a_1$, $A_2 \in a_2$, $B \in b$, $B_1 \in b_1$, $B_2 \in b_2$, что

$$OA \cong O_1A_1 \cong O_2A_2, \qquad OB \cong O_1B_1 \cong O_2B_2.$$

Тогда треугольники OAB, $O_1A_1B_1$, а также треугольники $O_1A_1B_1$, $O_2A_2B_2$ конгруэнтны по первому признаку. Отсюда следует, что $AB \cong A_1B_1 \cong A_2B_2$. Таким образом, треугольники OAB, $O_2A_2B_2$ конгруэнтны по третьему признаку. Стало быть, $\angle AOB \cong \angle A_2O_2B_2$.

Следствие 2. *Если $\measuredangle aOb \equiv \measuredangle a_1O_1b_1$ и $\measuredangle a_1O_1b_1 \equiv \measuredangle a_2O_2b_2$, то $\measuredangle aOb \equiv \measuredangle a_2O_2b_2$.*

1.12. Середина сегмента. Биссектриса угла

Определение. Точка O называется серединой сегмента AB, если точки A, O, B коллинеарны и $AO \cong OB$.

Теорема 1.6. *Всякий сегмент AB имеет единственную середину.*

Доказательство. Пусть AB – данный сегмент, $l = (AB)$, F – некоторая точка, не принадлежащая прямой l (рис. 15). Существует такая точка G, что l разделяет точки F, G, $\angle FAB \cong \angle GBA$ и $AF \cong BG$. Ясно, что отрезок $[AB]$ и прямая l имеют общую точку O. Применяя к треугольникам BAF и ABG теорему 1.3, получим $\angle FBA \cong \cong \angle GAB$, $AG \cong BF$. Поскольку луч $[AB)$ проходит через внутреннюю область угла FAG, а луч $[BA)$ – через внутреннюю область угла FBG, по предложению 1.31 получаем, что $\angle FAG \cong \angle FBG$. Ясно, что к треугольникам FAG и FBG применима теорема 1.3. Поэтому $\angle FGA \cong \angle GFB$. Теперь к треугольникам AOG и BOF можно применить теорему 1.4. Имеем $AO \cong OB$, т. е. O – середина отрезка AB. Таким образом, доказано, что отрезок имеет середину.

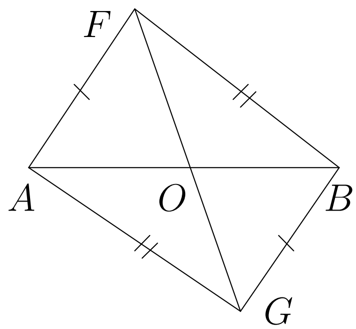


Рис. 15

Осталось проверить, что середина отрезка единственна. Рассуждая "от противного", предположим, что кроме точки O существует точка O_1, для которой $AO_1 \cong O_1B$. Без ограничения общности можно считать, что O_1 – внутренняя точка отрезка $[AO]$. Найдем на луче $[BO)$ такую точку O_2, что $BO_2 \cong AO_1$. Применяя предложение 1.26 к сегментам AO, BO и точкам O_1, O_2, получим, что O_2 – внутренняя точка отрезка BO. Поскольку $BO_2 \cong AO_1$ и $AO_1 \cong BO_1$, получаем $BO_2 \cong BO_1$, что противоречит предложению 1.25.

Определение. Пусть a, b, c – лучи с общим началом O, причем луч c содержится во внутренней области угла aOb. Если $\angle aOc \cong \angle cOb$, то луч c называется биссектрисой угла aOb.

Предложение 1.32. *Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB \cong BC$), D лежит на стороне $[AC]$. Луч $[BD)$*

является биссектрисой угла ABC тогда и только тогда, когда D – середина сегмента AC.

Доказательство. Если $[BD)$ – биссектриса угла ABC (рис. 16), то к треугольникам ABD и BCD применима теорема 1.4. В самом деле, сторона $[BD]$ является общей для обоих треугольников, $AB \cong \cong BC$ и $\angle ABD \cong \angle CBD$. Таким образом, получаем $AD \cong DC$, т. е. точка D – середина сегмента AC.

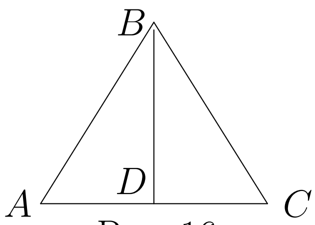


Рис. 16

Обратно, если D – середина сегмента AC, то $\triangle ABD \cong \cong \triangle BCD$ в силу теоремы 1.3. Отсюда следует, что $\angle ABD \cong \cong \angle BCD$, т. е. $[BD)$ – биссектриса угла ABC.

Из предложения 1.32 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Всякий угол, отличный от развернутого, имеет единственную биссектрису.*

Заметим, что существование биссектрисы развернутого угла будет доказано в разд. 1.14.

1.13. Сравнение сегментов и углов

Определение. Сегмент AB *меньше* сегмента CD, если существует такая точка X, что X лежит между C, D и $AB \cong \cong CX$.

Если AB меньше CD, то будем писать $AB < CD$.

Используя аксиомы конгруэнтности, легко проверить, что это отношение между сегментами обладает следующими свойствами:

- если $AB < CD$ и $CD < EF$, то $AB < EF$;
- для любых двух сегментов AB и CD выполнено одно из трех соотношений:

$$AB < CD, \quad AB \cong CD, \quad CD < AB.$$

О п р е д е л е н и е. Угол aPb *меньше* угла cQd, если существует такой луч f с началом в точке Q, что f проходит во внутренней области угла cQd и $\angle aPb \cong \angle cQf$.

Если угол aPb меньше угла cQd, то будем использовать обозначение $\angle aPb < \angle cQd$.

Свойства отношения "меньше"для углов аналогичны свойствам такого отношения для сегментов.

Предложение 1.33. *Внешний угол треугольника больше несмежного с ним внутреннего угла.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что внешний угол BCG больше внутреннего угла ABC.

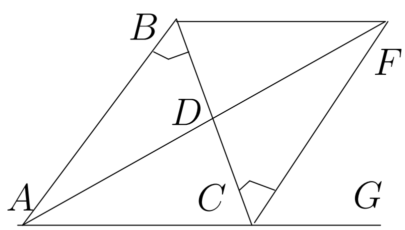


Рис. 17

Пусть D середина стороны $[BC]$ (рис. 17). На луче $[AD)$ найдем такую точку F, что $DF \cong AD$. Нетрудно проверить, что луч $[CF)$ проходит во внутренней области угла BCG (эту проверку мы оставляем читателю). Отсюда следует, что $\angle BCF < \angle BCG$. Заметим теперь, что треугольники DAB и DFC конгруэнтны, поскольку $BD \cong DC$, $AD \cong DF$ и $\angle ADB < \angle FDC$. Из конгруэнтности треугольников вытекает конгруэнтность углов ABD и DCF. С учетом доказанного выше неравенства $\angle ADB < \angle FDC$, получаем, что $\angle ABC = \angle ABD < \angle BCG$.

Следующее утверждение докажите самостоятельно.

Предложение 1.34. *Пусть ABC – произвольный треугольник. Тогда*

(a) *если $AB < AC$, то $\angle ACB < \angle ABC$;*

(b) *если $\angle ACB < \angle ABC$, то $AB < AC$.*

1.14. Прямой угол. Перпендикулярность прямых

О п р е д е л е н и е. Угол называется *прямым*, если он конгруэнтен смежному с ним углу.

Заметим, что каждый угол имеет два смежных с ним угла. Поэтому данное нами определение прямого угла предполагает, что выполнено следующее утверждение: если aOb – произвольный угол, a', b' – лучи, дополнительные к лучам a, b и $\angle aOb \cong \angle a'Ob$, то $\angle aOb \cong \angle aOb'$.

Чтобы получить это утверждение, достаточно воспользоваться предложением 1.30 и следствием из теоремы 1.5

Теорема 1.8. *Любые два прямых угла конгруэнтны.*

Доказательство. Пусть углы aPb и cQd прямые (рис. 18). Обозначим через a', c' лучи, дополнительные к лучам a, c соответственно. По аксиоме III_4 существует такой луч f, что $\angle aPf \cong \angle cQd$ и лучи b и f лежат в одной и той же полуплоскости с границей $a \cup a'$. В силу предложения 1.29 угол aPf прямой. Если лучи b и f совпадают, то конгруэнтность углов aPb и cQd очевидна.

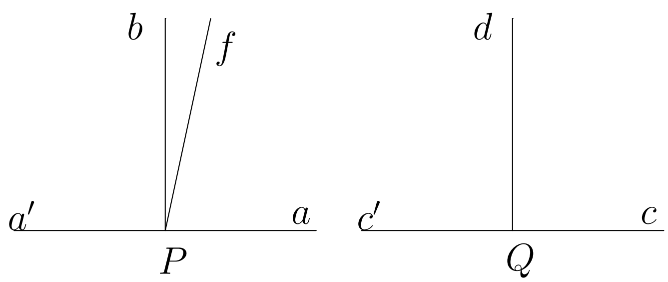


Рис. 18

Покажем, что предположение о несовпадении этих лучей приводит к противоречию. В самом деле, если $b \neq f$, то луч f проходит во внутренней области одного из двух углов: aPb или $a'Pb$. Без ограничения общности можно считать, что f лежит во внутренней области угла aPb. Значит, $\angle aPf < \angle aPb$.

Ясно, что в этом случае луч b проходит во внутренней области угла $a'Pf$, поэтому $a'Pb < a'Pf$. Поскольку угол aPb прямой, имеем $\angle aPb \cong \angle a'Pb$. Из соотношений

$$\angle aPf < \angle aPb, \quad \angle aPb \cong \angle a'Pb, \quad \angle a'Pb < \angle a'Pf$$

следует, что $\angle aPf < \angle a'Pf$. Полученное неравенство противоречит тому, что угол aPf прямой.

Определение. Угол, меньший прямого, называется *острым*; угол, больший прямого, называется *тупым.*

Следующие два утверждения легко проверяются:

1. Угол, смежный к острому (тупому) углу, является тупым (соответственно острым).

2. Если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то два другие угла острые.

Определение. Прямые l и m называются *перпендикулярными*, если они содержат стороны прямого угла.

Теорема 1.9. *Для любой прямой l и любой точки A существует единственная прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой l.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда точка A не принадлежит прямой l. Пусть X – произвольная точка

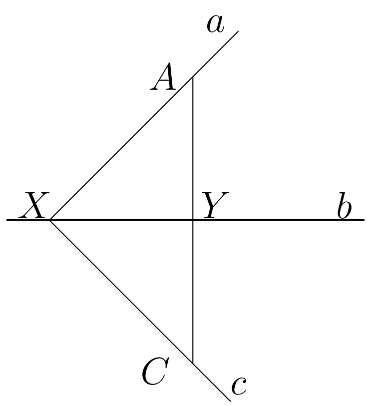


Рис. 19

прямой l. Обозначим через b один из лучей прямой l с началом в точке X, а через a – луч $[XA)$. Найдем такой луч c с началом в точке X, что $\angle aXb \cong \angle cXb$ и прямая l разделяет лучи a, c (подумайте, откуда следует существование такого луча). На луче c выберем точку C так, что $XC \cong XA$ (рис. 19). Точки A и C лежат, очевидно, по разные стороны от прямой l; поэтому прямые (AC) и l пересекаются в некоторой точке Y. Покажем, что прямая (AC) перпендикулярна прямой l.

Если $X \neq Y$, то применение теоремы 1.4 к треугольникам AXY и CXY показывает, что смежные углы AYX и CYX конгруэнтны. Если же $X = Y$, то эти углы конгруэнтны по построению. Мы проверили, что в случае, когда $A \notin l$, через точку A можно провести прямую, перпендикулярную l.

Предположим, что существуют два различных перпендикуляра к прямой l, проходящих через точку A; тогда получится треугольник с двумя прямыми углами. Выше было отмечено, что таких треугольников не существует.

В случае, когда точка A принадлежит прямой l, нужно построить прямой угол с вершиной в точке A так, чтобы одна сторона этого угла принадлежала прямой l (заметим, что выше было проверено существование по крайней мере одного прямого угла). Тогда вторая сторона этого угла определит перпендикуляр к прямой l, проходящий через точку A. Единственность перпендикуляра в этом случае следует из конгруэнтности прямых углов.

Теорема 1.10. *Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AB = BC$), $D \in AC$. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $[BD]$ *– медиана;*

(b) $[BD]$ *– высота;*

(c) $[BD]$ *– биссектриса.*

Доказательство. С учетом предложения 1.32 достаточно проверить эквивалентность условий (a) и (b). Тот факт, что условие (a) влечет условие (b), сразу следует из теоремы 1.4, примененной к треугольникам ABD и CBD.

Проверим, что условие (b) влечет условие (a). Итак, пусть BD – высота. Рассуждая "от противного", предположим, что D не является серединой сегмента AC. Полагая для определенности, что $AD > CD$, найдем на луче $[DC)$ такую точку F, что $DF \cong DA$. К треугольникам ABD и FBD применима теорема 1.4, поэтому $AB \cong BF$. Поскольку $AB \cong BC$, имеем $BF \cong BC$. Таким образом, треугольник CBF равнобедренный. Если BM – медиана этого треугольника, то, как показано выше, $(BM) \perp (AC)$. Кроме того, $(BD) \perp (AC)$. Стало быть, из точки B к прямой (AC) проведены два различных перпендикуляра, что невозможно.

Определение. *Медиатрисой* сегмента AB называется прямая l, перпендикулярная к прямой (AB) и проходящая через середину сегмента AB.

Определение. Пусть A, B – различные точки. Точка X называется *равноудаленной* от A, B, если $AX \cong XB$.

Теорема 1.11. *Множество всех точек, равноудаленных от точек A, B, совпадает с медиатрисой сегмента AB.*

Доказательство. Пусть l – медиатриса сегмента AB. В проверке нуждается следующее равенство множеств:

$$l = \{X | XA \cong XB\}.$$

Включение $l \subseteq \{X | XA \cong XB\}$ очевидно. Убедимся в справедливости обратного включения $\{X | XA \cong XB\} \subseteq l$. Пусть $XA \cong XB$. Если X совпадает с серединой C сегмента AB, то очевидно, что $X \in l$. Пусть $X \neq C$. Тогда в равнобедренном треугольнике AXB отрезок $[XC]$ – медиана, проведенная к его основанию. По теореме 1.14 $(XC) \perp (AB)$. Значит, (XC) – медиатриса сегмента AB, откуда $X \in l$.

Следствие. *Пусть l – произвольная прямая. Для любой точки $A \notin l$ существует единственная точка B такая, что l – медиатриса сегмента AB.*

Теорема 1.12. *Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (углы при вершинах C, C_1 – прямые) конгруэнтны, если выполнено одно из следующих условий:*

(a) *два катета одного треугольника конгруэнтны катетам другого треугольника;*

(b) *катет и острый угол одного треугольника конгруэнтны катету и острому углу другого треугольника;*

(c) *катет и гипотенуза одного треугольника конгруэнтны катету и гипотенузе другого треугольника;*

(d) *гипотенуза и острый угол одного треугольника конгруэнтны гипотенузе и острому углу другого треугольника*

Доказательство. При помощи теоремы 1.3 нетрудно убедиться, что из свойств (a), (b) прямоугольных треугольников вытекает их конгруэнтность. Проверим, что конгруэнтность прямоугольных треугольников вытекает и из свойства (c). Итак, пусть $AB \cong A_1B_1$, $BC \cong B_1C_1$. На луче, дополнительном к лучу $[C_1A_1)$, найдем такую точку D, что $DC_1 \cong AC$.

В прямоугольных треугольниках DB_1C_1, ABC катеты конгруэнтны; поэтому конгруэнтны и сами треугольники. Стало быть, $DB_1 \cong AB$. Так как по условию $AB \cong A_1B_1$, то сегменты A_1B_1 и DB_1 конгруэнтны; значит, $\triangle A_1B_1D$ – равнобедренный треугольник. В этом треугольнике отрезок $[B_1C_1]$ – высота, проведенная к основанию; в силу теоремы 1.14 $[B_1C_1]$ – медиана, т. е. $A_1C_1 \cong DC_1$. Поскольку $AC \cong DC_1$, получаем $AC \cong A_1C_1$, и к треугольникам ABC, $A_1B_1C_1$ применима теорема 1.5. Обратимся, наконец, к свойству (d). Пусть $AB \cong A_1B_1$ и $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$. На луче $[AC)$ найдем такую точку C_2, что $AC_2 \cong A_1C_1$. На луче $[AB)$ найдется единственная точка B_2, для которой $(B_2C_2) \perp (AC)$. Используя свойство (c), получаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 конгруэнтны. Поэтому $AB_2 \cong A_1B_1$ и, следовательно, $AB_2 \cong AB$. Отсюда вытекает, что $B_2 = B$, а потому и $C_2 = C$. Таким образом, $AC = AC_2 \cong A_1C_1$, и данные треугольники конгруэнтны по гипотенузе и катету.

1.15. Операции над сегментами

Пусть AB и CD – произвольные сегменты. Сегмент EF называется суммой сегментов AB, CD, если на отрезке $[EF]$ найдется такая точка G, что $EG \cong AB$, $GF \cong CD$.

Обозначение: $EF \cong AB + CD$.

Отметим следующие легко проверяемые свойства операции сложения сегментов:

1) $AB + CD \cong CD + AB$;

2) $(AB + CD) + EF \cong AB + (CD + EF)$;

3) если $AB \cong A_1B_1$, $CD \cong C_1D_1$, то $AB + CD \cong A_1B_1 + C_1D_1$;

4) если $AB \cong CD$, то $AB < CD + EF$;

5) если $AB \cong A_1B_1$, $CD < C_1D_1$, то $AB + CD < A_1B_1 + C_1D_1$;

6) если $AB < A_1B_1$, $CD < C_1D_1$, то $AB + CD < A_1B_1 + C_1D_1$.

Предложение 1.35. *В произвольном треугольнике* *сумма двух любых сторон больше третьей стороны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что в треугольнике наибольшая сторона меньше суммы двух других сторон. Предположим, что в треугольнике ABC выполнены соотношения $AC \leqslant AB$, $BC \leqslant AB$.

На луче, дополнительном к лучу $[CA)$, найдем такую точку D, что $DC \cong BC$ (рис. 20). Ясно, что $AD \cong AC + CB$. Поэтому нам достаточно проверить, что $AD > AB$. В силу выбора точки D треугольник BCD равнобедренный. Поэтому $\angle CDB \cong \angle CBD$. Кроме того, точка C лежит между точками A, D; поэтому луч $[BC)$ проходит во внутренней области угла ABD. Значит, $\angle ADB \cong \angle CBD < < \angle ABD$. Теперь осталось воспользоваться тем, что в треугольнике ABD против большего угла лежит большая сторона.

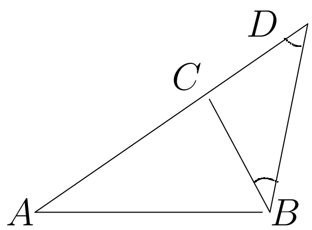


Рис. 20

Следствие. *Пусть A, B, C – три различные точки. Точка B лежит между точками A, C тогда и только тогда, когда $AB + BC \cong AC$.*

Доказательство. Если B лежит между A, C, то соотношение $AB + BC \cong AC$ сразу следует из определения суммы сегментов.

Обратно, предположим, что $AB + BC \cong AC$. Из предложения 1.35 следует, что A, B, C – коллинеарные точки. Проверим, что точка A не лежит между B, C. В самом деле, если бы точка A лежала между B, C, то было бы выполнено соотношение $AB + AC \cong BC$. Отсюда

$$AB + BC \cong AB + (AB + AC) \cong (AB + AB) + AC.$$

Так как $AB + BC \cong AC$, то последнее из полученных нами соотношений противоречит свойству 4 операции сложения. Аналогично проверяется, что точка C не лежит между B, A. Таким образом, B лежит между A, C.

Определим теперь сегмент $n \cdot AB$, являющийся произведением натурального числа n на сегмент AB. Это определение состоит из двух соотношений:

1) $1 \cdot AB \cong AB$;

2) $(n+1) \cdot AB \cong n \cdot AB + AB$, если $n \geqslant 1$.

Такое определение называется индуктивным. Смысл его ясен: $n \cdot AB$ – сегмент, конгруэнтный сумме n экземпляров сегмента AB.

Сформулируем свойства операции умножения сегментов на натуральные числа:

1) $n \cdot (AB + CD) \cong n \cdot AB + n \cdot CD$;

2) $(m + n) \cdot AB \cong m \cdot AB + n \cdot AB$;

3) $(nm) \cdot AB \cong n \cdot (m \cdot AB)$;

4) если $m < n$, $AB \cong CD$, то $m \cdot AB < n \cdot CD$;

5) если $AB < CD$, то $n \cdot AB < n \cdot CD$;

6) если $n \cdot AB \cong n \cdot CD$, то $AB \cong CD$;

7) если $AB \cong CD$, $m \cdot AB \cong n \cdot CD$, то $m = n$.

Доказательства свойств $1-7$ проводятся методом математической индукции. Мы приведем полное доказательство лишь для свойства 2, оставив проверку других свойств читателю в качестве упражнения.

Доказательство свойства 2.

При $n = 1$ имеем:

$$(m+1) \cdot AB \cong m \cdot AB + AB, \quad m \cdot AB + 1 \cdot AB \cong m \cdot AB + AB;$$

поэтому соотношение $(m+1) \cdot AB \cong m \cdot AB + 1 \cdot AB$ выполнено при всех натуральных m.

Пусть $n \geqslant 1$, и соотношение $(m+n) \cdot AB \cong m \cdot AB + n \cdot AB$ выполняется при любых натуральных m. Тогда

$$(m + (n+1)) \cdot AB \cong ((m+n)+1) \cdot AB \cong (m+n) \cdot AB + AB \cong$$
$$\cong m \cdot AB + n \cdot AB + AB \cong m \cdot AB + (n+1) \cdot AB.$$

Таким образом, проверено, что соотношение

$$(m + (n+1)) \cdot AB \cong m \cdot AB + (n+1) \cdot AB$$

выполнено при всех натуральных m.

Научимся теперь умножать сегменты на положительные рациональные числа вида $m/2^k$ (эти числа называются *конечными двоичными дробями*). Для этого понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Для любого сегмента AB и любого натурального числа k существует сегмент CD такой, что $AB \cong \cong 2^k \cdot CD$.*

Эта лемма легко получается из теоремы о существовании середины сегмента при помощи метода математической индукции.

Теперь по определению полагаем

$$\frac{m}{2^k} \cdot AB \cong m \cdot CD,$$

где CD – сегмент, удовлетворяющий соотношению

$$AB \cong 2^k \cdot CD.$$

Можно проверить, что сформулированные выше свойства 1 - 7 операции умножения сегментов на натуральные числа останутся справедливыми и при умножении сегментов на произвольные положительные конечные двоичные дроби. При такой проверке удобно использовать следующее утверждение: если для некоторого натурального числа n сегменты $n \cdot AB$, $n \cdot CD$ конгруэнтны, то конгруэнтны и сегменты AB, CD.

В заключение раздела отметим, что введенные нами операции сложения сегментов и умножения сегмента на конечную двоичную дробь очевидным образом применимы и к отрезкам.

1.16. Аксиома непрерывности

Пусть l – ориентированная прямая, т. е. прямая, на которой зафиксирован луч l_O. Напомним, что на ориентированной прямой для любых двух различных точек A, B определено отношение предшествования: A предшествует B ($A < B$), если лучи $[AB)$ и l_O сонаправлены. Как обычно, $A \leqslant B$ обозначает, что $A < B$ или $A = B$.

Пусть $\mathcal{C}$ – непустое множество точек ориентированной прямой. Точка M называется *верхней (нижней) гранью* множества $\mathcal{C}$, если для любой точки $X \in \mathcal{C}$ выполнено соотношение $X \leqslant M$ (соответственно $X \geqslant M$).

Определение. Наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней непустого множества $\mathcal{C}$ называется его *точной верхней (точной нижней) гранью* и обозначается $\sup \mathcal{C}$ ($\inf \mathcal{C}$).

Лемма 1. *Пусть M – верхняя грань непустого множества $\mathcal{C}$. Тогда $M = \sup \mathcal{C}$, если и только если для любой точки $X < M$ найдется такая точка $Y \in \mathcal{C}$, что $X < Y$.*

Доказательство. Если $M = \sup \mathcal{C}$ и $X < M$, то X уже не является верхней гранью множества $\mathcal{C}$; поэтому найдется $Y \in \mathcal{C}$, для которого $X < Y$.

Проверим обратное утверждение. Предположим, что M – верхняя грань множества $\mathcal{C}$, удовлетворяющая сформулированному в лемме 1 условию. Если $M \neq \sup \mathcal{C}$, то найдется такая точка X, что $X < M$ и X – верхняя грань множества $\mathcal{C}$. Наличие такой точки X противоречит свойству точки M.

Читатель без труда сформулирует и докажет аналогичное утверждение для точной нижней грани.

Определение. Множество точек на ориентированной прямой называется *ограниченным сверху (ограниченным снизу)*, если оно имеет верхнюю (соответственно нижнюю) грань.

Определение. Множество точек прямой называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором отрезке.

Ясно, что подмножество ориентированной прямой ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и сверху, и снизу.

IV_1 (аксиома непрерывности). *Любое непустое ограниченное сверху подмножество ориентированной прямой имеет точную верхнюю грань.*

Заметим, что существование точной нижней грани непустого ограниченного снизу множества следует из аксиомы непрерывности.

В самом деле, пусть $\mathcal{D}$ – множество всех нижних граней непустого ограниченного снизу множества $\mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{D}$, очевидно, непусто и ограничено сверху. Стало быть, существует $D = \sup \mathcal{D}$. Легко понять, что D является нижней гранью множества $\mathcal{C}$. Действительно, если $X \in \mathcal{C}$ и $X < D$, то существует такая точка Y из $\mathcal{D}$, что $X < Y$. Последнее неравенство невозможно, поскольку Y – одна из нижних граней множества $\mathcal{C}$. Таким образом, D – наибольшая из нижних граней множества $\mathcal{C}$, т. е. $D = \inf \mathcal{C}$.

Предложение 1.36. *Для любых двух сегментов AB и CD существует такое натуральное число n, что $n \cdot AB \geqslant CD$.*

Доказательство. Если $AB \geqslant CD$, то можно положить $n = 1$. Пусть $AB < CD$. В этом случае на отрезке $[CD]$ существует такая точка C_1, что $CC_1 \cong AB$. Для каждого натурального числа m на луче $[CD)$ найдем точку C_m так, чтобы $CC_m \cong m \cdot CC_1$. Покажем, что найдется число n, для которого D лежит между C и C_n. Рассуждая "от противного", допустим, что при любом m точка C_m является внутренней точкой отрезка $[CD]$. Тогда множество $\mathcal{C}$, состоящее из всех точек C_m, ограничено и непусто. Зададим на прямой (CD) ориентацию, выбрав луч $[CD)$. К множеству $\mathcal{C}$ применима аксиома IV_1. Поэтому существует точка M, равная $\sup \mathcal{C}$. Пусть K – середина отрезка $[CM]$. Так как $K < M$, то в силу леммы 1 найдется такое i, что $K < C_i$. Это соотношение означает, что K лежит между C и C_i; стало быть $CK < CC_i$. Замечая, что

$$CC_{2i} \cong (2i) \cdot CC_1 \cong 2 \cdot (i \cdot CC_1) \cong 2 \cdot CC_i,$$

имеем

$$CM \cong 2 \cdot CK < 2 \cdot CC_i \cong CC_{2i};$$

таким образом, $CM < CC_{2i}$, т. е. $M < C_{2i}$. Однако соотношение $M < C_{2i}$ невозможно, ибо $M = \sup \mathcal{C}$.

Заметим, что предложение 1.36 связано с именем выдающегося древнегреческого математика Архимеда. Часто это утверждение включают в число аксиом, и тогда оно называется *аксиомой Архимеда.*

Получим из аксиомы Архимеда важное следствие.

Предложение 1.37. *Для любых двух сегментов AB и CD существует такое натуральное число k, что $CD/2^k < AB$.*

Доказательство. Из аксиомы Архимеда следует существование такого натурального числа n, что

$$n \cdot AB \geqslant CD.$$

Найдем натуральное число k так, чтобы выполнялось неравенство $2^k > n$. Тогда $2^k \cdot AB > CD$, откуда

$$\frac{1}{2^k} \cdot CD < AB.$$

Читателю предлагается убедиться в том, что из предложения 1.37 можно вывести аксиому Архимеда. Таким образом, аксиома Архимеда и предложение 1.37 эквивалентны.

1.17. Лемма Кантора

В этом разделе будет доказана теорема, называемая леммой Кантора. Эта теорема, по существу, эквивалентна аксиоме непрерывности. Преимущество леммы Кантора состоит в том, что ее формулировка не требует ориентированности прямой.

Для того чтобы сформулировать лемму Кантора, нам понадобится понятие *системы вложенных отрезков.*

Бесконечная совокупность отрезков $[A_n, B_n], n \in \mathbb{N}$, – называется системой вложенных отрезков, если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $[A_n, B_n] \subseteq [A_{n+1}, B_{n+1}]$.

Теорема 1.13 (Лемма Кантора). *Пусть $[A_n, B_n], n \in \mathbb{N}$, – произвольная система вложенных отрезков, причем для любого отрезка $[CD]$ существует такое n, что $[A_n, B_n] <$ $< [CD]$. Тогда найдется единственная точка X, общая для всех отрезков системы.*

Доказательство. Обозначим через l ориентированную прямую, содержащую все отрезки данной системы. Без ограничения общности можно считать, что на этой прямой при каждом n точка A_n предшествует точке B_n. Будем говорить, что A_n – левый, а B_n – правый конец соответствующего отрезка.

Убедимся сначала, что для любых m и n точка A_m предшествует точке B_n. Если $m = n$, то это свойство очевидно. Пусть $m < n$. Тогда выполнено включение

$$[A_n, B_n] \subseteq [A_m, B_m].$$

Из этого включения сразу вытекает, что

$$A_n \leqslant A_m < B_m.$$

Следовательно, $A_n < B_m$. Случай, когда $n < m$ может быть рассмотрен совершенно аналогично.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}$, состоящее из всех левых концов отрезков данной системы. В силу доказанного выше свойства это множество ограничено сверху. Применение аксиомы непрерывности показывает, что множество $\mathcal{A}$ имеет точную верхнюю грань X.

Убедимся сначала, что точка X принадлежит всем отрезкам. Пусть $[A_n, B_n]$ – произвольный отрезок системы. Так как $A_n \in \mathcal{A}$ и X – точная верхняя грань множества $\mathcal{A}$, имеем $A_n \leqslant X$. С другой стороны, точка B_n является верхней гранью множества $\mathcal{A}$. Поэтому $X \leqslant B_n$. Следовательно, $A_n \leqslant X \leqslant B_n$, откуда вытекает включение $X \in [A_n, B_n]$.

Теперь проверим, что X – единственная точка, принадлежащая всем отрезкам. Пусть Y – произвольная точка прямой l, отличная от точки X. Если $Y < X$, то найдется такое n, что $Y < A_n$. Отсюда вытекает, что $Y \notin [A_n, B_n]$. Пусть $X < Y$. Тогда найдется такой отрезок $[A_m, B_m]$, что $[A_m, B_m] < [X, Y]$. Рассмотрим две возможности относительно точек Y и B_m:

1) $Y \leqslant B_m$. Тогда выполнены соотношения

$$A_m \leqslant X < Y \leqslant B_m,$$

откуда немедленно следует, что $[X, Y] \leqslant [A_m, B_m]$. Последнее неравенство противоречит выбору отрезка $[A_m, B_m]$. Таким образом, этот случай невозможен.

2) $B_m < Y$. Это соотношение означает, что точка Y не принадлежит отрезку $[A_m, B_m]$.

В заключение этого пункта убедимся в том, что из леммы Кантора вытекает аксиома непрерывности.

Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное ограниченное сверху множество на ориентированной прямой l. Проверим, что при помощи леммы Кантора можно доказать существование точной верхней грани множества $\mathcal{X}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех таких точек A, каждая из которых предшествует некоторой точке $X \in \mathcal{X}$, а через $\mathcal{B}$ – множество всех верхних граней множества $\mathcal{X}$. Нетрудно понять, что множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ не пересекаются и их объединение совпадает с прямой l.

Выберем произвольные точки $A_0 \in \mathcal{A}$ и $B_0 \in \mathcal{B}$. Пусть C_0 – середина отрезка $[A_0B_0]$. Если $C_0 \in \mathcal{A}$, то положим $A_1 = C_0$, $B_1 = B_0$; в противном случае – $A_1 = A_0$, $B_1 = C_0$. Ясно, что $[A_1B_1] \subset [A_0B_0]$ и $[A_1B_1] = \frac{1}{2}[A_0B_0]$. Предположим, что для некоторого $n \geqslant 1$ отрезок $[A_nB_n]$ уже построен. Обозначим через C_n середину этого отрезка. Если $C_n \in \mathcal{A}$, то положим $A_{n+1} = C_n$, $B_{n+1} = B_n$; иначе $A_{n+1} = A_n$, $B_{n+1} = C_n$. Понятно, что $[A_{n+1}B_{n+1}] \subset [A_nB_n]$ и $[A_{n+1}B_{n+1}] = \frac{1}{2}[A_nB_n]$. Применяя метод математической индукции, мы можем считать, что для любого $n \geqslant 0$ построен отрезок $[A_nB_n]$, причем $[A_nB_n] = \frac{1}{2^n}[A_0B_0]$. Итак, нами построена система вложенных отрезков, в которой каждый отрезок вдвое меньше предыдущего. Применяя предложение 1.37, получаем, что для любого отрезка $[CD]$ найдется такое n, что $[A_nB_n] < [CD]$. В силу леммы Кантора существует единственная точка X, принадлежащая всем отрезкам данной системы.

Убедимся, что X – верхняя грань множества $\mathcal{X}$. Предположим, что существует такая точка $Y \in \mathcal{X}$, что $X < Y$. Поскольку точка Y не может принадлежат всем отрезкам нашей системы, найдется такое n, что $Y \notin [A_nB_n]$, откуда следует, что $B_n < Y$. Последнее неравенство противоречит тому, что B_n – верхняя грань множества $\mathcal{X}$.

Проверим теперь, что X – наименьшая из из верхних граней множества $\mathcal{X}$. Пусть $Z < X$. Тогда найдется такое n, что $Z \notin$

$[A_nB_n]$, и потому $Z < A_n$. Так как $A_n \in \mathcal{A}$, существует такое $U \in \mathcal{X}$, что $A_n < U$. Следовательно, $Z < U$, и потому Z не является верхней гранью множества $\mathcal{X}$.

1.18. Измерение отрезков

Прежде чем говорить об измерении отрезков, сделаем следующее замечание. Множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел является упорядоченным множеством. В курсе алгебры и начал анализа в 11 классе будет доказано, что множество $\mathbb{R}$ удовлетворяет аксиоме непрерывности. Отсюда, как мы знаем, следует, что в $\mathbb{R}$ выполнены аксиома Архимеда и лемма Кантора.

Измерение отрезков предназначено для того, чтобы каждому отрезку $[AB]$ сопоставить неотрицательное действительное число $|AB|$, причем должны выполняться следующие свойства:

(a) $|AB| = |CD|$ *тогда и только тогда, когда* $AB \cong CD$.

(b) $|AB| > |CD|$ *тогда и только тогда, когда* $AB > CD$.

(c) *если* $[AB \cong [CD] + [GH]$, *то* $|AB| = |CD| + |GH|$.

Для того чтобы научиться измерять отрезки, нужно выбрать *единичный отрезок*. В качестве такого отрезка мы выберем произвольный отрезок $[EF]$ и зафиксируем его. Длину единичного отрезка мы, разумеется, положим равной единице, т. е. $|EF| = 1$.

Пусть $[AB]$ – произвольный отрезок.

Если этот отрезок нулевой, т. е. если $A = B$, то $|AB| = 0$.

Если

$$[AB] = \frac{a}{2^n} \cdot [EF]$$

(a – натуральное, n – целое неотрицательное), то

$$|AB| = \frac{a}{2^n}.$$

В общем случае для измерения отрезка $[AB]$ нужно использовать следующий бесконечный процесс.

На луче $[AB)$ найдем такие точки C_0 и D_0, что для некоторого неотрицательного целого числа a_0 выполнены условия

$$[AC_0] = a_0[EF], \qquad [AD_0] = (a_0+1)[EF],$$

$$[AC_0] < [AB] < [AD_0].$$

Геометрически это означает, что на луче $[AB)$ от точки A мы откладываем единичный отрезок $[EF]$ до тех пор, пока не выйдем за пределы отрезка $[AB]$.

Теперь найдем точки C_1 и D_1 так, чтобы для некоторого неотрицательного целого числа a_1 были выполнены условия

$$[AC_1] = \frac{a_1}{2}[EF], \qquad [AD_1] = \frac{a_1+1}{2}[EF],$$

$$[AC_1] < [AB] < [AD_1].$$

Иными словами, на луче $[AB)$ от точки A мы откладываем половину единичного отрезка $\dfrac{[EF]}{2}$ и фиксируем момент выхода за точку B.

Из геометрических соображений нетрудно понять, что

$$a_0 \leqslant \frac{a_1}{2} < \frac{a_1+1}{2} \leqslant a_0 + 1.$$

Понятно, что аналогичное построение можно проделать для любого натурального числа n. А именно, найдутся такие точки C_n, D_n и неотрицательное целое число a_n, что

$$[AC_n] = \frac{a_n}{2^n}[EF], \qquad [AD_n] = \frac{a_n+1}{2^n}[EF],$$

$$[AC_n] < [AB] < [AD_n].$$

Применяя геометрические соображения нетрудно придти к неравенству

$$\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} \leqslant \frac{a_n}{2^n} < \frac{a_n+1^{\,n}}{2} \leqslant \frac{a_{n-1}+1}{2^{n-1}},$$

справедливому при любом натуральном n.

Итак, во множестве $\mathbb{R}$ мы построили систему вложенных отрезков $\left[\dfrac{a_n}{2^n}; \dfrac{a_n+1}{2^n}\right]$, причем каждый отрезок короче предыдущего в два раза. Применяя лемму Кантора, мы найдем единственное число d, принадлежащее всем отрезкам. Это число d и называется длиной отрезка $[AB]$.

Построенное нами число d является точной верхней гранью множества конечных двоичных дробей вида $a_n/2^n$.

Проверку отмеченных выше свойств a) – c) мы опускаем.

Заметим, что проводя построения, сходные с приведенными выше, можно по данному неотрицательному числу d найти отрезок $[AB]$, длина которого равна d.

Отметим также, что длину отрезка $[AB]$ часто называют расстоянием между точками A и B.

1.19. Расстояние от точки до прямой

Понятие расстояния между двумя точками позволяет определить расстояние между произвольной точкой A и произвольной фигурой $\mathcal{X}$.

Определение. Расстояние $d(A, \mathcal{X})$ между точкой A и фигурой $\mathcal{X}$ – это точная нижняя грань расстояний $|AX|$, где $X \in \mathcal{X}$.

Ясно, что в том случае, когда $A \in \mathcal{X}$, расстояние $d(A, \mathcal{X})$ равно 0. Кроме того, в этом определении нельзя вместо $\inf\{|AX| \mid X \in \mathcal{X}\}$ использовать $\min\{|AX| \mid X \in \mathcal{X}\}$, ибо может не существовать точки $X \in \mathcal{X}$, для которой этот минимум достигается. Приведем пример. Возьмем в качестве множества $\mathcal{X}$ интервал $]CD[$; пусть $A \in (CD)$, причем точка D лежит между C и A. Тогда

$$d(A,]CD[) = \inf\{|AX| \mid X \in]CD[\} = |AD|,$$

в то время как точка D не принадлежит интервалу $]CD[$.

Вычислим расстояние от точки A до прямой l в случае, когда $A \notin l$.

Предложение 1.38. *Расстояние от точки A до прямой l равно длине перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l.*

Доказательство. Обозначим через B основание перпендикуляра, опущенного из точки A на l. Пусть X – произвольная точка прямой l, отличная от точки B. Тогда треугольник

ABX прямоугольный; ясно, что в этом треугольнике гипотенуза $[AX]$ больше катета $[AB]$. Отсюда

$$d(A, l) = \inf\{|AX| \mid X \in l\} = |AB|.$$

1.20. Измерение углов

Пусть $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ – произвольный флаг. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех лучей, имеющих начало в точке O и лежащих в полуплоскости π_l.

Пусть $a, b \in \mathcal{A}$. Будем говорить, что луч a *предшествует* лучу b ($a \prec b$), если $\angle al_O < \angle bl_O$. Нетрудно понять, что отношение предшествования на множестве $\mathcal{A}$ является отношением линейного порядка.

Предложение 1.39. *Пусть $\mathcal{D}$ – непустое подмножество множества $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{D}$ имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Как обычно, обозначим через l'_O луч, дополнительный к лучу l_O. Ясно, что луч l'_O является верхней гранью множества $\mathcal{A}$. Следовательно, этот луч является и верхней гранью множества $\mathcal{D}$. Рассмотрим два случая.

1. Луч l'_O – единственная верхняя грань множества $\mathcal{D}$. Это означает, что никакой луч, предшествующий лучу l'_O, не является верхней гранью множества $\mathcal{D}$. Нетрудно понять, что в этом случае луч l'_O является точной верхней гранью множества $\mathcal{D}$.

2. Существует луч c, отличный от луча l'_O и являющийся верхней гранью множества $\mathcal{D}$. На лучах l_O и c выберем соответственно точки L и C. Все лучи, принадлежащие множеству $\mathcal{D}$, расположены во внутренней области угла LOC; поэтому каждый из таких лучей пересекается с отрезком $[LC]$. Обозначим через $\mathcal{D}_0$ множество точек пересечения всех лучей из множества $\mathcal{D}$ с отрезком $[LC]$. Введем на прямой m ориентацию, считая луч $[LC)$ имеющим положительное направление. Пусть d_1, d_2 – из множества $\mathcal{D}$, D_1, D_2 – точки пересечения этих лучей с отрезком $[LD]$. Нетрудно понять, что луч d_1 предшествует лучу d_2 тогда и только тогда, когда точка D_1 предшествует точке D_2 на ориентированной прямой m. Поскольку

множество $\mathcal{D}_0$ на ориентированной прямой ограничено сверху (его верхней гранью является точка C, это множество имеет точную верхнюю грань D_0. Обозначим через d_0 луч $[OD_0)$. Ясно, что d_0 – верхняя грань множества $\mathcal{D}_0$. Пусть луч $a \in \mathcal{A}$ предшествует лучу d_0. Если A – точка пересечения луча a и прямой m, то A предшествует D_0 на ориентированной прямой m. Найдется точка $D \in \mathcal{D}_0$, лежащая между точками A и D_0. Следовательно, луч $d = [OD)$ разделяет лучи a и d_0. Тем самым мы убедились, что луч d_0 – точная верхняя грань множества $\mathcal{D}$.

В качестве следствия из предложения 1.39 отметим следующее утверждение.

Предложение 1.40. *Пусть $\mathcal{D}$ – непустое подмножество множества $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{D}$ имеет точную нижнюю грань.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{C}$ множество всех нижних граней данного множества $\mathcal{D}$. Ясно, что $\mathcal{C}$ непусто. Пусть $c = \sup \mathcal{C}$. Проверку того, что c – точная нижняя грань множества $\mathcal{D}$ мы оставляем читателю.

Введем на множестве углов операции, аналогичные операциям над сегментами (см. разд. 1.15).

Угол aOb называется *суммой* углов $a_1O_1b_1$ и $a_2O_2b_2$, если для некоторого луча d с вершиной O выполнены соотношения $\angle aOd \cong \angle a_1O_1b_1$ и $\angle dOb \cong \angle a_2O_2b_2$.

В этом случае пишут $\angle aOb \cong \angle a_1O_1b_1 + \angle a_2O_2b_2$.

Легко понять, что если $\angle aOb > \angle a_1O_1b_1$, то существует такой угол $a_2O_2b_2$, что $\angle aOb \cong \angle a_1O_1b_1 + \angle a_2O_2b_2$. Угол $a_2O_2b_2$ называется *разностью* углов и aOb, $a_1O_1b_1$ и обозначается $\angle aOb - \angle a_1O_1b_1$.

Пусть n – натуральное число. Определим соотношение $\angle aOb \cong n \cdot \angle a_1O_1b_1$ (угол aOb является *произведением* числа n на угол $a_1O_1b_1$):

$$\angle aOb \cong n \cdot \angle a_1O_1b_1 \Longleftrightarrow \angle aOb \cong (n-1) \cdot \angle a_1O_1b_1 + \angle a_1O_1b_1,$$

если $n \geqslant 2$, и

$$1 \cdot \angle aOb \cong \angle aOb.$$

В дальнейшем нам понадобится произведение угла на дробь вида $1/2^k$. Это определение легко ввести при помощи индукции с использованием утверждения о существовании биссектрисы угла. В самом деле, при $k = 1$ угол $(1/2)\alpha$ уже определен – он равен половине угла α. Предположим, что $k \geqslant 1$ и угол $\beta = (1/2^k)\alpha$ уже определен. Тогда по пределению угол $(1/2^{k+1})\alpha$ совпадает с половиной угла β. Из этого определения легко вытекает следующее равенство

$$2^l\left(\frac{1}{2^k}\alpha\right) = 2^{l-k}\alpha$$

при $l \geqslant k$.

Операции над углами обладают свойствами, аналогичными свойствам операций над сегментами. На доказательстве этих свойств мы останавливаться не будем.

Следующее утверждение является аналогом предложения 1.36 для сегментов.

Предложение 1.41. *Для любых ненулевых углов α и β существует такое натуральное k, что*

$$\frac{1}{2^k}\alpha < \beta.$$

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{2^k}\alpha | k \geqslant 0\right\}.$$

В силу предложения 1.40 множество $\mathcal{C}$ имеет точную нижнюю грань γ. Для того чтобы доказать требуемое, достаточно убедиться в том, что γ – нулевой угол. Действительно, в таком случае ненулевой угол β не является нижней гранью множества $\mathcal{C}$, и потому существует m, для которого выполнено неравенство $(1/2^m)\alpha < \beta$.

Итак, проверим, что угол γ является нулевым. Рассуждая "от противного", предположим, что угол γ ненулевой. Поскольку угол $\alpha/2$ всегда острый и $\gamma < \alpha/2$, получаем, что γ –

острый угол. Отсюда следует, что определен угол 2γ. Ясно, $2\gamma > \gamma$, и потому угол 2γ не является нижней гранью множества $\mathcal{C}$. Следовательно, найдется такое k, что $2\gamma < \dfrac{1}{2^k}\alpha$, откуда $\gamma < \dfrac{1}{2^{k+1}}\alpha$. Последнее неравенство показывает, что множество $\mathcal{C}$ содержит элемент, который меньше точной нижней грани этого множества. Противоречие.

Продолжим обсуждение вопросов, связанных с измерением углов. Пусть $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ – некоторый флаг, $\alpha = \angle a l_O$ – угол, сторона a которого лежит в полуплоскости π_l. Поставим теперь в соответствие каждому такому углу α неотрицательное действительное число $\mu(\alpha)$, называемое *мерой* угла α. Пусть d – положительное действительное число. Если δ – прямой угол, отложенный в полуплоскости π_l от луча l_O, то положим $\mu(\delta) = d$. Поскольку каждый угол имеет биссектрису, для любого натурального числа n найдется такой угол β, что $\beta = \delta/2^n$. Пусть m – натуральное число, $m < 2^{n+1}$ и $\gamma = m \cdot \beta$. Тогда

$$\mu(\gamma) = \frac{m}{2^n}d.$$

Эта формула определяет меру углов, представимых в виде произведения прямого угла δ на конечную двоичную дробь.

Пусть α – произвольный угол, отложенный в полуплоскости π_l от луча l_O. Рассмотрим множество конечных двоичных дробей

$$S = \{r | r = \frac{m}{2^n} \text{ и } r \cdot \delta \leqslant \alpha\}.$$

В силу предложения 1.41 множество S непусто; кроме того, из неравенств $r \cdot \delta \leqslant \alpha \leqslant 2 \cdot \delta$ следует, что $r \leqslant 2$, т. е. S ограничено сверху. Ранее (см. разд. 1.16) мы отмечали, что всякое непустое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань. Пусть $s = \sup S$. Тогда $\mu(\alpha) = s$.

Можно проверить, что определенная нами мера углов обладает следующими свойствами:

1) если $\gamma = \alpha + \beta$, то $\mu(\gamma) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$;

2) если r – конечная двоичная дробь и $\gamma = r \cdot \alpha$, то $\mu(\gamma) = = r \cdot \mu(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$;

3) $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \cong \beta$.

Заметим, что мера на множестве углов определена однозначно, если задано число d, являющееся мерой прямого угла. Так, если $d = 90$, то мы получим *градусную* меру углов; если же $d = \pi/2$ (π – отношение длины окружности к ее диаметру), то получится *радианная* мера.

Отметим также, что на ориентированной плоскости задание меры для углов позволяет определить меру для ориентированных углов. В самом деле, положим, что $\mu(\measuredangle ab) = \mu(\angle ab)$, если $\measuredangle ab$ имеет положительную ориентацию, и $\mu(\measuredangle ab) = -\mu(\angle ab)$ в противном случае. Если d – мера прямого угла, то для любого ориентированного угла α выполнено неравенство $-2d < \mu(\alpha) \leqslant 2d$ (напомним, что ориентированный развернутый угол считается положительно ориентированным).

1.21. Пятый постулат Евклида и абсолютная геометрия

Термин ”абсолютная геометрия“ был предложен в 1832 году венгерским математиком Я.Бойяи. Под *абсолютной геометрией* понимают совокупность всех утверждений, являющихся следствиями из аксиом всех четырех групп, рассмотренных нами в предыдущих разделах.

Интерес к абсолютной геометрии связан с историей пятого постулата Евклида. Сформулируем это утверждение.

Пусть в полуплоскости π_n от прямой n отложены углы 1, 2, причем сумма этих углов меньше развернутого угла. Тогда стороны a, b этих углов пересекаются в точке, принадлежащей полуплоскости π_n (рис. 21).

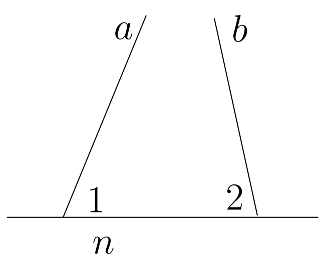


Рис. 21

На протяжении 2000 лет многие математики пытались доказать, что пятый постулат является теоремой абсолютной геометрии. Как правило, такое доказательство пытались получить рассуждая “от противного”. В самом деле, если пятый постулат является следствием аксиом абсолютной геометрии, то добавляя к аксиомам абсолютной геометрии отрицание пятого постулата можно получить противоречие. Однако все такие попытки оказывались безуспешными. Утверждения, которые получались на этом пути, хотя и не согласовывались с привычными представлениями о свойствах пространства, но противоречивыми не являлись. Наиболее продвинулись в указанном направлении итальянский математик И.Саккери (1667–1773) и французский математик А.Лежандр (1752–1833). На самом деле они (к сожалению, сами того не осознавая) положили начало изучению новой геометрии, названной впоследствии неевклидовой геометрией Лобачевского.

Рассмотрим несколько утверждений, имеющих принципиальное значение для дальнейшего изложения.

Напомним, что из данной точки к данной прямой можно провести единственный перпендикуляр (см. теорему 1.9). Отсюда вытекает, что два различных перпендикуляра к данной прямой общих точек не имеют. На самом деле можно сформулировать более общее утверждение: если при пересечении различных прямых l, m прямой n получаются конгруэнтные соответственные углы, то прямые l и m не имеют общих точек. Из этих соображений сразу следует

Предложение 1.42. *Если точка B не принадлежит прямой l, то существует прямая m, проходящая через B и не имеющая с l общих точек.*

Заметим, что вопрос о единственности такой прямой пока остается открытым.

Выше было доказано предложение 1.33: внешний угол треугольника больше несмежного с ним внутреннего угла. Значительным усилением предложения 1.33 является следующее утверждение.

Предложение 1.43. *Внешний угол треугольника не меньше суммы несмежных с ним внутренних углов.*

Доказательство. Будем рассуждать "от противного". Пусть в треугольнике ABC внешний угол γ' при вершине C

меньше суммы внутренних углов α и β при вершинах A и B (рис. 22). Это означает, что $\alpha+\beta=\gamma'+\delta$ для некоторого угла δ.

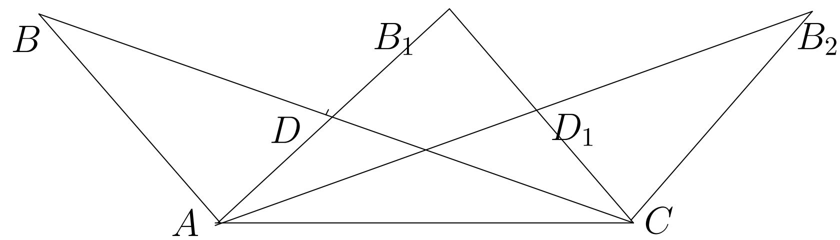


Рис. 22

Пусть D – середина стороны $[BC]$ и B_1 – такая точка, что D – середина $[AB_1]$. Обозначим через α_1 и β_1 внутренние углы треугольника AB_1C при вершинах A, B_1, через γ_1' – внешний угол при вершине C. Из конгруэнтности треугольников DAB и DB_1C следует, что $\angle BAB_1 \cong \beta_1$, $\angle DCB_1 \cong \beta$. Отсюда $\alpha_1 \cong \cong \alpha-\beta_1$, $\gamma_1' \cong \gamma'-\beta$. Поэтому $\alpha_1+\beta_1 \cong \alpha \cong \gamma'-\beta+\delta \cong \gamma_1'+\delta$, и, стало быть,

$$\beta_1 \cong \alpha-\alpha_1, \quad \alpha_1+\beta_1 \cong \gamma_1'+\delta.$$

Аналогично, для треугольника AB_1C можно построить треугольник AB_2C (отрезки $[CB_1]$ и $[AB_2]$ имеют общую середину D_1) с внутренними углами α_2, β_2 при вершинах A, B_2 и внешним углом γ_2' при вершине C, причем будут справедливы соотношения

$$\beta_2 \cong \alpha_1-\alpha_2, \quad \alpha_2+\beta_2 \cong \gamma_2'+\delta.$$

Продолжая строить треугольники $AB_3C, \ldots, AB_nC$ и вводя соответствующие обозначения, мы получим следующие соотношения:

$$\beta_3 \cong \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3+\beta_3 \cong \gamma_3'+\delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_n \cong \alpha_{n-1}-\alpha_n, \alpha_n+\beta_n \cong \gamma_n'+\delta.$$

Легко видеть, что

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n \cong (\alpha-\alpha_1)+(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \cong \alpha-\alpha_n.$$

Стало быть,

$$\alpha > \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$$

для любого натурального n.

Предположим, что при любом n выполнено неравенство $\beta_n \geqslant \delta$. Тогда $\alpha > n \cdot \delta$ для любого n из $\mathbb{N}$. Это противоречит предложению 1.41. Поэтому $\beta_k < \delta$ для некоторого k. Поскольку $\alpha_k + \beta_k \cong \gamma'_k + \delta$, получаем, что $\alpha_k > \gamma'_k$. Но γ'_k – внешний угол треугольника AB_kC, а α_k – внутренний угол этого треугольника, несмежный с γ'_k.

Договоримся, что в последующих утверждениях этого раздела под углом, как правило, будет пониматься градусная мера угла.

Из предложения 1.43 вытекает

Теорема 1.14. *Сумма внутренних углов треугольника не превосходит* 180°*.*

А может ли оказаться так, что существует два треугольника, в одном из которых сумма внутренних углов равна 180°, а в другом меньше 180°? Оказывается нет, ибо справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.15. *Если существует треугольник с суммой внутренних углов, равной* 180°*, то сумма внутренних углов любого треугольника равна* 180°*.*

Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, поскольку оно довольно громоздко. Впервые эта теорема была доказана А.Лежандром.

Из теоремы 1.15 вытекает, что в принципе может иметь место одна из двух возможностей:

(Е_1) *в любом треугольнике сумма внутренних углов равна* 180°*;*

(Л_1) *в любом треугольнике сумма внутренних углов меньше* 180°*.*

Вернемся к обсуждению вопроса о единственности прямой, проходящей через данную точку и не пересекающей данную прямую.

Рассмотрим следующие два утверждения.

(E_2) *если B и l – произвольные точка и прямая и $B \notin l$, то существует единственная прямая m, проходящая через точку B и не пересекающая прямую l;*

(Л_2) *если B и l – произвольные точка и прямая и $B \notin l$, то существуют по крайней мере две прямые m_1 и m_2, проходящие через точку B и не пересекающие прямую l.*

Теорема 1.16. *Утверждения* (E_1) *и* (E_2) *эквивалентны.*

Доказательство. (E_1) $\Rightarrow$ (E_2). Пусть A – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую l, а m – прямая, проходящая через точку B и перпендикулярная прямой (AB) (рис. 23). Ясно, что $l \cap m = \emptyset$. Выберем на прямой l луч l_A и рассмотрим такие точки $A_i \in l_A$ ($i \in \mathbb{N}$), что $A_1A \cong AB$ и $A_iA_{i+1} \cong A_iB$ при $i \geqslant 1$. Теперь заметим, что из (E_1) вытекают два утверждения:

(a) сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$;

(b) внешний угол треугольника равен сумме двух несмежных с ним внутренних углов.

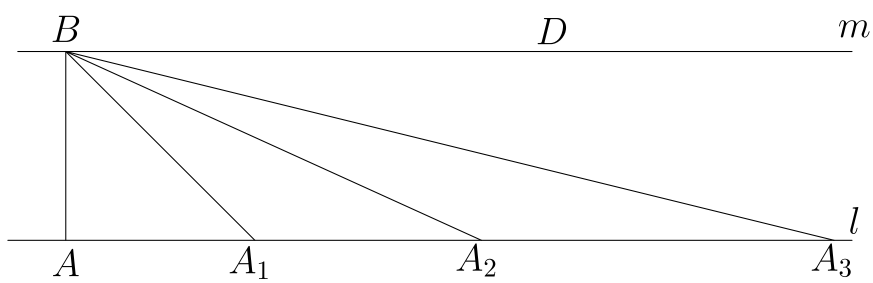


Рис. 23

На прямой m выберем точку D, лежащую с той же стороны от прямой (AB), что и луч l_A. Пусть $m_B =]BD)$. Если $\delta = \angle DBA$, то из утверждений (a), (b) нетрудно вывести, что $\angle BA_iA \cong \delta/2^i$ при $i \geqslant 1$. Отсюда следует, что $\angle DBA_i$ также конгруэнтен $\delta/2^i$.

Рассмотрим теперь произвольную прямую n, проходящую через точку B и отличную от прямой m. Обозначим через n_B луч, расположенный с той же стороны от m, что и точка A.

Без ограничения общности можно считать, что луч n_B проходит во внутренней области угла DBA (иначе точки A_i следует выбрать на луче l'_A). Выберем натуральное число n таким, что $\delta/2^n < \angle m_B n_B$. Тогда ясно, что луч n_B пройдет во внутренней области угла ABA_n, и, стало быть, пересечет отрезок $[AA_n]$.

(E$_2$) $\Rightarrow$ (E$_1$). Пусть ABC – произвольный треугольник и D – такая точка, что середины отрезков $[AB]$ и $[CD]$ совпадают. Тогда $\angle ABD \cong \angle BAC$. Аналогично, если E – точка, для которой совпадают середины отрезков $[BC]$ и $[AE]$, то $\angle CBE \cong \angle ACB$. Кроме того, понятно, что прямые (BD) и (BE) не пересекают прямую (AC); поэтому из (E$_2$) следует, что $(BD) = (BE)$. Стало быть, угол DBE является развернутым. Поскольку $\angle DBE = \angle ABD + \angle ABC + \angle CBE$, в силу отмеченных выше соотношений получаем, что развернутый угол DBE конгруэнтен сумме внутренних углов треугольника ABC. Учитывая, что градусная мера развернутого угла равна $180°$, получаем требуемое.

Аналогичными рассуждениями может быть установлена справедливость двух следующих теорем.

Теорема 1.17. *Пятый постулат эквивалентен утверждению* (E$_2$).

Теорема 1.18. *Утверждения* (Л$_1$) *и* (Л$_2$) *эквивалентны.*

Оказывается, пятый постулат Евклида (как и любое эквивалентное ему утверждение) *не зависит* от аксиом абсолютной геометрии. Это означает, что дополнив абсолютную геометрию, с одной стороны, пятым постулатом, а с другой – его отрицанием, можно построить две геометрические системы, ни в одной из которых не получится противоречия. Это принципиальное и очень важное для дальнейшего развития геометрии положение было осознано почти одновременно тремя учеными: русским математиком Н.И.Лобачевским, венгерским математиком Я.Бойяи и выдающимся немецким математиком К.Ф.Гауссом.

Первая из этих геометрических систем называется евклидовой геометрией, вторая – неевклидовой геометрией Лобачевского.

1.22. Аксиома параллельности

В этом разделе мы переходим к изучению евклидовой геометрии. В качестве единственной аксиомы пятой группы мы берем (следуя установившейся традиции) утверждение (E_2).

V_1 (аксиома параллельности). *Для любой прямой l и любой точки $B \notin l$ существует единственная прямая, проходящая через B и не пересекающая l.*

Определение. Прямые l, m называются *параллельными*, если либо $l = m$, либо $l \cap m = \emptyset$.

Следующие свойства параллельных прямых легко проверяются:

- пусть l, m, n – такие прямые, что $l \parallel m$, $m \parallel n$. Тогда $l \parallel n$ (транзитивность отношения параллельности);
- пусть l, m, n – такие прямые, что $m \parallel n$, $l \perp m$. Тогда $l \perp n$.

Предположим, что две различные прямые l, m пересечены третьей прямой n (рис. 24). При этом возникают восемь углов. Как мы знаем, углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются *соответственными*; углы 3 и 5, 4 и 6 – *внутренними накрест лежащими*; углы 1 и 7, 2 и 8 – *внешними накрест лежащими.*

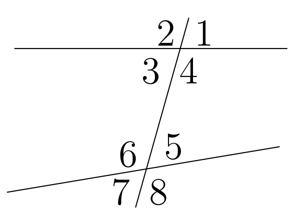


Рис. 24

Проверьте самостоятельно следующие утверждения:

- если при пересечении прямых l, m прямой n какие-нибудь два соответственных (внешних накрестлежащих, внутренних накрестлежащих) угла конгруэнтны, то прямые l, m параллельны;

- если две различные параллельные прямые l, m пересечены прямой n, то любые два соответственных (внешних накрестлежащих, внутренних накрестлежащих) угла конгруэнтны.

Определение. Четырехугольник $ABCD$ называется *параллелограммом,* если $(AB) \parallel (CD)$ и $(AC) \parallel (BD)$.

Перечислим основные свойства параллелограмма:

- в параллелограмме противоположные стороны конгруэнтны;
- в параллелограмме противоположные углы конгруэнтны;
- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Следующие утверждения называются признаками параллелограмма:

- если в четырехугольнике две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм;
- если в четырехугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.

Из свойств параллелограмма вытекает утверждение, известное под названием теоремы Фалеса.

Теорема 1.19. *Пусть даны две тройки различных коллинеарных точек – A, B, C и A_1, B_1, C_1, причем $B \in [AC]$, $B_1 \in [A_1C_1]$, $AB \cong BC$, $(AA_1) \parallel (BB_1)$.*

(a) *если прямые (AA_1), (CC_1) параллельны, то $A_1B_1 \cong$ $\cong B_1C_1$.*

(b) *если $A_1B_1 \cong B_1C_1$, то прямые (AA_1), (CC_1) параллельны.*

Из теоремы Фалеса вытекает следующая важная теорема, на которой, по существу, основана вся теория подобия геометрических фигур.

Теорема 1.20. *Пусть даны две тройки различных коллинеарных точек – A, B, C и A_1, B_1, C_1, причем $B \in [AC]$, $B_1 \in [A_1C_1]$, $(AA_1) \parallel (BB_1)$, $AC \cong d \cdot AB$, где d – положительное действительное число. Тогда*

(a) *если прямые (AA_1), (CC_1) параллельны, то $A_1C_1 \cong \cong d \cdot A_1B_1$.*

(b) *если $A_1C_1 \cong d \cdot A_1B_1$, то прямые (AA_1), (CC_1) параллельны.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. Число d является натуральным числом. Тогда требуемое утверждение получается из теоремы 1.19 при помощи метода математической индукции.

2. Число d есть конечная двоичная дробь, т. е. $d = = m/2^k$, где m, k – натуральные числа. Пусть $F \in [AB]$, $F_1 \in \in [A_1B_1]$ – такие точки, что $AB \cong 2^k \cdot AF$, $(FF_1) \parallel (AA_1)$. В силу рассмотренного выше случая 1 имеем $A_1B_1 \cong 2^k \cdot A_1F_1$. Так как $AC \cong d \cdot AB$, то из определения умножения сегментов на конечные двоичные дроби следует, что $AC \cong m \cdot AF$. Используя еще раз случай 1, мы получаем, что соотношения $(AA_1) \parallel (CC_1)$ и $A_1C_1 \cong m \cdot A_1F_1$ равносильны. Поскольку $A_1B_1 \cong 2^k \cdot A_1F_1$, соотношение $A_1C_1 \cong m \cdot A_1F_1$ означает, что $A_1C_1 \cong d \cdot A_1B_1$.

3. Пусть d – положительное действительное число, не являющееся конечной двоичной дробью, и выполнены условия теоремы.

Проверим сначала, что из соотношения $(AA_1) \parallel (CC_1)$ следует соотношение $A_1C_1 \cong d \cdot A_1B_1$. Предположим, что это не так, т. е. $A_1C_1 \cong d_1 \cdot A_1B_1$, причем $d \neq d_1$. Без ограничения общности можно считать, что $d < d_1$. Пусть k, m – такие натуральные числа, что $2^k(d_1 - d) > 1$, $m = [2^k d_1]$. Из этих соотношений следует, что $2^k d_1 > 2^k d + 1$ и $m + 1 > > 2^k d_1$. Стало быть, $m > 2^k d$. Кроме того, $m \leqslant 2^k d_1$, но d_1

не является конечной двоичной дробью, значит, $m < 2^k d_1$. Построим точки M, M_1, лежащие на лучах $[AB)$, $[A_1B_1)$ соответственно и такие, что

$$AM = \frac{m}{2^k} \cdot AB, \quad A_1M_1 = \frac{m}{2^k} \cdot A_1B_1.$$

В силу рассмотренного выше случая 2 имеем $(MM_1) \parallel (AA_1)$, откуда $(MM_1) \parallel (CC_1)$. Однако из неравенств $m > 2^k d$, $m < 2^k d_1$ следует, что точки C, C_1 лежат по разные стороны от прямой (MM_1); следовательно, прямые (MM_1), (CC_1) должны пересекаться. Полученное противоречие доказывает равенство $d = d_1$.

Обратно, пусть $AC \cong d \cdot AB$ и $A_1C_1 \cong d \cdot A_1B_1$. Обозначим через C_2 такую точку прямой (A_1B_1), что $(CC_2) \parallel (AA_1)$. Ясно, что $C_2 \in [A_1B_1)$. В силу рассуждения из предыдущего абзаца имеем $A_1C_2 \cong d \cdot A_1B_1$. Значит, $A_1C_1 \cong A_1C_2$. Отсюда следует, что $C_1 = C_2$ и, следовательно, $(CC_1) \parallel (AA_1)$.

Теорема 1.21. *Пусть ABC – произвольный треугольник, точки E, F лежат на прямых (AB) и (AC) соответственно, причем $(EF) \parallel (BC)$. Если $AB \cong d \cdot AE$, то $BC \cong d \cdot EF$.*

Доказательство. Проведем через точку E прямую (EG), параллельную прямой (AC) (рис. 25). Если $AB \cong d \cdot AE$, то в силу теоремы 1.20 имеем $BC \cong d \cdot CG$. Ясно, что четырехугольник $EFCG$ – параллелограмм, поэтому $CG \cong EF$. Окончательно получаем $BC \cong d \cdot EF$.

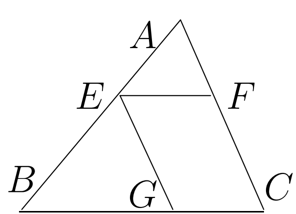


Рис. 25

1.23. Сонаправленность лучей на плоскости

В разд. 1.7 было введено понятие сонаправленности лучей, расположенных на одной прямой.

Теперь мы распространим это понятие на лучи, расположенные на любых параллельных прямых l, m.

Определение. Лучи l_A, m_B называются сонаправленными, если выполнено одно из двух условий:

(a) если $l = m$, то либо $l_A \subseteq m_B$, либо $m_B \subseteq l_A$;

(b) если $l \neq m$, то $l \parallel m$, и лучи l_A, m_B лежат по одну сторону от прямой (AB).

Свойства отношения сонаправленности лучей на прямой (см. предложение 1.12) сохраняются, если сонаправленность лучей понимать в новом смысле.

А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.22. *Если l_A, m_B, n_C – произвольные лучи, то*

(a) $l_A \uparrow\uparrow l_A$;

(b) *если $l_A \uparrow\uparrow m_B$, то $m_B \uparrow\uparrow l_A$;*

(c) *если $l_A \uparrow\uparrow m_B$, то $l'_A \uparrow\uparrow m'_B$;*

(d) *если $l_A \uparrow\uparrow m_B$ и $m_B \uparrow\uparrow n_C$, то $l_A \uparrow\uparrow n_C$.*

Выполнение свойств (a) – (c) очевидно. Чтобы доказать свойство (d), нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть l, m – различные параллельные прямые, $A, C \in l$, $B \in m$ и $l_A \uparrow\uparrow m_B$. Тогда соотношения $l_A \uparrow\uparrow l_C$ и $m_B \uparrow\uparrow l_C$ равносильны.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда точка C принадлежит лучу l_A. Обозначим прямую (AB) через q, а луч $[BA)$ – через q_B (рис. 26). Поскольку $l_A \uparrow\uparrow m_B$ и $C \in l_A$, луч $[BC)$ проходит во внутренней области угла $m_B q_B$. Пусть X – произвольная точка луча m_B. Из предложения 1.15 вытекает, что точки A и X лежат по разные стороны от прямой (BC). Значит, прямая (BC) разделяет точку A и луч m_B. Отсюда следует, что соотношение $l_C \uparrow\uparrow m_B$ выполнено в том и только том случае, когда $A \notin l_C$. Осталось лишь заметить, что в силу предложения 1.10 выполнение условий $C \in l_A$, $A \notin l_C$ означает, что $l_C \subseteq l_A$, т. е. $l_A \uparrow\uparrow l_C$.

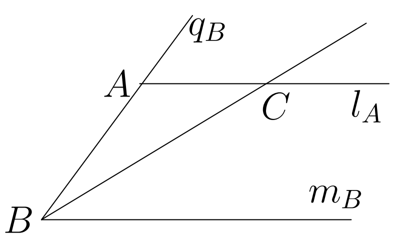


Рис. 26

Пусть $C \notin l_A$. Рассмотрим лучи l'_A, l'_C, m'_B, дополнительные к лучам l_A, l_C, m_B соответственно. Из условия $l_A \upuparrows m_B$ следует, что $l'_A \upuparrows m'_B$. Кроме того, так как $C \notin l_A$, то $C \in l'_A$. Поэтому к лучам l'_A, l'_C, m'_B применимо предыдущее рассуждение. Значит, соотношения $l'_A \upuparrows l'_C$ и $l'_C \upuparrows m'_B$ равносильны. Понятно, что отсюда следует равносильность соотношений $l_A \upuparrows l_C$ и $l_C \upuparrows m_B$.

Закончим доказательство теоремы 1.22.

Пусть $l_A \upuparrows m_B$ и $m_B \upuparrows n_C$. Если $l = m = n$, то, применяя предложение 1.12, получим $l_A \upuparrows n_C$. Если совпадают две из трех прямых, то соотношение $l_A \upuparrows n_C$ вытекает из леммы 1.

Осталось рассмотреть случай, когда прямые l, m, n попарно различны. Пусть D – точка пересечения прямых m и (AC), а луч m_D выбран так, что $m_D \upuparrows m_B$. Поскольку $l_A \upuparrows m_B$, из леммы 1 следует, что $l_A \upuparrows m_D$. Аналогично условие $m_B \upuparrows n_C$ влечет $m_D \upuparrows n_C$. Таким образом, имеем $l_A \upuparrows m_D$, $m_D \upuparrows$ $\upuparrows n_C$. Поскольку точки A, D, C лежат на одной прямой, мы видим, что все три луча лежат по одну сторону от прямой (AC). Значит, $l_A \upuparrows n_C$.

В заключение этого раздела введем понятие угла между произвольными лучами a, b. Для этого рассмотрим произвольную точку O плоскости и лучи c, d, имеющие начало в точке O, причем $c \upuparrows a$, $d \upuparrows b$. Тогда углом между лучами a, b будем называть угол cOd.

Давайте остановимся и подумаем: является ли такое определение корректным? Иными словами, не окажется ли так, что взяв точку $O_1 \neq O$ и лучи $c_1 \upuparrows a$, $d_1 \upuparrows b$, мы получим угол $c_1O_1d_1$, не являющийся конгруэнтным углу cOd.

К счастью, так оказаться не может, ибо справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.44. *Пусть aOb, $a_1O_1b_1$ – произвольные углы. Если $a \upuparrows a_1$, $b \upuparrows b_1$, то $aOb \cong a_1O_1b_1$.*

Доказательство. Если угол aOb нулевой или развернутый, то утверждение очевидно.

Пусть угол aOb отличен от нулевого и развернутого, т. е. лучи a, b не лежат на одной прямой. Тогда лучи a_1, b_1 обладают тем же свойством. Обозначим через l, m, l_1, m_1 прямые, содержащие лучи a, b, a_1, b_1 соответственно. Пусть P – точка пересечения прямых l и m_1, а Q – точка пересечения прямых l_1 и m. Поскольку $l \parallel l_1$, $m \parallel m_1$, четырехугольник OPO_1Q является параллелограммом. Луч $[OP)$ совпадает либо с лучом a, либо с дополнительным лучом a'; аналогично луч $[OQ)$ совпадает либо с лучом b, либо с лучом b'. Таким образом, в рассмотрении нуждаются четыре случая. Читатель легко проверит утверждение во всех четырех случаях, воспользовавшись тем, что в параллелограмме противоположные углы конгруэнтны.

1.24. Простое отношение трех коллинеарных точек

Определим произведение направленного сегмента на произвольное действительное число. Здесь и далее положим, что длина $|\overrightarrow{AB}|$ направленного сегмента $\overrightarrow{AB}$ совпадает с $|AB|$.

Определение. Направленный сегмент $\overrightarrow{AB}$ называется произведением числа d на направленный сегмент $\overrightarrow{CD}$ (обозначение: $\overrightarrow{CD} \equiv d \cdot \overrightarrow{AB}$), если (1) $|\overrightarrow{AB}| = |d| \cdot |\overrightarrow{CD}|$; (2) при $d > 0$ ($d < 0$) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены (соответственно противоположно направлены).

Предложение 1.45. *Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – произвольные направленные сегменты, причем $\overrightarrow{CD}$ не является нулевым. Для коллинеарности $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство $\overrightarrow{AB} \equiv d \cdot \overrightarrow{CD}$ для некоторого числа d.*

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны. Обозначим через d число $|AB|/|CD|$, если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены или $\overrightarrow{AB}$ является нулевым, и число $-|AB|/|CD|$ в противном случае. Легко видеть, что $\overrightarrow{AB} \equiv d \cdot \overrightarrow{CD}$.

Обратное утверждение очевидно.

В условиях предложения 1.45 число d будем также обозначать через $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{CD}$. Отметим, что указанное обозначение можно применять лишь в случае, когда данные направленные сегменты коллинеарны.

Определение. *Простым отношением* упорядоченной тройки коллинеарных точек A, B, C называется число $d = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}$.

Наряду с обозначением $\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}$ для простого отношения принято использовать обозначение (ABC).

Пусть A, B – две различные точки прямой l. Обозначим через l_A, l_B такие лучи, что $B \notin l_A$, $A \notin l_B$. Ясно, что множество точек прямой l, отличных от A, B, разбивается на три подмножества: луч l_A, интервал $]AB[$ и луч l_B. Проследим, как зависит значение величины $\lambda = (ABC)$ от положения точки C на прямой l.

Лемма 1. *Пусть C – произвольная точка прямой l, отличная от точек A, B. Тогда*

1) $C \in l_A \Leftrightarrow -1 < \lambda < 0$;
2) $C \in]AB[\Leftrightarrow \lambda > 0$;
3) $C \in l_B \Leftrightarrow \lambda < -1$.

Эта лемма является очевидным следствием из определения простого отношения.

Предложение 1.46. *Пусть заданы различные точки A, B прямой l и действительное число $\lambda \neq -1$. Тогда на прямой l существует единственная точка C такая, что $(ABC) = \lambda$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda > 0$. Пусть C – такая точка луча $[AB)$, что $|AC| = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$. Ясно, что $|AC| < |AB|$, откуда следует, что $C \in]AB[$. Тогда

$$|CB| = |AB| - |AC| = \frac{1}{1+\lambda}|AB|.$$

Поскольку $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, получаем $(ABC) = |AC|/|CB| = \lambda$. Пусть теперь точка D удовлетворяет условию $(ABC) = (ABD)$.

Тогда $(ABD) > 0$ и, стало быть, $D \in]AB[$. Учитывая определение простого отношения и равенство $(ABC) = (ABD)$, имеем

$$\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|AD|}.$$

Прибавляя к обеим частям последнего равенства 1, найдем

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}.$$

Отсюда $|AC|{=}|AD|$. Учитывая, что точки C, D принадлежат лучу $[AB)$, получаем $D = C$.

Пусть теперь $\lambda < -1$. На луче $[AB)$ найдем такую точку C, что $|AC| = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$. Нетрудно проверить, что на этот раз $|AC| > |AB|$. Поэтому точка C лежит на луче l_B. Значит,

$$|CB| = |AC| - |AB| = -\frac{1}{1+\lambda}|AB|.$$

Так как $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют противоположные направления, получаем $(ABC) = -|AC|/|CB| = \lambda$. Проверим единственность такой точки. Пусть $(ABC) = (ABD)$ для некоторой точки D. Тогда $D \in l_B$ и

$$\frac{|CB|}{|AC|} = \frac{|DB|}{|AD|}.$$

Вычитая из обеих частей последнего равенства 1, получим

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|}.$$

Отсюда $|AC|{=}|AD|$ и, стало быть, $D = C$.

Случай, когда $-1 < \lambda < 0$, подробно рассматриваться не будет. Заметим лишь, что в этом случае точка C ищется на луче l_A так, что $|AC| = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}|AB|$. Дальнейшие вычисления оставим читателю в качестве упражнения.

Важное свойство простого отношения трех точек описывается следующим утверждением.

Предложение 1.47. *Пусть ABC – произвольный треугольник, E, F – различные точки, лежащие на прямых* (AB)

и (AC). Прямые (EF) и (BC) параллельны тогда и только тогда, когда $(ABE) = (ACF)$.

Доказательство. Если прямые (EF) и (BC) параллельны, то равенство $(ABE) = (ACF)$ легко следует из теоремы 1.21.

Обратно, пусть $(ABE) = (ACF)$. Возьмем на прямой (AC) такую точку D, что $(ED) \parallel (BC)$. Тогда $(ABE) = (ACD)$. Стало быть, $(ACF) = (ACD)$, откуда $D = F$.

1.25. Теорема Менелая. Теорема Чевы

Теорема 1.23 (теорема Менелая). *Пусть ABC – произвольный треугольник. Рассмотрим точки A_1, B_1, C_1, отличные от вершин треугольника и лежащие на прямых (BC), (AC) и (AB) соответственно. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда*

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой. Найдем на прямой (AB) такую точку D, что $(CD) \parallel (A_1C_1)$. Из предложения 1.47 следует, что $(BCA_1) = (BDC_1)$, $(CAB_1) = (DAC_1)$. Поэтому

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} \cdot \frac{\overrightarrow{DC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1.$$

Допустим теперь, что для точек A_1, B_1, C_1 выполнено равенство

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1.$$

Тогда прямые (A_1B_1) и (AB) не параллельны. В самом деле, если $(A_1B_1) \parallel (AB)$, то в силу предложения 1.47

$$(BCA_1)(CAB_1) = 1,$$

поэтому $(ABC_1) = -1$. Однако для различных точек простое отношение не может быть равно -1. Обозначим через C_2 общую точку пересечения прямых (A_1B_1) и (AB). По доказанному выше имеем

$$(ABC_2)(BCA_1)(CAB_1) = -1.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = -1,$$

получаем $(ABC_2) = (ABC_1)$, откуда $C_2 = C_1$.

Теорема 1.24 (теорема Чевы). *Пусть ABC – произвольный треугольник. Рассмотрим точки $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$, отличные от вершин треугольника. Прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1) пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1.$$

Доказательство. Пусть прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1) пересекаются в точке O. Рассмотрим треугольник ABB_1 и применим теорему Менелая к коллинеарным точкам C_1, O, C. Тогда

$$(ABC_1)(BB_1O)(B_1AC) = -1. \qquad (1)$$

Применение теоремы Менелая к треугольнику CBB_1 и точкам A_1, O, A, приводит к равенству

$$(BCA_1)(CB_1A)(B_1BO) = -1. \qquad (2)$$

Перемножая равенства 1, 2 и учитывая, что

$$(BB_1O) = 1 : (B_1BO), \qquad (B_1AC)(CB_1A) = (CAB_1),$$

получим требуемое равенство.

Проверку обратного утверждения оставляем читателю.

1.26. Подобные треугольники

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными* ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$), если $\angle A \cong \angle A_1$, $\angle B \cong \angle B_1$, $\angle C \cong$ $\cong \angle C_1$, $|AB| : |A_1B_1| = |BC| : |B_1C_1| = |CA| : |C_1A_1|$.

По традиции сформулированные ниже утверждения называются первым (теорема 1.25), вторым (теорема 1.27) и третьим (теорема 1.26) признаками подобия треугольников.

Теорема 1.25. *Если* $|AB| : |A_1B_1| = |AC| : |A_1C_1|$ *и* $\angle A \cong$ $\cong \angle A_1$, *то треугольники* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *подобны.*

Доказательство. На лучах $[A_1B_1)$ и $[A_1C_1)$ найдем такие точки B_2, C_2, что $A_1B_2 \cong AB$, $A_1C_2 \cong AC$. Если $B_2 = B_1$, то $C_2 = C_1$; отсюда немедленно вытекает, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны, а потому подобны. Пусть $B_2 \neq B_1$, $C_2 \neq C_1$. Из условия следует, что простые отношения $(A_1B_1B_2)$ и $(A_1C_1C_2)$ совпадают. Используя предложение 1.47, получаем, что $(B_2C_2) \parallel (B_1C_1)$. Теперь при помощи теоремы 1.21 имеем $|B_2C_2| : |B_1C_1| = |A_1B_2| : |A_1B_1|$. Кроме того, из параллельности прямых (B_2C_2), (B_1C_1) следует, что $\angle B_2 \cong \angle B_1$, $\angle C_2 \cong \angle C_1$. Доказательство теоремы легко завершается, если к треугольникам ABC и $A_1B_2C_2$ применить первый признак конгруэнтности треугольников.

Теорема 1.26. *Если в треугольниках* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *выполнены соотношения* $\angle A \cong \angle A_1$, $\angle B \cong \angle B_1$, *то такие треугольники подобны.*

Доказательство. На лучах $[A_1B_1)$ и $[A_1C_1)$ выберем точки B_2, C_2 так, что $|A_1B_2| = |AB|$ и $\angle A_1B_2C_2 \cong \angle ABC$. Применив второй признак конгруэнтности к треугольникам ABC и $A_1B_2C_2$, получим $|B_2C_2| = |BC|$. Из условия теоремы следует, что $\angle A_1B_2C_2 \cong \angle A_1B_1C_1$. Поэтому прямые (A_1B_1) и (A_2B_2) параллельны. Из теоремы 1.20 вытекает, что $|A_1B_2| :$ $|A_1B_1| = |B_2C_2| : |B_1C_1|$. Учитывая равенства $|A_1B_2| = |AB|$ и $|B_2C_2| = |BC|$, получаем $|AB| : |A_1B_1| = |BC| : |B_1C_1|$. Теперь понятно, что к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ применим первый признак конгруэнтности.

Теорема 1.27. *Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены соотношения $|AB| : |A_1B_1| = |AC| : |A_1C_1| = |CB| : |C_1B_1|$, то такие треугольники подобны.*

Доказательство. Найдем на луче $[A_1B_1)$ точку B_2 так, что $A_2B_2 \cong AB$. Пусть $C_2 \in [A_1C_1)$ и $(B_2C_2) \parallel (B_1C_1)$. Предположим, что $B_2 \neq B_1$. Тогда $C_2 \neq C_1$. Применяя предложение 1.47 и теорему 1.21, получим, что

$$|A_1B_2| : |A_1B_1| = |A_1C_2| : |A_1C_1| = |B_2C_2| : |B_1C_1|.$$

Кроме того, из параллельности прямых (B_2C_2) и (B_1C_1) следует, что $\angle A_1C_2B_2 \cong \angle C_1$, $\angle A_1B_2C_2 \cong \angle B_1$. Теперь осталось лишь заметить, что треугольники ABC и $A_1B_2C_2$ конгруэнтны по второму признаку.

Рассмотрение случая, когда $B_2 = B_1$, мы оставляем читателю.

1.27. Метрические соотношения в треугольнике

Пусть ABC – прямоугольный треугольник. Проведем из вершины прямого угла C высоту $[CH]$ и введем следующие обозначения: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $h = |CH|$, $a' = |BH|$, $b' = |HA|$.

Следующее утверждение устанавливает простые соотношения между элементами прямоугольного треугольника.

Предложение 1.48. *В произвольном прямоугольном треугольнике выполнены равенства $a^2 = a'c$, $b^2 = b'c$, $h^2 = a'b'$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\angle BAC \cong \angle BCH$ (рис. 27). В самом деле, поскольку в прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов конгруэнтна прямому углу, имеем $\angle A + \angle B \cong \angle BCH + \angle B$, откуда и следует требуемое соотношение. Стало быть, прямоугольные

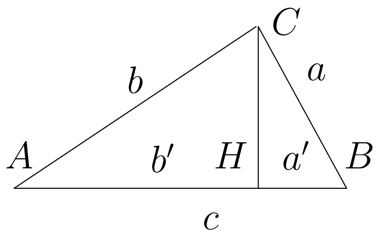


Рис. 27

треугольники CBH, ACH и ABC подобны. Из подобия первого и третьего треугольников имеем $a/c = a'/a$, откуда $a^2 = a'c$. Аналогично, из подобия второго и третьего треугольников получаем $b^2 = b'c$, а из подобия первых двух треугольников следует $h^2 = a'b'$.

Из предложения 1.48 вытекает знаменитая теорема Пифагора.

Теорема 1.28. *Во всяком прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.*

Доказательство. Складывая почленно равенства $a^2 = a'c$ и $b^2 = b'c$, получим $a^2 + b^2 = (a' + b')c = c^2$.

Замечание. В дальнейшем вместо выражения "квадрат длины отрезка" будем использовать более короткое и привычное "квадрат отрезка".

Получим теперь из теоремы Пифагора соотношения между сторонами в произвольном треугольнике.

Пусть дан произвольный треугольник ABC. Проведем высоту $[BH]$ и введем обозначения: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, $c' = |AH|$, $a' = |HC|$. Заметим, что возможны два случая для угла ACB: этот угол может быть либо острым, либо тупым.

Предложение 1.49. *Пусть ABC – произвольный треугольник с острым углом при вершине C. Тогда*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a'b.$$

Доказательство. Возможны два случая: а) основание H высоты $[BH]$ лежит на стороне $[AC]$; b) основание высоты лежит на продолжении стороны $[AC]$ за вершину A. Ясно, что в случае а) выполнено равенство $b = a' + c'$, а в случае b) – равенство $b = a' - c'$ (рис. 28).

Применяя теорему Пифагора к треугольникам ABH и BCH, получим $|BH|^2 = c^2 - c'^2$, $|BH|^2 = a^2 - a'^2$, откуда $c^2 - c'^2 = a^2 - a'^2$. Теперь заметим, что в обоих случаях $c' = |b - a'|$. Поэтому $c'^2 = b^2 - 2ba' + a'^2$. Подставляя выражение для c'^2 в полученное выше равенство $c^2 = a^2 - a'^2 + c'^2$, после очевидных преобразований находим, что $c^2 = a^2 + b^2 - 2a'b$.

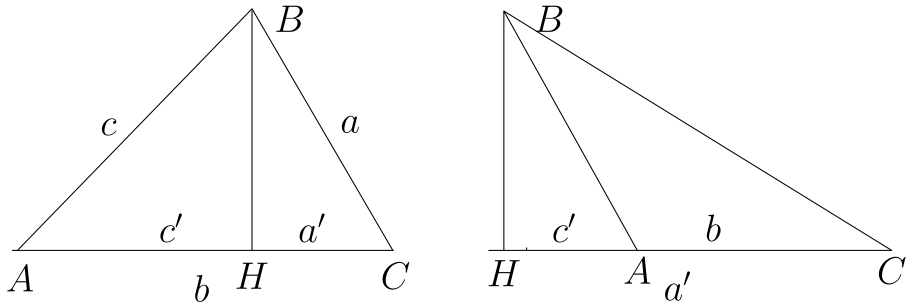


Рис. 28

Предложение 1.50. *Пусть ABC – произвольный треугольник с тупым углом при вершине C. Тогда*

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a'b.$$

Это утверждение доказывается аналогично предложению 1.49.

Из предложений 1.49 и 1.50 можно получить следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть ABC – произвольный треугольник, точка K лежит на прямой (AB). Равенство*

$$|AC|^2 - |CB|^2 = |AK|^2 - |KB|^2$$

выполнено тогда и только тогда, когда $[CK]$ – высота треугольника.

Доказательство. Если K – основание высоты $[CK]$, то выполнение требуемого равенства очевидно.

Пусть теперь точка K такова, что

$$|AC|^2 - |CB|^2 = |AK|^2 - |KB|^2.$$

Проведем высоту $[CH]$ и предположим, что $K \neq H$. Если точка K принадлежит стороне $[AB]$, то углы AKC и BKC смежные. Без ограничения общности можно считать, что $\angle AKC$ тупой, а $\angle BKC$ острый. Применяя к треугольникам BKC и AKC предложения 1.49, 1.50, получим

$$|CB|^2 = |CK|^2 + |KB|^2 - 2|BK||KH|,$$

$$|AC|^2 = |CK|^2 + |AK|^2 + 2|AK||KH|.$$

Вычитая из второго равенства первое, найдем

$$|AC|^2 - |CB|^2 = |AK|^2 - |KB|^2 + 4|AB||KH|.$$

Легко видеть, что полученное равенство противоречит условию, наложенному на точку K. Другие возможные случаи расположения точки K на прямой AB рассматриваются аналогично.

Как обычно, длины сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ треугольника ABC будем обозначать через c, a, b соответственно.

Следствие 2. *Пусть ABC – произвольный треугольник, точка K лежит на прямой (AB), $|CK| = d$, $|AK| = q$, $|BK| = p$. Тогда*

1) *если точка K лежит на стороне $[AB]$, то*

$$c(d^2 + pq) = qa^2 + pb^2;$$

2) *если точка K лежит на продолжении стороны $[AB]$, то*

$$c(d^2 - pq) = qa^2 - pb^2.$$

Доказательство. Пусть d' – проекция отрезка $[CK]$ на прямую (AB). Предположим сначала, что K – внутренняя точка отрезка $[AB]$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что угол AKC не меньше прямого угла. Применяя к треугольникам BKC и AKC предложения 1.49, 1.50, имеем $a^2 = d^2 + p^2 - 2pd'$, $b^2 = d^2 + q^2 + 2qd'$. Умножая первое равенство на q, а второе на p и складывая, получим

$$qa^2 + pb^2 = (p + q)d^2 + pq^2 + qp^2 = (p + q)(d^2 + pq).$$

Учитывая, что $p+q=c$, приходим к равенству 1).

Пусть точка K лежит вне отрезка $[AB]$. Тогда углы AKC и BKC совпадают. Для определенности будем считать, что K лежит на продолжении стороны $[AB]$ за точку B. Тогда выполнено неравенство $q > p$. Предположим, что оба эти угла острые (случай, когда оба угла прямые или тупые, рассматривается аналогично). Если к треугольникам BKC и AKC применить предложение 1.49, то мы придем к равенствам

$$a^2 = d^2 + p^2 - 2pd', \qquad b^2 = d^2 + q^2 - 2qd'.$$

Умножая первое равенство на q, а второе на p и вычитая из первого равенства второе, получим

$$qa^2 - pb^2 = (q-p)d^2 + qp^2 - pq^2 = (q-p)(d^2 - pq).$$

Поскольку $q - p = c$, получаем равенство 2).

Используя следствие 2, легко вычислить длину медианы $[CM]$ и длину биссектрисы $[CL]$, проведенных в треугольнике ABC к стороне $[AB]$.

Предложение 1.51. *Пусть $[CM]$ – медиана, проведенная к стороне $[AB]$ в треугольнике ABC. Тогда*

$$|CM|^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Это утверждение сразу вытекает из следствия 2, если учесть, что $|AM| = |BM| = c/2$.

Для того чтобы вычислить биссектрису внутреннего угла треугольника, необходимо использовать следующее утверждение.

Предложение 1.52. *Пусть $[CL]$ – биссектриса внутреннего или внешнего угла треугольника ABC. Тогда*

$$|AC| : |CB| = |AL| : |LB|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $[CL]$ – биссектриса внутреннего угла. Проведем через точку B прямую (BF), параллельную (CL) (рис. 29 a). Тогда $\angle BFC = \angle ACL$ и $\angle FBC = \angle BCL$. Поскольку $[CL]$ – биссектриса, имеем $\angle ACL = \angle BCL$, и потому $\angle BFC = \angle CFB$. Следовательно, треугольник CFB равнобедренный, откуда $|CF| = |CB|$. Используя теорему Фалеса, получаем $|AC| : |CF| = |AL| : |LB|$. Так как $|CF| = |CB|$, окончательно находим $|AC| : |CB| = |AL| : |LB|$.

Аналогично рассматривается случай, когда $[CL]$ – биссектриса внешнего угла при вершине C (см. рис. 29 b).

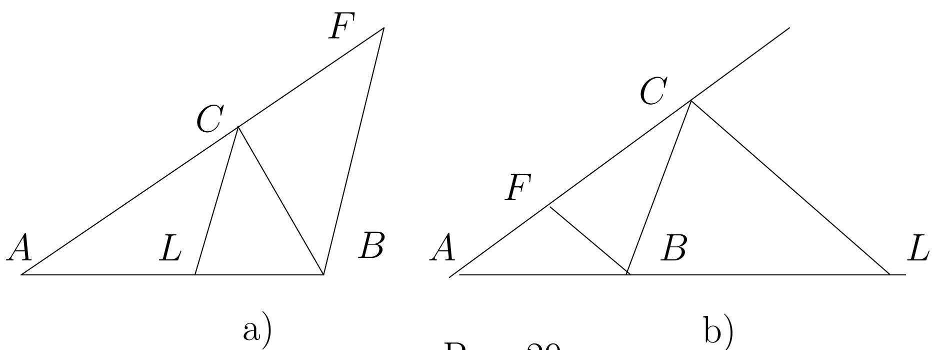


Рис. 29

Предложение 1.53. *Пусть $[CL]$ – биссектриса внутреннего угла треугольника ABC при вершине C. Если $|AL| = p$, $|BL| = q$, то*

$$|CL|^2 = ab - pq.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя равенство 1) из следствия 2, имеем

$$c(|CL|^2 + pq) = qa^2 + pb^2.$$

Из предложения 1.52 следует, что $a : p = b : q$, и потому $aq = bp$. С учетом этого равенства получаем

$$c(|CL|^2 + pq) = pba + qab = abc.$$

Таким образом, $|CL|^2 + pq = ab$, откуда легко вытекает требуемое равенство.

2. Окружность

2.1. Взаимное расположение окружности и прямой

Напомним, что окружность S радиуса r с центром O – это множество всех таких точек M, что $|OM| = r$.

Пусть l – прямая, S – окружность радиуса r с центром O. Обозначим через d расстояние от точки O до прямой l.

Предложение 2.1. *Окружность S и прямая l имеют не более двух общих точек. Если $d < r$, то S и l имеют две общие точки; если $d = r$, то S и l имеют одну общую точку; если же $d > r$, то общих точек нет.*

Доказательство. Пусть $d < r$. Опустим из точки O перпендикуляр $[OA]$ на прямую l и зафиксируем луч l_A (рис. 30). Рассмотрим множество

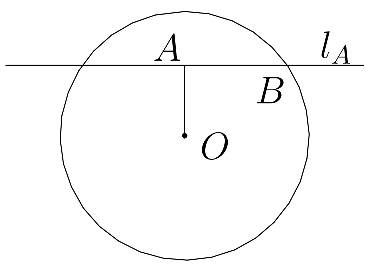


Рис. 30

$$\mathcal{C} = \{C \in l_A \cup \{A\} \text{ и } |OC| < r\}.$$

Поскольку $|OA| = d < r$, имеем $A \in \mathcal{C}$, т. е. множество $\mathcal{C}$ непусто. Заметим, что выбрав на прямой l луч l_A, мы тем самым ориентировали эту прямую. Проверим, что множество $\mathcal{C}$ на ориентированной прямой l ограничено сверху. Пусть $D \in l_A$ и $|AD| = r$. Убедимся, что D – верхняя грань множества $\mathcal{C}$. Для любой точки $C \in \mathcal{C}$ имеем

$$|AC| < |OC| < r = |AD|.$$

Отсюда следует, что на ориентированной прямой l точка C предшествует точке D. Таким образом, множество $\mathcal{C}$ на ориентированной прямой l непусто и ограничено сверху. Значит, существует $B = \sup \mathcal{C}$. Покажем, что $|OB| = r$. Рассуждая “от противного”, допустим, что $|OB| > r$. Тогда на отрезке $[AB]$ найдется такая точка E, что $|BE| = |OB| - r$. Поскольку E предшествует B (на ориентированной прямой l) и B – точная верхняя грань множества $\mathcal{C}$, найдется точка F, принадлежащая множеству $\mathcal{C} \cap]BE]$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$|OB| \leqslant |OF| + |FB| < r + |FB|.$$

Так как F – внутренняя точка отрезка BE, выполнено неравенство $|FB| < |BE|$. Следовательно,

$$|OB| < r + |BE| < r + |OB| - r = |OB|.$$

Получили противоречивое неравенство $|OB| < |OB|$.

Пусть $|OB| < r$. Найдем такую точку E, что B предшествует E и $|BE| = r - |OB|$. Из неравенства треугольника получаем, что

$$|OE| \leqslant |OB| + |BE| < r.$$

Отсюда вытекает, что $E \in \mathcal{C}$. Полученное включение противоречит определению точки B.

Итак, на луче l_A существует точка B, являющаяся точкой пересечения окружности S и прямой l. Читатель легко проверит, что более одной такой точки на луче l'_A быть не может. Вторая общая точка окружности S и прямой l лежит на луче l'_A.

Пусть $d \geqslant r$. Тогда для любой точки $X \in l$, отличной от A, выполнено неравенство $|OX| > |OA| \geqslant r$. Стало быть, кроме точки A никакие другие точки прямой l не могут лежать на окружности. Точка A принадлежит окружности, если и только если $d = |OA| = r$.

Напомним, что прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется *касательной.*

2.2. Радикальная ось двух окружностей

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть A, B – различные точки, p – произвольное действительное число. Множество всех таких точек M, что $|AM|^2 - |BM|^2 = p$, является прямой, перпендикулярной (AB).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть C – произвольная точка прямой (AB). Введем обозначения: $d = |AB|$, $a = |AC|$, $b = |CB|$. Точка C может лежать на отрезке $[AB]$, и тогда $a+b = d$; если же точка C лежит вне этого отрезка, то $|a-b| = d$. Попробуем найти a и b так, чтобы выполнялось равенство

$$a^2 - b^2 = p. \tag{1}$$

Из (1) легко получается равенство

$$|a-b|(a+b) = |p|. \tag{2}$$

Предположим сначала, что точка C принадлежит отрезку $[AB]$, т.е. $a + b = d$. Тогда a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = d, \\ |a - b| = \dfrac{|p|}{d}\ . \end{cases} \tag{3}$$

Полагая для определенности, что $a \geqslant b$, найдем

$$a = \frac{d^2 + |p|}{2d}, \qquad b = \frac{d^2 - |p|}{2d}. \tag{4}$$

Так как $b \geqslant 0$, то $|p| \leqslant d^2$. Стало быть, если $|p| \leqslant d^2$, то система (3) имеет единственное решение.

Пусть $C \notin [AB]$. Тогда $|a-b| = d$, и мы приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} |a - b| = d, \\ a + b = \dfrac{|p|}{d}\ . \end{cases} \tag{5}$$

Считая, как и выше, что $a > b$, получим

$$a = \frac{d^2 + |p|}{2d}, \qquad b = \frac{|p| - d^2}{2d}. \tag{6}$$

Поскольку $b > 0$, имеем $|p| > d^2$. Таким образом, при выполнении условия $|p| > d^2$, система (5) имеет единственное решение.

Из приведенных выше вычислений вытекает, что для любого числа p на прямой (AB) найдется единственная точка C, для которой $|AC|^2 - |BC|^2 = p$. В самом деле, пусть $p \geqslant 0$, т.е.

$p = |p|$. Тогда $|AC| \geqslant |BC|$ и $|AC| = a$, $|BC| = b$, где a, b получены по формулам (4), если $p \leqslant d^2$, или по формулам (6) в противном случае. Если же $p < 0$, то равенство $|AC|^2 - |BC|^2 = p$ можно переписать в виде $|BC|^2 - |AC|^2 = -p$. Меняя ролями $|BC|$ и $|AC|$ и заменяя p на $-p$, мы придем к уже рассмотренному случаю.

Пусть M – произвольная точка, удовлетворяющая равенству $|AM|^2 - |BM|^2 = p$ и не лежащая на прямой (AB). Рассмотрим треугольник AMB. Найденная выше точка C лежит на прямой (AB), причем $|AM|^2 - |MB|^2 = |AC|^2 - |CB|^2$. Применив к треугольнику AMB и точке C следствие 1 из предложения 1.50, получим, что $(MC) \perp (AB)$. Стало быть, искомое множество лежит на прямой m, проходящей через точку C и перпендикулярной (AB).

Тот факт, что любая точка M прямой m удовлетворяет требуемому равенству, проверяется без труда; мы оставляем эту проверку читателю.

Пусть S_1 и S_2 – окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 соответственно.

Определение. *Радикальной осью* окружностей S_1 и S_2 называется множество всех таких точек M, что

$$|O_1M|^2 - r_1^2 = |O_2M|^2 - r_2^2.$$

Пусть $p = r_1^2 - r_2^2$. Легко понять, что условие, определяющее радикальную ось данных окружностей можно переписать в виде $|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = p$. Применяя предложение 2.2, получаем следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Радикальная ось двух окружностей является прямой, перпендикулярной линии центров.*

Отметим важное свойство радикальной оси.

Предложение 2.4. *Пусть из точки M к окружностям S_1, S_2 можно провести касательные $[MA_1]$ и $[MA_2]$. Точка M принадлежит радикальной оси этих окружностей тогда и только тогда, когда $|MA_1| = |MA_2|$.*

Доказательство этого утверждения оставим читателю.

2.3. Взаимное расположение двух окружностей

В этом разделе для изучения взаимного расположения двух окружностей используются свойства радикальной оси этих окружностей.

Пусть S_1 и S_2 – произвольные окружности, m – их радикальная ось.

Лемма 1. *Если M – общая точка прямой m и окружности S_1, то M принадлежит и окружности S_2.*

Доказательство. Поскольку M принадлежит радикальной оси данных окружностей, имеем $|O_1M|^2-r_1^2 = |O_2M|^2-r_2^2$. Кроме того, $|O_1M|^2 - r_1^2 = 0$, ибо M лежит на S_1. Стало быть, $|O_2M|^2 - r_2^2 = 0$, откуда $|O_2M| = r_2$, т.е. M лежит на окружности S_2.

Лемма 2. *Радикальная ось m окружностей S_1, S_2 имеет с каждой из окружностей две общие точки тогда и только тогда, когда расстояние d между центрами и радиусы r_1, r_2 удовлетворяют двойному неравенству*

$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2.$$

Доказательство. Обозначим через C точку пересечения радикальной оси и линии центров. Положим для определенности, что $r_1 \geqslant r_2$. Поскольку $|O_1C|^2-|O_2C|^2 = r_1^2-r_2^2 \geqslant 0$, имеем $|O_1C| \geqslant |O_2C|$. Учитывая вычисления, проведенные при доказательстве предложения 2.2, получаем, что

$$|O_1C| = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}.$$

Так как $|O_1C|$ – расстояние от центра окружности S_1 до прямой m, в силу предложения 2.1 можно заключить, что прямая m и окружность S_1 имеют две общие точки в том и только том случае, когда $|O_1C| < r_1$. С учетом полученного выше вражения для $|O_1C|$ после очевидных преобразований имеем $d^2-2dr_1+r_1^2 < r_2^2$, $(d-r_1)^2 < r_2^2$, $|d-r_1| < r_2$, $-r_2 < d-r_1 < r_2$ и окончательно $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

Лемма 3. *Радикальная ось m окружностей S_1, S_2 имеет с каждой из окружностей единственную общую точку тогда и только тогда, когда расстояние d между центрами и радиусы r_1, r_2 удовлетворяют одному из равенств*

$$|r_1 - r_2| = d, \qquad r_1 + r_2 = d.$$

Лемма 4. *Радикальная ось m окружностей S_1, S_2 не имеет с каждой из окружностей общих точек тогда и только тогда, когда расстояние d между центрами и радиусы r_1, r_2 удовлетворяют одному из неравенств*

$$|r_1 - r_2| > d, \qquad r_1 + r_2 < d.$$

Доказательства леммы 3 и леммы 4 аналогичны доказательству леммы 2 и потому опускаются.

Из лемм 1 – 4 вытекает

Теорема 2.1. *Окружности S_1 и S_2 имеют не более двух общих точек. Если $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, то окружности имеют в точности две общие точки; если $d = |r_1 - r_2|$ или $d = r_1 + r_2$, то окружности имеют единственную общую точку; если же $d < |r_1 - r_2|$ или $d > r_1 + r_2$, то общих точек у окружностей нет.*

2.4. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. Окружность, проходящая через все вершины треугольника, называется описанной окружностью.

Предложение 2.5. *Около любого треугольника ABC можно описать окружность.*

Доказательство. Пусть l, m – медиатрисы сторон $[AB]$ и $[BC]$. Прямые l и m, очевидно, не параллельны, ибо иначе параллельны были бы прямые (AB) и (BC). Пусть O – точка пересечения прямых l и m. Ясно, что O равноудалена от вершин A, B, C.

Определение. Окружность, касающаяся всех сторон треугольника, называется вписанной окружностью.

Предложение 2.6. *В любой треугольник ABC можно вписать окружность.*

Доказательство. Пусть $[AD]$ и $[BF]$ – биссектрисы углов A и B треугольника ABC (рис. 31). Ясно, что прямая (AD) разделяет лучи $]AB)$ и $]AC)$; отсюда следует, что точки B и F лежат по разные стороны от прямой (AD). Значит, прямая (AD) пересекает отрезок $[BF]$ в некоторой точке O. Легко понять, что точка O равноудалена от всех сторон треугольника ABC, т.е. O – центр вписанной окружности.

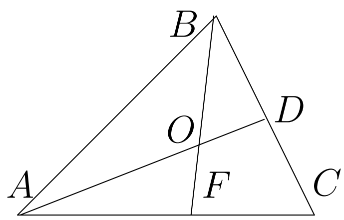


Рис. 31

2.5. Правильные многоугольники

Определение. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ называется *правильным*, если все его стороны и все его внутренние углы конгруэнтны.

Предложение 2.7. *Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный многоугольник. Тогда около этого многоугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность, причем центры этих окружностей совпадают.*

Доказательство. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2A_3$. Проверим, что лучи $[A_1O)$, $[A_2O)$, $[A_3O), \ldots ,[A_nO)$ являются биссектрисами внутренних углов с вершинами A_1, $A_2, \ldots$, A_n соответственно. Нетрудно понять, что треугольники OA_1A_2 и OA_2A_3 равнобедренные, причем они конгруэнтны по трем сторонам. Поэтому

$$\angle OA_2A_1 \cong \angle OA_2A_3 \cong \angle OA_3A_2.$$

Второе из этих соотношений означает, что $[A_2O)$ – биссектриса угла $A_1A_2A_3$; использование первого соотношения показывает, что $\angle A_1A_2A_3 \cong 2 \cdot \angle OA_2A_3 \cong 2 \cdot \angle OA_3A_2$. Кроме того, $\angle A_1A_2A_3 \cong \angle A_2A_3A_4 \cong \angle OA_3A_2 + \angle OA_3A_4$. Из полученных соотношений заключаем, что $2{\cdot}\angle OA_3A_2 \cong \angle OA_3A_2{+}\angle OA_3A_4$. Стало быть, $\angle OA_3A_2 \cong \angle OA_3A_4$, т.е. $[A_3O)$ – биссектриса угла $\angle A_2A_3A_4$.

Теперь требуемое утверждение легко получить методом математической индукции. В самом деле, пусть $k \geqslant 3$ и луч $[A_kO)$ является биссектрисой угла $A_{k-1}A_kA_{k+1}$. Применив к треугольникам $OA_{k-1}A_k$ и OA_kA_{k+1} рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно убедиться, что $[A_{k+1}O)$ является биссектрисой угла $A_kA_{k+1}A_{k+2}$.

Из доказанного утверждения сразу следует, что точка O равноудалена от всех сторон правильного многоугольника; это означает, что O – центр вписанной окружности. Кроме того, используя определение правильного многоугольника, мы получаем, что треугольники $OA_1A_2, OA_2A_3, \ldots, OA_nA_1$ конгруэнтны; поэтому конгруэнтны и их стороны $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$. Стало быть, O – центр описанной окружности.

Центр O окружности, описанной около правильного многоугольника, называют центром этого многоугольника. Апофемой правильного многоугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из его центра на сторону.

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный многоугольник с центром O. Тогда

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \ldots = \angle A_{n-1}OA_n = \angle A_nOA_1 = 360^\circ/n.$$

Отсюда следует

Предложение 2.8. *Если $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ – правильные n-угольники с центрами O_1, O_2, то треугольники $O_1A_1A_2$ и $O_2B_1B_2$ подобны.*

2.6. Длина окружности

Для произвольного многоугольника Q через $p(Q)$ будем обозначать его периметр.

Лемма 1. *Пусть Q_1, Q_2 – различные многоугольники, вписанные в некоторую окружность. Если множество вершин многоугольника Q_1 содержится во множестве вершин многоугольника Q_2, то $p(Q_1) < p(Q_2)$.*

Лемма 2. *Пусть Q_1, Q_2 – различные многоугольники, описанные около некоторой окружности. Если множество точек касания сторон многоугольника Q_1 содержится во множестве точек касания сторон многоугольника Q_2, то $p(Q_1) > p(Q_2)$.*

Леммы 1 и 2 легко доказываются методом математической индукции с использованием неравенства треугольника.

Лемма 3. *Пусть многоугольник Q_1 описан около некоторой окружности, а многоугольник Q_2 вписан в эту окружность. Тогда $p(Q_1) > p(Q_2)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}_1$ – множество точек касания сторон многоугольника Q_1, а $\mathcal{C}_2$ – множество вершин многоугольника Q_2. Проводя во всех точках множества $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ касательные к окружности, легко получить описанный многоугольник Q_1'; последовательно соединяя отрезками точки из $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, мы придем к вписанному многоугольнику Q_1'. Из лемм 1, 2 вытекают неравенства $p(Q_1') \leqslant p(Q_1)$ и $p(Q_2) \leqslant p(Q_2)'$ (равенства возможны, поскольку множество $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ может совпадать с одним из множеств $\mathcal{C}_1$ или $\mathcal{C}_2$). Заметим теперь, что неравенство $p(Q_2') < p(Q_1')$ легко следует из неравенства треугольника. Поэтому $p(Q_2) < p(Q_1)$.

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество периметров всех многоугольников, вписанных в данную окружность, а через $\mathcal{O}$ – множество периметров всех многоугольников, описанных около этой окружности. Из леммы 3 следует, что числовые множества $\mathcal{I}$ и $\mathcal{O}$ ограничены сверху и снизу соответственно. Таким образом, множество $\mathcal{I}$ имеет точную верхнюю грань, а множество $\mathcal{O}$ – точную нижнюю грань.

Определение. Длиной окружности называется точная верхняя грань множества периметров всех многоугольников, вписанных в эту окружность.

Длину окружности S будем обозначать через $p(S)$.

Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Пусть S_1, S_2 – окружности радиусов R_1, R_2 соответственно. Тогда*

$$\frac{p(S_1)}{R_1} = \frac{p(S_2)}{R_2}.$$

По традиции половину длины окружности единичного радиуса обозначают буквой π.

Из теоремы 2.2 немедленно вытекает

Предложение 2.9. *Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.*

Для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть a_n – апофема правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Тогда $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = R$.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 – последовательные вершины правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 32). Ясно, что $[A_1A_3]$ – сторона правильного n-угольника. Пусть B_1, B_2 – середины отрезков $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ соответственно. Обозначим через C и D точки пересечения отрезков $[A_1A_3]$, $[B_1B_2]$ с

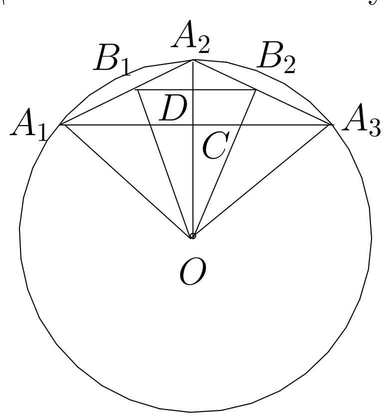


Рис. 32

отрезком $[OA_2]$. Нетрудно понять, что треугольники OA_1B_1 и OB_1D подобны. Поэтому

$$\frac{|OA_1|}{|OB_1|} = \frac{|OB_1|}{|OD|},$$

откуда

$$\frac{|OB_1|^2}{|OA_1|^2} = \frac{|OD|}{|OA_1|}.$$

Поскольку $|OA_1| = R$, $|OB_1| = a_{2n}$, $|OD| = (a_n + R)/2$, имеем

$$\left(\frac{a_{2n}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_n}{R}\right).$$

Заметим, что $a_{2n}/R < 1$; стало быть, $(a_{2n}/R)^2 < a_{2n}/R$ и потому

$$\frac{a_{2n}}{R} > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a_n}{R}\right).$$

Из этого неравенства при помощи несложных преобразований найдем, что

$$R - a_{2n} < \frac{R - a_n}{2}.$$

Подставляя в последнее неравенство вместо n значения 2^2, 2^3, $\ldots$,2^k и перемножая эти неравенства, получим, что

$$R - a_{2^k} < \frac{R - a_4}{2^{k-2}}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое натуральное число k, что $2^{k-2}\varepsilon > R - a_4$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что $R - a_{2^k} < \varepsilon$, т.е. $a_{2^k} > R - \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найден правильный многоугольник, апофема которого больше чем $R - \varepsilon$. Это означает, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = R$.

Пусть Q'_n, Q''_n – правильные n-угольники, один из которых вписан в окружность радиуса R, а второй – описан около этой окружности.

Лемма 5. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q'_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q''_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2.8 следует, что

$$\frac{p(Q_n')}{a_n} = \frac{p(Q_n'')}{R}$$

(a_n – апофема n-угольника Q_n'), откуда $Rp(Q_n') = a_n p(Q_n'')$.

Пусть ε – произвольное положительное число. В силу леммы 4 найдется такое $m \geqslant 4$, что

$$a_m > R - \frac{\varepsilon R}{p(Q_4'')}.$$

Поэтому

$$Rp(Q_m') > Rp(Q_m'') - \frac{\varepsilon Rp(Q_m'')}{p(Q_4'')}$$

или

$$p(Q_m'') - p(Q_m') < \varepsilon \frac{p(Q_m'')}{p(Q_4'')}.$$

Поскольку $p(Q_m'') < p(Q_4'')$, получаем, что

$$p(Q_m'') - p(Q_m') < \varepsilon.$$

Теперь заметим, что

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n'') - \sup_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n') \leqslant p(Q_m'') - p(Q_m') < \varepsilon.$$

Так как ε – произвольное положительное число, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n') = \inf_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n'').$$

Лемма 6. *Длина окружности равна* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению длина окружности равна $\sup(\mathcal{I})$, где $\mathcal{I}$ – множество периметров всех вписанных в окружность многоугольников. Так как $p(Q_n') \in \mathcal{I}$ при любом $n \in \mathbb{N}$, имеем $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n') \leqslant \sup(\mathcal{I})$. Но периметр любого описанного многоугольника больше периметра любого вписанного; стало быть, $\sup(\mathcal{I}) \leqslant \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n'')$. Таким образом,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n') \leqslant \sup(\mathcal{I}) \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n'').$$

В силу леммы 5 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q'_n) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q''_n)$, поэтому $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q'_n) = \sup(\mathcal{I})$.

Теперь теорема 2.2 проверяется очень легко. В самом деле, впишем в окружности S_1 и S_2 радиусов R_1, R_2 правильные n-угольники $Q_n^{(1)}$ и $Q_n^{(2)}$. Нетрудно понять, что

$$\frac{p(Q_n^{(1)})}{R_1} = \frac{p(Q_n^{(2)})}{R_2}$$

при любом n. Учитывая, что $p(S_1) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n^{(1)})$, $p(S_2) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} p(Q_n^{(2)})$, окончательно имеем

$$\frac{p(S_1)}{R_1} = \frac{p(S_2)}{R_2}.$$

В заключение отметим, что из леммы 5 следует равенство $\sup\mathcal{I} = \inf\mathcal{O}$. Поэтому справедливо

Предложение 2.10. *Длина окружности равна точной нижней грани множества периметров многоугольников, описанных около этой окружности.*

2.7. Дуги. Сравнение дуг. Операции над дугами

Пусть A, B – различные точки окружности S с центром O. Множество всех точек окружности, лежащих в замкнутой полуплоскости с границей (AB) называют *дугой* с концами A, B. Ясно, что две точки на окружности всегда определяют две различные дуги. Эти дуги будем называть *взаимно дополнительными.* Дуга с концами A, B, содержащая точку C, обозначается как $\smile ACB$. Дуга ACB является полуокружностью, если A, B являются диаметрально противоположными точками. Будем говорить, что дуга AB не превосходит полуокружности, если она целиком содержится в замкнутой полуплоскости с границей (OA). Каждой дуге AB, не превосходящей полуокружности, сопоставляется *центральный угол* AOB. Нетрудно понять, что указанное соответствие между множеством дуг, не превосходящих полуокружности, и множеством центральных углов, является биективным.

Научимся сравнивать дуги двух окружностей с одинаковыми радиусами. Пусть S_1, S_2 – окружности одинакового радиуса с центрами O_1, O_2 соответственно. Возьмем на окружностях S_1, S_2 дуги s_1 и s_2.

Определение. Дуги s_1, s_2 будем называть *конгруэнтными* (обозначение $s_1 \cong s_2$), если выполнено одно из двух условий:

(a) дуги s_1, s_2 не превосходят полуокружности и соответствующие им центральные углы конгруэнтны;

(b) дуги s_1, s_2 превосходят полуокружность и дополнительные к ним дуги конгруэнтны в соответствии с пунктом (a).

Определение. Дуга s_1 меньше дуги s_2 (обозначение $s_1 < < s_2$), если найдется дуга s_3, содержащаяся в дуге s_2 и конгруэнтная дуге s_1.

Свойства отношения конгруэнтности и отношения "быть меньше" для дуг аналогичны свойствам соответствующих отношений для углов.

Точка C дуги $\smile AB$ называется ее *серединой*, если дуги $\smile AC$, $\smile CB$ конгруэнтны.

Предложение 2.11. *Всякая дуга имеет единственную середину.*

Доказательство. Пусть $\smile AB$ лежит на окружности S с центром O. Рассмотрим произвольную точку C на этой дуге и обозначим через D точку пересечения диаметра, проходящего через точку C, с хордой $[AB]$. Без труда проверяется следующее утверждение: точка C – середина дуги AB тогда и только тогда, когда точка D – середина хорды $[AB]$. Отсюда с очевидностью вытекает предложение 2.11.

Если C – середина дуги AB, то всякая дуга, конгруэнтная дуге AC, называется половиной дуги AB.

Для дуг окружностей одинакового радиуса введем операции сложения и умножения на натуральные числа.

Дуга $s_1 = \smile AB$ называется суммой дуг s_2, s_2, если на дуге s_1 найдется такая точка C, что $\smile AC \cong s_2$ и $\smile CB \cong s_3$.

Для операции умножения дуги на натуральное число удобно использовать рекурсивное определение:

1) $1 \cdot s_1 \cong s_1$;

2) если $n \geqslant 1$, то $s_2 \cong (n+1) \cdot s_1$ означает, что $s_2 \cong n \cdot s_1 + s_1$.

Мы видим, что определение операций над дугами аналогично определению таких же операций над сегментами и углами. Можно убедиться, что эта аналогия переносится и на свойства операций над дугами.

Указанная аналогия продолжается и на операцию умножения дуг на конечные двоичные дроби, т.е. на числа вида $\dfrac{m}{2^n}$, где m, n – натуральные числа. Для этого достаточно научиться умножать дуги на числа вида $\dfrac{1}{2^n}$. Предложение 2.11 позволяет умножить произвольную дугу s на $\dfrac{1}{2}$: по определению дуга $\dfrac{1}{2}s$ конгруэнтна половине дуги s. Далее, если при $n \geqslant 1$ дуга $\dfrac{1}{2^n}s$ уже определена, то дуга $\dfrac{1}{2^{n+1}}s$ конгруэнтна половине дуги $\dfrac{1}{2^n}s$.

2.8. Длина дуги

Пусть $s = \smile AB$ – произвольная дуга окружности S.

О п р е д е л е н и е. Ломаная L с концами A, B называется *вписанной* в дугу s, если все ее вершины принадлежат дуге s.

О п р е д е л е н и е. Ломаная L с концами A, B называется *описанной* около дуги s, если все ее звенья касаются дуги s, причем первое и последнее звенья касаются дуги в точках A и B соответственно.

Длину ломаной L будем обозначать через $p(L)$.

Как и в разд. 2.6 обозначим через $\mathcal{I}$ множество длин ломаных, вписанных в данную дугу, а через $\mathcal{O}$ – множество длин ломаных, описанных около этой дуги. Легко убедиться в том, что длина ломаной, вписанной в данную дугу, меньше длины ломаной, описанной около этой дуги. Таким образом, множество $\mathcal{I}$ ограничено сверху, а множество $\mathcal{O}$ ограничено снизу.

Определение. Длиной дуги s называется точная верхняя грань множества длин всех ломаных, вписанных в эту дугу.

Длину дуги s будем обозначать через $p(s)$.

Применяя рассуждения, аналогичные использованным в п. 2.6, можно получить следующие два утверждения.

Теорема 2.3. *Пусть s_1, s_2 – дуги окружностей S_1, S_2, имеющих радиусы R_1, R_2 соответственно. Если центральные углы, опирающиеся на дуги s_1, s_2, конгруэнтны, то*

$$\frac{p(s_1)}{R_1} = \frac{p(s_2)}{R_2}.$$

Предложение 2.12. *Длина дуги равна точной нижней грани множества длин ломаных, описанных около этой дуги.*

Остановимся на доказательстве одного неравенства, которое при изучении начал анализа будет использовано для вычисления первого замечательного предела.

В окружности с центром O рассмотрим острый центральный угол AOB (рис. 33). Опустим из точки B перпендикуляр (BC) на (OA); пусть B_1 – вторая точка пересечения прямой (BC) и данной окружности. Из определения длины дуги следует, что $|BB_1| < p(\smile BAB_1)$. Поскольку $|BB_1| = 2|BC|$ и $p(\smile BAB_1) = 2p(\smile AB)$, получаем неравенство

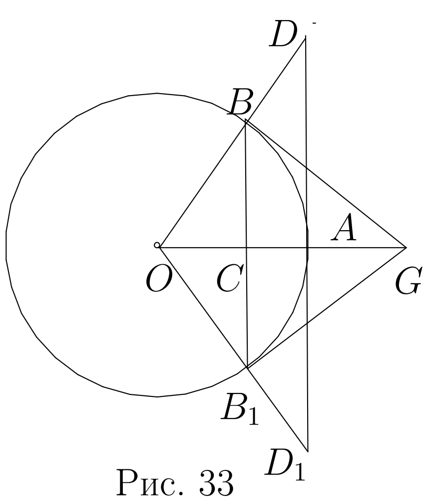


Рис. 33

$$|BC| < p(\smile AB).$$

Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к прямой (OA); пусть D, D_1 – точки пересечения этой прямой с лучами $[OB)$, $[OB_1)$ соответственно. Проверим, что

$$p(\smile AB) < |AD|.$$

Пусть G – такая точка луча $[OA)$, что (BG) касается данной окружности в точке B. Тогда прямая (B_1G) также касается окружности в точке B_1. Нетрудно проверить, что

$$|AD| = |BG| = |B_1G| = |AD_1|.$$

Поэтому $|DD_1| = 2|AD|$ и длина отрезка $[DD_1]$ равна длине ломаной BGB_1. Но ломаная BGB_1 описана около дуги BAB_1. Стало быть, $p(\smile BAB_1) < p(BGB_1)$. Из этого неравенства очевидным образом следует, что $p(\smile AB) < |AD|$.

2.9. Угловая мера дуги

В предыдущем разделе мы определили длину дуги окружности. Оказывается, существуют и другие способы измерения дуг. Напомним, что в разд. 1.20 была введена мера на множестве углов. А именно, каждому углу α было сопоставлено неотрицательное число $\mu(\alpha)$, причем были выполнены следующие свойства:

1) если $\gamma = \alpha + \beta$, то $\mu(\gamma) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$;

2) если $\gamma = n \cdot \alpha$, то $\mu(\gamma) = n \cdot \mu(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$;

3) $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha \cong \beta$.

Напомним также, что мера на множестве углов определена однозначно, если задано число d, являющееся мерой прямого угла. Если $d = 90$, то получим градусную меру, если же $d = \pi/2$, то получится радианная мера.

Пусть S – окружность с центром O. Мы знаем, что существует взаимно однозначное соответствие между дугами, не превосходящими полуокружности, и центральными углами, причем дуги конгруэнтны в том и только том случае, когда конгруэнтны соответствующие им центральные углы.

Это обстоятельство позволяет каждой дуге s окружности S поставить в соответствие число $\mu(s)$. Если s не превосходит полуокружности, то $\mu(s) = \mu(\alpha)$, где α – центральный угол, соответствующий дуге s; если же s больше полуокружности, то $\mu(s) = 4d - \mu(\beta)$, где β – центральный угол, соответствующий дуге t, дополнительной к s. Число $\mu(s)$ называется угловой мерой дуги s.

Нетрудно проверить, что угловая мера на множестве дуг данной окружности обладает следующими свойствами:

1) если $s = s_1 + s_2$, то $\mu(s) = \mu(s_1) + \mu(s_2)$;

2) если $s = n \cdot s_1$, то $\mu(s) = n \cdot \mu(s_1)$, $n \in \mathbb{N}$;

3) $\mu(s_1) = \mu(s_2)$ тогда и только тогда, когда $s_1 \cong s_2$.

Существуют простые соотношения, связывающие длину дуги с радианной и градусной мерами этой дуги.

Предложение 2.13. *Пусть $\rho(s)$ – радианная мера дуги s, лежащей на окружности радиуса R. Тогда длина дуги $p(s)$ равна $R\rho(s)$.*

Предложение 2.14. *Пусть $\gamma(s)$ – градусная мера дуги s, лежащей на окружности радиуса R. Тогда длина дуги $p(s)$ равна $R\gamma(s)\dfrac{\pi}{180}$.*

Сформулируем утверждение, следствиями которого являются предложения 2.13 и 2.14. Доказательство этого утверждения мы опускаем.

Пусть на полуокружности с центром O и диаметром $[AB]$ расположено непустое множество точек $\mathcal{C}$. Для точки D, лежащей на полуокружности, следующие условия эквивалентны:

1) $\mu(\smile AOD) = \sup\limits_{C \in \mathcal{C}}(\mu(\smile AOC))$;

2) $p(\smile AOD) = \sup\limits_{C \in \mathcal{C}}(p(\smile AOC))$.

(Здесь, как и раньше, μ – некоторая угловая мера на множестве дуг.)

Доказательство предложения 2.13. Пусть $r = m/2^n$, где m, n – натуральные числа, причем $m \leqslant 2^{n+1}$. На полуокружности с диаметром $[AB]$ и центром O рассмотрим такую точку C_r, что $\angle AOC_r \cong r \cdot \delta$, где δ – прямой угол. Обозначим через s_r

дугу, на которую опирается угол $\angle AOC_r$. Нетрудно понять, что $p(s_r) = R\rho(s_r)$. Для произвольной точки D, лежащей на данной полуокружности, рассмотрим множество

$$X = \{r \mid r = m/2^n \text{ и } \angle AOC_r \leqslant \angle AOD\}.$$

Ясно, что $D = \sup_{r\in X} C_r$. Отсюда вытекает, что

$$\rho(\smile AOD) = \sup_{r\in X} \rho(s_r), \quad p(\smile AOD) = \sup_{r\in X} p(s_r). \qquad (7)$$

Поскольку $p(s_r) = R\rho(s_r)$, из отмеченного выше утверждения и равенства (7) вытекает, что $p(\smile AOD) = R\cdot\rho(\smile AOD)$.

Предложение 2.14 проверяется аналогично.

2.10. Измерение вписанных углов

О п р е д е л е н и е. Угол aCb называется *вписанным в окружность*, если точка C принадлежит окружности, а стороны a и b пересекают окружность.

Пусть лучи a, b пересекают окружность в точках A, B соответственно. Если дуга AB лежит во внутренней области вписанного угла, то говорят, что этот угол *опирается* на дугу AB.

Предложение 2.15. *Вписанный угол измеряется половиной угловой меры дуги, на которую он опирается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возможны три случая: центр окружности O лежит на одной из сторон (рис. 34, a), центр окружности находится во внутренней (рис. 34, b) или во внешней (рис. 34, c) области вписанного угла.

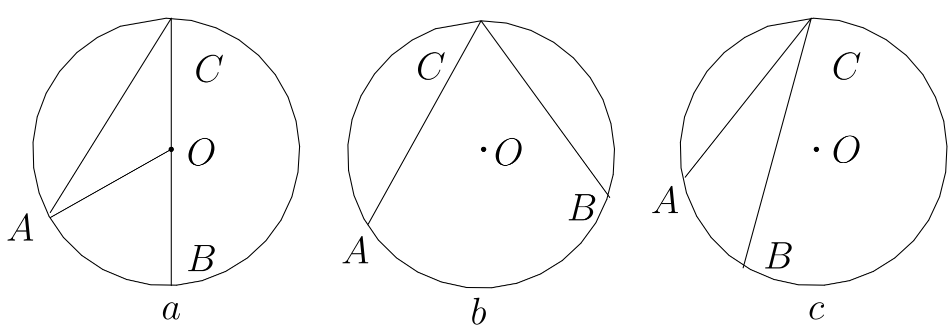


Рис. 34

В первом случае легко убедиться, что вписанный угол составляет половину центрального угла AOB. Второй и третий случаи легко сводятся к первому, если провести через точку C диаметр.

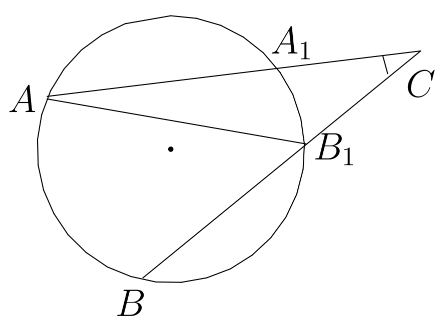
Следствие 1. *Пусть вершина угла aCb лежит на окружности, причем сторона a касается этой окружности. Тогда угол aCb измеряется половиной угловой меры дуги, содержащейся во внутренней области данного угла.*

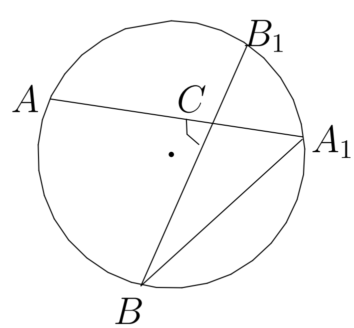
Для доказательства надо рассмотреть те же случаи, что и при доказательстве предложения 2.15. Следует учесть, что угол между диаметром и лучом a – прямой.

Следствие 2. *Пусть вершина угла aCb лежит вне окружности, причем каждая из сторон имеет с окружностью общую точку. Тогда угол aCb измеряется половиной разности угловых мер дуг, содержащихся во внутренней области данного угла.*

Следствие 3. *Пусть вершина угла aCb лежит внутри окружности. Если лучи a, b пересекают окружность в точках A,B, а дополнительные к ним лучи – в точках A', B', то угол aCb измеряется половиной суммы угловых мер дуг, содержащихся во внутренних областях двух вертикальных углов, одним из которых является данный угол.*

Доказательства этих двух следствий легко получить, если внимательно рассмотреть рис. 35.





$\angle ACB \cong \angle AB_1B - \angle A_1AB_1$ $\angle ACB \cong \angle AA_1B + \angle B_1BA_1$

Рис. 35

Заметим, что следствие 2 сохраняется, если одна из сторон угла касается окружности.

2.11. Метрические соотношения в окружности. Теорема Птолемея

В этом разделе мы получим несколько утверждений, являющихся, по существу, следствиями из предложения 2.15.

Предложение 2.16. *Пусть прямые l_1, l_2 проходят через точку C, лежащую внутри данной окружности. Если прямая l_1 пересекает окружность в точках A_1, B_1, а прямая l_2 – в точках A_2, B_2, то $|CA_1| \cdot |CB_1| = |CA_2| \cdot |CB_2|$.*

Доказательство. Из предложения 2.15 вытекает, что $\angle B_1A_2B_2 \cong \angle B_1A_1B_2$ и $\angle A_1B_1A_2 \cong \angle A_1B_2A_2$ (рис. $36, a$). Отсюда следует, что треугольники CA_2B_1 и CA_1B_2 подобны. Поэтому $|CA_1| : |CA_2| = |CB_2| : |CB_1|$. Стало быть, $|CA_1| \cdot |CB_1| = |CA_2| \cdot |CB_2|$.

Предложение 2.17. *Пусть прямые l, m проходят через точкуа C, лежащую вне данной окружности. Если прямая l пересекает окружность в точках A, B, а прямая m касается окружности в точке D, то $|CA| \cdot |CB| = |CD|^2$.*

Доказательство. Из предложения 2.15 и следствия 1 вытекает, что $\angle BAD \cong BDC$ (рис. $36, b$). Отсюда следует, что треугольники CBD и CDA подобны по двум углам. Значит, $|CD| : |CA| = |CB| : |CD|$, откуда $|CA| \cdot |CB| = |CD|^2$.

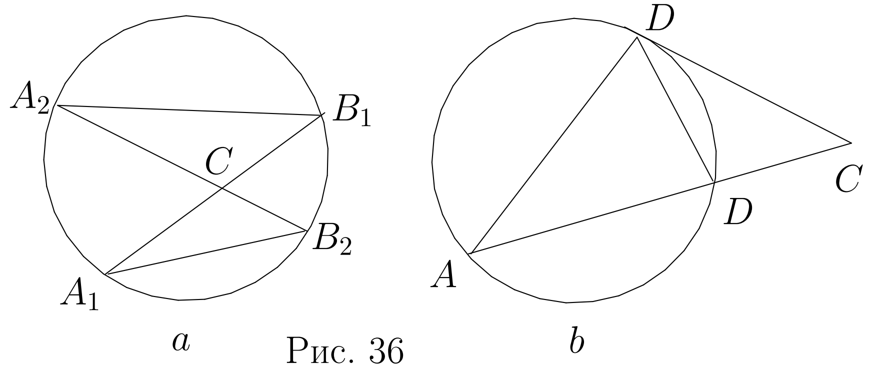


Рис. 36

Теорема 2.4 (теорема Птолемея). *Пусть в окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Тогда*

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Доказательство. Найдем на диагонали $[BD]$ такую точку F, что $\angle CAD \cong \angle FAB$ (рис. 37). Поскольку вписанные углы ACD и ABD опираются на одну дугу, эти углы конгруэнтны. Замечая, что треугольники ADC и AFB подобны, находим

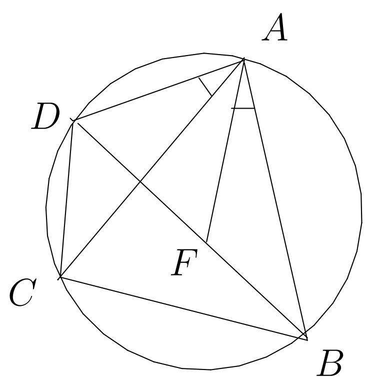


Рис. 37

$$|CD| : |AC| = |BF| : |AB|,$$

откуда

$$|AC| \cdot |BF| = |AB| \cdot |CD|. \quad (8)$$

Треугольники ACB и ADF также подобны (проверьте это утверждение самостоятельно). Поэтому $|BC| : |DF| = |AC| : : |AD|$ и, стало быть,

$$|AC| \cdot |FD| = |BC| \cdot |AD|. \quad (9)$$

Складывая равенства (8) и (9) получим

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

3. Движения плоскости

3.1. Определение движения

Определение. Биективное преобразование φ плоскости π называется движением, если для любых различных точек $X, Y \in \pi$ выполнено соотношение $XY \cong X'Y'$, где $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$.

Иными словами, преобразование плоскости является движением, если каждый сегмент оно переводит в конгруэнтный ему сегмент. Очень простым (но тем не менее важным) примером движения является тождественное преобразование ε. Напомним, что по определению $\varepsilon(X) = X$ для любой точки $X \in \pi$.

Пусть φ, ψ – произвольные движения плоскости. Тогда, как мы знаем, определено преобразование плоскости $\varphi\circ\psi$, называемое композицией φ, ψ.

Лемма 1. *Композиция $\varphi\circ\psi$ двух движений φ, ψ является движением.*

При доказательстве леммы 1 необходимо проверить, что в данном случае преобразование $\varphi\circ\psi$ биективно и сохраняет конгруэнтность сегментов. Детали мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Пусть φ – произвольное движение. Поскольку φ является биективным преобразованием плоскости, определено обратное преобразование φ^{-1}. Как мы знаем, преобразование φ^{-1} удовлетворяет равенствам $\varphi^{-1}\circ\varphi = \varphi\circ\varphi^{-1} = \varepsilon$.

Лемма 2. *Если φ – движение, то преобразование φ^{-1} также является движением.*

Доказательство. Пусть X, Y – произвольные точки плоскости и $X' = \varphi^{-1}(X), Y' = \varphi^{-1}(Y)$. Тогда $X = \varphi(X'), Y = \varphi(Y')$. Поскольку φ является движением, имеем $XY \cong X'Y'$. Из этого соотношения, очевидно, вытекает, что φ^{-1} – движение.

Лемма 3. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – произвольные движения. Тогда*

$$\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3.$$

Эта лемма является частным случаем утверждения о том, что указанное свойство выполнено для любых трех преобразований произвольного множества. Напомним, что свойство композиции движений, высказанное в лемме 3, называется ассоциативностью. Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех движений плоскости. На этом множестве определены две операции: операция композиции и операция взятия обратного движения; кроме того, эти операции обладают свойствами, которые отмечены в леммах 1 – 3. Кратко выражая эти свойства множества $\mathcal{M}$, мы будем говорить, что $\mathcal{M}$ является группой (относительно указанных операций).

Тот факт, что композиция движений обладает свойством ассоциативности, позволяет определить степень φ^n движения φ с натуральным показателем n (ассоциативность необходима для того, чтобы результирующее движение φ^n не зависело от расстановки скобок). А именно, положим $\varphi^1 = \varphi$ и $\varphi^{n+1} = \varphi^n \circ \varphi$, если $n \geqslant 1$. Таким образом, движение φ^n получается путем n-кратного последовательного применения движения φ.

В дальнейшем мы встретимся с другими группами движений: группой всех параллельных переносов (см. разд. 3.8) и группой всех поворотов с общим центром (см. разд. 3.9). Будет доказано, что в каждой из этих групп выполняется дополнительное свойство $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, каковы бы ни были движения φ, ψ из данной группы. Это свойство называется *коммутативностью*, а группы с таким свойством называются *коммутативными* или *абелевыми*[1].

[1] Названы в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802–1829).

3.2. Образы прямой, луча, отрезка, полуплоскости

Пусть φ – движение, $\mathcal{X}$ – множество точек плоскости. Через $\varphi(\mathcal{X})$ будем обозначать образ множества $\mathcal{X}$ при движении φ, т.е. множество всех точек вида $\varphi(x)$, где $x \in \mathcal{X}$.

Предложение 3.1. *Пусть φ – движение, A, B, C – три различные коллинеарные точки. Тогда точки $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ также коллинеарны.*

Доказательство. Мы воспользуемся следующим утверждением: точка Y лежит между точками X, Z тогда и только тогда, когда $XY + YZ \cong XZ$ (см. следствие из предложения 1.35).

Среди трех различных коллинеарных точек A, B, C в точности одна лежит между двумя другими. Не теряя общности, можно считать, что B лежит между A, C, поэтому

$$AB + BC \cong AC.$$

Пусть $\varphi(A) = A^{'}$, $\varphi(B) = B^{'}$, $\varphi(C) = C^{'}$. Поскольку $AB \cong$ $\cong A^{'}B^{'}$, $BC \cong B^{'}C'$, $AC \cong A^{'}C^{'}$, имеем

$$A^{'}B^{'} + B^{'}C^{'} \cong A^{'}C^{'}.$$

Это соотношение, как отмечено выше, означает, что $B^{'}$ лежит между $A^{'}, C^{'}$. Следовательно, $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$ коллинеарны.

Теорема 3.1. *Пусть φ – движение, l – прямая. Тогда $\varphi(l)$ также прямая.*

Доказательство. Пусть A, B – различные точки прямой l. Тогда точки $A^{'} = \varphi(A)$, $B^{'} = \varphi(B)$ также различны. Эти точки определяют прямую $l^{'} = (A^{'}B^{'})$. Пусть X – произвольная точка прямой l. Из предложения 3.1 вытекает, что для любой точки $X \in l$ ее образ $X^{'} = \varphi(X)$ принадлежит прямой $l^{'}$. Поэтому доказано включение

$$\varphi(l) \subseteq l^{'}.$$

Применим теперь предыдущие рассуждения к движению φ^{-1} и прямой l'. Так как $A', B' \in l'$, $\varphi^{-1}(A') = A$, $\varphi^{-1}(B') = B$, $l = (AB)$, имеем

$$\varphi^{-1}(l') \subseteq l.$$

Применяя к обеим частям последнего включения движение φ, получим $\varphi(\varphi^{-1}(l')) \subseteq \varphi(l)$, откуда

$$l' \subseteq \varphi(l).$$

Так как получено два включения $\varphi(l) \subseteq l'$, $l' \subseteq \varphi(l)$, то $\varphi(l) = l'$, и мы доказали, что образ $\varphi(l)$ прямой l есть прямая l'.

Теорема 3.2. *Пусть φ – движение. Если множество $\mathcal{X}$ является лучом (отрезком, полуплоскостью), то множество $\varphi(\mathcal{X})$ также является лучом (соответственно отрезком, полуплоскостью).*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.1.

Из определения движения следует, что образом сегмента является сегмент, конгруэнтный данному. Возникает вопрос: а сохраняет ли движение конгруэнтность углов? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Образом произвольного угла при движении является угол, конгруэнтный данному.*

Доказательство. Пусть φ – движение, aOb – угол, $a' = \varphi(a)$, $b = \varphi(b)$, $O' = \varphi(O)$. Если $\angle aOb$ нулевой или развернутый, то предложение сразу вытекает из теорем 3.1, 3.2. Допустим теперь, что лучи a, b не лежат на одной прямой. Возьмем точки $A \in a$, $B \in b$ так, что $A, B \neq O$. Тогда точки O, A, B не коллинеарны. Отсюда следует, что точки $O' = \varphi(O)$, $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ также не коллинеарны. Из определения движения имеем $OA \cong O'A'$, $OB \cong O'B'$, $AB \cong A'B'$. Поэтому к треугольникам OAB и $O'A'B'$ применим третий признак конгруэнтности. Стало быть, $\angle aOb = \angle AOB \cong \angle A'O'B' = \angle a'O'b'$.

Отметим еще одно важное свойство движений.

Предложение 3.3. *Всякое движение сохраняет сонаправленность лучей и одинаковую ориентированность флагов.*

Доказательство. Пусть φ – произвольное движение, a, b – сонаправленные лучи, имеющие начала в точках A, B соответственно. Введем обозначения: $a_1 = \varphi(a)$, $A_1 = \varphi(A)$, $b_1 = \varphi(b)$, $B_1 = \varphi(B)$. Если лучи a, b лежат на одной прямой, то в силу сонаправленности один из них содержится в другом. Считая, что $a \subseteq b$, получаем $\varphi(a) \subseteq \varphi(b)$, т.е. $a_1 \uparrow\uparrow b_1$. Если же a, b лежат на разных прямых, то пусть $n = (AB)$. Тогда существует такая полуплоскость π_n, что $a, b \subset \pi_n$. Отсюда $\varphi(a), \varphi(b) \subset \varphi(\pi_n)$. Поскольку $\varphi(\pi_n)$ – полуплоскость, причем ее граница содержит точки A_1, B_1, мы опять получаем, что a_1, b_1 сонаправлены.

Применим теперь движение φ к одинаково ориентированным флагам $\mathcal{F} = (\pi_l, l_A)$, $\mathcal{G} = (\pi_m, m_B)$.

Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B совпадают. Если прямые l, m различны, то одинаковая ориентированность флагов означает, что либо (1) $l_A \subset \pi_m, m_A \subset \pi'_l$, либо (2) $l_A \subset \pi'_m, m_A \subset \pi_l$. Без ограничения общности можно считать, что выполняется условие (1). Тогда $\varphi(l_A) \subset \varphi(\pi_m), \varphi(m_A) \subset$ $\subset \varphi(\pi'_l)$. Отсюда немедленно вытекает одинаковая ориентированность флагов $\varphi(\mathcal{F})$ и $\varphi(\mathcal{G})$. Если же прямые l, m совпадают, то либо $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, либо $\mathcal{F} = \mathcal{G}'$. В обоих случаях одинаковая ориентированность флагов $\varphi(\mathcal{F})$ и $\varphi(\mathcal{G})$ очевидна.

Пусть теперь точки A, B различны. Обозначим через n прямую (AB). В силу определения из разд. 1.9 найдутся сонаправленные лучи n_A, n_B и полуплоскость π_n такие, что флаг $\mathcal{F}_1 = (\pi_n, n_A)$ сонаправлен с $\mathcal{F}$, а флаг $\mathcal{G}_1 = (\pi_n, n_B)$ сонаправлен с $\mathcal{G}$. Легко проверить, что для флагов $\varphi(\mathcal{F})$ и $\varphi(\mathcal{G})$ выполнено определение из разд. 1.9. Детали мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

3.3. Неподвижные точки и неподвижные прямые

В этом разделе будут изучены свойства точек и прямых, не изменяющихся при применении к ним данного движения.

О п р е д е л е н и е. Точка A называется неподвижной точкой движения φ, если $\varphi(A) = A$.

О п р е д е л е н и е. Прямая l называется неподвижной прямой движения φ, если $\varphi(l) = l$.

З а м е ч а н и е. Из определения неподвижной прямой не следует, что каждая точка этой прямой является неподвижной. Более того, в дальнейшем мы увидим, что движение, как правило, перемещает точки неподвижной прямой. Иначе обстоит дело с неподвижными лучами.

Предложение 3.4. *Пусть движение φ оставляет неподвижным луч a, т.е. $\varphi(a) = a$. Тогда любая точка луча a является неподвижной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через O начало луча a. Ясно, что $\varphi(O) = O$. Пусть $X \in a$, $X \neq O$ и $X' = \varphi(X)$. Поскольку $OX' \cong OX$, из предложения 1.14 сразу следует, что $X' = X$.

Предложение 3.5. *Пусть A, B – различные неподвижные точки движения φ. Тогда каждая точка прямой (AB) является неподвижной точкой.*

Для доказательства достаточно рассмотреть лучи $a = [AB)$, $b = [BA)$ и убедиться, что $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$.

Предложение 3.6. *Пусть A, B – такие различные точки, что $\varphi(A) = B$ и $\varphi(B) = A$. Тогда середина C сегмента AB является неподвижной точкой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $C' = \varphi(C)$, то, поскольку φ – движение, из соотношения $AC \cong CA$ вытекает соотношение $BC' \cong C'A$. Таким образом, C' – также середина сегмента AB. Поскольку середина сегмента единственна, имеем $C' = C$, т.е. C – неподвижная точка.

Предложение 3.7. *Пусть a, b – различные лучи с общим началом O, причем a, b не лежат на одной прямой и $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$. Если p – биссектриса угла ab, то $\varphi(p) = p$.*

Доказательство. Рассмотрим такие точки $A \in a, b \in B$, что $|OA| = |OB|$. Пусть P – середина сегмента AB. В силу предложения 3.6 точка P неподвижна. Поскольку точка O также неподвижна, получаем, что луч p является неподвижным.

Предложение 3.8. *Пусть A, A' – различные точки и $A' = \varphi(A)$. Тогда все неподвижные точки движения φ лежат на медиатрисе сегмента AA'.*

Доказательство. Если $X = \varphi(X)$, то $AX \cong A'X$. Таким образом, точка X равноудалена от точек A, A', и, значит, принадлежит медиатрисе сегмента AA'.

Предложение 3.9. *Пусть $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ – флаг и движение φ таково, что $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Тогда φ – тождественное движение.*

Доказательство. Нужно доказать, что если X – любая точка плоскости, то $\varphi(X) = X$. Рассмотрим несколько возможностей:

1. $X \in l$. В этом случае равенство $\varphi(X) = X$ следует из предложений 3.4 и 3.5;

2. $X \in \pi_l$. Рассуждая "от противного,"предположим, что $X' = \varphi(X) \neq X$. Пусть m – медиатриса сегмента XX'. В силу предложения 3.8 все неподвижные точки движения φ лежат на прямой m. Однако мы знаем (см. случай 1), что каждая точка прямой l неподвижна. Поэтому $l \subseteq m$, а значит, $l = m$. Поскольку медиатриса m разделяет точки X, X' и $X \in \pi_l$, то $X' \in \pi_l'$. Последнее включение противоречит равенству $\varphi(\pi_l) = \pi_l$;

3. $X \in \pi_l'$. Поскольку образ полуплоскости π_l' – полуплоскость и, кроме того, $\varphi(\pi_l) = \pi_l$, имеем $\varphi(\pi_l') = \pi_l'$. Таким образом, в этом случае можно повторить рассуждения из пункта 2.

Следствие. *Если движение φ имеет три неколлинеарные неподвижные точки, то φ – тождественное движение.*

Доказательство. Пусть $l = (AB)$, π_l – полуплоскость с границей l, содержащая точку C, l_A – луч с началом A, содержащий B. Проверьте, что если $\mathcal{F} = (\pi_l, l_A)$, то $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

3.4. Симметрия относительно прямой

Пусть l – произвольная прямая. Напомним (см. следствие из теоремы 1.11), что для любой точки $X \notin l$ существует единственная точка X' такая, что l служит медиатрисой сегмента XX'. Такие точки X, X' называются *симметричными относительно прямой* l.

Рассмотрим преобразование плоскости σ_l , определяемое следующим равенством:

$$\sigma_l(X) = \begin{cases} X, & \text{если } X \in l; \\ X', & \text{если } X \notin l. \end{cases}$$

Преобразование σ_l называется *зеркальной симметрией с осью* l. Из определения зеркальной симметрии следует равенство $\sigma_l \circ \sigma_l = \varepsilon$.

Теорема 3.3. *Для любой прямой l преобразование σ_l является движением.*

Доказательство. Пусть X, Y – произвольные различные точки, $X' = \sigma_l(X)$, $Y' = \sigma_l(Y)$. Мы должны проверить, что $XY \cong X'Y'$. Отметим сперва, что если одна из точек X или Y принадлежит прямой l, то соотношение $XY \cong X'Y'$ выполнено в силу теоремы 1.11.

Пусть теперь $X, Y \notin l$. Предположим сначала, что прямая (XY) не перпендикулярна прямой l. Обозначим через A, B точки пересечения прямой l с прямыми (XX'), (YY') соответственно. Ясно, что точки A, B различны. Возможны два случая:

1) точки X, Y лежат по разные стороны от прямой l;

2) точки X, Y лежат по одну сторону от прямой l.

Рассмотрим сначала случай 1. Ясно, что прямая (XY) пересекает l в некоторой точке C. Проверим, что точки X', C,

$Y^{'}$ коллинеарны. В самом деле, $\angle XCA \cong \angle X'CA$, $\angle YCB \cong$ $\cong \angle Y^{'}CB$. Кроме того, $\angle XCA \cong \angle YCB$, поскольку эти углы вертикальные. Используя транзитивность отношения конгруэнтности для углов, получаем, что $\angle X'CA \cong \angle Y'CB$. Последнее соотношение означает, что луч $[CY^{'})$ является дополнительным к лучу $[CX^{'})$. Значит, $X^{'}$, C, $Y^{'}$ – коллинеарные точки. Далее замечаем, что

$$XY \cong XC + CY, X^{'}Y^{'} \cong X^{'}C + CY^{'}.$$

Поскольку $XC \cong X^{'}C$, $CY \cong CY^{'}$, имеем $XY \cong X^{'}Y^{'}$.

Теперь рассмотрим случай 2. Ясно, что $Y^{'} = \sigma_l(Y)$, и точки X, $Y^{'}$ лежат по разные стороны от прямой l. Обозначим через C точку пересечения прямых $(XY^{'})$ и l. По доказанному выше углы $\angle XCY$ и $\angle X^{'}CY^{'}$ вертикальные, а $XC \cong X^{'}C^{'}$ и $YC \cong Y^{'}C^{'}$. Значит, треугольники XCY и $X^{'}CY^{'}$ конгруэнтны, откуда $XY \cong X^{'}Y^{'}$.

Итак, в случае, когда прямая (XY) не перпендикулярна прямой l, соотношение $XY \cong X^{'}Y^{'}$ проверено. Проверку этого соотношения в случае перпендикулярности прямых (XY) и l мы оставляем читателю.

Теорема 3.4. *Движение φ является зеркальной симметрией с осью l тогда и только тогда, когда множество всех его неподвижных точек совпадает с l.*

Доказательство. Пусть $\varphi = \sigma_l$. Из определения движения σ_l сразу следует, что l является множеством всех его неподвижных точек.

Проверим обратное утверждение. Пусть прямая l является множеством всех неподвижных точек движения φ. Для произвольной точки X обозначим точку $\varphi(X)$ через $X^{'}$. Ясно, что для $X \in l$ имеем $X^{'} = X$. Если же $X \notin l$, то точка X не является неподвижной, поэтому $X^{'} \neq X$. В силу предложения 3.8 прямая l является медиатрисой сегмента $XX^{'}$. Таким образом, для любой точки выполнено равенство $\varphi(X) = \sigma_l(X)$, т. е. $\varphi = \sigma_l$.

Следствие 1. *Пусть φ – движение, l – прямая. Тогда движение $\varphi \circ \sigma_l \circ \varphi^{-1}$ – симметрия относительно прямой $\varphi(l)$.*

Докажем это утверждение. Пусть $\varphi(l) = m$. Имеем следующую цепочку равносильных преобразований:

$$\varphi\circ\sigma_l\circ\varphi^{-1}(X) = X \Longleftrightarrow \sigma_l\circ\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(X) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sigma_l(\varphi^{-1}(X)) = \varphi^{-1}(X) \Longleftrightarrow \varphi^{-1}(X) \in l \Longleftrightarrow X \in m.$$

Таким образом, проверено, что X – неподвижная точка движения $\varphi\circ\sigma_l\circ\varphi^{-1}$ тогда и только тогда, когда $X \in m$. Осталось лишь воспользоваться теоремой 3.4.

Следствие 2. *Равенство $\varphi\circ\sigma_l = \sigma_l\circ\varphi$ выполнено тогда и только тогда, когда $l = \varphi(l)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi\circ\sigma_l = \sigma_l\circ\varphi$. Вычисляя композицию обеих частей этого равенства с движением φ^{-1}, получим

$$\varphi\circ\sigma_l\circ\varphi^{-1} = \sigma_l\circ\varphi\circ\varphi^{-1},$$

откуда

$$\varphi\circ\sigma_l\circ\varphi^{-1} = \sigma_l.$$

Если $\varphi(l) = m$, то в силу следствия 1 левая часть последнего равенства равна σ_m. Следовательно, $\sigma_m = \sigma_l$, т.е. $l = m = \varphi(l)$.

Обратно, пусть $l = \varphi(l)$. Применяя следствие 1, получаем равенство $\varphi\circ\sigma_l\circ\varphi^{-1} = \sigma_l$, откуда $\varphi\circ\sigma_l = \sigma_l\circ\varphi$.

Следствие 3. *Пусть l, m – различные прямые. Равенство $\sigma_l\circ\sigma_m = \sigma_m\circ\sigma_l$ выполнено тогда и только тогда, когда $l \perp m$.*

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что $\sigma_l\circ\sigma_m = \sigma_m\circ\sigma_l$ тогда и только тогда, когда $\sigma_m(l) = l$. Поскольку l и m – различные прямые, существует такая точка A, что $A \in l$ и $A \notin m$. Если $A' = \sigma_m(A)$, то $A' \in \sigma_m(l) = l$. Отсюда вытекает, что $l = (AA')$. Но $(AA') \perp m$, и потому $l \perp m$.

Заметим, что два движения φ и ψ называются перестановочными, если $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi$. Таким образом, в следствии 2 установлен признак перестановочности зеркальной симметрии и произвольного движения; в следствии 3 – признак перестановочности двух симметрий.

Предложение 3.10. 1) *для любых различных точек* A, B *существует единственная прямая* m, *для которой* $\sigma_m(A) = B$, $\sigma_m(B) = A$;

2) *для любых различных лучей* a, b *с общим началом существует единственная прямая* m, *для которой* $\sigma_m(a) = b$, $\sigma_m(b) = a$.

Доказательство этого утверждения мы оставляем читателю.

3.5. Теорема подвижности. Движения первого и второго рода

Теорема 3.5 (теорема подвижности). *Пусть* $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$ *и* $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$ *– произвольные флаги. Существует единственное движение* φ, *переводящее флаг* $\mathcal{F}_1$ *во флаг* $\mathcal{F}_2$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1. $A = B$, $l_A = m_B$, $\pi_l = \pi_m$. В этом случае, очевидно, $\varphi = \varepsilon$;

2. $A = B$, $l_A = m_B$, $\pi_l \neq \pi_m$. Так как полуплоскости π_l, π_m имеют общую границу $l = m$ и различны, то $\pi_m = \pi_l'$. Следовательно, в этом случае $\varphi = \sigma_l$;

3. $A = B$, $l_A \neq m_B$. В соответствии с предложением 3.10 существует такая прямая p, что $\sigma_p(l_A) = m_B$. Образ полуплоскости π_l при симметрии σ_p обозначим через α. Ясно, что граница полуплоскости α – прямая m. Введем теперь в рассмотрение флаг $\mathcal{F} = (\alpha, m_B)$. В силу выбора флага $\mathcal{F}$ симметрия σ_p переводит флаг $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}$. Поскольку флаги $\mathcal{F} = (\alpha, m_B)$ и $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$ имеют совпадающие древки, к ним применим либо пункт 1 (если $\alpha = \pi_m$), либо пункт 2 (если $\alpha = \pi_m'$). Таким образом, по доказанному выше, найдется движение φ_1, переводящее $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}_2$. Поэтому движение $\varphi = \varphi_1 \circ \sigma_p$ переводит $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Заметим, что в этом случае φ есть композиция не более чем двух зеркальных симметрий.

4. $A \neq B$. В силу пункта 1) предложения 3.10 существует такая прямая q, что $\sigma_q(A) = B$. Пусть $\sigma_q(l_A) = a$, $\sigma_q(\pi_l) =$

$= \alpha$. Ясно, что α – полуплоскость, границей которой является прямая, содержащая луч a. Поэтому можно рассмотреть флаг $\mathcal{F} = (\alpha, a)$. Как и выше, симметрия σ_q переводит флаг $\mathcal{F}_1$ во флаг $\mathcal{F}$, а к флагам $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_2$ применим один из пунктов 1 – 3 (так как лучи $a = \sigma_q(l_A)$ и m_B имеют общее начало B). Поэтому найдется движение φ_2, переводящее флаг $\mathcal{F}$ во флаг $\mathcal{F}_2$. Стало быть, движение $\varphi = \varphi_2 \circ \sigma_q$ переводит $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Так как выше было отмечено, что φ_2 является композицией не более чем двух симметрий, то $\varphi = \sigma_q \circ \varphi_2$ есть композиция не более чем трех зеркальных симметрий.

Итак, мы доказали, что для любых флагов $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдется движение, переводящее $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$.

Покажем теперь, что такое движение единственно. В самом деле, пусть движения φ и ψ таковы, что $\varphi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$ и $\psi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Тогда $\psi^{-1}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1$ и $\psi^{-1} \circ \varphi(\mathcal{F}_1) = \psi^{-1}(\varphi(\mathcal{F}_1)) = \psi^{-1}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}_1$. Таким образом, движение $\psi^{-1} \circ \varphi$ оставляет на месте флаг $\mathcal{F}_1$. В силу предложения 3.9 это движение является тождественным, т.е. $\psi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon$. Отсюда немедленно следует, что $\varphi = \psi$.

Предложение 3.11. *Всякое движение φ есть композиция не более чем трех зеркальных симметрий.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_1$ – произвольный флаг и $\mathcal{F}_2 = \varphi(\mathcal{F}_1)$. Анализ доказательства теоремы 3.5 немедленно позволяет получить требуемое утверждение.

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый флаг на плоскости. Для флага $\varphi(\mathcal{F})$ имеют место две возможности:

1) $\mathcal{F}$ и $\varphi(\mathcal{F})$ одинаково ориентированы;

2) $\mathcal{F}$ и $\varphi(\mathcal{F})$ противоположно ориентированы.

В первом (во втором) случае говорят, что движение φ *сохраняет (изменяет)* ориентацию флага $\mathcal{F}$.

Лемма 1. *Пусть φ – движение, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ – произвольные флаги. Тогда*

1) *если $\mathcal{F}_1$ и $\varphi(\mathcal{F}_1)$ одинаково ориентированы, то $\mathcal{F}_2$ и $\varphi(\mathcal{F}_2)$ одинаково ориентированы;*

2) *если* $\mathcal{F}_1$ *и* $\varphi(\mathcal{F}_1)$ *противоположно ориентированы, то* $\mathcal{F}_2$ *и* $\varphi(\mathcal{F}_2)$ *имеют разную ориентацию.*

Доказательство. Проверим утверждение 1). Если $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$ и $\mathcal{F}_2 = (\pi_m, m_B)$ одинаково ориентированы, то $\varphi(\mathcal{F}_1)$ и $\varphi(\mathcal{F}_2)$ одинаково ориентированы. Поскольку $\mathcal{F}_1$ и $\varphi(\mathcal{F}_1)$ также одинаково ориентированы, то, используя теорему 1.1, получаем, что $\mathcal{F}_2$ и $\varphi(\mathcal{F}_2)$ одинаково ориентированы.

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ противоположно ориентированы. Тогда флаги $\mathcal{F}_1 = (\pi_l, l_A)$ и $\mathcal{F}_2' = (\pi_m', m_B)$ одинаково ориентированы. Применяя к этим флагам рассуждения из предыдущего абзаца, получим, что флаги $\mathcal{F}_2'$ и $\varphi(\mathcal{F}_2')$ одинаково ориентированы. Отсюда следует одинаковая ориентированность дополнительных к ним флагов $\mathcal{F}_2$ и $\varphi(\mathcal{F}_2)$.

Свойство 2) проверяется аналогично.

Определение. Движение, сохраняющее (изменяющее) ориентацию некоторого флага, называется движением *первого* (соответственно *второго*) рода.

Иногда движения первого (второго) рода называют *собственными* (соответственно *несобственными*) движениями.

Из леммы 1 вытекает, что род движения определен корректно. Это означает, что при замене одного флага на другой движение либо сохраняет ориентации обоих флагов, либо изменяет их.

Теперь мы можем уточнить теорему подвижности.

Предложение 3.12. *Для любых двух лучей a, b существуют единственное движение первого рода и единственное движение второго рода, каждое из которых переводит луч a в луч b.*

Следующие три утверждения читатель легко проверит сам:

1. *Композиция любого числа движений первого рода является движением первого рода;*

2. *Композиция четного числа движений второго рода является движением первого рода;*

3. *Композиция нечетного числа движений второго рода является движением второго рода.*

Примерами движений второго рода являются зеркальная симметрия и скользящая симметрия (см. разд. 3.11). Ниже будет доказано, что любой параллельный перенос (см. разд. 3.8) и любой поворот (см. разд. 3.9) представимы в виде композиции двух зеркальных симметрий, и потому параллельные переносы и повороты являются движениями первого рода.

3.6. Конгруэнтность фигур

В разд. 3.2 было отмечено, что любое движение сохраняет конгруэнтность сегментов и углов. Оказывается, что утверждение, обратное к только что высказанному, также справедливо.

Предложение 3.13. (1) *если $AB \cong A_1B_1$, то существует движение φ, переводящее сегмент AB в сегмент A_1B_1;*

(2) *если $\angle ab \cong \angle a_1b_1$, то существует движение φ, переводящее угол ab в угол a_1b_1;*

(3) *если $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, то существует движение φ, переводящее треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$.*

Это предложение является простым следствием из теоремы подвижности.

Предложение 3.13 подсказывает, как распространить понятие конгруэнтности на произвольные фигуры.

Определение. Фигуры $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ называются конгруэнтными ($\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$), если существует такое движение φ, что $\mathcal{Y} = \varphi(\mathcal{X})$.

Приведем примеры конгруэнтных фигур. Конгруэнтными являются: (a) любые лучи; (b) любые прямые; (c) любые полуплоскости; (d) любые окружности одинакового радиуса.

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ – произвольные фигуры. Тогда выполнены соотношения:

(1) $\mathcal{X} \cong \mathcal{X}$;

(2) если $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y} \cong \mathcal{X}$;

(3) если $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \cong \mathcal{Z}$, то $\mathcal{X} \cong \mathcal{Z}$.

Эти соотношения следуют из того, что множество всех движений плоскости является группой относительно операций композиции и взятия обратного движения. В самом деле, из того, что тождественное преобразование является движением, вытекает свойство (1). Далее, если φ – движение и $\mathcal{Y} = \varphi(\mathcal{X})$, то φ^{-1} – также движение и $\mathcal{X} = \varphi^{-1}(\mathcal{Y})$; отсюда следует свойство (2). Наконец, если $\mathcal{Y} = \varphi(\mathcal{X})$, $\mathcal{Z} = \psi(\mathcal{Y})$ для некоторых движений φ и ψ, то $\psi\circ\varphi$ – движение и $\mathcal{Z} = \psi\circ\varphi(\mathcal{X})$; это означает выполнение свойства (3).

3.7. Центральная симметрия

Пусть O – произвольная точка плоскости. Для любой точки $X \neq O$ существует единственная точка $X^{'}$ такая, что O – середина сегмента XX' (проверьте это утверждение). Точки X, X' называются *симметричными относительно точки* O.

Определим преобразование σ_O плоскости следующим образом: точки X и $\sigma_O(X)$ симметричны относительно точки O, если $X \neq O$, и $\sigma_O(O) = O$.

Такое преобразование плоскости называется *центральной симметрией с центром* O.

Из определения сразу следует, что $\sigma_O\circ\sigma_O = \varepsilon$.

Предложение 3.14. *Преобразование σ_O является движением.*

Доказательство. Пусть l – произвольная прямая, проходящая через точку O, l_O – один из лучей этой прямой, π_l – одна из полуплоскостей с границей l. Рассмотрим флаг $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ и дополнительный к нему флаг $\mathcal{F}' = (\pi_l', l_O')$. В силу теоремы 3.5 существует единственное движение φ, переводящее флаг $\mathcal{F}$ во флаг $\mathcal{F}'$. Проверим, что для любой точки X выполнено равенство $\sigma_O(X) = \varphi(X)$.

Для этого заметим, что из равенства $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ следуют равенства $\varphi(l_O) = l_O'$, $\varphi(\pi_l) = \pi_l^{'}$.

Учитывая теорему 3.2 и тот факт, что движение есть биективное преобразование плоскости, получаем, что $\varphi(l_O^{'}) = l_O$ и $\varphi(\pi_l^{'}) = \pi_l$. Так как φ меняет местами лучи l_O, l'_O, а также полуплоскости π_l, $\pi_l^{'}$, то O – единственная неподвижная точка φ. Кроме того, $\varphi\circ\varphi(l_O) = \varphi(l_O^{'}) = l_O$, $\varphi\circ\varphi(\pi_l) = \varphi(\pi_l^{'}) = \pi_l$.

Значит, движение $\varphi{\circ}\varphi$ отображает флаг $\mathcal{F}$ на себя, и по предложению 3.9 движение $\varphi{\circ}\varphi$ является тождественным.

Пусть X – произвольная точка плоскости, отличная от точки O. Тогда $X^{'} = \varphi(X) \neq X$. Поскольку $\varphi{\circ}\varphi = \varepsilon$, имеем $\varphi(X^{'}) = \varphi(\varphi(X)) = X$. В силу предложения 3.6 середина сегмента $XX^{'}$ неподвижна и, значит, совпадает с единственной неподвижной точкой O. Стало быть, X и $X^{'}$ симметричны относительно O, т.е. $X^{'} = \sigma_O(X)$. Тем самым доказано, что $\varphi = \sigma_O$, т.е. σ_O – движение.

Теорема 3.6. *Движение φ – центральная симметрия с центром O тогда и только тогда, когда O – единственная неподвижная точка и $\varphi{\circ}\varphi = \varepsilon$.*

Доказательство этого утверждения читателю предлагается провести самостоятельно.

Предложение 3.15. *Для центральной симметрии σ_O выполнены следующие утверждения:*

1) *прямые l и $\sigma_O(l)$ параллельны;*
2) *лучи a и $\sigma_O(a)$ противоположно направлены;*
3) *флаги $\mathcal{F}$ и $\sigma_O(\mathcal{F})$ имеют одинаковую ориентацию.*

Доказательство. Мы проверим лишь утверждение 1), поскольку утверждения 2), 3) очевидны.

Пусть l – произвольная прямая. Если $O \in l$, то из определения σ_O вытекает, что $\sigma_O(l) = l$.

Допустим, что $O \notin l$. Тогда $\sigma_O(l) \neq l$. Рассуждая "от противного предположим, что l и $\sigma_O(l)$ пересекаются в точке A. Ясно, что $A \neq O$, поэтому $B = \sigma_O(A) \neq A$. Так как $A \in \sigma_O(l)$, то $B = \sigma_O(A) \in \sigma_O(\sigma_O(l)) = l$. Кроме того, $A \in l$, откуда $B = \sigma_O(A) \in \sigma_O(l)$. Значит, B – общая точка прямых l и $\sigma_O(l)$. Таким образом, различные прямые l и $\sigma_O(l)$ имеют две различные точки A, B, что невозможно.

В дополнение к теореме 3.6 докажем следующее утверждение.

Предложение 3.16. *Если движение $\varphi \neq \varepsilon$ имеет неподвижную точку O и всякую прямую переводит в параллельную прямую, то $\varphi = \sigma_O$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что всякая прямая m, проходящая через точку O, является неподвижной. В самом деле, $\varphi(m) \parallel m$ и $O \in m \cap \varphi(m)$; поэтому $\varphi(m) = m$. Отсюда следует, что O – единственная неподвижная точка движения φ. Действительно, пусть $B \neq O$ и $\varphi(B) = B$. Рассмотрим такую точку C, что O, B, C неколлинеарны. Поскольку прямые (CO) и (CB) неподвижны, точка C является неподвижной. В силу следствия из предложения 3.9 получаем равенство $\varphi = \varepsilon$, противоречащее условию.

Пусть X – произвольная точка, отличная от O. Тогда $X' = \varphi(X) \neq X$, $X' \in (OX)$ и $OX' \cong XO$. Из этих соотношений следует, что точки X, X' симметричны относительно точки O. Таким образом, $\varphi = \sigma_O$.

Предложение 3.17. *Пусть l, m – взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Тогда $\sigma_O = \sigma_m \circ \sigma_l$.*

Доказательство. Пусть l_O – один из лучей прямой l с началом O, π_l – одна из полуплоскостей с границей l. Тогда

$$\sigma_m \circ \sigma_l(l_O) = \sigma_m(l_O) = l_O', \qquad \sigma_m \circ \sigma_l(\pi_l) = \sigma_m(\pi_l') = \pi_l'.$$

Следовательно, движение $\sigma_m \circ \sigma_l$ переводит флаг $\mathcal{F} = (\pi_l, l_O)$ в флаг $\mathcal{F}' = (\pi_l', l_O')$. Центральная симметрия σ_O также переводит $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}'$. Поэтому в силу теоремы 3.5 имеем $\sigma_O = \sigma_m \circ \sigma_l$.

Пусть A, B – различные точки. Рассмотрим движение φ, являющееся композицией двух центральных симметрий: $\varphi = \sigma_B \circ \sigma_A$.

Предложение 3.18. *Движение $\varphi = \sigma_B \circ \sigma_A$ обладает следующими свойствами:*

1) *φ не имеет неподвижных точек;*
2) *всякую прямую φ переводит в параллельную прямую;*
3) *любая прямая, параллельная прямой (AB), неподвижна;*
4) *если $Y = \varphi(X)$, то $(XY) \parallel (AB)$.*

Доказательство. 1. Допустим, что X – неподвижная точка движения $\varphi = \sigma_B \circ \sigma_A$. Тогда $\sigma_B \circ \sigma_A(X) = X$, откуда

$\sigma_A(X) = \sigma_B(X) = Y$. Если $Y = X$, то $A = X = B$. Если же $Y \neq X$, то A, B совпадают с серединой сегмента $[XY]$. В обоих случаях получаем противоречие с выбором точек A, B.

2. Если $m = \sigma_A(l)$, $n = \sigma_B(m)$, то в силу предложения 3.15 имеем $m \parallel l$, $n \parallel m$. Поэтому $n \parallel l$.

3. Если $l = (AB)$, $\sigma_A(l) = l$, $\sigma_B(l) = l$, поэтому $\varphi(l) = l$. Пусть $l \parallel (AB)$, $l \neq (AB)$. Для произвольной точки $L \in l$ рассмотрим такие точки M, N, что $M = \sigma_A(L)$, $N = \sigma_B(M)$. Поскольку $LA \cong AM$, $MB \cong BN$, из теоремы 1.15 следует, что $(LN) \parallel (AB)$, а потому $(LN) \parallel l$. Так как l и (LN) имеют общую точку L, то $l = (LN)$. Осталось заметить, что $\varphi(l) \parallel l$ и $N \in \varphi(l) \cap l$.

4. Пусть $Y = \varphi(X)$ и $m = (XY)$. Тогда $\varphi(m) \parallel m$ и $Y \in m \cap \varphi(m)$; отсюда следует, что $\varphi(m) = m$. Если $m \cap (AB) = \{O\}$, то O – неподвижная точка движения φ (ибо O – точка пересечения неподвижных прямых). Существование неподвижной точки противоречит свойству 1. Отсюда следует, что либо $m = (AB)$, либо $m \cap (AB) = \emptyset$; таким образом, $m \parallel (AB)$.

Предложение 3.19. *Если направленные сегменты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ эквиполлентны, то $\sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D \circ \sigma_C$.*

Доказательство. Сначала предположим, что прямые (AB) и (CD) различны. Тогда четырехугольник $ABDC$ – параллелограмм. Рассмотрим движение $\varphi = \sigma_D \circ \sigma_B \circ \sigma_A$. Ясно, что это движение любую прямую переводит в параллельную прямую. Пусть $F = \sigma_A(C)$, $G = \sigma_B(F)$. Тогда $[AB]$ – средняя линия треугольника FCG и лучи $[CG)$, $[AB)$ сонаправлены. Отсюда следует, что D – середина сегмента CG, а значит, $\sigma_D(G) = C$. Таким образом, $\varphi(C) = C$, т.е. C – неподвижная точка движения φ. Кроме того, легко проверить, что $\varphi(A) \neq A$; значит, $\varphi \neq \varepsilon$. Из предложения 3.16 следует, что $\varphi = \sigma_C$. Отсюда

$$\sigma_D \circ \sigma_C = \sigma_D \circ \varphi = \sigma_D \circ \sigma_D \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_B \circ \sigma_A.$$

Пусть прямые (AB) и (CD) совпадают. Возьмем такой направленный сегмент $\overrightarrow{PQ}$, что $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AB}$ и $P \notin (AB)$. В силу доказанного выше имеем

$$\sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_D \circ \sigma_C.$$

Следствие. *Композиция трех центральных симметрий является центральной симметрией.*

Доказательство. Если σ_A, σ_B, σ_D – данные симметрии и C – такая точка, что $\overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{AB}$, то $\sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_D \circ \sigma_C$. Вычисляя композицию симметрии σ_D с левой и правой частями последнего равенства и применяя равенство $\sigma_D \circ \sigma_D = \varepsilon$, получим $\sigma_D \circ \sigma_B \circ \sigma_A = \sigma_C$.

3.8. Параллельный перенос

Пусть задан направленный сегмент $\overrightarrow{AB}$. Если X – произвольная точка плоскости, то через l_X обозначим луч, сонаправленный лучу $[AB)$. На луче l_X существует единственная точка Y такая, что $XY \cong AB$. Иными словами, для любой точки X существует единственная точка Y, для которой $\overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{AB}$.

Таким образом, определено преобразование плоскости $\tau_{\overrightarrow{AB}}$:

$$\tau_{\overrightarrow{AB}}(X) = Y \iff \overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{AB}.$$

Это преобразование называется *параллельным переносом*, заданным направленным сегментом $\overrightarrow{AB}$.

В том случае, когда точки A, B совпадают, данное нами определение неприменимо. В связи с этим для произвольной точки A удобно ввести в рассмотрение направленный сегмент $\overrightarrow{AA}$ (на самом деле не имеющий направления) и считать, что $\tau_{\overrightarrow{AA}} = \varepsilon$, какова бы ни была точка A. С учетом такого уточнения, тождественное движение также является параллельным переносом.

Из определения параллельного переноса и транзитивности отношения эквиполлентности направленных сегментов немедленно вытекает следующее утверждение:

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{CD}} \iff \overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}.$$

Теорема 3.7. *Для любого направленного сегмента $\overrightarrow{AB}$ параллельный перенос $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ является движением.*

Доказательство. В случае, когда $A = B$, доказываемое утверждение очевидно, поскольку данный параллельный перенос является тождественным преобразованием. Поэтому будем считать, что $A \neq B$. Пусть X – произвольная точка и $Y = \tau_{\overrightarrow{AB}}(X)$. Из определения параллельного переноса следует, что $\overrightarrow{XY} \equiv \overrightarrow{AB}$. Если C, Z – середины сегментов AB, XY, то $\overrightarrow{XZ} \equiv \overrightarrow{AC}$. Из предложения 3.18 вытекает, что $\sigma_C \circ \sigma_A(X) = \sigma_Z \circ \sigma_X(X) = Y$. Таким образом, $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_C \circ \sigma_A$. Тем самым доказано, что $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ является движением.

Одновременно при доказательстве теоремы 3.7 установлено, что параллельный перенос можно представить в виде композиции двух центральных симметрий.

Один и тот же параллельный перенос можно представить при помощи композиции двух центральных симметрий различными способами. Описание всех таких способов дано в следующем утверждении.

Предложение 3.20. *Если направленные сегменты $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PQ}$ сонаправлены и $AB \cong 2 \cdot PQ$, то $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_Q \circ \sigma_P$.*

Доказательство. Пусть C – середина сегмента AB. Выше (см. доказательство предложения 3.7) было установлено, что $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_C \circ \sigma_A$. Поскольку $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AC}$, из предложения 3.18 получаем, что $\sigma_C \circ \sigma_A = \sigma_Q \circ \sigma_P$. Таким образом, $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_Q \circ \sigma_P$.

Оказывается, параллельный перенос может быть представлен (тоже различными способами) в виде композиции двух зеркальных симметрий.

Предложение 3.21. *Если C – середина сегмента AB, а прямые p, q выбраны так, что $p \perp (AB)$, $q \perp (AB)$ и $\tau_{\overrightarrow{AC}}(p) = q$, то $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_q \circ \sigma_p$.*

Доказательство. Обозначим через P, Q точки пересечения прямой $l = (AB)$ с прямыми p, q соответственно. Из предложения 3.17 следует $\sigma_l \circ \sigma_p = \sigma_P$, $\sigma_q \circ \sigma_l = \sigma_Q$. Поэтому

$$\sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_q \circ \sigma_l \circ \sigma_l \circ \sigma_p = \sigma_Q \circ \sigma_P.$$

Так как $\tau_{\overrightarrow{AC}}(p) = q$ и прямая l неподвижна, то $\tau_{\overrightarrow{AC}}(P) = Q$. Стало быть, $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{AC}$. Отсюда

$$\sigma_q \circ \sigma_p = \sigma_Q \circ \sigma_P = \tau_{\overrightarrow{AB}}.$$

Из предложения 3.17 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.22. *Произвольный параллельный перенос $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ обладает следующими свойствами:*
1) *$\tau_{\overrightarrow{AB}}$ не имеет неподвижных точек;*
2) *всякую прямую $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ переводит в параллельную прямую;*
3) *любая прямая, параллельная прямой (AB), неподвижна;*
4) *если $Y = \tau_{\overrightarrow{AB}}(X)$, то $(XY) \parallel (AB)$.*

Теорема 3.8. *Движение $\varphi \neq \varepsilon$ является параллельным переносом тогда и только тогда, когда φ не имеет неподвижных точек и имеет две различные неподвижные прямые.*

Доказательство. Параллельный перенос, не являющийся тождественным преобразованием, очевидно, не имеет неподвижных точек и имеет две различные неподвижные прямые.

Проверим обратное утверждение. Пусть l, m – различные неподвижные прямые нетождественного движения φ, $A \in l$, $B = \varphi(A)$. Ясно, что $B \neq A$. Так как точка пересечения двух неподвижных прямых является неподвижной точкой, прямые l и m не могут пересекаться, следовательно, эти прямые параллельны.

Рассмотрим движение $\psi = \tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi$. Движение ψ имеет неподвижную точку A и неподвижные прямые l, m. Пусть n – прямая, проходящая через точку A перпендикулярно прямой l. Ясно, что n – неподвижная прямая движения ψ. Обозначим через C точку пересечения прямых n и m. Тогда C является неподвижной точкой для ψ. Поскольку прямая n содержит две неподвижные точки движения ψ, все ее точки являются неподвижными. Отсюда вытекает, что либо $\psi = \varepsilon$, либо $\psi = \sigma_n$. В первом случае получаем, что $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}}$, т.е. φ – параллельный перенос. Во втором случае $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_n$. Обозначим через

q прямую, перпендикулярную прямой l и проходящую через середину AB. Тогда $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_q \circ \sigma_n$, откуда следует, что $\varphi = \sigma_q$. Следовательно, φ имеет неподвижные точки, что противоречит условию.

Из теоремы 3.8 вытекают следующее утверждение.

Предложение 3.23. *Если движение $\tau \neq \varepsilon$ не имеет неподвижных точек и всякую прямую переводит в параллельную прямую, то τ является параллельным переносом.*

Доказательство. Пусть A – произвольная точка, $B = \varphi(A) \neq A$, $l = (AB)$, $m = \varphi(l)$. Ясно, что $m \| l$ и $B \in m$. Параллельные прямые l и m имеют общую точку B, поэтому указанные прямые совпадают. Следовательно, $\varphi(l) = l$, т.е. l – неподвижная прямая. Понятно, что взяв точку, не лежащую на прямой l, можно найти еще одну неподвижную прямую. Применяя теорему 3.8, получим, что $\varphi(l)$ – параллельный перенос.

Объединяя предложения 3.16 и 3.23, получим

Предложение 3.24. *Если движение φ всякую прямую переводит в параллельную прямую, то φ является параллельным переносом или центральной симметрией.*

Отметим, что биективное преобразование плоскости, переводящее любую прямую в параллельную прямую, принято называть *дилатацией.*

Таким образом, если движение – дилатация, то оно либо параллельный перенос, либо центральная симметрия. Следует подчеркнуть, что не всякая дилатация является движением. Примером дилатации, не являющейся движением, служит произвольная гомотетия.

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех параллельных переносов.

Теорема 3.9. *Множество $\mathcal{T}$ является абелевой группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим сначала, что для любых параллельных переносов τ_1 и τ_2 их композиция $\tau_2\circ\tau_1$ является параллельным переносом. Пусть $\tau_1 = \tau_{\overrightarrow{AB}}$, $\tau_2 = \tau_{\overrightarrow{BC}}$ и D, F, E – середины сегментов AB, BC, AC соответственно. Из предложения 3.20 следует, что $\tau_1 = \sigma_B\circ\sigma_D$, $\tau_2 = \sigma_F\circ\sigma_B$. Отсюда

$$\tau_2\circ\tau_1 = \sigma_F\circ\sigma_B\circ\sigma_B\circ\sigma_D = \sigma_F\circ\sigma_D.$$

Из предложения 3.21 следует, что $\tau_2\circ\tau_1$ – параллельный перенос. Заметим, что поскольку $\overrightarrow{DF} \equiv \overrightarrow{AE}$, выполнено равенство

$$\tau_{\overrightarrow{BC}}\circ\tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{AC}}. \tag{1}$$

Далее, тождественное движение ε принадлежит множеству $\mathcal{T}$. Если $\tau = \tau_{\overrightarrow{AB}}$, то $\tau^{-1} = \tau_{\overrightarrow{BA}}$. В самом деле, композиция $\tau_{\overrightarrow{BA}}\circ\tau_{\overrightarrow{AB}}$ оставляет неподвижной любую точку плоскости, т.е. $\tau_{\overrightarrow{BA}}\circ\tau_{\overrightarrow{AB}} = \varepsilon$.

Таким образом, проверено, что $\mathcal{T}$ – группа.

Доказательство того, что $\mathcal{T}$ – абелева группа, опирается на следующее вспомогательное утверждение: если A – произвольная точка плоскости и $\tau = \tau_{\overrightarrow{AB}}$, то

$$\sigma_A\circ\tau^{-1}\circ\sigma_A = \tau.$$

Проверим это равенство. Из предложения 3.20 вытекает, что $\tau = \sigma_C\circ\sigma_A$, где C – середина сегмента AB. Поэтому $\tau^{-1} = \sigma_A\circ\sigma_C$, откуда

$$\sigma_A\circ\tau^{-1}\circ\sigma_A = \sigma_A\circ\sigma_A\circ\sigma_C\circ\sigma_A = \sigma_C\circ\sigma_A = \tau.$$

Рассмотрим теперь произвольные параллельные переносы τ_1 и τ_2. Имеем

$$\sigma_A\circ\tau_1^{-1}\circ\sigma_A = \tau_1, \qquad \sigma_A\circ\tau_2^{-1}\circ\sigma_A = \tau_2.$$

Вычисляя композицию левых и правых частей этих равенств, получим

$$\sigma_A\circ\tau_1^{-1}\circ\tau_2^{-1}\circ\sigma_A = \tau_1\circ\tau_2.$$

Учитывая, что $\tau_1^{-1}\circ\tau_2^{-1} = (\tau_2\circ\tau_1)^{-1}$, получим

$$\tau_2\circ\tau_1 = \sigma_A\circ(\tau_1\circ\tau_2)^{-1}\circ\sigma_A = \sigma_A\circ\tau_1^{-1}\circ\tau_2^{-1}\circ\sigma_A = \tau_1\circ\tau_2.$$

Таким образом, $\tau_1\circ\tau_2 = \tau_2\circ\tau_1$.

3.9. Поворот

Пусть O – произвольная точка, α – ориентированный угол. Определим преобразование плоскости ρ_O^α следующим образом: $\rho_O^\alpha(O) = O$ и если $X \neq O$, то $\rho_O^\alpha(X) = X'$, причем $OX \cong OX'$ и $\measuredangle XOX' \equiv \alpha$.

Такое преобразование называется *поворотом* с центром в точке O на угол α.

Тождественное движение и центральная симметрия, очевидно, являются поворотами.

Мы хотим доказать, что любой поворот является движением. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\measuredangle ac$, $\measuredangle bd$ – эквиполлентные ориентированные углы. Если лучи a, b не лежат на одной прямой, то лучи c, d также не лежат на одной прямой и $\angle ab \cong \angle cd$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_1 = (\pi_a, a)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_b, b)$ – флаги, соответствующие данным ориентированным углам, т.е. $c \subset \pi_a$, $d \subset \pi_b$. Флаги $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ одинаково ориентированы, поэтому либо $b \subset \pi_a$, $a \subset \pi'_b$, либо $a \subset \pi_b$, $b \subset \pi'_a$. Ясно, что достаточно рассмотреть одну из двух указанных возможностей. Поэтому будем считать, что $b \subset \pi_a$, $a \subset \pi'_b$.

Если лучи a, d лежат на одной прямой (рис. 38), то из включений $d \subset \pi_b$, $a \subset \pi'_b$ следует, что лучи a, d взаимно дополнительны.

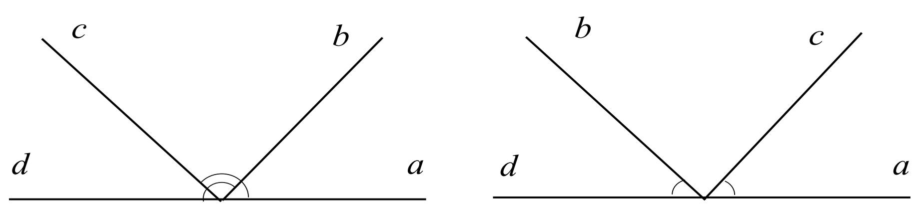


Рис. 38

Применяя предложение 1.31, получим, что $\angle ab \cong \angle cd$.

Предположим, что лучи a, d не лежат на одной прямой. Если $d \subset \pi_a$, то требуемое соотношение сразу следует из предложения 1.31. Пусть $d \subset \pi'_a$. Тогда ориентированные углы $\measuredangle ac'$ и $\measuredangle b'd$ эквиполлентны (проверьте это утверждение).

Так как в этом случае $b', c', d \subset \pi'_a$, то в силу предложения 1.31 $\angle ab' \cong \angle c'd$. Поскольку $\angle ab$ и $\angle ab'$, а также $\angle cd$ и $\angle c'd$ являются смежными, имеем $\angle ab \cong \angle cd$.

При изучении поворотов на понадобятся операции над ориентированными углами. Эти операции вводятся аналогично тому, как в разд. 1.20 были определены операции над углами.

Пусть $\measuredangle ab$, $\measuredangle cd$ – произвольные ориентированные углы. Ориентированный угол $\measuredangle ef$ называется суммой углов $\measuredangle ab$, $\measuredangle cd$, если существует такой луч g, что $\measuredangle eg \equiv \measuredangle ab$ и $\measuredangle gf \equiv$ $\equiv \measuredangle cd$.

Кроме того, если n – натуральное число, то ориентированный угол $\measuredangle ab$, являющийся суммой n слагаемых, каждое из которых эквиполлентно ориентированному углу $\measuredangle cd$, называется произведением числа n на угол $\measuredangle cd$ и обозначается через $n \cdot \measuredangle cd$. В этом случае будем говорить также, что ориентированный угол $\measuredangle cd$ является произведением числа $1/n$ на $\measuredangle ab$. Таким образом, соотношения $\measuredangle ab \equiv n \cdot \measuredangle cd$ и $\measuredangle cd \equiv (1/n) \cdot \measuredangle ab$ выражают один и тот же факт.

Ориентированные углы можно умножать и на целые отрицательные числа. Назовем ориентированные углы aOb и $a_1O_1b_1$ *противоположными* ($\measuredangle a_1O_1b_1 \equiv -\measuredangle aOb$), если они имеют противоположную ориентацию и $\angle a_1O_1b_1 \cong -\angle aOb$. Тогда по определению $(-n) \cdot \measuredangle aOb \equiv -n \cdot \measuredangle aOb$ для любого натурального n.

Теорема 3.10. *Поворот ρ_O^α является движением.*

Доказательство. Можно считать, что данный поворот не является тождественным движением и отличен от центральной симметрии. Пусть X, Y – произвольные точки плоскости, $X' = \rho_O^\alpha(X)$, $Y' = \rho_O^\alpha(Y)$ (рис. 39). Проверим, что $X'Y' \cong XY$. Это соотношение очевидно, если точки O, X, Y коллинеарны.

Пусть эти точки не являются коллинеарными. Из определения поворота следует, что

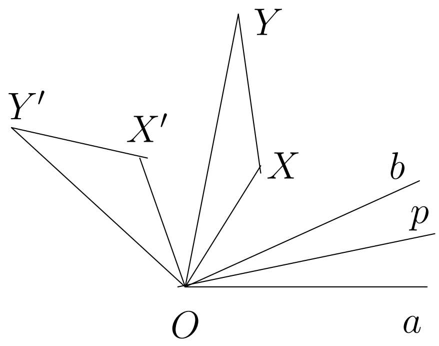


Рис. 39

$$\measuredangle XOX' \equiv \alpha, \measuredangle YOY' \equiv \alpha,$$

$$OX \cong OX', OY \cong OY'.$$

Используя лемму 1, имеем

$$\measuredangle XOX' \equiv \measuredangle YOY'.$$

Применяя к треугольникам OXY и $OX'Y'$ третий признак конгруэнтности треугольников, получим требуемое.

Установим связь между поворотами и зеркальными симметриями. В дальнейшем будем использовать следующее соглашение: если a – некоторый луч прямой l, то вместо σ_l иногда удобнее писать σ_a.

Предложение 3.25. *Пусть $\alpha = \measuredangle aOb$ – произвольный ориентированный угол, c – луч с началом в точке O такой, что $\measuredangle aO \equiv \alpha/2$. Тогда $\rho_O^\alpha = \sigma_c \circ \sigma_a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся сначала, что поворот ρ_O^α является движением первого рода. Положим, что α – ненулевой ориентированный угол (иначе доказывать нечего). Рассмотрим такие флаги $\mathcal{F}_1 = (\pi_a, a)$, $\mathcal{F}_2 = (\pi_b, b)$, что $b \subset \pi_a$, $a \subset \pi_b'$. Ясно, что $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ имеют одинаковую ориентацию. Проверим, что $\rho_O^\alpha(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$. Если это равенство не выполнено, то $\rho_O^\alpha(\pi_a) = \pi_b'$. Так как ρ_O^α – движение, то $\rho_O^\alpha(b) = a$. Поскольку одновременно выполнено равенство $\rho_O^\alpha(a) = b$, поворот ρ_O^α меняет местами стороны угла aOb. Значит, этот поворот оставляет неподвижным луч c, являющийся биссектрисой угла aOb. Существование неподвижного луча противоречит определению поворота.

Таким образом, поворот ρ_O^α и композиция зеркальных симметрий $\sigma_c \circ \sigma_a$ являются движениями первого рода, переводящими луч a в луч b. В силу предложения 3.12 эти движения совпадают.

В дополнение к предложению 3.25 вычислим композицию двух зеркальных симметрий с пересекающимися осями. Пусть $\alpha \equiv \measuredangle aOb$. Обозначим через β ориентированный угол aOb'. Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве предложения 3.25, позволяют убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.26. *Если $\angle aOb$ не превосходит прямого угла, то $\sigma_b\circ\sigma_a = \rho_O^{2\alpha}$; в противном случае $\sigma_b\circ\sigma_a = \rho_O^{2\beta}$.*

Теорема 3.11. *Движение $\varphi \neq \varepsilon$ является поворотом с центром O тогда и только тогда, когда O – единственная неподвижная точка этого движения.*

Доказательство. Тот факт, что центр поворота является его единственной неподвижной точкой, вытекает непосредственно из определения поворота.

Обратно, предположим, что движение φ имеет единственную неподвижную точку O. Пусть a – некоторый луч с началом O и $b = \varphi(a)$. Если лучи a, b не лежат на одной прямой, то обозначим через c биссектрису угла aOb. Если же лучи a, b лежат на одной прямой, то они дополнительны. Возьмем в этом случае в качестве c луч, перпендикулярный к a и имеющий начало в точке O. Нетрудно заметить, что движение $\psi = \sigma_c\circ\varphi$ оставляет луч a на месте:

$$\psi(a) = \sigma_c\circ\varphi(a) = \sigma_c(b) = a.$$

Из предложения 3.4 и теоремы 3.4 следует, что либо $\psi = \varepsilon$, либо $\psi = \sigma_a$. Если $\psi = \varepsilon$, то $\varphi = \sigma_a$, что невозможно. Значит, $\sigma_c\circ\varphi = \sigma_a$, откуда следует $\varphi = \sigma_c\circ\sigma_a$, т.е. φ – поворот.

Обозначим через $\mathcal{R}_O$ множество всех поворотов с центром O.

При изучении свойств множества $\mathcal{R}_O$ понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Если $\rho = \rho_O^\alpha$ и a – произвольный луч с началом O, то*

$$\sigma_a\circ\rho\circ\sigma_a = \rho^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данное утверждение очевидно, если ρ – центральная симметрия. Пусть $b = \rho(a)$ и лучи a, b не лежат на одной прямой. Тогда $\alpha = \measuredangle aOb$. Если p – биссектриса угла aOb, то в силу предложения 3.25 имеем $\rho = \sigma_p \circ \sigma_a$. Отсюда

$$\sigma_a \circ \rho \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_p \circ \sigma_a \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_p = \rho^{-1}.$$

Теорема 3.12. *Множество поворотов $\mathcal{R}_O$ является абелевой группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что $\mathcal{R}_O$ – группа, проверяется без труда. Проверим лишь, что для любых двух поворотов $\rho_1 = \rho_O^\alpha$ и $\rho_2 = \rho_O^\beta$ выполнено равенство $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. Из леммы 2 следует, что

$$\sigma_a \circ \rho_1^{-1} \circ \sigma_a = \rho_1, \qquad \sigma_a \circ \rho_2^{-1} \circ \sigma_a = \rho_2.$$

Вычисляя композиции левых и правых частей этих равенств (в одном и том же порядке) и учитывая, что $\rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1} = (\rho_2 \circ \rho_1)^{-1}$, получим

$$\sigma_a \circ (\rho_2 \circ \rho_1)^{-1} \circ \sigma_a = \rho_1 \circ \rho_2.$$

Применяя к левой части этого равенства лемму 2, окончательно имеем

$$\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2.$$

Следующее утверждение является обобщением леммы 2.

Предложение 3.27. *Пусть φ – движение, O – некоторая точка, $A = \varphi(O)$. Если φ – движение первого рода, то $\varphi \circ \rho_O^\alpha \circ \varphi^{-1} = \rho_A^\alpha$; в противном случае $\varphi \circ \rho_O^\alpha \circ \varphi^{-1} = \rho_A^{-\alpha}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что α – ненулевой ориентированный угол (иначе левая и правая части равны ε). Пусть $\psi = \varphi \circ \rho_O^\alpha \circ \varphi^{-1}$. Проверим, что ψ – поворот. Для этого найдем неподвижные точки движения ψ. Если X – неподвижная точка, то

$$\varphi \circ \rho_O^\alpha \circ \varphi^{-1}(X) = X. \qquad (2)$$

Применяя к обеим частям равенства (2) слева движение φ^{-1}, получим

$$\rho_O^\alpha \circ \varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(X). \qquad (3)$$

Из равенства (3) видно, что $\varphi^{-1}(X)$ – неподвижная точка поворота ρ_O^α; поэтому $\varphi^{-1}(X) = O$, откуда $X = \varphi(O)$. Итак, проверено, что если X – неподвижная точка движения ψ, то $X = A$. Тот факт, что $A = \varphi(O)$ на самом деле неподвижная точка, проверяется непосредственно. Таким образом, движение ψ имеет единственную неподвижную точку; из теоремы 3.12 следует, что ψ – поворот с центром A.

Найдем теперь угол поворота. Пусть $\measuredangle aOb$ – ориентированный угол, эквиполлентный α, и пусть $a_1 = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(b)$. Ясно, что $\measuredangle a_1Ab_1 \equiv \alpha$, если φ – движение первого рода, и $\measuredangle a_1Ab_1 \equiv -\alpha$ в противном случае. Осталось проверить, что $\psi(a_1) = b_1$. Это равенство сразу вытекает из трех очевидных равенств $\varphi^{-1}(a_1) = a$, $\rho_O^\alpha(a) = b$ и $\varphi(b) = b_1$.

Рассмотрим повороты на ориентированной плоскости. В этом случае произвольному действительному числу можно сопоставить поворот. В дальнейшем через ρ_O^x будем обозначать поворот на угол, радианная мера которого равна x радиан. Это обозначение понятно, если выполнено двойное неравенство

$$-\pi < x \leqslant \pi. \tag{4}$$

Если же x не удовлетворяет указанному неравенству, то существует наименьшее целое число k, для которого выполнено двойное неравенство $-2\pi + 2\pi k < x - \pi \leqslant 2\pi k$. Отсюда следует, что $y = x - 2\pi k$ удовлетворяет двойному неравенству (4), и мы положим по определению, что $\rho_O^x = \rho_O^y$. Нетрудно проверить, что выполнено следующее важное равенство:

$$\rho_O^{x+y} = \rho_O^x \circ \rho_O^y.$$

Аналогично обстоит дело, если используется градусная мера измерения углов. В самом деле, чтобы определить поворот на угол, градусная мера которого равна t°, поступим следующим образом. Обозначим через k наименьшее целое число, для которого $-360^\circ + 360^\circ \cdot k < t^\circ - 180^\circ \leqslant 360^\circ \cdot k$. Легко видеть, что если $u^\circ = t^\circ - 360^\circ \cdot k$, то $-180^\circ < u^\circ \leqslant 180^\circ$. Таким образом, через $\rho_O^{u^\circ}$ можно обозначить поворот на угол, градусная мера которого равна u°, и далее положить $\rho_O^{t^\circ} = \rho_O^{u^\circ}$.

Из этих определений, в частности, следует, что при любом целом k движения $\rho_O^{2\pi k}$ и $\rho_O^{360^\circ k}$ совпадают с тождественным движением.

3.10. Композиция поворотов. Композиция параллельного переноса и поворота

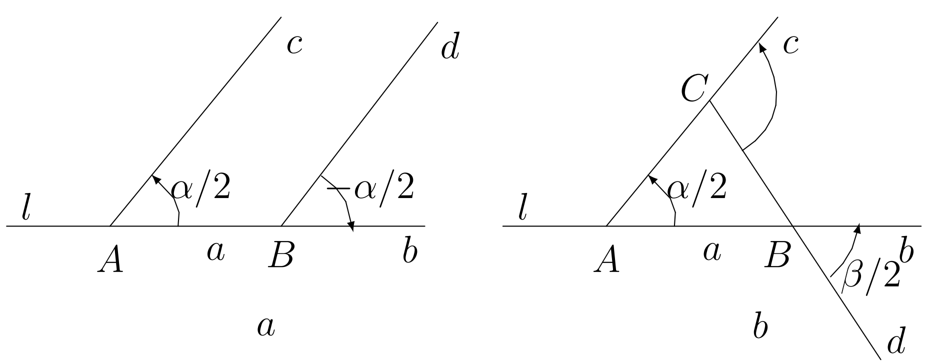
Выше было доказано, что композиция двух поворотов с общим центром снова является поворотом. Здесь мы рассмотрим композицию поворотов ρ_A^α и ρ_B^β в предположении $A \neq B$.

Предложение 3.28. *Композиция $\rho_A^\alpha \circ \rho_B^\beta$ является параллельным переносом, если $\beta = -\alpha$; в противном случае эта композиция – поворот.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\beta = -\alpha$; На прямой $l = (AB)$ выберем сонаправленные лучи $a = l_A$ и $b = l_B$ (рис. 40, a). Пусть c – такой луч с началом в точке A, что $\measuredangle aAc \equiv \alpha/2$, а d – луч, имеющий начало в точке B и сонаправленный с лучом c. Ясно, что $\measuredangle dBb \equiv -\alpha/2$. В силу предложения 3.25 имеем $\rho_A^\alpha = \sigma_c \circ \sigma_a$, $\rho_B^{-\alpha} = \sigma_b \circ \sigma_d$. Заметим, что $\sigma_a \circ \sigma_b = \varepsilon$, поскольку $\sigma_a = \sigma_b$. Поэтому

$$\rho_A^\alpha \circ \rho_B^{-\alpha} = \sigma_c \circ \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_d = \sigma_c \circ \sigma_d.$$

Из предложения 3.21 вытекает, что композиция двух зеркальных симметрий с параллельными осями является параллельным переносом.



a   b

Рис. 40

Перейдем к рассмотрению возможности $\beta \neq -\alpha$. Здесь выбор лучей a, b и c такой же, как в предыдущем случае. Луч d выберем так, чтобы $\measuredangle dBb$ был эквиполлентен $\beta/2$ (см. рис. $40, b$). Обозначим через m, n прямые, содержащие лучи c, d соответственно. Ясно, что прямые m и n пересекаются в некоторой точке C. Если c_1, d_1 – лучи, имеющие начало в точке C и сонаправленные с лучами c, d соответственно, то вычисления, аналогичные приведенным выше, показывают, что $\rho_A^\alpha \circ \rho_B^\beta = \sigma_{c_1} \circ \sigma_{d_1}$. Ссылка на предложение 3.26 завершает доказательство.

Рассмотрим теперь композицию параллельного переноса $\tau = \tau_{\overrightarrow{AB}}$ и поворота $\rho = \rho_C^\alpha$.

Пусть l – прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная прямой (AB). В силу предложения 3.21 найдется такая прямая m, что $m \parallel l$ и $\tau = \sigma_m \circ \sigma_l$. Из предложения 3.25 следует существование прямой n, для которой $\rho = \sigma_l \circ \sigma_n$ (рис. 41). Пусть D – точка пересечения прямых m и n. Тогда

$$\tau \circ \rho = \sigma_m \circ \sigma_l \circ \sigma_l \circ \sigma_n = \sigma_m \circ \sigma_n. \qquad (5)$$

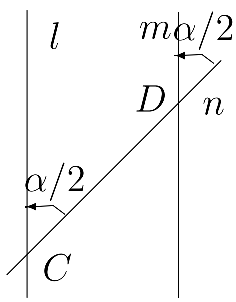


Рис. 41

Нетрудно понять, что композиция $\sigma_m \circ \sigma_n$ – поворот с центром в точке D на тот же угол α. Из равенства (5) следует, что

$$\tau \circ \rho = \rho_D^\alpha.$$

Таким образом, справедливо

Предложение 3.29. *Композиция* $\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \rho_C^\alpha$ *является поворотом на угол* α.

3.11. Скользящая симметрия. Композиция зеркальной симметрии и поворота

О п р е д е л е н и е. Пусть l – некоторая прямая. Движение $\tau \circ \sigma_l$, где τ – параллельный перенос, $\tau \neq \varepsilon$ и $\tau(l) = l$, называется *скользящей симметрией* с осью l .

Заметим, что в силу следствия 2 из теоремы 3.4 параллельный перенос τ и зеркальная симметрия σ_l перестановочны в том и только том случае, когда $\tau(l) = l$.

Скользящая симметрия с осью l обладает следующими легко проверяемыми свойствами:

- она не имеет неподвижных точек;

- прямая l является ее единственной неподвижной прямой.

Оказывается, эти два свойства полностью характеризуют скользящие симметрии.

Теорема 3.13. *Движение φ является скользящей симметрией с осью l тогда и только тогда, когда оно не имеет неподвижных точек и l – его единственная неподвижная прямая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть φ имеет единственную неподвижную прямую l и не имеет неподвижных точек. Возьмем на прямой l произвольную точку A и рассмотрим точки $B = \varphi(A)$, $C = \varphi(B)$. Ясно, что $B, C \in l$. Кроме того, $C \neq A$ (в противном случае середина сегмента AB была бы неподвижной точкой движения φ). Отсюда следует, что B – середина сегмента AC. Поэтому $\tau_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$, $\tau_{\overrightarrow{BA}}(C) = B$. Используя эти равенства, легко проверить, что точки A, B являются неподвижными точками движения $\tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi$. Поэтому в силу предложения 3.5 множество всех неподвижных точек движения $\tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi$ содержит прямую $(AB) = l$. Но тогда $\tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi$ есть либо тождественное движение ε, либо зеркальная симметрия σ_l. Равенство $\tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi = \varepsilon$ невозможно, ибо из него следует $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}}$. Но φ имеет единственную неподвижную прямую, а параллельный перенос – бесконечно много таких прямых. Таким образом, $\tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi = \sigma_l$, откуда $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l$.

Проверку обратного утверждения мы оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Рассмотрим теперь композицию $\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l$ в общем случае.

Предложение 3.30. *Если $(AB) \perp l$, то композиция $\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l$ есть зеркальная симметрия; в противном случае эта композиция является скользящей симметрией.*

Доказательство. В разд. 3.8 мы отмечали, что эквиполлентные направленные сегменты определяют один и тот же параллельный перенос. В силу этого замечания можно считать, что точка A лежит на прямой l. Обозначим через m прямую, проходящую через середину сегмента AB параллельно l.

Рассмотрим сначала случай, когда $(AB) \perp l$. Применяя предложение 3.21, получим, что $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \sigma_m \circ \sigma_l$. Отсюда немедленно вытекает, что

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l = \sigma_m \circ \sigma_l \circ \sigma_l = \sigma_m.$$

Пусть теперь прямые (AB) и l не являются перпендикулярными. Обозначим через D такую точку, что $(AD) \perp l$ и $(BD) \parallel l$. Используя равенство (1), полученное при доказательстве теоремы 3.9, находим $\tau_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{\overrightarrow{DB}} \circ \tau_{\overrightarrow{AD}}$. Отсюда

$$\tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l = \tau_{\overrightarrow{DB}} \circ \tau_{\overrightarrow{AD}} \circ \sigma_l = \tau_{\overrightarrow{DB}} \circ \sigma_m,$$

поскольку $(AD) \perp l$. Учитывая, что $(DB) \parallel m$, получаем, что $\tau_{\overrightarrow{DB}} \circ \sigma_m$ – скользящая симметрия.

Рассмотрим композицию зеркальной симметрии σ_l и поворота $\rho = \rho_O^\alpha$. Пусть m – прямая, проходящая через точку O параллельно прямой l. В силу предложения 3.25 найдется такая прямая n, что $\rho = \sigma_m \circ \sigma_n$. Так как прямые l и m параллельны, движение $\tau = \sigma_l \circ \sigma_m$ является параллельным переносом в направлении, перпендикулярном оси l. Стало быть,

$$\sigma_l \circ \rho = \sigma_l \circ \sigma_m \circ \sigma_n = \tau \circ \sigma_n.$$

Нетрудно понять, что τ является тождественным движением только в том случае, когда $O \in l$. Применяя предложение 3.30, получаем

Предложение 3.31. *Композиция $\sigma_l \circ \rho_o^\alpha$ является зеркальной симметрией, если $O \in l$; в противном случае эта композиция есть скользящая симметрия.*

3.12. Классификация движений

Этот раздел посвящен доказательству следующей важной теоремы.

Теорема 3.14. *Каждое движение первого рода является либо параллельным переносом, либо поворотом; каждое движение второго рода – либо зеркальная симметрия, либо скользящая симметрия.*

Прежде всего напомним, что движение, множество всех неподвижных точек которого составляет прямую, является зеркальной симметрией (теорема 3.4). Если же движение имеет единственную неподвижную точку, то оно есть поворот (теорема 3.11). Кроме того, множество всех неподвижных точек произвольного движения может быть одного из следующих четырех типов: вся плоскость, произвольная прямая, точка и пустое множество. В дальнейшем множество всех неподвижных точек движения φ будем обозначать через $\mathcal{I}(\varphi)$.

Теперь рассмотрим несколько вспомогательных утверждений, представляющих и самостоятельный интерес.

Предложение 3.32. *Пусть φ – движение первого рода, не имеющее неподвижных точек. Тогда φ является параллельным переносом.*

Доказательство. Если A – произвольная точка плоскости, то пусть $B = \varphi(A)$. Ясно, что $B \neq A$. Тогда движение $\psi = \tau_{\overrightarrow{BA}} \circ \varphi$ является движением первого рода и имеет неподвижную точку A. Множество $\mathcal{I}(\psi)$ не может быть прямой, ибо тогда ψ было бы зеркальной симметрией, т. е. движением второго рода. Если $\mathcal{I}(\psi) = \{A\}$, то ψ является некоторым поворотом ρ_A^α. Но тогда $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \rho_A^\alpha$, и потому в силу предложения 3.29 движение φ является поворотом, что невозможно. Таким образом, $\mathcal{I}(\psi)$ является плоскостью, поэтому $\psi = \varepsilon$. Стало быть, $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}}$.

Предложение 3.33. *Пусть φ – движение второго рода, не имеющее неподвижных точек. Тогда φ является скользящей симметрией.*

Доказательство. Пусть A – произвольная точка плоскости, $B = \varphi(A) \neq A$. Обозначим через l медиатрису сегмента AB и рассмотрим движение $\psi = \sigma_l \circ \varphi$. Ясно, что ψ – движение первого рода и A – его неподвижная точка. Множество неподвижных точек $\mathcal{I}(\psi)$ не может быть ни плоскостью, ни прямой (подумайте, почему?). Поэтому $\mathcal{I}(\psi)$ либо пусто, либо состоит из одной точки; в первом случае ψ – параллельный перенос, во втором – поворот. Таким образом, движение $\varphi = \sigma_l \circ \psi$ – композиция зеркальной симметрии и движения, являющегося параллельным переносом или поворотом. Поскольку φ не имеет неподвижных точек, из теорем 3.30 и 3.31 следует, что φ – скользящая симметрия.

Доказательство теоремы 3.14. Пусть φ – произвольное движение первого рода. Можно считать, $\varphi \neq \varepsilon$. Множество $\mathcal{I}(\varphi)$ в этом случае либо пусто, либо одноэлементно. В первом случае φ – параллельный перенос, во втором – поворот. Пусть теперь φ – произвольное движение второго рода. Тогда $\mathcal{I}(\varphi)$ либо пусто, либо является прямой. Это означает, что φ – либо скользящая симметрия, либо осевая симметрия.

3.13. Конечные группы движений

До сих пор все группы, которые возникали в наших рассмотрениях, были бесконечными, т.е. состояли из бесконечного множества движений. В этом разделе будут описаны группы, состоящие из конечного числа движений. Итак, пусть $\mathcal{M}$ – конечная группа движений. Напомним, что каждая группа вместе с любыми двумя своими элементами содержит их композицию, а также вместе с каждым элементом содержит обратный к нему элемент. В частности, группа содержит произвольную степень любого своего элемента.

Нетрудно понять, что $\mathcal{M}$ не может содержать параллельных переносов и скользящих симметрий. В самом деле, рассмотрим произвольный параллельный перенос $\tau = \tau_{\overrightarrow{AB}}$. Если k – натуральное число, то $\tau^k = \tau_{k\cdot\overrightarrow{AB}}$. Ясно, что $m\cdot\overrightarrow{AB} \neq n\cdot\overrightarrow{AB}$ при различных m, n. Отсюда следует, что если $m \neq n$, то

$\tau^m \neq \tau^n$. Таким образом, множество $\{\tau^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Поэтому предположение о том, что τ принадлежит $\mathcal{M}$, сразу приводит к противоречию: бесконечное множество не может содержаться в конечном множестве.

Рассмотрим теперь скользящую симметрию $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l$ ($l \parallel \parallel \overrightarrow{AB}$). Поскольку в этом случае параллельный перенос $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ и зеркальная симметрия σ_l перестановочны, имеем

$$\varphi^2 = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l = \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \tau_{\overrightarrow{AB}} \circ \sigma_l \circ \sigma_l = \tau^2_{\overrightarrow{AB}} = \tau_{2 \cdot \overrightarrow{AB}}.$$

Отсюда следует, что если группа $\mathcal{M}$ содержит скользящую симметрию, то она содержит и параллельный перенос. Как мы убедились выше, $\mathcal{M}$ не может содержать параллельных переносов, поэтому она не содержит и скользящих симметрий.

Изложенное выше означает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Конечная группа движений может содержать только повороты и зеркальные симметрии.*

Пусть группа $\mathcal{M}$ содержит повороты $\rho_1 = \rho_A^\alpha$ и $\rho_2 = \rho_B^\beta$. Рассмотрим движение $\varphi = \rho_1^{-1} \circ \rho_2^{-1} \circ \rho_1 \circ \rho_2$, которое содержится в $\mathcal{M}$. В силу предложения 3.27 движение $\rho_2^{-1} \circ \rho_1 \circ \rho_2$ равно ρ_C^α, где $C = \rho_2^{-1}(A)$. Таким образом, $\varphi = \rho_A^{-\alpha} \circ \rho_C^\alpha$. Применяя предложение 3.28, получаем, что φ – параллельный перенос. Если $A \neq B$, то $C \neq A$. Поэтому $\varphi \neq \varepsilon$. Стало быть, предположение о том, что $\mathcal{M}$ содержит повороты с различными центрами, приводит к противоречию.

Таким образом доказано, что *все повороты, содержащиеся в конечной группе $\mathcal{M}$, имеют общий центр O.*

Пусть группа $\mathcal{M}$ содержит поворот $\rho = \rho_O^\alpha$ и зеркальную симметрию σ_l. Из предложения 3.31 следует, что $O \in l$. В самом деле, если $O \notin l$, то композиция зеркальной симметрии σ_l и поворота ρ_O^α является скользящей симметрией. Но группа $\mathcal{M}$ не содержит скользящих симметрий.

С учетом леммы 1 мы убедились в справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.34. *Конечная группа движений может состоять только из поворотов и зеркальных симметрий. Все повороты имеют общий центр O. Ось каждой симметрии проходит через точку O.*

Охарактеризуем теперь повороты, которые могут содержаться в конечной группе $\mathcal{M}$. Заметим сначала следующее. Пусть y – радианная мера угла поворота и y неположительно, тогда $-\pi < y \leqslant 0$. Отсюда $\pi < 2\pi + y \leqslant 2\pi$. Напомним теперь, что $\rho_O^y = \rho_O^{2\pi+y}$. Таким образом, рассматривая радианные меры углов поворотов, можно считать, что все они положительны. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – радианные меры всех углов поворотов из $\mathcal{M}$. Из сказанного выше следует, что эти числа можно считать находящимися в промежутке $(0; 2\pi]$; кроме того, удобно расположить их в порядке возрастания. Разности $x_{i+1} - x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ также являются углами поворотов из $\mathcal{M}$, поскольку $\rho_O^{x_{i+1}-x_i} = \rho_O^{x_{i+1}} \circ (\rho_O^{x_i})^{-1}$. Отсюда следует, что $x_{i+1} - x_i \geqslant x_1$, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Складывая все эти неравенства, найдем $x_n - x_1 \geqslant (n-1)x_1$, откуда $x_1 \leqslant 2\pi/n$. Нетрудно понять, что числа

$$x_1, 2x_1, \ldots nx_1 \tag{6}$$

лежат на промежутке $(0; 2\pi]$ и являются радианными мерами углов поворотов из $\mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ содержит тождественное преобразование $\varepsilon = \rho_O^{2\pi}$, число 2π должно содержатся среди чисел вида (6). Поэтому $nx_1 = 2\pi$, откуда $x_1 = 2\pi/n$. Окончательно получаем, что $x_k = 2k\pi/n$.

Пусть $\mathcal{C}_n = \{\rho_O^{2k\pi/n} \,|\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Легко проверяется, что $\mathcal{C}_n$ является конечной группой. Приведенные выше рассуждения показывают, что справедливо

Предложение 3.35. *Если конечная группа движений содержит только повороты, то она совпадает с группой $\mathcal{C}_n$ для некоторого натурального n.*

Пусть $\mathcal{M}$ содержит повороты и зеркальные симметрии. Множество поворотов совпадает с множеством $\mathcal{C}_n = \{\rho_O^{2k\pi/n} \,|\, 1 \leqslant \leqslant k \leqslant n\}$ для некоторого n. В дальнейшем через ρ_k будем обозначать поворот $\rho_O^{2k\pi/n}$. Допустим, что группа $\mathcal{M}$ содержит зеркальную симметрию σ_1 с осью l_1. Композиция поворота ρ_k и зеркальной симметрии σ_1 является зеркальной симметрией (см. предложение 3.30); обозначим эту зеркальную симметрию через σ_k, ее ось – через l_k. Итак, $\rho_k\circ\sigma_1 = \sigma_k$. Используя формулу для вычисления движения, обратного к композиции движений, получим $\sigma_1\circ{\rho_k}^{-1} = \sigma_k$. Теперь легко проверить, что угол между прямыми l_k и l_{k+1} равен π/n. В самом деле,

$$\rho_{k+1}\circ\sigma_1 = \sigma_{k+1}, \qquad \sigma_1\circ{\rho_k}^{-1} = \sigma_k.$$

Отсюда

$$\sigma_{k+1}\circ\sigma_k = \rho_{k+1}\circ\sigma_1\circ\sigma_1\circ{\rho_k}^{-1} = \rho_{k+1}\circ{\rho_k}^{-1} = \rho_1.$$

Так как $\rho_1 = \rho_O^{2\pi/n}$, угол между прямыми l_k, l_{k+1} равен π/n.

Рассмотрим множество $\mathcal{D}_n = \mathcal{C}_n \cup \{\sigma_k \,|\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Лемма 2. *Множество $\mathcal{D}_n$ является группой.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{C}_n$ – группа, достаточно убедиться в том, что композиция двух зеркальных симметрий σ_j, σ_k, а также композиция поворота ρ_j и симметрии σ_k принадлежит $\mathcal{D}_n$. Выше отмечалось, что выполнены равенства

$$\sigma_j = \rho_j\circ\sigma_1, \qquad \sigma_k = \sigma_1\circ{\rho_k}^{-1}.$$

Поэтому $\sigma_j\circ\sigma_k = \rho_j\circ{\rho_k}^{-1}$, и, стало быть, рассматриваемая композиция принадлежит $\mathcal{C}_n$.

Осталось вычислить композицию поворота и зеркальной симметрии из группы $\mathcal{M}$. Заметим сначала, что $\rho_j = \rho_{j+k}\circ{\rho_k}^{-1}$. Отсюда $\rho_j = \sigma_{j+k}\circ\sigma_k$, и потому $\rho_j\circ\sigma_k = \sigma_{j+k}\circ\sigma_k\circ\sigma_k = \sigma_{j+k}$. Полученное равенство показывает, что движение $\rho_j\circ\sigma_k$ принадлежит $\mathcal{D}_n$. Аналогично проверяется что композиция σ_k и ρ_j содержится в группе $\mathcal{D}_n$.

Предложение 3.36. *Если конечная группа движений содержит повороты и зеркальные симметрии, то она совпадает с группой $\mathcal{D}_n$ для некоторого натурального n.*

Доказательство. Пусть n – наибольшее натуральное число, для которого группа $\mathcal{C}_n$ содержится в данной группе $\mathcal{M}$. По условию группа $\mathcal{M}$ содержит зеркальную симметрию σ_1 с осью l_1. Выше было доказано, что в этом случае группа $\mathcal{M}$ содержит и зеркальные симметрии $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с осями $l_2, \ldots, l_n$ соответственно, причем прямые l_i, l_{i+1} $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ образуют углы π/n. Стало быть, $\mathcal{D}_n \subseteq M$. Проверим, что это включение на самом деле является равенством. Предположим, что группа $\mathcal{M}$ содержит симметрию σ с осью l, причем l отлична от прямых $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Тогда найдется такая прямая l_k, что угол между l и l_k меньше чем π/n. Ясно, что движение $\rho = \sigma \circ \sigma_k$ является поворотом из $\mathcal{M}$, причем угол этого поворота по абсолютной величине меньше чем $2\pi/n$. Последнее утверждение противоречит тому, что все повороты из $\mathcal{M}$ содержатся в группе $\mathcal{C}_n$, а потому углы этих поворотов кратны $2\pi/n$.

Из предложений 3.34, 3.36 получаем описание всех конечных групп движений.

Теорема 3.15. *Всякая конечная группа движений совпадает либо с группой $\mathcal{C}_n$, либо с группой $\mathcal{D}_n$ при подходящем натуральном n.*

4. Преобразования подобия

4.1. Гомотетии

Пусть O – некоторая точка плоскости, k – произвольное число, отличное от 0. Нетрудно понять, что для любой точки $X \neq O$ существует единственная точка X' такая, что точки O, X, X' коллинеарны и $\overrightarrow{OX'} \equiv k \cdot \overrightarrow{OX}$. Рассмотрим преобразование плоскости h_O^k:

$$h_O^k(X) = X' \text{ при } X \neq O \text{ и } h_O^k(O) = O.$$

Это преобразование называется *гомотетией* с центром O и коэффициентом k.

Отметим очевидные свойства гомотетий.

1. Каждая гомотетия является биективным преобразованием плоскости.

2. Гомотетия с коэффициентом, равным 1, есть тождественное преобразование.

3. Гомотетия с центром O и коэффициентом, равным -1, является центральной симметрией σ_O.

4. Гомотетия оставляет неподвижной любую прямую, проходящую через центр гомотетии.

5. Композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 – гомотетия с тем же центром и коэффициентом $k_1 \cdot k_2$.

6. Преобразование плоскости, обратное к гомотетии h_O^k является гомотетией $h_O^{1/k}$.

Из свойств 5, 6 вытекает, что множество всех гомотетий с общим центром является группой. Так как умножение чисел коммутативно, легко понять, что эта группа абелева.

Предложение 4.1. *Гомотетия любую прямую переводит в параллельную прямую.*

Доказательство. Пусть даны гомотетия h_O^k и прямая l. В силу отмеченного выше свойства 4 достаточно рассмотреть случай, когда $O \notin l$. Рассмотрим точки $X, Y \in l$ и их образы $X' = h_O^k(X)$, $Y' = h_O^k(Y)$. Если $k > 0$, то доказываемое утверждение сразу вытекает из определения гомотетии и теоремы 1.20. Если же $k < 0$, то $h_O^k = h_O^{-k} \circ \sigma_O$. Так как h_O^{-k} и σ_O каждую прямую переводят в параллельную прямую, то тем же свойством обладает их композиция.

Читателю предлагается самостоятельно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Предложение 4.2. *Если a – произвольный луч, то лучи $h_O^k(a)$ и a одинаково ориентированы при $k > 0$, и противоположно ориентированы при $k < 0$.*

Предложение 4.3. *Если $\mathcal{F}$ – произвольный флаг, то флаги $h_O^k(\mathcal{F})$ и $\mathcal{F}$ имеют одинаковую ориентацию.*

Предложение 4.4. *Если α – произвольный угол, то углы $h_O^k(\alpha)$ и α конгруэнтны.*

Из предложения 4.1 и теоремы 1.21 вытекает

Предложение 4.5. *Если XY – произвольный сегмент, $X' = h_O^k(X)$, $Y' = h_O^k(Y)$, то $X'Y' \cong |k| \cdot XY$.*

4.2. Дилатации

Напомним, что биективное преобразование плоскости называется дилатацией, если оно всякую прямую отображает в параллельную прямую. Мы установили, что дилатациями являются параллельные переносы и гомотетии. Оказывается, что других дилатаций нет. Это вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.6. *Любая дилатация есть либо гомотетия, либо параллельный перенос.*

Доказательство. Пусть φ – дилатация. Отметим сначала следующие два свойства преобразования φ.

1. Если $X' = \varphi(X) \neq X$, то прямая $l = (XX')$ неподвижна, т.е. $\varphi(l) = l$.

В самом деле, $X' = \varphi(X) \in \varphi(l)$, $X' \in l$ и $l \parallel \varphi(l)$. Таким образом, две параллельные прямые $l, \varphi(l)$ имеют общую точку X'; поэтому $\varphi(l) = l$.

2. Если O – неподвижная точка дилатации φ, то любая прямая m, содержащая точку O, неподвижна.

Действительно, $O = \varphi(O) \in \varphi(m)$. Стало быть, параллельные прямые m, $\varphi(m)$ имеют общую точку O; отсюда следует их совпадение.

Переходя к доказательству предложения, предположим сначала, что дилатация φ имеет две различные неподвижные точки A, B. Если $X \notin (AB)$, то прямые (XA), (XB) неподвижны (см. свойство 2), а потому неподвижна и точка X, являющаяся точкой пересечения этих прямых. Среди точек, не лежащих на прямой (AB), выберем три неколлинеарные точки. Поскольку φ имеет три неколлинеарные неподвижные точки, имеем $\varphi = \varepsilon$. Итак, если дилатация имеет две различные неподвижные точки, то она является тождественным преобразованием плоскости.

Пусть φ имеет единственную неподвижную точку A. Если $C \neq A$, то $C' = \varphi(C) \neq C$, причем в силу свойства 2 $C' \in (OC)$. Пусть k такое число, что $\overrightarrow{OC'} = k \cdot \overrightarrow{OC}$; рассмотрим преобразование плоскости $\psi = h_A^{1/k} \circ \varphi$. Ясно, что ψ – дилатация (как композиция двух дилатаций) и $\psi(A) = A$, $\psi(C) = C$. Поэтому $h_A^{1/k} \circ \varphi = \varepsilon$, откуда $\varphi = h_A^k$.

Осталось рассмотреть случай, когда φ не имеет неподвижных точек. Если A – произвольная точка, то $A' = \varphi(A) \neq A$ и (AA') – неподвижная прямая (см. свойство 1). Пусть $B \notin (AA')$, $B' = \varphi(B)$. Прямая (BB') также неподвижна и отлична от прямой (AA'). Ясно, что $(AA') \parallel (BB')$, иначе общая точка этих прямых была бы неподвижной точкой. Кроме того, поскольку φ – дилатация, имеем $(AB) \parallel (A'B')$. Значит, $ABB'A'$ – параллелограмм. Поэтому направленные сегменты $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ эквиполлентны. Рассмотрим преобразование плоскости $\psi = \tau_{\overrightarrow{AA'}}^{-1} \circ \varphi$. Это преобразование, очевидно, дилатация и $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B$. Стало быть, $\tau_{\overrightarrow{AA'}}^{-1} \circ \varphi = \varepsilon$ и $\varphi = \tau_{\overrightarrow{AA'}}$.

4.3. Композиция двух гомотетий

Здесь мы рассмотрим композицию двух гомотетий с различными центрами: $\varphi = h_B^{k_2} \circ h_A^{k_1}$, $A \neq B$. Будем считать также, что каждый из коэффициентов k_1, k_2 отличен от 1.

Пусть M – произвольная точка, не лежащая на прямой (AB), $N = h_A^{k_1}(M)$, $P = h_B^{k_2}(N)$ (см. рис. 42). Возможны два случая:

1) прямые (MP) и (AB) пересекаются в некоторой точке C;

2) прямые (MP) и (AB) параллельны.

Отметим сразу, что случай 2) имеет место тогда и только тогда, когда $k_1 k_2 = 1$. В самом деле, тот факт, что прямые (MP) и (AB) параллельны, равносилен выполнению равенства простых отношений (NMA) и (NPB). Поскольку

$$(NMA) = \overrightarrow{NA}/\overrightarrow{AM} = -k_1, \qquad (NPB) = \overrightarrow{NB}/\overrightarrow{BP} = -1/k_2,$$

получим $-k_1 = -1/k_2$ или $k_1 \cdot k_2 = 1$.

Рассмотрим теперь каждый из двух возможных случаев.

Пусть $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, тогда прямые (MP) и (AB) пересекаются в точке C. Прямая (AB) является, очевидно, неподвижной прямой преобразования φ. Кроме того, $\varphi(M) = P$ и φ – дилатация (как композиция двух гомотетий). Поэтому (MP) также неподвижная прямая. Стало быть, точка C – неподвижная точка преобразования φ. Легко понять, что $\varphi \neq \varepsilon$ (для этого достаточно найти образ точки A и убедиться, что $A \neq \varphi(A)$). В силу предложения 4.6 φ является гомотетией. Найдем коэффициент k этой гомотетии. Для этого рассмотрим треугольник MNP и коллинеарные точки A, B, C, лежащие на прямых (MN), (NP) и (MP) соответственно. Применяя теорему Менелая, получим

$$(NMA)(MPC)(PNB) = -1.$$

Учитывая, что

$$(NMA) = \overrightarrow{NA}/\overrightarrow{AM} = -k_1, \quad (MPC) = \overrightarrow{MC}/\overrightarrow{CP} = -1/k,$$
$$(PNB) = \overrightarrow{PB}/\overrightarrow{BN} = -k_2,$$

получим $-k_1k_2/k = -1$, откуда $k = k_1k_2$.

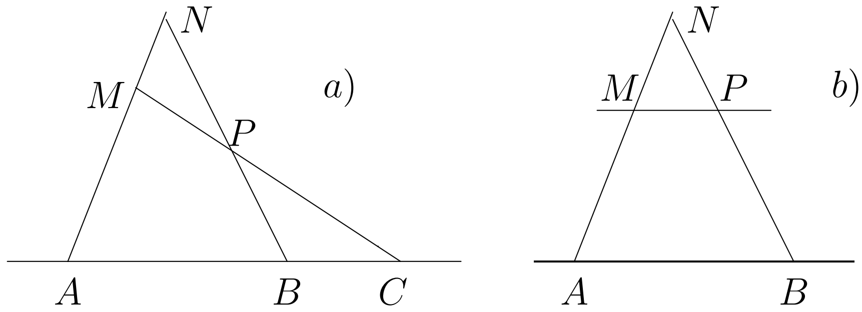


Рис. 42

Нетрудно также проверить, что положение центра C результирующей гомотетии на прямой (AB) определено равенством

$$\overrightarrow{AC} = \frac{k_1 - 1}{k_1k_2 - 1}\overrightarrow{AB}.$$

Пусть теперь $k_1k_2 = 1$. Выполнение этого равенства означает, что прямые (MP) и (AB) параллельны. Нетрудно понять, что преобразование φ в этом случае не имеет неподвижных точек. В самом деле, пусть D – неподвижная точка преобразования φ. Поскольку φ – дилатация, прямая (MD) неподвижна. Но (MP) – также неподвижная прямая. Отсюда следует, что точка M должна быть неподвижной. Последнее же утверждение неверно, так как $\varphi(M) = P$.

Применяя предложение 4.6, получаем, что φ – параллельный перенос. Ясно, что $\varphi = \tau_{\overrightarrow{MP}}$, причем $\overrightarrow{MP} = (1 - k_2)\overrightarrow{AB}$.

4.4. Характеризация преобразований подобия

Определение. Преобразование φ плоскости называется *преобразованием подобия*, если существует такое положительное число k, что для любых точек A, B

$$|\varphi(A)\varphi(B)| = k \cdot |AB|.$$

Число k называется коэффициентом подобия. Таким образом, каждое преобразование подобия любой сегмент растягивает в k раз (разумеется, если $k < 1$, то правильнее говорить о сжатии в $1/k$ раз).

Заметим попутно, что каждое движение является преобразованием подобия.

Следует отметить, что всякое преобразование подобия, отличное от движения, является композицией гомотетии и движения. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть φ – преобразование подобия с коэффициентом k. Для произвольной точки O существует такое движение ψ, что $\varphi = h_O^k \circ \psi$.*

Доказательство. Легко проверить, что композиция $\psi = h_O^{-k} \circ \varphi$ является движением. Отсюда сразу следует требуемое утверждение.

Некоторые свойства преобразований подобия аналогичны свойствам движений.

Теорема 4.2. *Пусть φ – преобразование подобия. Если множество $\mathcal{X}$ является прямой (лучом, отрезком, полуплоскостью), множество $\varphi(\mathcal{X})$ также является прямой (соответственно лучом, отрезком, полуплоскостью).*

Предложение 4.7. *Если φ – преобразование подобия, $\angle ab$, $\angle a'b'$ такие углы, что $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, то $\angle ab \cong \angle a'b'$.*

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам теорем 3.1, 3.2 и предложения 3.2.

Преобразование плоскости, которое каждый угол переводит в конгруэнтный угол, будем называть преобразованием, сохраняющим углы.

Пусть φ – биективное преобразование плоскости, сохраняющее углы. Поскольку φ сохраняет, в частности, развернутые и нулевые углы, оно каждую прямую переводит в прямую и каждый луч – снова в луч.

Лемма 1. *Пусть φ – биективное преобразование плоскости, сохраняющее углы. Если существует угол aOb, отличный от нулевого и развернутого, и такой, что $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$, то φ является гомотетией h_O^k, причем $k > 0$.*

Доказательство. Нетрудно понять, что $\varphi(O) = O$. Кроме того, преобразование φ лучи a, b отображает также в себя. Пусть c – произвольный луч с началом O, и $d = \varphi(c)$. Без ограничения общности можно считать, что c проходит во внутренней области угла aOb. Если $d \neq c$, то из соотношений $\angle ca \cong \angle da$, $\angle cb \cong \angle db$ вытекает, что $d = \sigma_a(c)$ и $d = \sigma_b(c)$. Отсюда $\sigma_a(c) = \sigma_b(c)$ или $c = \sigma_a \circ \sigma_b(c)$. Получилось, что поворот $\sigma_a \circ \sigma_b$ имеет неподвижный луч, что невозможно. Таким образом, φ сохраняет любой луч с началом в точке O.

Покажем теперь, что φ – дилатация. Возьмем произвольную прямую l. Нужно проверить, что $\varphi(l) \parallel l$. Если l проходит через точку O, то доказывать нечего. Пусть $O \notin l$. Рассмотрим на прямой l две точки A, B, и пусть $A_1 = \varphi(A)$, $B_1 = \varphi(B)$. Ясно, что преобразование φ луч $[AO)$ переводит в $[A_1O)$, а луч $[AB)$ – в луч $[A_1B_1)$. Поэтому угол OAB преобразуется в угол OA_1B_1. По условию эти углы конгруэнтны. Прямая (OA) пересекает прямые (AB), (A_1B_1); при этом упомянутые выше углы OAB, OA_1B_1 оказываются соответственными. По признаку параллельности двух прямых можно заключить, что $l = (AB) \parallel (A_1B_1) = \varphi(l)$. В предыдущих рассуждениях неявно предполагалось, что $A \neq A_1$. Если $A = A_1$, то нужное соотношение вытекает из аксиомы III_4.

Предложение 4.6 заканчивает доказательство, поскольку φ, очевидно, не может быть ни параллельным переносом, ни гомотетией с отрицательным коэффициентом.

Теорема 4.3. *Всякое биективное преобразование плоскости, сохраняющее углы, является преобразованием подобия.*

Доказательство. Пусть φ – биективное преобразование плоскости, сохраняющее углы. Рассмотрим произвольный угол aOb, отличный от нулевого и развернутого, и предположим, что $O_1 = \varphi(O)$, $a_1 = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(b)$. По условию $\angle aOb \cong \angle a_1O_1b_1$, поэтому существует такое движение ψ, что $O_1 = \psi(O)$, $a_1 = \psi(a)$, $b_1 = \psi(b)$. Теперь ясно, что преобразование $\psi^{-1} \circ \varphi$ удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому

$\psi^{-1}\circ\varphi = h_O^k$, $k > 0$. Отсюда $\varphi = \psi\circ h_O^k$, т.е. φ – преобразование подобия.

4.5. Поворотная и зеркальная гомотетии

Выше было доказано, что всякое преобразование подобия является композицией движения и гомотетии. В этом разделе упомянутый результат будет значительно усилен.

Определение. *Поворотной гомотетией* называется композиция $\rho_O^\alpha\circ h_O^k$, $k > 0$.

Определение. *Зеркальной гомотетией* называется композиция $\sigma_l\circ h_O^k$, $k > 0$.

Теорема 4.4. *Если φ – преобразование подобия первого рода с коэффициентом $k \neq 1$, то φ является поворотной гомотетией, т.е. найдутся точка O и ориентированный угол α, для которых выполнено равенство $\varphi = \rho_O^\alpha\circ h_O^k$.*

Доказательство. Возьмем произвольный луч a с началом в точке A и рассмотрим луч $b = \varphi(a)$. Началом луча b является, разумеется, точка $B = \varphi(A)$. Найдем поворотную гомотетию с коэффициентом k, переводящую луч a в луч b.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда $A = B$. Тогда положив $O = A$ и $\alpha = \measuredangle aOb$, мы видим, что $\rho_O^\alpha\circ h_O^k$ переводит луч a в луч b.

Предположим теперь, что $A \neq B$. Если лучи a и b сонаправлены, то выберем на прямой (AB) такую точку O, что простое отношение (BAO) равно $-k$. Тогда $\overrightarrow{BO} = -k\overrightarrow{OA}$, откуда $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$. Таким образом, $B = h_O^k(A)$. Поскольку гомотетия с положительным коэффициентом каждый луч переводит в сонаправленный луч, имеем $b = h_O^k(a)$. Если лучи a и b противоположно направлены, то точка O на прямой (AB) выбирается исходя из условия $(BAO) = k$. Отсюда $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{OA}$ и, стало быть, $\overrightarrow{OB} = -k\overrightarrow{OA}$. Из последнего равенства вытекает, что $B = h_O^{-k}(A)$. Так как гомотетия с отрицательным коэффициентом каждый луч переводит в противоположно направленный луч, имеем равенство $b = h_O^{-k}(a)$. Осталось лишь заметить, что $h_O^{-k} = \sigma_O \circ h_O^k$.

Пусть лучи находятся в общем положении: начала их различны, а сами лучи не лежат на параллельных прямых (см. рис. 43). Пусть O_1 – произвольная точка плоскости, a_1, b_1 – лучи, имеющие начало в точке O_1 и сонаправленные с лучами a, b соответственно. Обозначим через α ориентированный угол $a_1O_1b_1$. Взяв на луче a_1 точку A_0 найдем на луче b_1 такую точку B_0, что $|O_0B_0| = k|O_0A_0|$. Теперь на лучах a_1, b_1 найдем точки A_1, B_1 так, что $(A_1B_1) \parallel (A_0B_0)$ и $|A_1B_1| = |AB|$. Искомая точка O обладает тем свойством, что $|OA| = |O_1A_1|$, $|OB| = |O_1B_1|$ и $\measuredangle AOB = \alpha$. Нетрудно понять, что такая точка всегда существует и единственна.

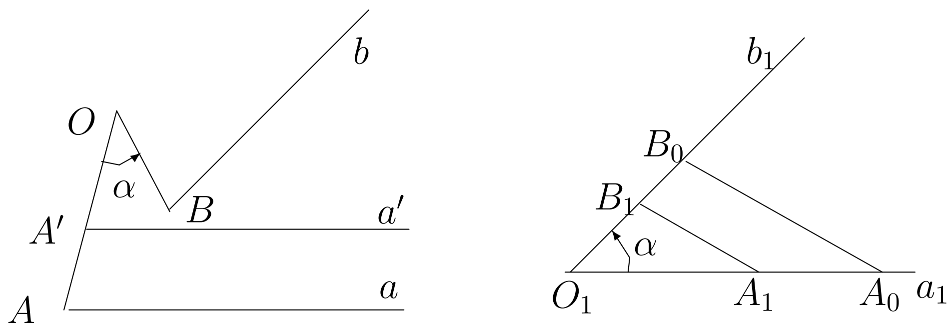


Рис. 43

Гомотетия h_O^k переводит луч a в сонаправленный ему луч a' с началом в точке A' (рис. 43). Поскольку $|OB| = k|OA|$ и $|OA'| = k|OA|$, имеем $|OB| = |OA'|$. Теперь ясно, что $\rho_O^\alpha(a') = b$. Окончательно получаем, что $\rho_O^\alpha \circ h_O^k(a) = b$.

Теорема 4.5. *Если φ – преобразование подобия второго рода с коэффициентом $k \neq 1$, то φ является зеркальной гомотетией, т.е. найдутся прямая l и точка $O \in l$, для которых выполнено равенство $\varphi = \sigma_l \circ h_O^k$.*

Доказательство. Пусть a – луч с началом A; положим $b = \varphi(a)$, $B = \varphi(A)$. Найдем зеркальную гомотетию, переводящую луч a в луч b.

Рассмотрим сначала случай, когда $A = B$. Пусть c – биссектриса угла ab. Общее начало лучей a, b возьмем в качестве точки O. Тогда ясно, что $\varphi = \sigma_l \circ h_O^k$.

Допустим, что $A \neq B$. Найдем на отрезке $[AB]$ такую точку C, что $|BC| : |AC| = k$ и обозначим через c луч с началом в C, образующий конгруэнтные углы с лучами a, b (рис. 44). Пусть l – прямая, содержащая луч c. Рассмотрим точку A_1, симметричную точке B относительно l; пусть D – точка пересечения прямых l и (A_1B). Так как

$$|BD| : |DA_1| \neq |BC| : |CA|,$$

прямые (AA_1) и l пересекаются; обозначим через O точку пересечения этих прямых. Заметим теперь, что отрезок $[OC]$ в треугольнике OAB является биссектрисой; поэтому

$$|BO| : |OA| = |BC| : |CA| = k.$$

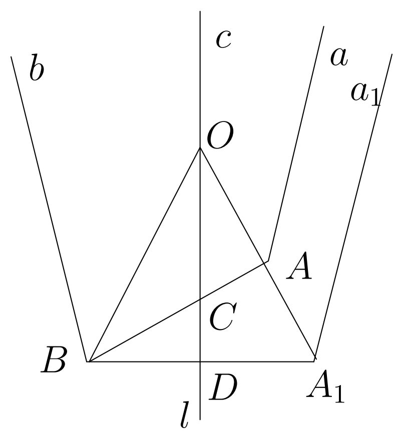


Рис. 44

Но $|BO| = |OA_1|$, стало быть, $|OA_1| : |OA| = k$. Отсюда следует, что $h^k_O(A) = A_1$. Пусть $a_1 = h^k_O(a)$. Так как $k > 0$, лучи a и a_1 сонаправлены. В силу выбора прямой l легко видеть, что лучи a_1 и b симметричны относительно оси l, т.е. $b = \sigma_l(a_1)$. Окончательно получаем, что $\sigma_l \circ h^k_O(a) = b$.

Список литературы

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. М.: Учпедгиз, 1957.

[2] *Гильберт Д.* Основания геомтрии. М.: ГИТТЛ, 1948.

[3] *Донеддю А.* Евклидова планиметрия. М.: Наука, 1978.

[4] *Дьедонне Ж.* Линейная алгебра и элементарная геометрия. М.: Наука, 1972.

[5] *Расин В.В.* Действительные числа. Екатеринбург: УрГУ, 2005.

[6] *Шоке Г.* Геометрия. М.: Мир, 1970.

Содержание