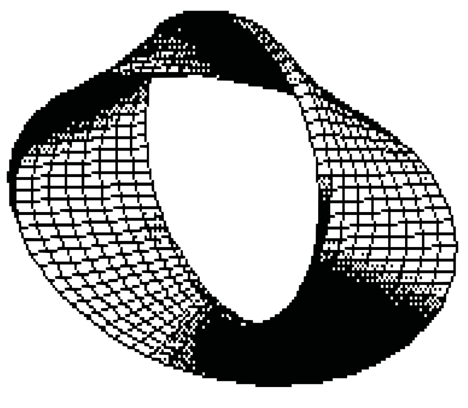
Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького
Специализированный учебно-научный центр

Математика

Геометрия

Задания №5–7 для заочного класса
(2005–2006 учебный год)



Екатеринбург
2005

Пособие подготовлено
кафедрой математики СУНЦ УрГУ

Составитель **С.А. Ануфриенко**

Математика: **Геометрия.** Задания №5–7 для заочного класса. — Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 2005, 102с.

Подписано в печать 15.9.2005. Формат $60 \times 84\ 1/16$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6. Зак. . Тираж экз.
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького

Отпечатано на ризографе в СУНЦ УрГУ.

Екатеринбург, ул. Д. Зверева, 30.

Оглавление

Глава 1

Треугольники

1.1. Равенство и подобие треугольников. Медианы и их свойства

Будем придерживаться следующей системы обозначений. Точки будем обозначать большими латинскими буквами — A, B, C и т. д. Прямую, проходящую через точки A и B, обозначают через (AB). Отрезком $[AB]$ называют множество всех точек прямой (AB), лежащих между точками A и B, включая сами точки A и B (при этом A и B называются концами отрезка $[AB]$). Длину отрезка $[AB]$ будем обозначать через AB. Луч $[AB)$ — это множество всех точек прямой (AB), лежащих с точкой B по одну сторону от точки A (точка A называется вершиной луча $[AB)$). Множество всех точек плоскости, ограниченное парой лучей с общей вершиной, называется углом и обозначается через $\angle BAC$. Величину угла $\angle BAC$ будем обозначать через $\widehat{BAC}$ и измерять в градусах. Окружность с центром в точке O и радиусом $r > 0$ будем обозначать через $\omega(O, r)$ или просто через ω. Часть плоскости, ограниченная отрезками $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$, называется треугольником и обозначается через $\triangle ABC$. В случае, когда точка B лежит на прямой (AC), треугольник ABC называется вырожденным. Мы будем рассматривать только невырожденные треугольники.

Определение. *Если для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполняются следующие равенства:*
1) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, тогда эти треугольники называются равными.

Факт равенства треугольников обозначают так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

В определение равных треугольников включены шесть равенств соответствующих элементов $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. Но для доказательства равенства треугольников, как известно, достаточно проверить только некоторые из этих равенств. В следующей теореме мы и перечислим основные признаки равенства треугольников.

Теорема 1. *Для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ следующие условия равносильны:*

1. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$,
2. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ *(первый признак равенства треугольников),*
3. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ *(второй признак равенства треугольников),*
4. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ *(третий признак равенства треугольников).*

Равносильность условий в предыдущей теореме означает следующее: при выполнении одного из условий выполняются и все остальные. Поэтому, проверив для треугольников один из признаков, мы получаем равенство всех соответствующих элементов этих треугольников. Теперь о подобии треугольников.

Определение. *Если для $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ выполняются следующие равенства:*
1) $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1 = k$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, тогда эти треугольники называются подобными (обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$). Число k называют коэффициентом подобия этих треугольников.

Предыдущее определение также содержит избыточную информацию. Опустив некоторые равенства из этого определения, приходим к признакам подобия треугольников.

Теорема 2. *Для треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ следующие условия равносильны:*

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

2. $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ *(первый признак подобия треугольников),*

3. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ *(второй признак подобия треугольников),*

4. $AB/A_1B_1 = AC/A_1C_1 = BC/B_1C_1$ *(третий признак подобия треугольников).*

Из предыдущей теоремы можно вывести несколько утверждений о пропорциональных отрезках. Начнем с теоремы, которую называют обобщенной теоремой Фалеса.

Теорема 3. *Пусть точки* A, B *и* C *выбраны на одной стороне* $\angle KOL$, *а точки* A_1, B_1 *и* C_1 *— на другой стороне этого угла. Если прямые* (AA_1), (BB_1) *и* (CC_1) *параллельны между собой, то* $AB/BC = A_1B_1/B_1C_1$.

Для доказательства этой теоремы достаточно выбрать на отрезках $[BB_1]$ и $[CC_1]$ соответственно точки D и E так, что $(AD)\|(BE)\|(OL)$ (рис. 1) и заметить, что четырехугольники ADB_1A_1 и BEC_1B_1 являются параллелограммами, а треугольники ABD и BCE подобны по второму признаку подобия треугольников. Отсюда $AB/BC = AD/BE = A_1B_1/B_1C_1$.

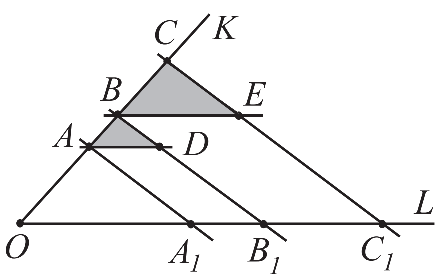


Рис. 1

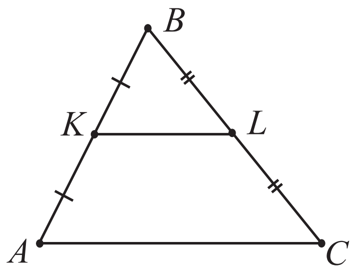


Рис. 2

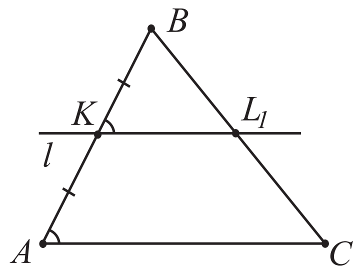


Рис. 3

Пример 1. Пусть точки K и L являются серединами сторон $[AB]$ и $[BC]$ треугольника ABC (рис. 2). Докажите справедливость следующих утверждений: а) $(KL)\|(AC)$, $AC = 2KL$; б) если прямая l параллельна прямой (AC) и проходит через точку K, то она проходит и через точку L.

Решение. а) Треугольники KBL и ABC подобны с коэффициентом $k = 1/2$ по первому признаку подобия треугольников. Отсюда верно $\angle BKL = \angle A$ и $KL/AC = 1/2$, т.е. $(KL)\|(AC)$ и $AC = 2KL$. б) Обозначим через L_1 точку пересечения прямой l со стороной $[BC]$. Тогда по второму признаку подобия треугольников будет выполняться $\triangle BKL_1 \sim \triangle BAC$. Значит, $BL_1/BC = BK/AB = 1/2$, т.е. $L_1 = L$.

Свойства средней линии треугольника, описанные в предыдущем примере, служат основой доказательства следующей теоремы о медианах треугольника. Напомним, что *медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой его противоположной стороны.

Теорема 4. *Пусть* $[AA_1]$, $[BB_1]$ *и* $[CC_1]$ *— медианы* $\triangle ABC$. *Тогда выполняются следующие свойства:*

1. *Медианы делят друг друга в отношении* $2:1$, *считая от вершины.*
2. *Медианы пересекаются в одной точке (она называется центром масс треугольника).*
3. *Медиана делит площадь треугольника пополам, т.е.* $S_{ABA_1} = S_{ACA_1}$.
4. *Три медианы делят треугольник на шесть треугольников одинаковой площади (т.е. равновеликих треугольников).*

Для доказательства первого свойства обозначим через M точку пересечения медиан $[AA_1]$ и $[CC_1]$ и рассмотрим треугольники A_1MC_1 и AMC (рис. 4). Поскольку отрезок $[A_1C_1]$ параллелен стороне AC и равен ее половине, то треугольники A_1MC_1 и AMC подобны с коэффициентом $k = 1/2$. Отсюда $AM : MA_1 = CM : MC_1 = 2 : 1$. Первое свойство доказано. Из первого свойства следует, что медиана $[BB_1]$ должна разделить медиану $[AA_1]$ в отношении $2:1$, считая от вершины, т.е. пройти через точку M. Поэтому свойство (2) также выполняется. Третье свойство очевидно, поскольку

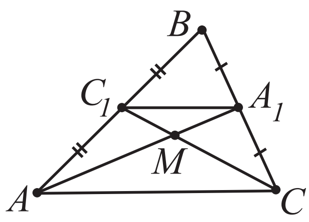


Рис. 4

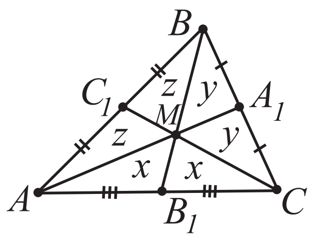


Рис. 5

$\triangle ABA_1$ и $\triangle ACA_1$ имеют равные основания (т.к. $BA_1 = A_1C$) и общую высоту, проведенную из вершины A. Для доказательства свойства (4) сначала заметим, что отрезок $[MB_1]$ (рис. 5) является медианой треугольника AMC, поэтому $S_{AMB_1} = S_{CMB_1}$. Пусть $x = S_{AMB_1}$. Аналогичный смысл имеют переменные y и z на рис. 5. Осталось доказать, что $x = y = z$. Вспомнив, что $[BB_1]$ — медиана треугольника ABC, получаем $2y + x = 2z + x$ или $y = z$. А из равенства площадей $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ получаем $2x + z = 2y + z$ или $x = y$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько задач, в решении которых используется подобие треугольников и свойства средней линии треугольника.

Пример 2. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найти длину отрезка, высекаемого диагоналями на средней линии.

Решение. Из обобщенной теоремы Фалеса следует, что если провести прямую через середину боковой стороны трапеции параллельно основаниям, то эта прямая пройдет через середину другой боковой стороны. Поэтому средняя линия трапеции параллельна основаниям. Обозначим точки пересечения средней линии $[KL]$ с диагоналями трапеции через X и Y (рис. 6). Тогда отрезки $[KX]$ и $[KY]$ являются средними линиями $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$. Поэтому $KX = b/2$, $KY = a/2$ и $XY = (a - b)/2$.

Пример 3. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1 так, что $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В каком отношении медиана CC_1 делит отрезок AA_1?

Решение. Пусть O — точка пересечения отрезков $[AA_1]$ и $[CC_1]$ (рис. 7). Найдем $AO : OA_1$. Если $CA_1 = x$, то $A_1B = 2x$. Через точку C_1 параллельно (AA_1) проведем прямую (C_1K). Тогда $[C_1K]$ — средняя линия треугольника ABA_1, поэтому $AA_1 = 2C_1K$ и $BK = KA_1 = x$. Из последнего равенства следует, что отрезок $[OA_1]$, в свою очередь, является средней линией в $\triangle CKC_1$, значит, $C_1K = 2OA_1$. В итоге $AA_1 = 4OA_1$ и искомое отношение равно

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{\frac{3}{4}AA_1}{\frac{1}{4}AA_1} = 3 : 1.$$

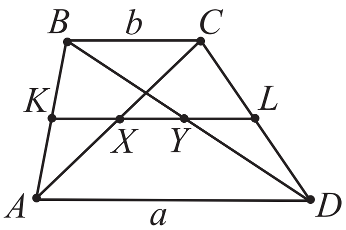


Рис. 6

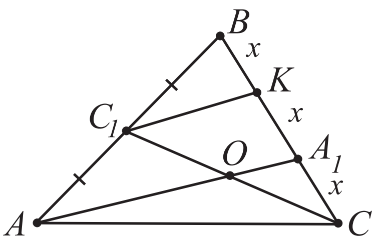


Рис. 7

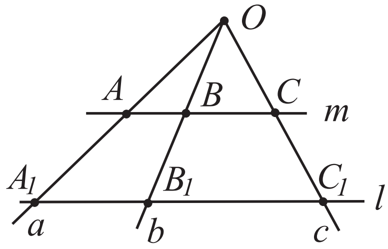


Рис. 8

Теорема 5. *Пусть прямые l и m параллельны, точка O и прямая l лежат по разные стороны от прямой m (рис. 8). Через точку O проведены прямые a, b и c, пересекающие прямые m и l в точках A, B, C, A_1, B_1, C_1 (тот же рисунок). Тогда $AB/BC = A_1B_1/B_1C_1$.*

Из условия параллельности прямых l и m сразу следует, что $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ и $\triangle BOC \sim \triangle B_1OC_1$. Отсюда

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Пример 4. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Доказать, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

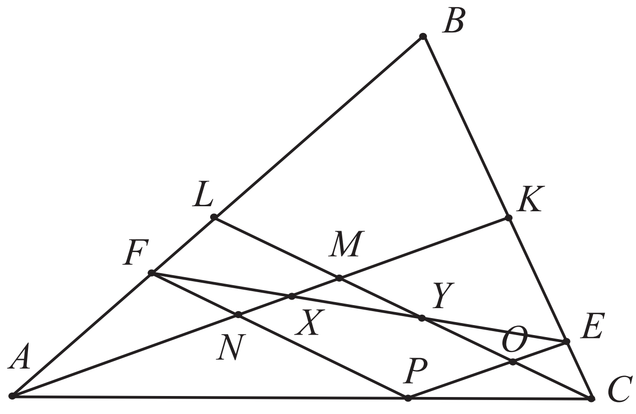


Рис. 9

Решение. Обозначим точки так, как это указано на рис. 9. По предыдущей теореме и по одному из свойств медиан получаем, что

$$FN/NP = LM/MC = 1 : 2.$$

Поэтому треугольники FNX и FPE подобны с коэффициентом подобия $k = 1/3$. Отсюда $FX = FE/3$. Аналогично доказывается, что $EY = FE/3$. Значит, $FX = EY = XY = FE/3$.

1.2. Вписанные углы, касательные, хорды

Напомним, что угол AOB называется *центральным* углом окружности $\omega(O,r)$. Угол ABC является *вписанным* в окружность ω, когда выполняются два условия: вершина угла принадлежит ω, и каждая из его сторон пересекает окружность еще в одной точке, отличной от вершины B, или касается окружности ω. Часть окружности, заключенная внутри угла называется дугой, на которую опирается этот угол. Для доказательства следующей теоремы потребуется свойство внешнего угла треугольника. Напомним, что угол, смежный с одним из внутренних углов треугольника ABC называется *внешним* углом треугольника. Из того факта, что сумма углов треугольника равна 180°, немедленно следует, что величина внешнего угла равна сумме двух углов этого треугольника, не смежных с ним.

Теорема 1. *Величина вписанного угла равна половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть следующие четыре случая.

Первый случай. Пусть центр окружности, точка O, лежит на стороне вписанного угла ABC (рис. 10). Тогда $\angle AOC$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, поэтому $\widehat{AOC} = \widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 2\widehat{ABC}$.

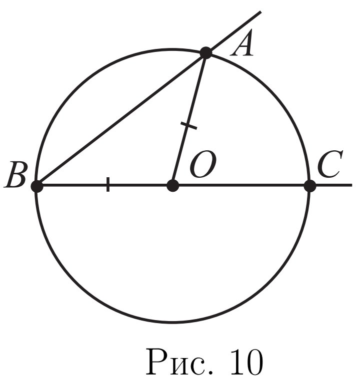


Рис. 10

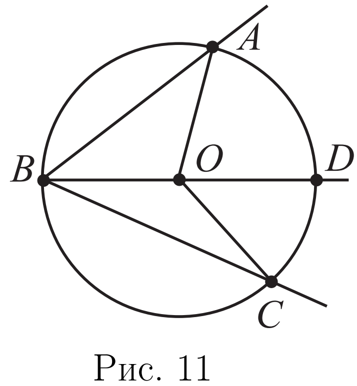


Рис. 11

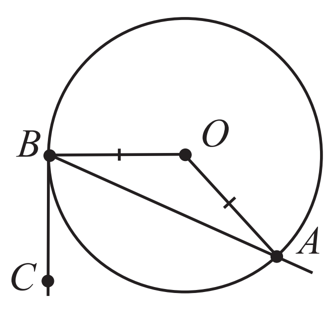


Рис. 12

Второй случай. Пусть теперь точка O лежит внутри угла ABC. Проведем луч $[BO)$ (рис. 11) и воспользуемся предыдущим результатом:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOD} + \widehat{COD} = 2\widehat{ABD} + 2\widehat{DBC} = 2\widehat{ABC}.$$

Третий случай. Точка O находится вне $\angle ABC$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему случаю.

Четвертый случай. Пусть одна из сторон угла касается окружности (рис. 12). Тогда из равенств $\widehat{AOB} = 180^\circ - 2\widehat{OBA}$ и $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{OBA}$ получаем требуемое $\widehat{AOB} = 2\widehat{ABC}$. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести несколько следствий. Напомним, что величина дуги — это величина центрального угла, опирающегося на эту дугу. Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 1.

Следствие 1. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую опирается этот угол.

Следствие 2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.

Можно легко усилить предыдущее следствие: если дуги окружности раны между собой, то равны любые вписанные углы, опирающиеся на эти дуги.

Следствие 3. Пусть окружность $\omega(O, r)$ построена на отрезке $[AB]$ как на диаметре (т.е. точка O — это середина отрезка $[AB]$ и $r = AB/2$) и точка C не лежит на прямой (AB). Тогда $C \in \omega \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Действительно, если $C \in \omega$, то по предыдущей теореме получаем $\widehat{ACB} = \widehat{AOB}/2 = 90^\circ$. При доказательстве обратного утверждения предположим, что $\widehat{ACB} = 90^\circ$ и $C \notin \omega$. Если точка C лежит вне окружности ω, то по крайней мере один из отрезков $[AC]$ или $[BC]$ пересечет окружность по своей внутренней точке. На рис.13 точка D — внутренняя точка отрезка $[AC]$, лежащая на окружности. Уже доказано, что $\widehat{ADB} = 90^\circ$. Но $\angle ADB$ является внешним углом треугольника $\triangle BCD$, отсюда получаем противоречивое неравенство $\widehat{ADB} > \widehat{ACB}$. Похожим образом получается противоречие и в случае, когда точка C лежит внутри окружности ω. Следствие 3 доказано.

Применение следствия 3 к прямоугольным треугольникам дает нам важное их свойство: *центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы.*

Всякий ли четырехугольник можно вписать в окружность? Ответ на этот вопрос в следующем утверждении.

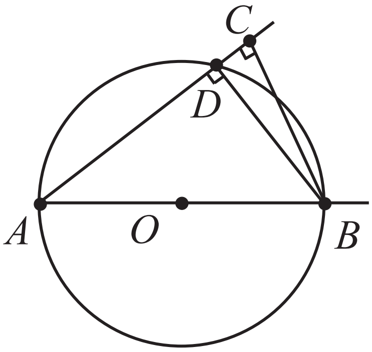


Рис. 13

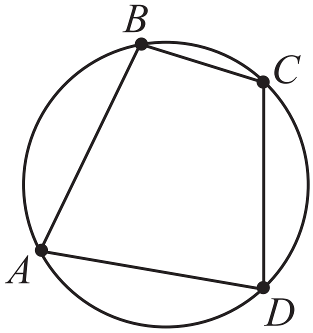


Рис. 14

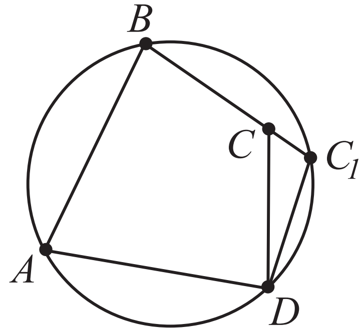


Рис. 15

Следствие 4. Четырехугольник $ABCD$ может быть вписан в окружность в том и только в том случае, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Пусть $ABCD$ вписан в окружность (рис. 14). Тогда $\angle BAD$ и $\angle BCD$ опираются на дуги, объединение которых есть окружность, поэтому $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ/2 = 180^\circ$. Аналогично $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

Пусть теперь $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, но четырехугольник $ABCD$ вписанным не является. Опишем окружность ω около $\triangle ABD$ и рассмотрим только случай, когда точка C лежит внутри этой окружности (рис. 15). Если C_1 — точка пересечения луча $[BC)$ с окружностью ω, то из условия и уже доказанной части утверждения получаем $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ = \widehat{BAD} + \widehat{BC_1D}$. Отсюда $\widehat{BCD} = \widehat{BC_1D}$, а это противоречит неравенству $\widehat{BCD} > \widehat{BC_1D}$ (угол BCD — внешний угол $\triangle CDC_1$). Следствие 4 доказано.

Рассмотрим теперь несколько задач, в решении которых используются свойства вписанных углов.

Пример 1. Из точки B, лежащей вне окружности, выходят лучи BA и BC, пересекающие эту окружность. Выразить величину угла ABC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

Решение. Обозначим точки так, как это сделано на рис. 16 и выразим величину угла ABC через величины дуг AC и DE (договоримся градусную величину дуги AB обозначать через $\smile AB^\circ$). Проведем отрезок $[AE]$. Тогда $\angle AEC$ — внешний угол $\triangle ABE$, поэтому $\widehat{ABC} = \widehat{AEC} - \widehat{BAE} = (\smile AC^\circ - \smile DE^\circ)/2$.

Пример 2. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Доказать, что $\angle BAH = \angle OAC$.

Решение. Продолжим отрезок AO до пересечения с описанной окружностью в точке D (рис.17). Отрезок AD является диаметром описанной окружности, поэтому $\widehat{ACD} = 90^\circ$. Поскольку углы ADC и ABC опираются на одну дугу, то они между собой равны. Отсюда

$$\widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ADC} = \widehat{OAC}.$$

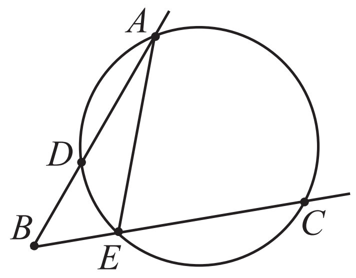


Рис. 16

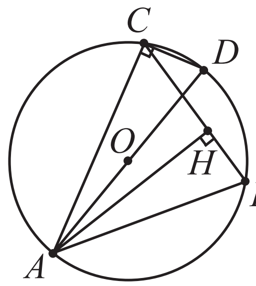


Рис. 17

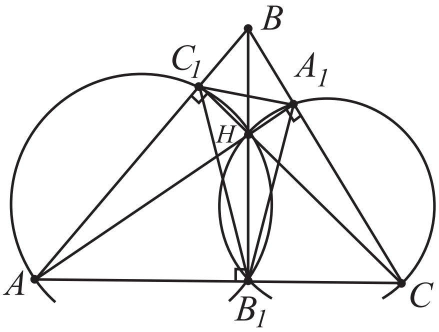


Рис. 18

Пример 3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Обозначим точку пересечения высот треугольника ABC через H (рис. 18) и докажем, что $\angle HB_1C_1 = \angle HB_1A_1$. Заметим, что из равенства $\widehat{AB_1H} + \widehat{AC_1H} = 180^\circ$ следует, что четырехугольник AB_1HC_1 можно вписать в окружность. Углы $\angle HB_1C_1$ и $\angle HAC_1$ в этой окружности опираются на одну дугу, поэтому равны между собой. Аналогично доказывается равенство $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$. Осталось проверить, что $\angle HAC_1 = \angle HCA_1$. Но это равенство очевидно следует из подобия прямоугольных треугольников BAA_1 и BCC_1.

Из теоремы 1 можно вывести утверждение о пересекающихся хордах окружности (теорема 2) и теорему о касательной и секущей, проведенных к окружности из некоторой внешней точки (теорема 3).

Теорема 2. *Пусть M — общая точка хорд $[AB]$ и $[CD]$ некоторой окружности ω (рис. 19). Тогда $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что из равенств $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ следует, что треугольники AMD и

CMB подобны. А пропорция $AM/MC = MD/MB$ влечет требуемое равенство. Теорема доказана.

Теорема 3. *Из точки* A, *внешней точки окружности* ω, *проведены к этой окружности касательная и секущая. Пусть* B *— точка касания, а* C *и* D *— точки пересечения секущей с окружностью (рис.20). Тогда* $AB^2 = AC \cdot AD$.

Пусть $C \in [AD]$, тогда $\triangle ABC \sim ABD$. Действительно, кроме общего угла, эти треугольники имеют еще одну пару равных углов: $\angle ADB$ и $\angle ABC$ (эти вписанные углы опираются на одну дугу). Из пропорции $AB/AC = AD/AB$ следует $AB^2 = AC \cdot AD$. Теорема доказана.

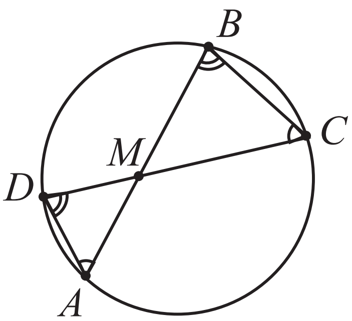


Рис. 19

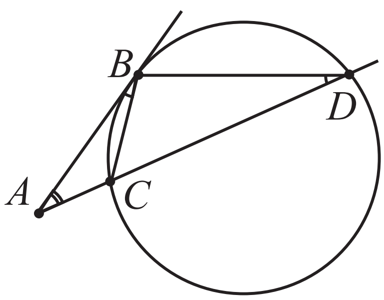


Рис. 20

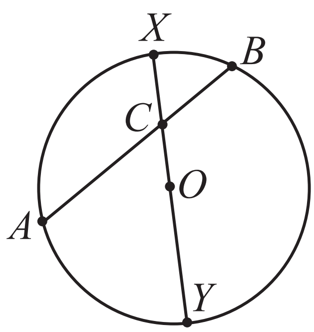


Рис. 21

Пример 4. Центр O данной окружности радиуса R соединен с точкой C, произвольно взятой на хорде AB. Доказать, что $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$.

Решение. Обозначим через X и Y точки пересечения прямой (OC) с данной окружностью (рис. 21). По теореме 2 имеем $CA \cdot CB = CX \cdot CY = (R - OC)(R + OC) = R^2 - OC^2$. Поэтому $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$.

Следующая простая теорема полезна своими многочисленными приложениями.

Теорема 4. *Из точки* A, *внешней точки окружности* $\omega(O, R)$, *проведены касательные* (AB) *и* (AC) *к этой окружности* (B *и* C *— точки касания). Тогда* $AB = AC$.

Справедливость этой теоремы следует из равенства прямоугольных треугольников $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ (у них общая гипотенуза и равные между собой катеты $[OB]$ и $[OC]$).

Рассмотрим несколько задач, при решении которых используются приведенные выше факты.

Пример 5. В треугольник ABC вписана окружность. Она касается стороны $[AB]$ в точке K. Доказать, что $AK = p - a$, где $a = BC$ и p — полупериметр $\triangle ABC$.

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника так, как это указано на рис. 22. Пусть также $b = AC$ и $c = AB$. Из теоремы 4 сразу следуют равенства $AK = AL$, $BK = BM$ и $CL = CM$. Отсюда $2AK = AK + AL = c - BK + b - CL = c + b - a = (a + b + c) - 2a$. Поэтому $AK = p - a$.

Пример 6. В четырехугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Точки A, C и D расположены на окружности, касающейся AB и CB (рис. 23). Угол ABC равен $120°$, а высота в треугольнике ACD, опущенная на строну AD, равна 1. Найти длину отрезка CD.

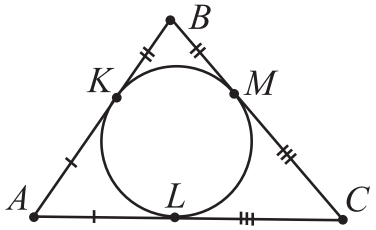


Рис. 22

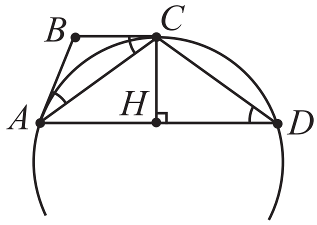


Рис. 23

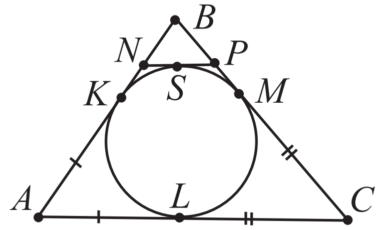


Рис. 24

Решение. Из предыдущей теоремы получаем, что $AB = BC$, а из условия $\widehat{ABC} = 120°$ заключаем, что $\widehat{BCA} = 30°$. Углы BCA и CDA вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\widehat{CDA} = 30°$. И по свойству прямоугольного треугольника с углом $30°$ получаем, что $CD = 2CH = 2$.

Пример 7. В треугольник с периметром, равным 20 см, вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4 см. Найти основание треугольника.

Решение. Обозначим точки так, как это указано на рис. 24 и пусть P_{ABC} и P_{BNP} — периметры $\triangle ABC$ и $\triangle BNP$. Найдем $x = AC$. Заметим, что $BK + BM = P_{ABC} - 2AL - 2CL = 20 - 2x$. Кроме того,

$$P_{BNP} = BN + NS + SP + PB = BN + NK + PM + PB = BK + BM = 20 - 2x.$$

Из подобия $\triangle ABC$ и $\triangle BNP$ получаем

$$\frac{2,4}{x} = \frac{P_{PNB}}{P_{ABC}} = \frac{20 - 2x}{20}.$$

Отсюда $x^2 - 10x + 24 = 0$ или $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.

1.3. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора

Начнем с теоремы, в которой описываются основные свойства высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины его прямого угла.

Теорема 1. Пусть $[CH]$ — высота прямоугольного треугольника ABC ($\widehat{C} = 90°$), $CH = h$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AH = b_c$, $CH = a_c$ (рис. 25). Тогда выполняются следующие свойства:

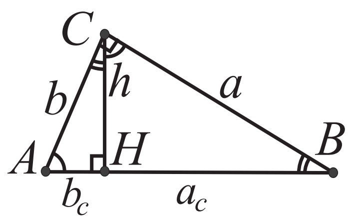


Рис. 25

1. $\triangle ABC \sim \triangle ACH$, $\triangle ABC \sim \triangle CBH$.
2. $\triangle ACH \sim \triangle CBH$.
3. $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.
4. $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Первые два утверждения теоремы следуют из второго признака подобия треугольников. Из $\triangle ABC \sim \triangle CBH$ имеем $a_c/a = a/c$ или $a^2 = c \cdot a_c$. Аналогично доказывается соотношение $b^2 = c \cdot b_c$. Последнее утверждение теоремы следует из подобия $\triangle ACH$ и $\triangle CHB$. Действительно, из пропорции $b_c/h = h/a_c$ сразу следует $h^2 = a_c \cdot b_c$. Теорема доказана.

Самой известной теоремой о прямоугольных треугольниках является, конечно, теорема Пифагора.

Теорема 2. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.*

Одно из многочисленных доказательств этой теоремы связано с достраиванием прямоугольного треугольника ABC до квадрата $CDFH$ (рис. 26). Нетрудно заметить, что четырехугольник $ABGE$ также является квадратом. Действительно, $ABGE$ — ромб, у которого $\widehat{BAE} =$ $180° -$

$-\widehat{A}-\widehat{B}=90^\circ$. Приравнивая теперь площадь квадрата $CDFH$ к сумме площадей пяти составляющих его фигур, получаем $(a+b)^2=4\cdot\dfrac{ab}{2}+c^2$ или $c^2=a^2+b^2$.

Рассмотрим несколько задач, в которых применяются две предыдущие теоремы.

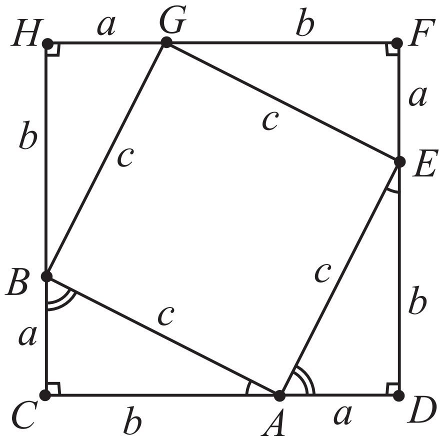


Рис. 26

Пример 1. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

Решение. Пусть $\triangle ABC$ — данный нам треугольник, $a=BC=6$, $b=AC=8$. Сохраним обозначения теоремы 1. Тогда $c=10$, $36=10\cdot a_c$ и $64=10\cdot b_c$. Отсюда $a_c=3,6$, $b_c=6,4$ и $h=\sqrt{3,6\cdot 6,4}=4,8$. Теперь искомые площади легко находятся: $S_1=(3,6\cdot 4,8)/2=8,64$ и $S_2=(6,4\cdot 4,8)/2=15,36$.

Пример 2. Две стороны треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведенные к этим сторонам взаимно перпендикулярны. Найти третью сторону треугольника.

Решение. Обозначим через M точку пересечения медиан $[AA_1]$ и $[CC_1]$ треугольника ABC. По условию $BC=6$, $AB=8$, $\widehat{ACM}=$ $=90^\circ$. Пусть $A_1M=x$ и $C_1M=y$. Тогда $AM=2x$ и $CM=2y$. Из прямоугольных треугольников A_1MC и AMC_1 получаем $9=a^2+4b^2$ и $16=b^2+4a^2$. Откуда $5a^2+5b^2=25$ или $a^2+b^2=5$. Применяя теорему Пифагора к $\triangle AMC$, находим $AC^2=4a^2+4b^2=20$. В результате $AC=2\sqrt{5}$.

В заключении параграфа опишем два разных способа определения основных тригонометрических функций.

Определение А. Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, $\widehat{C}=90^\circ$, $\widehat{A}=\alpha$, $c=AB$, $a=BC$, $b=AC$. Тогда $\sin\alpha=a/c$, $\cos\alpha=b/c$, $\operatorname{tg}\alpha=a/b$, $\operatorname{ctg}\alpha=b/a$.

Определение В. Пусть P_α — такая точка единичной окружности, что $\widehat{xOP_\alpha}=\alpha$ (рис. 27). Тогда $\cos\alpha$ — это абсцисса точки P_α, а $\sin\alpha$ —

ордината точки P_α.

Первое определение позволяет находить значения тригонометрических функций только для острых углов, во втором определении ограничений на величину угла нет. Естественно предположить, что оба эти определения дают одинаковые значения для равных между собой острых углов. Действительно, обозначив через $\sin_A \alpha$ и $\sin_B \alpha$ значения синуса угла α, найденные по определениям A и B, используя рис. 27, получаем $\sin_A \alpha = KP_\alpha/OP_\alpha = KP_\alpha/1 = KP_\alpha = \sin_B \alpha$. Аналогично доказывается равенство $\cos_A \alpha = \cos_B \alpha$ при всех $\alpha \in (0°; 90°)$.

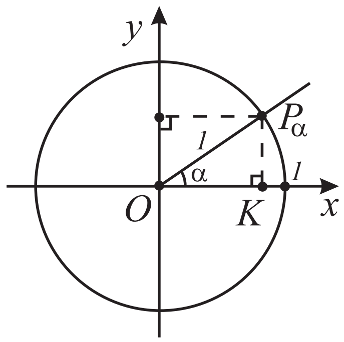


Рис. 27

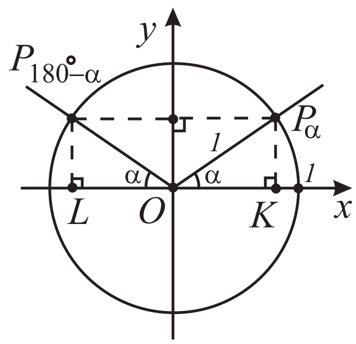


Рис. 28

Заметим, что из теоремы Пифагора, примененной к треугольнику OKP_α (рис.27) следует основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = KP_\alpha^2 + OK^2 = OP_\alpha^2 = 1.$$

В дальнейшем нам понадобятся еще две формулы: $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ и $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$ (формулы приведения). Для доказательства этих формул достаточно заметить следующее: $\triangle OKP_\alpha = \triangle OLP_{180°-\alpha}$ (рис. 28), а также то, что точки P_α и $P_{180°-\alpha}$ лежат по одну сторону относительно оси Oy и по разные — относительно Ox. Поэтому ординаты точек P_α и $P_{180°-\alpha}$ совпадают, а абсциссы отличаются только знаком. Отсюда и следует справедливость данных формул приведения.

Пример 3. Найти значения $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\sin 30°$, $\cos 30°$.

Решение. Для вычисления $\sin 45°$ и $\cos 45°$ рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой $AB = c$ и катетами $AC = BC = a$. По теореме Пифагора получаем $c^2 = 2a^2$ или $c = a\sqrt{2}$. Отсюда $\sin 45° = \cos 45° = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Найдем теперь $\sin 30°$, $\cos 30°$. Пусть теперь $\widehat{A} = 30°$, $\widehat{C} = 90°$. Обозначим через O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Тогда точка O является серединой гипотенузы и $OA = OB = OC = c/2$. Учитывая, что $\widehat{B} = 60°$

заключаем, что $\triangle OBC$ — равносторонний треугольник, откуда $a = c/2$ (кстати, этим фактом мы уже успели воспользоваться в примере 6 предыдущего параграфа). Поэтому $\sin 30^\circ = c/2c = 1/2$. Из основного тригонометрического тождества находим, что $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$.

1.4. Теорема синусов

Напомним, что срединным перпендикуляром к отрезку $[AB]$ называется прямая a, проходящая через середину этого отрезка и перпендикулярная прямой (AB). Легко доказывается, что всякая точка прямой a равноудалена от концов отрезка $[AB]$ и наоборот, каждая точка плоскости, равноудаленная от точек A и B, принадлежит прямой a. Итак, срединный перпендикуляр к отрезку $[AB]$ является геометрическим местом точек (сокращенно — ГМТ) плоскости, равноудаленных от концов этого отрезка. Из этого свойства немедленно следует, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в одной точке, равноудаленной от всех трех вершин этого треугольника. Эта точка служит центром описанной окружности около этого треугольника. Доказанное нами существование описанной около треугольника окружности, а также свойства вписанных углов являются основой доказательства следующей теоремы, называющейся *теоремой синусов.*

Теорема 1. *Пусть R — радиус описанной около треугольника ABC окружности и $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда*

$$2R = \frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}.$$

Для доказательства теоремы опишем около треугольника окружность с центром в точке O и проведем диаметр $[BD]$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть точки A и D расположены по одну сторону от прямой (BC) (рис. 29). Тогда углы BAC и BDC опираются на одну дугу и поэтому равны. Кроме того, $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Отсюда $\sin\angle A = \sin\angle D = BC/BD = a/2R$ или $2R = a/\sin\angle A$. Аналогично доказываются соотношения $2R = b/\sin\angle B$ и $2R = c/\sin\angle C$.

Второй случай. Точки A и D расположены по разные стороны от прямой (BC) (рис. 30). Тогда по свойству вписанного в окружность четырехугольника имеем $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{A}$. Используя теперь одну из формул приведения, получаем $\sin\angle D = \sin\angle A$. В дальнейшем доказательство аналогично первому случаю. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько задач, в которых используется теорема синусов.

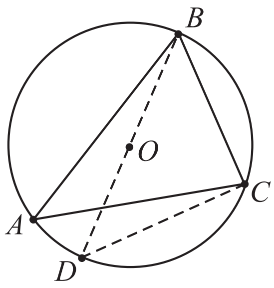


Рис. 29

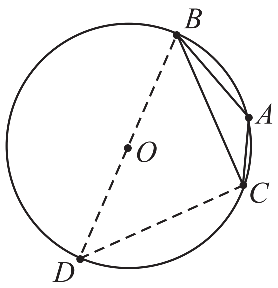


Рис. 30

Пример 1. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 30° и 45°. Длина стороны BC равна 3. Найти длину стороны AC и радиус описанной около ABC окружности.

Решение. По теореме синусов сразу получаем

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}.$$

Подставляя данные нам значения, находим $2R = 3/0,5$ или $R = 3$ и $AC = 6\sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}$.

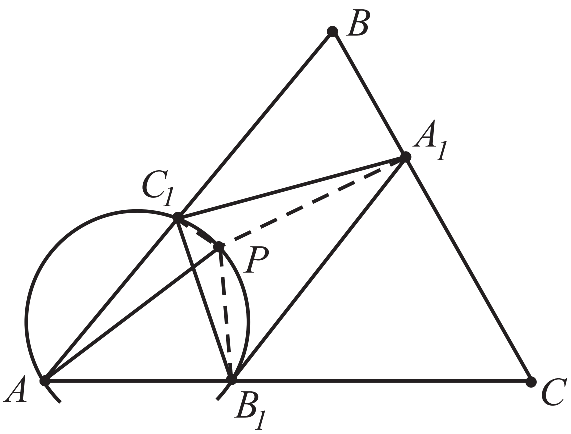


Рис. 31

Пример 2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и CBD равны.

Решение. Обозначим через R_1 и R_2 радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. По теореме синусов

$$2R_1 = \frac{BD}{\sin\angle A} = \frac{BD}{\sin\angle C} = 2R_2.$$

Отсюда и следует требуемое $R_1 = R_2$.

Пример 3. В треугольнике ABC дано: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, R — радиус описанной окружности. Из точки P, лежащей внутри треугольника ABC, опущены перпендикуляры PA_1, PB_1, PC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно (рис. 31). Докажите, что длины сторон треугольника $A_1B_1C_1$ равны $\dfrac{a \cdot PA}{2R}$, $\dfrac{b \cdot PB}{2R}$, $\dfrac{c \cdot PC}{2R}$.

Решение. Поскольку

$$\widehat{AB_1P} = \widehat{AC_1P} = 90^\circ,$$

четырехугольник AB_1PC_1 вписан в окружность, причем отрезок $[AP]$ является диаметром этой окружности. Применяя теорему синусов к треугольнику AC_1B_1, получаем $AP = B_1C_1/\sin\angle A$. По той же самой теореме, но уже из треугольника ABC, имеем $2R = a/\sin\angle A$, откуда $\sin\angle A = a/2R$. В результате $AP = B_1C_1 : \dfrac{a}{2R}$ или $B_1C_1 = \dfrac{a \cdot PA}{2R}$. Аналогично определяются остальные стороны $\triangle A_1B_1C_1$.

1.5. Площадь треугольника

Площадь треугольника является его важной числовой характеристикой. Существует много формул для ее вычисления. В эти формулы входят разные элементы треугольника. Поэтому площадь часто используют для выражения одних элементов треугольника через другие. Так, например, для нахождения радиусов вписанной или описанной окружности треугольника часто сначала находят его площадь. Прежде, чем мы приведем основные формулы вычисления площади треугольника, вспомним, что площадь прямоугольника есть произведение длин двух его смежных сторон. Из этого факта легко доказывается, что площадь параллелограмма равна произведению длины его основания на высоту, проведенную к этой стороне (на рис. 32 указан способ “превращения” параллелограмма $ABCD$ в прямоугольник BCH_1H той же площади).

Теорема 1. *Обозначим в треугольнике ABC длины сторон AB, AC, BC через c, b, a соответственно, через p — его полупериметр, h_a — длину высоты из вершины A; R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Тогда площадь треугольника может быть вычислена по следующим формулам.*

1. $S_{ABC} = ah_a/2$.

2. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin\angle C$.

3. $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$.

4. $S_{ABC} = pr$.

5. $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона–Архимеда).

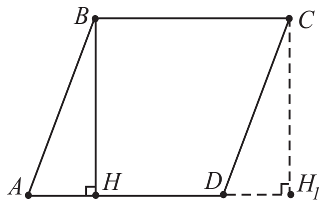


Рис. 32

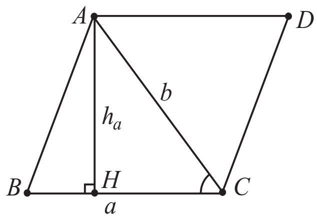


Рис. 33

Первая формула следует из того, что площадь параллелограмма $ABCD$ на рис. 33 в два раза больше площади $\triangle ABC$. Вторая формула следует из первой формулы и равенства $h_a = b\sin\angle C$, полученного из прямоугольного треугольника CAH (рис. 33). Третья формула получается из второй и из теоремы синусов, дающей $\sin\angle C = c/2R$. Четвертая формула справедлива для всех многоугольников, в которые можно вписать окружность. Действительно, обозначим через O — центр окружности радиуса r, вписанной в многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ с полупериметром p, и соединим точку O с каждой вершиной многоугольника. Эти отрезки разобьют многоугольник на n треугольников. Заметим, что радиус вписанной окружности является высотой в каждом из этих треугольников, поэтому площадь многоугольника равна

$$S_{A_1\ldots A_n} = \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = r\cdot p.$$

Одно из доказательств последней формулы вычисления площади треугольника (формулы Герона-Архимеда) основано на свойствах вневписанной окружности. Определение вневписанной окружности и ее свойства предлагаются читателю в контрольных задачах.

Теперь рассмотрим несколько примеров на использование перечисленных выше формул.

Пример 1. На стороне AC треугольника ABC произвольно выбрана точка D. Доказать, что отношение площадей треугольников ABD и CBD равно $AD : DC$.

Решение. Обозначим через h общую высоту $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$, проведенную из вершины B к прямой (AC). Тогда

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AD \cdot h/2}{DC \cdot h/2} = \frac{AD}{DC}.$$

Пример 2. Площадь треугольника ABC равна 30. На стороне AC выбрана точка D так, что $AD : DC = 2 : 3$. Длина перпендикуляра DE, опущенного на сторону BC, равна 9. Найти BC.

Решение. По предыдущей задаче $S_{CBD}/S_{ABC} = 3/5$, или $S_{CBD} = 18$. А из равенства $9 \cdot BC/2 = S_{CBD} = 18$ находим $BC = 4$.

Пример 3. Пусть треугольники ABC и A_1B_1C имеют общий угол C. Известно, что $AC = b$, $BC = a$, $A_1C = b_1$ и $B_1C = a_1$. Найти отношение площадей треугольников ABC и A_1B_1C.

Решение. Применим формулу 2 теоремы 1 для нахождения площадей треугольников ABC и A_1B_1C.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin\angle C}{\frac{1}{2}a_1b_1\sin\angle C} = \frac{ab}{a_1b_1}.$$

Пример 4. В треугольнике ABC точка L делит пополам отрезок BC, а точка K делит пополам отрезок BL. Из точки A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника ABC отрезки $LD = AL$ и $KF = AK/3$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $KLDF$.

Решение. Обозначим через S площадь $\triangle ABC$. Из первого примера следует, что $S_{AKL} = S/4$. Используя теперь результат предыдущего примера для треугольников AFD и AKL, получаем

$$\frac{S_{AFD}}{S_{AKL}} = \frac{AF \cdot AD}{AK \cdot AL} = \frac{AF}{AK} \cdot \frac{AD}{AL} = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Откуда $S_{AFD} = 2S/3$ и $S_{KLDF} = 2S/3 - S/4 = 5S/12$. Поэтому искомое отношение равно $12/5$.

Пример 5. В равнобедренном треугольнике основание равно 16, а боковая сторона равна 10. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Решение. Пусть $AB = BC = 10$, $AC = 16$, $[BH]$ — высота треугольника ABC (рис. 34). Тогда $CH = 8$ и $BH = 6$. Отсюда $S_{ABC} = 6 \cdot 16/2 = 48$. Учитывая, что полупериметр p_{ABC} данного треугольника равен 18, находим радиус вписанной окружности по формуле

$$r = S_{ABC}/p_{ABC} = 48/18 = 8/3.$$

Из формулы $R = abc/(4S)$ получим $R = 25/3$. Обозначим через O и O_1 соответственно центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Для нахождения OO_1 важно заметить, что точка O_1 лежит вне данного треугольника. Это следует из $O_1B = R = 25/3 > 6 = BH$. Поэтому $OO_1 = O_1H + HO = (R - BH) + r = 5$.

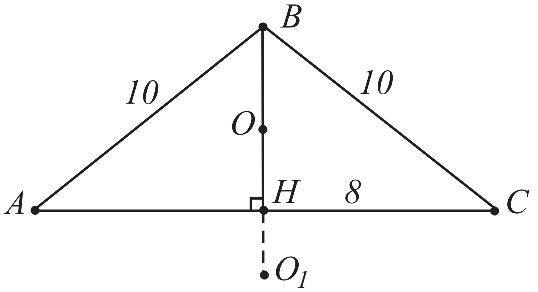


Рис. 34

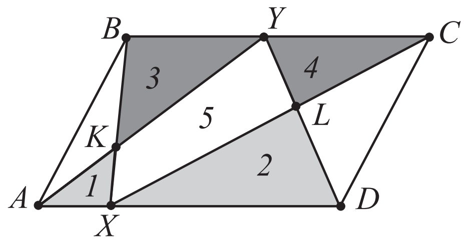


Рис. 35

Пример 6. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ произвольно выбраны точки X и Y. Отрезки BX и AY пересекаются в точке K, а отрезки CX и DY — в точке L. Докажите, что $S_{AKX} + S_{DLX} = S_{BKY} + S_{CLY}$.

Решение. Занумеруем фигуры так, как это указано на рис. 35. Треугольники AYD и BXC равновелики, поскольку имеют равные основания и высоты. Отсюда

$$S_1 + S_2 + S_5 = S_{AYD} = S_{BXC} = S_3 + S_4 + S_5 \Rightarrow S_1 + S_2 = S_3 + S_4.$$

Пример 7. Медианы AA_1 и CC_1 треугольника ABC равны соответственно 24 и 18, а сторона AC равна 20. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Обозначим точку пересечения медиан $[AA_1]$ и $[CC_1]$ через M. Тогда, используя свойства медиан треугольника, получаем $AM = 24 \cdot 2/3 = 16$, $CM = 18 \cdot 2/3 = 12$ и $S_{AMC} = S_{ABC}/3$. Полупериметр треугольника AMC равен $p = (12+16+20)/2 = 24$. Найдем S_{AMC} по формуле Герона-Архимеда.

$$S_{AMC} = \sqrt{24 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12} = \sqrt{12 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 8} = 12 \cdot 8 = 96.$$

Отсюда $S_{ABC} = 288$.

1.6. Биссектрисы треугольника, их свойства

Напомним, что биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины этого угла и делящий угол пополам. Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла этого треугольника, заключенный внутри треугольника. Длину биссектрисы $[AA_1]$ принято обозначать через l_a. В следующей теореме перечислим некоторые свойства биссектрис треугольника.

Теорема 1. *Пусть $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ — биссектрисы треугольника ABC, тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной окружности.*
2. $\dfrac{S_{ABA_1}}{S_{ACA_1}} = \dfrac{AB}{AC}$.
3. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BA_1}{A_1C}$ *(основное свойство биссектрисы).*
4. $l_a = \dfrac{2AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A/2)}{AB + AC}$.

Хорошо известно, что все точки биссектрисы угла равноудалены от его сторон. И наоборот, любая точка угла, равноудаленная от его сторон, лежит на его биссектрисе. Поэтому, обозначив через O точку пересечения биссектрис $[AA_1]$ и $[BB_1]$, заключаем, что точка O равноудалена от всех трех сторон треугольника. Значит, точка O одновременно лежит на $[CC_1]$ и является центром вписанной окружности. Для доказательства второго свойства заметим, что точка A_1 равноудалена от сторон $[AB]$ и $[AC]$ треугольника ABC. Это означает, что треугольники ABA_1 и ACA_1 имеют равные высоты, проведенные из точки A_1, посему их площади относятся как основания, к которым проведены эти высоты, т.е. $S_{ABA_1}/S_{ACA_1} =$

$= AB/AC$. Кроме того, эти же треугольники имеют одинаковую высоту, проведенную из точки A, поэтому $S_{ABA_1}/S_{ACA_1} = BA_1/A_1C$. Учитывая предыдущее равенство, получаем $AB/AC = BA_1/A_1C$. Вычисление длины биссектрисы основано на тригонометрической формуле синуса двойного угла $\sin\angle A = 2\sin(\angle A/2)\cos(\angle A/2)$ и равенстве $S_{ABC} = S_{ABA_1} + S_{ACA_1}$. Из последнего равенства

$$\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A = \frac{1}{2}l_a(AB+AC)\sin\frac{\angle A}{2} \Rightarrow l_a = \frac{AB\cdot AC\sin\angle A}{(AB+AC)\sin(\angle A/2)}.$$

Теперь из формулы синуса двойного угла следует требуемое равенство.

Разберем теперь несколько задач, в решении которых используются свойства биссектрис.

Пример 1. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Определить площадь треугольника.

Решение. Пусть $[AA_1]$ — биссектриса $\triangle ABC$ и $\widehat{C} = 90^\circ$. Сначала установим, длина какого из двух отрезков $[CA_1]$ или $[A_1B]$ равна 4. По основному свойству биссектрисы $CA_1/A_1B = AC/AB < 1$. Следовательно, $CA_1 = 4$ и $A_1B = 5$. Обозначив через $b = CA$ и $c = AB$, получаем систему

$$\begin{cases} b, c > 0, \\ b/c = 4/5, \\ b^2 + 81 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b, c > 0, \\ b = 4c/5, \\ 9c^2/25 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 15, \\ b = 12. \end{cases}$$

Поэтому искомая площадь равна $9\cdot 12/2 = 54$.

Пример 2. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне треугольника. Найти отрезки, на которые центр окружности делит бо́льшую сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC выполняется: $AC = 18$, $AB = 15$, $BC = 12$. Точка O — центр данной окружности. Обозначим длины отрезков AO и OC через x и y соответственно. Заметим, что точка O равноудалена от сторон $[BA]$ и $[BC]$, поэтому $[BO]$ — биссектриса $\triangle ABC$. Опять, используя основное свойство биссектрисы, получаем систему

$$\begin{cases} x/y = 15/12, \\ x + y = 18. \end{cases}$$

Из этой системы находим $x = 10$, $y = 8$.

Пример 3. Дан треугольник ABC такой, что $AB = 15$, $BC = 12$ и $AC = 18$. Вычислить, в каком отношении центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису угла C.

Решение. Обозначим через O центр вписанной в треугольник ABC окружности и найдем отношение $CO : OC_1$, где отрезок $[CC_1]$ является биссектрисой треугольника ABC. Для начала определим $x = BC_1$ и $y = C_1A$. Аналогично предыдущим примерам составляем систему уравнений $x/y = 12/18$ и $x + y = 15$, из которой находим $x = 6$, $y = 9$. Теперь рассмотрим треугольник CBC_1. В нем отрезок $[BO]$ является биссектрисой, поскольку O — точка пересечения биссектрис $\triangle ABC$. Теперь, по основному свойству биссектрисы, получаем

$$CO : OC_1 = CB : BC_1 = 12/6 = 2 : 1.$$

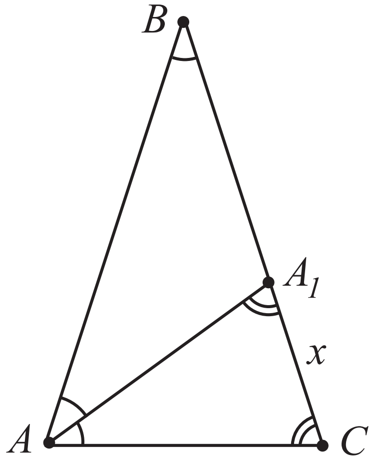


Рис. 36

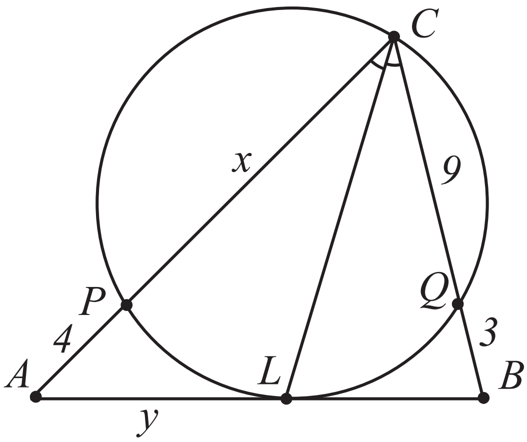


Рис. 37

Пример 4. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $36°$, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника.

Решение. Обозначим точки так, как это указано на рис. 36. Тогда $\widehat{A} = \widehat{C} = 72°$, $\widehat{BAA_1} = \widehat{CAA_1} = 36°$ и $\widehat{AA_1C} = 72°$. Отсюда следует, что равнобедренными будут треугольники ABA_1 и ACA_1. Отсюда $AC = BA_1 = AA_1 = \sqrt{20}$. Обозначим теперь через x длину отрезка $[CA_1]$. Основное свойство биссектрисы дает нам соотношение $x/\sqrt{20} = \sqrt{20}/(x + \sqrt{20})$. Получаем отсюда квадратное уравнение

$x^2 + x\sqrt{20} - 20 = 0$, единственным неотрицательным корнем которого является $x = 5 - \sqrt{5}$. В результате, основание треугольника равно $2\sqrt{5}$, а боковые стороны равны по $5 + \sqrt{5}$.

Пример 5. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке L, проходит через вершину C и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AB и AC, если известно, что $CQ = 9$, $QB = 3$, $AP = 4$ и CL является биссектрисой угла C.

Решение. Будем использовать обозначения рисунка 37. Сразу отметим, что по свойству касательной и секущей, проведенных из точки B, имеем $BL^2 = BQ \cdot BC = 36$, т.е. $BL = 6$. Аналогично $y^2 = 4 \cdot (x + 4)$. Второе соотношение между переменными x и y дает нам основное свойство биссектрисы: $(4+x)/y = 12/6 = 2$. Из этих равенств получаем $y = 8$ и $x = 12$. В результате, $AB = 14$ и $AC = 16$.

1.7. Теорема косинусов

Теорема косинусов позволяет находить сторону треугольника, зная длины двух других его сторон и косинус угла между ними.

Теорема 1. Пусть в треугольнике ABC выполняется: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$.

Обозначим длину высоты $[BH]$ этого треугольника через h и рассмотрим несколько случаев.

Первый случай: точка H лежит на отрезке $[AC]$ (рис. 38). Тогда $AH = c \cdot \cos\angle A$, $h = c \cdot \sin\angle A$ и $CH = b - c \cdot \cos\angle A$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику CBH получаем $a^2 = h^2 + CH^2 = c^2 \cdot \sin^2\angle A +$ $+(b - c \cdot \cos\angle A)^2 = c^2(\sin^2\angle A + \cos^2\angle A) + b^2 - 2bc\cos\angle A = b^2 + c^2 -$ $-2bc\cos\angle A$.

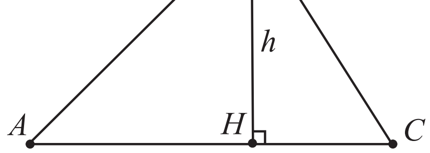


Рис. 38

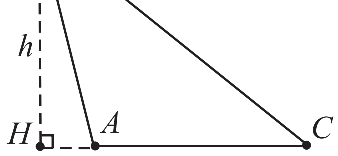


Рис. 39

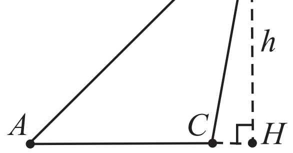


Рис. 40

Второй случай: точка A лежит на отрезке $[HC]$ (рис. 39). Тогда $AH = c \cdot \cos(180^\circ - \widehat{A}) = -c \cdot \cos\angle A$, $h = c \cdot \sin(180^\circ - \widehat{A}) = c \cdot \sin\angle A$ и $CH = b + c \cdot \cos(180^\circ - \widehat{A}) = b - c \cdot \cos\angle A$. Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику CBH.

Случай, когда точка C принадлежит отрезку $[AH]$ (рис. 40) рассматривается аналогично предыдущим случаям. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь несколько примеров использования теоремы косинусов.

Пример 1. Дан правильный треугольник ABC. Точка K делит сторону AC в отношении $2:1$, а точка M — сторону AB в отношении $1:2$ (считая в обоих случаях от вершины A). Доказать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Обозначим через a длину стороны $\triangle ABC$, O — центр описанной окружности, R — ее радиус. Из условия задачи следует, что $AK = 2a/3$ и $AM = a/3$. Применяя к треугольнику AKM теорему косинусов, получаем

$$KM^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow KM = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Для нахождения R воспользуемся теоремой синусов: $2R = a/\sin 60^\circ \Rightarrow R = a/\sqrt{3}$. Отсюда следует равенство $R = KM$.

Пример 2. Доказать, что длина медианы треугольника ABC, проведенной к стороне AC равна $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Решение. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ABCD$ так, как это сделано на рис. 41. Применив теорему косинусов к треугольникам BCD и ABC, получим

$$4m_b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(180^\circ - \widehat{B}) = a^2 + c^2 + 2ac\cos\angle B,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B.$$

Сложив эти равенства, приходим к $4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2)$ или $4m_b^2 = 2(a^2+c^2) - b^2$. Из последнего соотношения легко следует требуемое равенство.

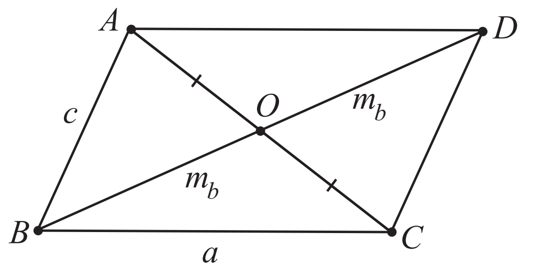


Рис. 41

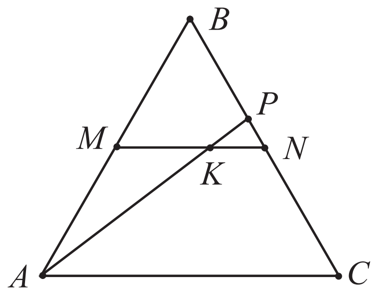


Рис. 42

Пример 3. В равностороннем треугольнике ABC со стороной $AB = a$ проведена средняя линия MN, параллельная AC. Точка K делит отрезок MN в отношении $MK : KN = 2 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P (рис. 42). Найти длину отрезка AP.

Решение. Из условия задачи следует, что $MN = a/2$ и $KN = MN/3 = a/6$. Поэтому коэффициент подобия $\triangle KPN$ и $\triangle APC$ равен $1/6$. Отсюда $PC = 6PN$ или $PN + a/2 = 6PN$. Значит, $PN = a/10$ и $PC = 3a/5$. Теперь, применив к треугольнику APC теорему косинусов, получим

$$AP^2 = a^2 + \frac{9a^2}{25} - 2 \cdot a \cdot \frac{3a}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19a^2}{25} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{19}}{5}.$$

Пример 4. Найти величину $\cos 36^\circ$.

Решение. Из примера 4 предыдущего параграфа следует существование равнобедренного треугольника со сторонами $2\sqrt{5}$, $5 + \sqrt{5}$, $5 + \sqrt{5}$ и углом 36° при вершине. Для упрощения вычислений рассмотрим подобный ему треугольник со сторонами 2, $1 + \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5}$ и применим к этому треугольнику теорему косинусов. Тогда

$$4 = 2(1 + \sqrt{5})^2 - 2(1 + \sqrt{5})^2 \cos 36^\circ \Rightarrow$$

$$\cos 36^\circ = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Глава 2

Четырехугольники

2.1. Четырехугольники и окружности

Этот параграф начнем с обсуждения двух вопросов: когда около четырехугольника можно описать окружность и какие условия необходимы и достаточны для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность. Ответ на первый вопрос был получен в предыдущем задании (задание №4): *около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда* $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ$. Для ответа на второй вопрос нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Первое из них — о сравнении в треугольнике длин сторон и величин противолежащих им углов.

Лемма 1. *В треугольнике ABC выполняется неравенство $AC > AB$ тогда и только тогда, когда угол B больше угла C.*

Предположим сначала, что $AC > AB$ и выберем на стороне AC такую точку D, что $AD = AB$ (рис. 1). Угол ADB является внешним углом треугольника BDC, поэтому $\widehat{C} < \widehat{ADB} = \widehat{ABD} < \widehat{B}$. Теперь докажем обратное утверждение. Пусть $\widehat{B} > \widehat{C}$. Предположив противное, т.е. $AC \leqslant AB$ по уже доказанной части утверждения получаем $\widehat{B} \leqslant \widehat{C}$. Последнее противоречит условию $\widehat{B} > \widehat{C}$. Лемма доказана.

Лемма 2 (неравенство треугольника). *В любом треугольнике сумма длин двух его сторон всегда больше длины третьей его стороны.*

Будем считать, что $[AC]$ — бо́льшая сторона треугольника и докажем, что $AB + BC > AC$. Снова воспользуемся рис. 1. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} < 90^\circ$. Значит, $\widehat{BDC} > 90^\circ$ и по предыдущей лемме $BC > CD$. Откуда $AB + BC > AD + DC = AC$. Лемма доказана.

Следствием предыдущей леммы является следующее утверждение: если хотя бы одна вершина ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ не лежит на прямой (A_1A_n), то $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Действительно, если некоторая вершина A_i не лежит на прямой (A_1A_n), то, применяя лемму 2 к треугольнику $A_1A_iA_n$, получим $A_1A_n < A_1A_i + A_iA_n$. Рассматривая теперь две ломаные $A_1\ldots A_i$ и $A_i\ldots A_n$, содержащие уже меньшее количество звеньев, приходим к неравенствам $A_1A_i \leqslant A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{i-1}A_i$ и $A_iA_n \leqslant A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + \ldots + A_{n-1}A_n$. Таким образом, $A_1A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

Теорема 1. *В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны между собой, т.е. $AB + CD = AD + BC$.*

Предположим сначала, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность (рис. 2). Используя равенство отрезков касательных из одной точки к окружности, обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 2. Тогда $AB+CD = x+y+z+t$ и $AD+BC = x+t+y+z$, откуда и следует требуемое равенство $AB + CD = AD + BC$.

Пусть теперь справедливо равенство $AB+CD = AD+BC$. Докажем, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Предположим, что этого сделать нельзя. Тогда существует окружность ω, касающаяся трех сторон этого четырехугольника и не пересекающая четвертую сторону (первый случай) или пересекающая ее в двух точках (второй случай). Доказательство обоих случаев схожи, поэтому мы рассмотрим только первый из них. Пусть ω касается сторон $[AB]$, $[BC]$, AD и не пересекает $[CD]$ (рис. 3). Выберем на лучах $[BC)$ и $[AD)$ точки C_1 и D_1 так, что прямая (C_1D_1) касается окружности ω. Обозначим длины отрезков так, как это сделано на рис. 3. Тогда равенство $AB + CD = AD + BC$ принимает вид $a+c = b+d \quad (1)$. Поскольку в четырехугольник ABC_1D_1 вписана окружность, верно $a + c_1 = (b - x) + (d - y) \quad (2)$. Вычитая из (1) равенство (2), получаем $c - c_1 = x + y$ или $c = x + y + c_1$, что противоречит следствию предыдущей леммы. Теорема доказана.

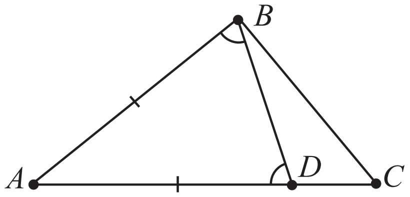


Рис. 1

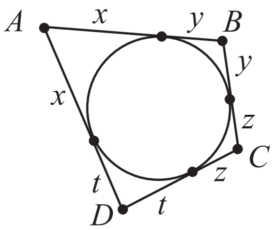


Рис. 2

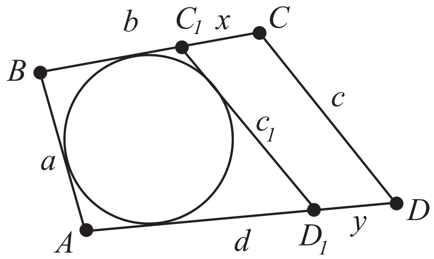


Рис. 3

Разберем несколько задач, в решении которых используются свойства вписанных и описанных четырехугольников.

Пример 1. Через середину C дуги AB проведены две произвольные прямые, которые пересекают окружность в точках D и E, а хорду AB — в точках F и G (рис. 4). Доказать, что четырехугольник $DEGF$ может быть вписан в окружность.

Решение. Достаточно доказать, что $\widehat{D} + \widehat{FGE} = 180^\circ$. Выразим величины углов через величины дуг: $\widehat{D} = (\smile CB^\circ + \smile BE^\circ)/2$, $\widehat{FGE} = (\smile AD^\circ + \smile DE^\circ + \smile BC^\circ)/2$. Учитывая, что $\smile BC^\circ = \smile AC^\circ$, получаем

$$\widehat{D} + \widehat{FGE} = \frac{1}{2}(\smile CB^\circ + \smile BE^\circ + \smile AD^\circ + \smile DE^\circ + \smile AC^\circ) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

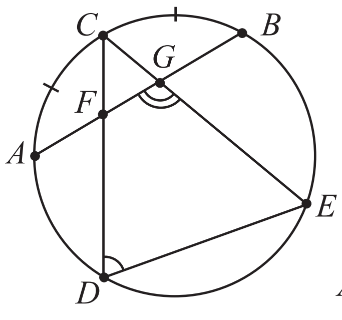


Рис. 4

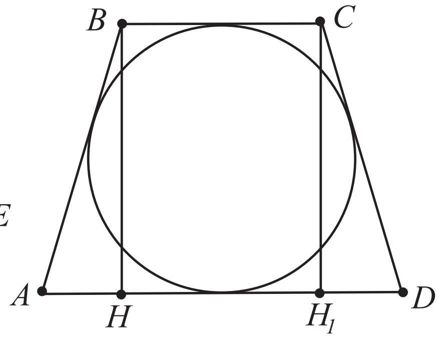


Рис. 5

Пример 2. Доказать, что трапецию можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная.

Решение. Пусть $[AD]$ и $[BC]$ — основания трапеции, тогда $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$. Очевидно, что условие равнобедренности трапеции равносильно равенству $\angle A = \angle D$. Теперь воспользуемся критерием того, что вокруг четырехугольника можно описать окружность: трапеция $ABCD$ вписана в окружность тогда и только тогда, когда $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$. Учитывая равенство $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$, получаем требуемое $\angle A = \angle D$.

Пример 3. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение. Пусть $[BH]$ и $[CH_1]$ — высоты трапеции $ABCD$ (рис. 5). Тогда $BH = 15$ и $AH = 8$. Обозначим длины оснований AD и BC трапеции через a и b соответственно. Из равенства треугольников ABH и CDH_1 следует $AH = H_1D$, поэтому $(a-b)/2 = 8$. Используя теорему 1, получаем $a + b = 34$. Из последних двух равенств находим, что $a = 25$, $b = 9$.

Еще одним результатом о вписанных четырехугольниках является теорема Птолемея.

Теорема 2 (Птолемей). *Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то произведение его диагоналей равно сумме попарных произведений его противоположных сторон.*

Не ограничивая общность, будем считать, что $\overset{\frown}{ABD} \geqslant \overset{\frown}{CBD}$ (рис. 6). Обозначим через K такую точку диагонали AC, что $\angle ABK = \angle CBD$. Используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получаем, что $\angle BAC = \angle BDC$ и $\angle BCA = \angle BDA$. Отсюда $\triangle ABK \sim \triangle BDC$ и $\triangle BCK \sim \triangle BDA$. Переписывая пропорции $AK/CD = AB/BD$ и $KC/AD = BC/BD$ в виде произведения, имеем $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ и $KC \cdot BD = BC \cdot AD$. Складывая последние два равенства, получаем требуемое. Теорема доказана.

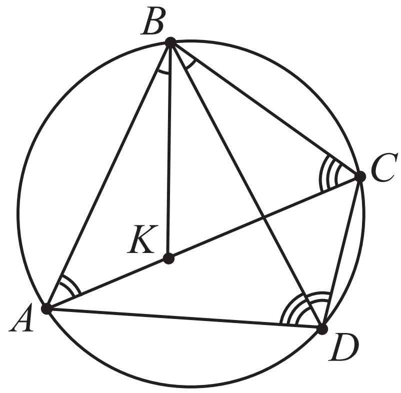


Рис. 6

Пример 4. На окружности ω, описанной около правильного треугольника ABC произвольно выбрана точка M. Доказать, что длина наибольшего из отрезков $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$ равна сумме длин оставшихся двух отрезков.

Решение. Пусть $[MA]$ — наибольший из отрезков. Обозначим через a длину стороны треугольника ABC и применим теорему Птолемея к четырехугольнику $ABMC$: $AM \cdot a = MC \cdot a + BM \cdot a$. Сокращая обе части этого равенства на a, получаем требуемое соотношение.

2.2. Параллелограмм и ромб, их свойства

Определение. Четырехугольник $ABCD$ называется параллелограммом, если его противоположные стороны равны и параллельны, т.е. $AB = CD$, $AD = BC$, $(AB) \| (CD)$, $(AD) \| (BC)$.

В следующей теореме перечислены основные признаки параллелограмма.

Теорема 1. *Пусть $ABCD$ — четырехугольник, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$ABCD$ — параллелограмм;*

2. *$AB = CD$, $AD = BC$;*

3. *$(AB) \| (CD)$, $(AD) \| (BC)$;*

4. *$AB = CD$, $(AB) \| (CD)$;*

5. *Диагонали $[AC]$ и $[BD]$ точкой пересечения делятся пополам.*

Утверждение $(1) \Rightarrow (2)$ сразу следует из определения.

Докажем $(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 7), тогда $\triangle ABC = \triangle CDA$ (по трем сторонам). Отсюда $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$. Из этих равенств следует $(AB) \| (CD)$, $(AD) \| (BC)$.

Докажем $(3) \Rightarrow (4)$. Из $(AB) \| (CD)$, $(AD) \| (BC)$ следуют равенства $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle CAD$ (рис. 8). Это означает, что треугольники ABC и CDA равны по стороне и двум прилежащим углам. Поэтому $AB = CD$.

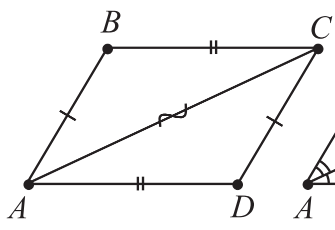


Рис. 7

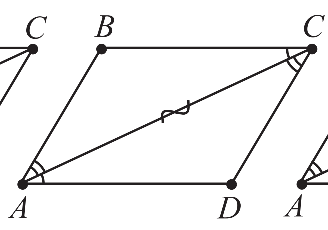


Рис. 8

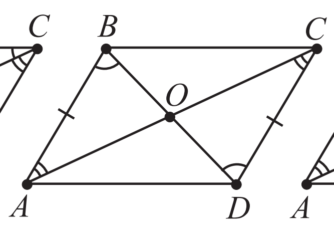


Рис. 9

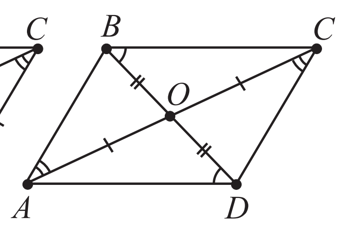


Рис. 10

Докажем $(4) \Rightarrow (5)$. Обозначим через O точку пересечения диагоналей $ABCD$ (рис. 9). Из условия $(AB)\|(CD)$ получаем, что $\angle BAO = \angle OCD$ и $\angle ABO = \angle ODC$. Вместе с условием $AB = CD$ последние два равенства влекут $\triangle ABO = \triangle OCD$. Значит, $AO = OC$ и $BO = OD$.

И, наконец, нам осталось доказать $(5) \Rightarrow (1)$. Из равенств $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 10) следуют равенства: $\triangle ABO = \triangle OCD$, $\triangle AOD = \triangle OCB$, $\angle BAO = \angle OCD$ и $\angle OBC = \angle ODA$. Отсюда $AB = CD$, $AD = BC$, $(AB)\|(CD)$, $(AD)\|(BC)$. Теорема доказана.

Для вычисления площади параллелограмма $ABCD$ можно использовать формулы: $S_{ABCD} = ah$ или $S_{ABCD} = ab\sin\widehat{A}$. В этих формулах a и b означают длины смежных сторон параллелограмма, h — длина высоты, проведенной к стороне a. Первая из этих формул была доказана в задании №4, а вторая является следствием первой, если заметить, что $h = b\sin\widehat{A}$. При изучении свойств, присущих всем параллелограммам, нельзя пройти мимо равенства, связывающего длины диагоналей и длины сторон параллелограмма. О нем в следующей теореме.

Теорема 2. *В произвольном параллелограмме сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

Обозначим через a, b, d_1, d_2 соответственно длины отрезков $[AB]$, $[AD]$, $[AC]$, $[BD]$ и докажем, что $d_1^2+d_2^2 = 2(a^2+b^2)$. Применяя теорему косинусов к треугольникам ABD и ACD, имеем $d_2^2 = a^2+b^2-2ab\cos\widehat{A}$ и $d_1^2 = a^2+b^2+2ab\cos\widehat{A}$ (в последнем равенстве мы воспользовались одной из формул приведения $\cos(180^\circ - \widehat{A}) = -\cos\widehat{A}$). Складывая эти равенства, получаем требуемое. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько задач, в решении которых используются свойства параллелограммов.

Пример 1. Периметр параллелограмма равен 90 и острый угол равен 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ верно: $\widehat{A} = 60^\circ$ и $AD > AB$ (рис. 11). Обозначим величину меньшего из углов, на которые делит диагональ тупой угол параллелограмма, через α. Тогда из условия $AD > AB$ следует, что $\widehat{ADB} < \widehat{ABD}$, и поэтому $\widehat{CBD} = \alpha$ и $\widehat{ABD} = 3\alpha$. Отсюда $4\alpha = 120^\circ$ или $\alpha = 30^\circ$. В получившемся прямоугольном треугольнике ABD имеем $2AB = AD$. Используя периметр параллелограмма, приходим к $6AB = 90$. В результате, $AB = 15$ и $AD = 30$.

Пример 2. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ — $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

Решение. Будем придерживаться обозначений рис. 12. Отрезок OK — средняя линия треугольника BDH, поэтому $BH = 2OK = \sqrt{75}$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $AB = BH/\sin 60^\circ = 10$ и $AH = AB/2 = 5$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику DBH, получаем $DH = \sqrt{124 - 75} = 7$, $AD = AH + HD = 12$. Теперь, используя теорему 2, приходим к равенству $AC^2 + 124 = 2(100 + 144)$. Отсюда $AC = 2\sqrt{91}$.

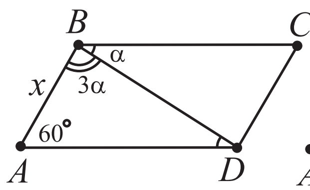


Рис. 11

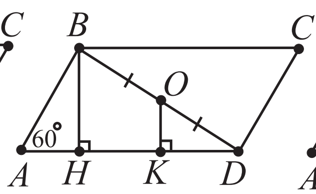


Рис. 12

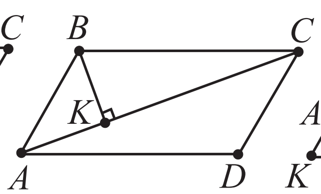


Рис. 13

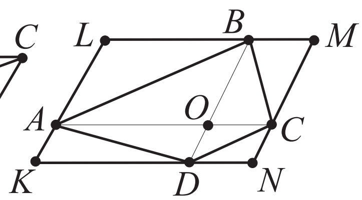


Рис. 14

Пример 3. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см. Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

Решение. Пусть $AB = a$ и $BC = b$ и $a < b$ и $[BK]$ — высота треугольника ABC (рис. 13). Из прямоугольных треугольников ABK и BCK получаем $a^2 - 6^2 = b^2 - 15^2$ или $b^2 - a^2 = 189$. Учитывая условие $b - a = 7$, приходим к $b + a = 27$, откуда $a = 10$ и $b = 17$. Длину оставшейся диагонали находим по теореме 2:

$$BD = \sqrt{2(100 + 289) - 441} = \sqrt{337}.$$

Случай, когда проводится перпендикуляр из точки A к диагонали BD, рассматривается аналогично и приводит к тем же результатам.

Пример 4. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

Решение. Используем обозначения рис. 14. Заметим, что $[AB]$ — диагональ параллелограмма $AOBL$, поэтому $\triangle ABO = \triangle ABL$. Аналогично находим еще три пары равных треугольников. Отсюда $S_{KLMN} = 2S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 3$, $CM : MD = 1 : 1$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

Решение. Пусть $S = S_{ABCD}$, $AD = a$ и $AB = b$. Выразим через S площади четырех треугольников, занумерованных так, как это сделано на рис. 15. Итак,

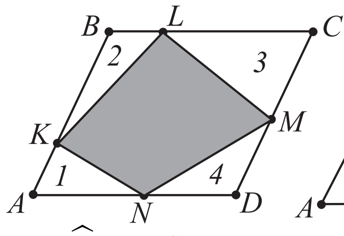


Рис. 15

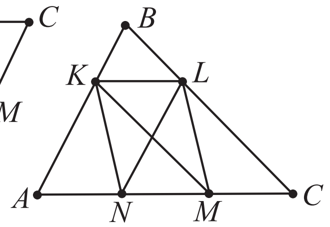


Рис. 16

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3}\sin\widehat{A} = \frac{S}{12}, \qquad S_2 = \frac{2ab\sin\widehat{B}}{24} = \frac{S}{12},$$

$$S_3 = \frac{3ab\sin\widehat{C}}{16} = \frac{3S}{16}, \quad S_4 = \frac{ab\sin\widehat{D}}{8} = \frac{S}{8}.$$

Отсюда $S_{KLMN} = S - 23S/48 = 25S/48$. Поэтому искомое отношение равно $25 : 48$.

Пример 6. В треугольник вписан параллелограмм со сторонами 3 и 5 см и диагональю, равной 6 см. Найти стороны треугольника, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника, а меньшая из его сторон лежит на основании треугольника.

Решение. Используем обозначения рис. 16. Поскольку четырехугольники $AKLN$ и $KLCM$ — параллелограммы, $AN = KL = CM = 3$, откуда $AC = 9$. Обозначив через d неизвестную диагональ параллелограмма, из теоремы 2 получим $d = \sqrt{2(9+25)-36} = 4\sqrt{2} < 6$. Значит, на рисунке $KM = 6$ и $LN = 4\sqrt{2}$. Из условия задачи следует, что $\triangle ABC \sim \triangle AKM$ и $\triangle CAB \sim \triangle CNL$. В обоих случая коэффициент подобия равен $k = AC/AM = AC/CN = 3/2$. Поэтому $BC = 3KM/2 = 9$ и $AB = 3NL/2 = 6\sqrt{2}$.

Оставшуюся часть параграфа посвятим ромбу.

Определение. Четырехугольник $ABCD$ называется ромбом, если все его стороны равны между собой.

Теорема 3. *Пусть $ABCD$ — четырехугольник, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$ABCD$ — ромб;*
2. *Диагонали $[AC]$ и $[BD]$ точкой пересечения делятся пополам и перпендикулярны;*
3. *Диагонали $ABCD$ являются биссектрисами его углов.*

Докажем $(1) \Rightarrow (2)$. Из теоремы 1 следует, что $ABCD$ — параллелограмм и его диагонали имеют общую середину O. Кроме того, треугольники ABO и BOC равны по трем сторонам, поэтому $\widehat{AOB} = \widehat{BOC}$. Из последнего равенства получаем $(AC) \perp (BD)$.

Утверждение $(2) \Rightarrow (3)$ сразу следует из равенства четырех треугольников: AOB, BOC, COD, DOA.

Осталось доказать $(3) \Rightarrow (1)$. Из того, что диагональ AC одновременно является биссектрисой углов A и C, следует равенство треугольников ABC и ADC, откуда $AB = AD$ и $BC = CD$. Аналогично доказывается, что $\triangle ABD = \triangle CBD$, $AB = BC$, $AD = CD$. Теорема доказана.

Из последней теоремы немедленно следует формула для вычисления площади ромба $ABCD$: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$. Эту же формулу можно получить из примера 4. В заключении параграфа рассмотрим несколько задач.

Пример 7. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружностей.

Решение. Обозначим через r искомый радиус и через O — точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$ (рис. 17). Используя данные, получаем $O_1O = r - 3$ и $OB = 6$. Осталось применить теорему Пифагора к треугольнику O_1BO:

$$r^2 = (r-3)^2 + 6^2 \Rightarrow 6r = 45 \Rightarrow r = \frac{15}{2}.$$

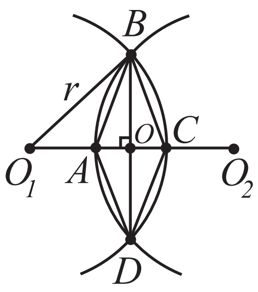


Рис. 17

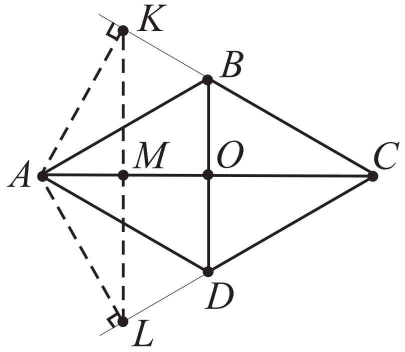


Рис. 18

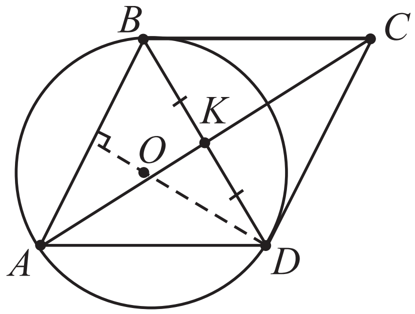


Рис. 19

Пример 8. Из вершины острого угла ромба проведены перпендикуляры к прямым, содержащим стороны ромба, которым не принадлежит эта вершина. Длина каждого перпендикуляра равна 3 см, а расстояние между их основаниями $3\sqrt{3}$ см. Вычислить длины диагоналей ромба.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 18. Из равенства прямоугольных треугольников ACK и ACL следует, что $[AM]$ — биссектриса равнобедренного треугольника AKL. Поэтому $KM = ML = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ и $(KL)\perp(AM)$. Отсюда $\sin\widehat{KAM} = KM/AK = \sqrt{3}/2$, поэтому $\widehat{KAM} = 60^\circ$ и $\widehat{ACK} = 30^\circ$. Последнее равенство дает $AC = 2AK = 6$ и $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Поскольку треугольник BCD правильный, $3 = CO = BC\sin 60^\circ$, т.е. $BD = BC = 2\sqrt{3}$.

Пример 9. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 2, а угол CAD равен 30°. Прямая CD является касательной к окружности ω, описанной около треугольника ABD. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Обозначим через O центр окружности ω, через K — точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 19). Условие касания (CD) и ω дает $(OD)\perp(CD)$. Учитывая параллельность прямых AB и CD, получаем $(OD)\perp(AB)$. Вспомнив, что точка O является пересечением серединных перпендикуляров треугольника ABC, заключаем, что (OD) содержит серединный перпендикуляр к отрезку AB. Это означает, что $\triangle ABD$ является равнобедренным треугольником, т.е. $AD = BD = 2$. Теперь, применяя теорему синусов к треугольнику AKD, получаем $2/\sin\widehat{AKD} = 1/\sin 30^\circ$ или $\sin\widehat{AKD} = 1$. Таким образом, $ABCD$ является ромбом. Отсюда $S_{ABCD} = AD^2\cdot\sin\widehat{A} = 2\sqrt{3}$.

2.3. Трапеция

Определение. Четырехугольник, в котором две стороны параллельны между собой, а две другие не параллельны, называется *трапецией*. Параллельные стороны называются *основаниями* трапеции, остальные стороны — ее *боковыми сторонами*. *Средней линией* трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон. *Высотой* трапеции называется произвольный отрезок, перпендикулярный основаниям, концы которого лежат на прямых, содержащих основания трапеции.

Теорема 1. *Пусть* $[KL]$ *— средняя линия трапеции* $ABCD$ *с основаниями* AD *и* BC *(*$AD > BC$*). Тогда*

1. $(KL)\|(AD)$, $(KL)\|(BC)$;
2. $KL = (AD + BC)/2$;
3. *если* X *и* Y *— точки пересечения диагоналей трапеции со средней линией, то* $XY = (AD - BC)/2$.

Для доказательства первого свойства через точку K проведем прямую a параллельно основаниям трапеции. По теореме Фалеса эта прямая пройдет через середину отрезка BC, т.е. через точку L. Таким образом, $[KL] \subseteq a$ и первое утверждение доказано. Обозначив через X точку пересечения $[AC]$ и $[KL]$, из свойств средней линии треугольника получаем, что $KL = KX + XL = (BC + AD)/2$. Последнее утверждение теоремы было доказано в задании №4.

Для вывода формулы площади трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC достаточно заметить, что треугольники ABC и ACD имеют равные высоты, проведенные из вершин A и C соответственно, являющиеся одновременно высотами трапеции. Поэтому $S_{ABCD} = h \cdot (AD + BC)/2 = h \cdot KL$, где h — длина высоты трапеции, $[KL]$ — ее средняя линия. В следующей теореме описано основное свойство трапеции.

Теорема 2. *Пусть* $ABCD$ *— трапеция, не являющаяся параллелограммом, тогда середины ее оснований, точка пересечения продолжений боковых сторон и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой.*

Обозначим через M и N середины оснований $[AD]$ и $[BC]$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$), через O — точку пересечения ее диагоналей и через

X — точку пересечения продолжений ее боковых сторон. Из §1 задания №4 следует, что прямая XN пересечет отрезок $[AD]$ в его середине, поэтому $M \in (XN)$. Осталось доказать, что $O \in (MN)$. Обозначим через M_1 точку пересечения прямой (NO) с отрезком AD (рис. 20), через x и y — соответственно длины отрезков AM_1 и M_1D и покажем, что $x = y$. Из условия $(AD)\|(BC)$ сразу следует, что $\triangle AOM_1 \sim \triangle CON$ и $\triangle DOM_1 \sim BON$. Отсюда

$$\frac{x}{CN} = \frac{OM_1}{ON} = \frac{y}{BN} \Rightarrow x \cdot BN = y \cdot CN \Rightarrow x = y.$$

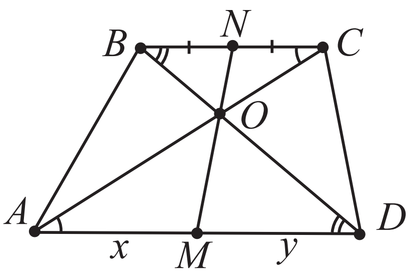


Рис. 20

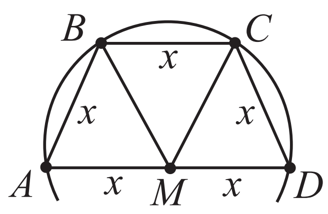


Рис. 21

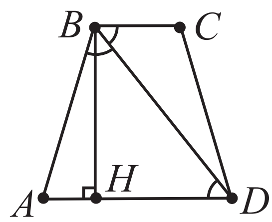


Рис. 22

Оставшуюся часть параграфа посвятим задачам.

Пример 1. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — трапеция, у которой $AD = 2x$ и $AB = BC = CD = x$. Обозначим через M середину основания $[AD]$ (рис. 21). Тогда из условий $BC = AM$ и $(BC)\|(AM)$ следует, что четырехугольник $ABCM$ является параллелограммом. Поэтому $MC = AB = x$. Аналогично доказывается, что $MB = CD = x$. В результате точка M удалена от каждой вершины трапеции на расстояние x, поэтому M — центр описанной около $ABCD$ окружности и $x = R$. Теперь уже нетрудно заметить, что трапеция $ABCD$ состоит из трех одинаковых равносторонних треугольников, откуда $S_{ABCD} = 3S_{ABM} = 3R^2\sqrt{3}/4$.

Пример 2. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

Решение. Из $(AD)\|(BC)$ следует $\angle ADB = \angle CBD$ (рис. 22). Поэтому треугольник ABD является равнобедренным, т.е. $AD = AB = CD$.

Отсюда $3AD+3=42$ или $AD=13$. Поэтому $AH=(13-3)/2=5$ и $BH=\sqrt{13^2-5^2}=12$. В результате $S_{ABCD}=12(3+13)/2=96$.

Пример 3. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

Решение. Используем обозначения рис. 23. Пусть $BK=15$ и $CK==13$. Из прямоугольных треугольников BKH и CKH_1 находим $KH==9$ и $KH_1=5$, поэтому $BC=14$. Как и в предыдущем примере доказывается равнобедренность треугольников ABK и DCK. Обозначим через $x=AB=AK$ и $y=CD=DK$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ABH и CDH_1, получаем $x^2=(x-9)^2+12^2$ и $y^2=(y-5)^2+12^2$. Откуда $x=25/2$, $y=169/10$ и $AD=x+y=29,4$.

Пример 4. Основания трапеции равны 4 и 16 см. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 24). Из результатов §1 следует, что $AB=CD$ и $AB+CD=4+16=20$. Отсюда $AB=10$, $AH=(16-4)/2=6$ и $BH=\sqrt{10^2-6^2}=8$. Итак, радиус вписанной окружности равен 4. Для нахождения радиуса R описанной окружности заметим, что эта окружность описана около треугольника ABD. Из теоремы синусов, примененной к этому треугольнику, имеем $2R=BD/\sin\widehat{A}$. Поскольку $\sin\widehat{A}=4/5$ и $BD=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$, окончательно получаем $R=5\sqrt{41}/4$.

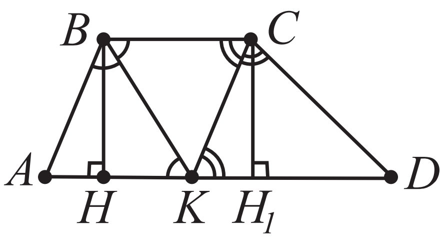


Рис. 23

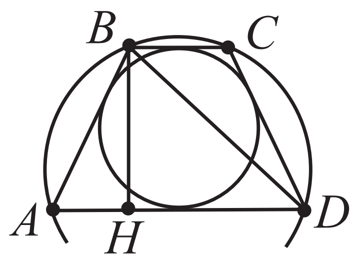


Рис. 24

Пример 5. Найти площадь трапеции, если ее диагонали равны 7 и 8 см, а основания — 3 и 6 см.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ выполняется: $AD=6$, $BC=3$, $AC=7$, $BD=8$ см (рис. 25). Через точку C проведем прямую a параллельно (BD). Точку пересечения прямых a и (AD) обозначим через

E. Тогда треугольники ABC и CDE, имея равные высоты и основания, равновелики (т.е. $S_{ABCD} = S_{ACE}$). В треугольнике ACE известны все стороны, поэтому площадь можно определить по формуле Герона-Архимеда. Находим $p_{ACE} = (7+8+9)/2 = 12$ и $S_{ACE} = \sqrt{12\cdot5\cdot4\cdot3} = 12\sqrt{5}$.

В последней задаче мы воспользовались идеей *перестройки* фигуры. Суть этого способа решения в следующем: для определения площади некоторой фигуры Φ_1 достаточно перестроить ее в фигуру Φ_2 той же площади и найти площадь Φ_2. В следующем примере трапеция будет перестроена в параллелограмм.

Пример 6. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой боковой стороне.

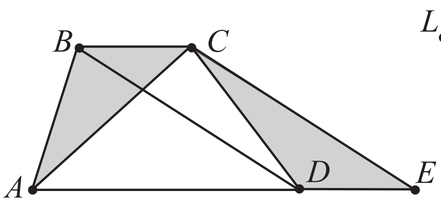


Рис. 25

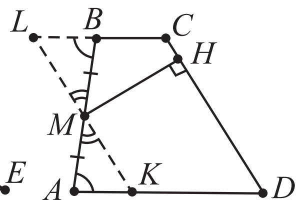


Рис. 26

Решение. Пусть M — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ и $[MH]$ — перпендикуляр, проведенный из точки M к противоположной стороне $[CD]$ (рис. 26). Через точку M проведем прямую a параллельно (CD). Точки пересечения прямой a с прямыми (AD) и (BC) обозначим через K и L соответственно. Тогда $\triangle MAK = \triangle MBL$, поэтому $S_{ABCD} = S_{KLCD} = LK \cdot MH = CD \cdot MH$, что и требовалось доказать.

Пример 7. Известно, что отрезок AE является биссектрисой угла A трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$ и точка E лежит на прямой BC). Окружность, вписанная в треугольник ABE касается сторон AB и BE в точках K и L. Найти величину угла BAD, если $KL = 1$ а боковая сторона AB равна 2.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 27. Из $(AD)\|(BC)$ следует $\angle DAE = \angle BEA$, поэтому $BE = AB = 2$. Обозначим длину отрезка BK через x, тогда $LE = ME = AM = AK = 2 - x$ и $AE = 4 - 2x$. Используя подобие треугольников BKL и BAE имеем $x/2 = 1/(4-2x)$ или $x^2 - 2x + 1 = 0$. Отсюда $x = 1$ и $\triangle BAE$ — правильный треугольник. Значит, $\widehat{BAD} = 120^\circ$.

Пример 8. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = 12$ и $BC = 8$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM делит трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка CM.

Решение. Треугольники ACD и ABC имеют равные высоты, поэтому их площади относятся как $AD/BC = 12/8 = 3/2$. Пусть $S_{ACD} = 3x$, тогда $S_{ABC} = 2x$ и $S_{ABCD} = 5x$. Поскольку $S_{ACD} > S_{ABC}$, прямая (AM) должна пересечь отрезок CD. Обозначим эту точку пересечения через E (рис. 28). Из условия следует, что $S_{ADE} = 5x/2$. Отсюда

$$\frac{DE}{CE} = \frac{S_{ADE}}{S_{ACE}} = \frac{5x/2}{3x - 5x/2} = 5.$$

Таким образом, треугольники ADE и MCE подобны с коэффициентом подобия 5, поэтому $CM = AD/5 = 12/5$.

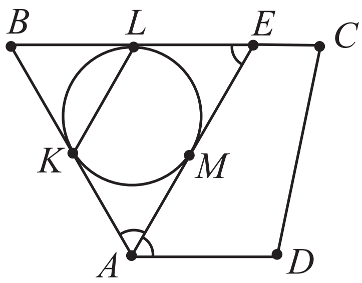


Рис. 27

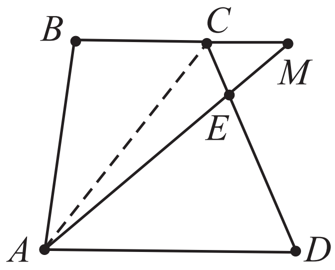


Рис. 28

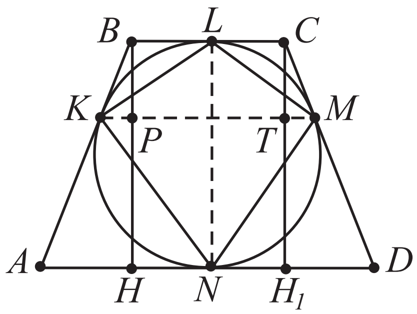


Рис. 29

Пример 9. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5 см^2. Найти площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение. Будем использовать обозначения рис. 29. Поскольку в $ABCD$ можно вписать окружность, $AD + BC = 2AB$. Отсюда $5 = S_{ABCD} = BH \cdot AB = 2AB$, т.е $AB = 5/2$. Из прямоугольного треугольника ABH находим $AH = 3/2$. Из системы $AD + BC = 2AB = 5$ и $AD - BC = 2AH = 3$ получаем, что $AD = 4$ и $BC = 1$. Используя равенство отрезков касательных из одной точки к окружности, имеем $BL = BK = 1/2$. Поэтому коэффициент подобия треугольников ABH и KBP равен $k = BK/AB = 1/5$. Отсюда $KP = AH/5 = 3/10$. Итак, в четырехугольнике $KLMN$ найдены длины диагоналей: $LN = 2$

и $KM = 2KP + PT = 1,6$. Учитывая перпендикулярность диагоналей четырехугольника $KLMN$, окончательно находим, что $S_{KLMN} = KM \cdot LN/2 = 1,6\,\text{см}^2$.

Глава 3

Задачи на построение

3.1. Введение. Схема решения задач на построение

Задачи на построение составляют один из самых интересных и сложных разделов школьной геометрии. Прежде чем мы познакомимся с общей схемой решения этих задач, обсудим набор данных нам инструментов. Если в условии задачи не говорится о том, какими инструментами нам нужно выполнять построение, это означает, что в нашем распоряжении есть **только** циркуль и линейка. Также сразу договоримся, что все точки, отрезки и другие геометрические фигуры, о которых будет идти речь в этой главе, лежат в некоторой фиксированной плоскости (поскольку решение стереометрических задач на построение в наш курс не входит).

Циркуль. Этот инструмент позволяет выполнять только две операции. По данному отрезку AB и точке O с помощью циркуля мы можем провести окружность с центром в точке O радиуса AB. Кроме того, циркуль позволяет найти пересечение этой окружности с любой ранее построенной фигурой (может случиться, что это пересечение будет пустым множеством).

Линейка. С помощью линейки мы можем провести прямую через любые две выбранные точки, а также найти пересечение этой прямой с любой другой ранее построенной фигурой. Таким образом, под линейкой мы понимаем одностороннюю линейку без делений.

Обычно решение задачи на построение содержит следующие четыре этапа: **анализ** задачи, **выполнение построения**, **доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи и, наконец, **исследование** задачи. На примере решения следующей задачи выясним, в чем суть каждого из этих этапов.

Пример 1. Построить треугольник ABC по сторонам $AB = c$, $BC = a$ и углу $\angle BAC = \alpha$.

Решение. 1. Поскольку нам дана сторона AB, решение задачи сводится к построению точки C. Определим, каким свойствам должна удовлетворять точка C. Для этого предположим, что искомый треугольник уже построен (рис. 1). Во-первых, точка C лежит на окружности радиуса a с центром в точке B. Во-вторых, точка C принадлежит лучу $[AX)$, составляющим с лучом $[AB)$ угол α. На этом анализ задачи завершен.

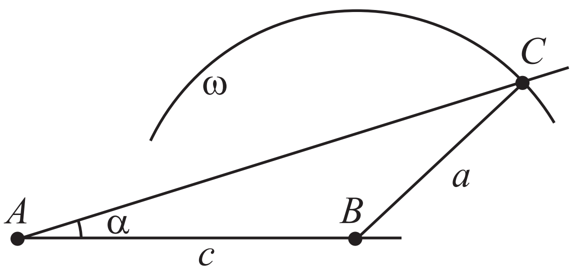


Рис. 1

Итак, *анализ* задачи состоит в определении геометрических свойств, которым должна удовлетворять точка (или последовательность точек), которую нам необходимо построить. При этом мы считаем, что искомая фигура уже построена.

2. Через произвольную точку A проведем произвольную прямую, на которой отметим отрезок AB длины c. Построим окружность ω с центром в точке B радиуса a. Проведем луч $[AX)$, составляющим с лучом $[AB)$ угол α (тем, кто забыл как от данного луча отложить данный угол, следует посмотреть начало третьего параграфа этой главы). В пересечении луча $[AX)$ с окружностью ω мы найдем искомую точку C. Построение завершено.

Построение является описанием конечной цепочкой шагов, достаточной для нахождения искомой точки (или нескольких искомых точек). Формально каждый из этих шагов является одной из четырех элементарных операций, которые мы можем проделать с помощь циркуля и линейки. На самом деле, к этим элементарным операциям мы также будем относить несколько таких хорошо известных задач на построение, как откладывание данного угла, построение серединного перпендикуляра к данному отрезку и т.д. (см. начало третьего параграфа).

3. Поскольку для треугольника ABC выполняются равенства

$AB = c$, $BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$, найденный треугольник искомый.

Находясь на этапе *доказательства*, мы проверяем, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.

4. Число решений данной задачи зависит от количества точек пересечения луча $[AX)$ с окружностью ω. Первый случай: $a = c \cdot \sin\alpha$. В этом случае окружность ω касается луча $[AX)$ (рис. 2) и решением будет прямоугольный треугольник. Второй случай: $a < c \cdot \sin\alpha$. В этом случае окружность ω не пересекает луча $[AX)$ (рис. 3) и задача решений не имеет. Третий случай: $c \cdot \sin\alpha < a <$ c (рис. 4). При таких числовых данных окружность ω пересекает луч $[AX)$ в двух точках и задача имеет два решения. И, наконец, последний случай: $a \geqslant c$ (рис. 5). Окружность ω пересекает луч $[AX)$ в единственной точке и задача имеет единственное решение. Подведем итоги: при $a = c \cdot \sin\alpha$ и при $a \geqslant c$ задача имеет единственное решение; при $a < c \cdot \sin\alpha$ задача решений не имеет; во всех остальных случаях задача имеет два решения.

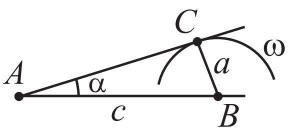


Рис. 2

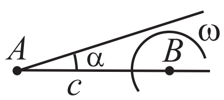


Рис. 3

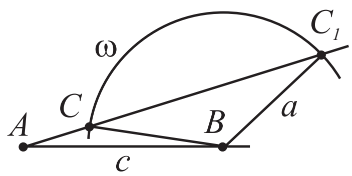


Рис. 4

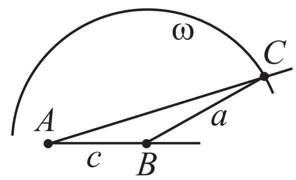


Рис. 5

Исследование задачи состоит в определении количества различных решений задачи в зависимости от данных числовых значений.

О подсчете числа решений надо поговорить особо. Существуют несколько типов задач на построение. *Тип первый:* по заданным отрезкам и углам надо построить некоторый n-угольник. Построение в этом случае можно начинать от произвольной точки плоскости и получать при этом бесконечно много одинаковых n-угольников. В таких задачах равные фигуры (т.е. переводящиеся друг в друга некоторым движением — об этом подробнее в пятом параграфе) считаются за **одно решение**. Так в предыдущем примере мы могли построить еще один луч $[AY)$, также составляющий с лучом $[AB)$ угол α. Но этот луч приводит к нахождению треугольников, которые равны уже построенным. *Второй тип:* на плоскости задано некоторое множество точек и фигур. В задаче требуют построить фигуру, специальным образом расположенную относительно заданного множества точек и фигур. В таких задачах если найденные фигуры не совпадают между собой, они считаются **различными решениями**. Типичный пример — надо провести касательную к окружности $\omega(O,R)$ из точки A, расположенной вне этой окружности. Очевидно, что эта задача имеет два различных решения, хотя искомые касательные и переводятся друг в друга осевой симметрией с осью OA.

Часто при решении задачи на построение доказательство сразу следует из описания построения. В этих случаях отдельно приводить доказательство мы не будем. Кроме того, если исследование задачи очевидно, мы также его будем опускать. (У некоторых школьников, типа известного Васи Пупочкина, после неверного построения следует фраза "доказательство и исследование задачи очевидны". Добрый совет: поначалу при самостоятельном решении задач на построение не пропускайте этапы доказательства и исследования задачи).

При анализе задачи возникают множества точек, обладающие тем или иным геометрическим свойством. Для дальнейшего построения важно понимать, какую именно плоскую фигуру образуют точки с этим свойством. Эту общую проблему мы подробно обсудим в следующем параграфе.

3.2. Геометрические места точек

Геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ) называется фигура Φ, состоящая из всех точек, удовлетворяющих некоторому свойству $\mathcal{P}$ (т.е. $\Phi=\{A:\mathcal{P}(A)\}$). Таким образом, решение задачи на ГМТ сводится к тому, что по данному геометрическому свойству $\mathcal{P}$ нам необходимо найти конкретную геометрическую фигуру Φ (например, отрезок или дугу окружности), для которой выполняется: а) все точки фигуры Φ удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$; б) все точки плоскости, удовлетворяющие свойству $\mathcal{P}$, принадлежат фигуре Φ. Вместо условия (б) в некоторых задачах проще проверять условие б*) — все точки плоскости, не лежащие в фигуре Φ, не удовлетворяют свойству $\mathcal{P}$.

Если в задаче на ГМТ сформулированы сразу два геометрических свойства — $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, для которых уже найдены фигуры $\Phi_1=\{A:\mathcal{P}_1(A)\}$ и $\Phi_2=\{A:\mathcal{P}_2(A)\}$, то ГМТ, одновременно удовлетворяющих и $\mathcal{P}_1$, и $\mathcal{P}_2$, является пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 (т.е. искомая фигура $\Phi=\Phi_1\cap\Phi_2$).

Поэтому для решения сложных задач на определение ГМТ важно знать следующие простые, но очень важные частные случаи.

ГМТ1. *ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка* AB ($A \neq B$)*, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.*

Здесь условие $\mathcal{P}$ — быть равноудаленной точкой от концов отрезка AB, фигура Φ — серединный перпендикуляр к этому отрезку. Проверка выполнения условий (а) и (б) для серединного перпендикуляра к отрезку AB не составляет труда.

ГМТ2. *ГМТ, удаленных от данной точки* O *на расстояние* $r > 0$*, является окружностью радиуса* r *с центром в точке* O.

Доказательство в данном случае очевидно, поскольку свойство $\mathcal{P}$ является определением окружности.

ГМТ3. *ГМТ, принадлежащих данному углу* $\angle BAC$ *и равноудаленных от прямых* AB *и* AC*, является биссектриса этого угла.*

Как и в случае ГМТ1, выполнение условий (а) и (б) для биссектрисы угла $\angle BAC$ легко сводится к одному из признаков равенства прямоугольных треугольников.

ГМТ4. *ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых* (AB) *и* (AC)*, является парой взаимно перпендикулярных прямых, которые содержат биссектрисы углов, образованных прямыми* (AB) *и* (AC).

Последнее утверждение легко следует из ГМТ3 и очевидного факта, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

ГМТ5. *ГМТ, из которых данный отрезок* AB *виден под прямым углом, является окружностью* ω*, построенной на этом отрезке как на диаметре, из которой исключены точки* A *и* B *(рис. 6).*

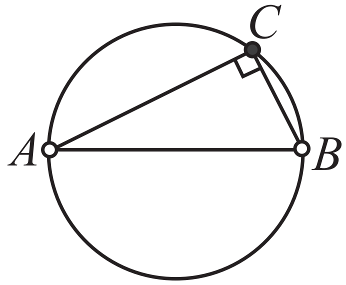


Рис. 6

Проверка выполнения условий (а) и (б*) для окружности ω проводится на стр. 11. Ясно также, что точки прямой (AB) не могут принадлежать искомому ГМТ, поэтому точки A и B из окружности ω необходимо исключить. ГМТ5 является частным случаем следующего важного ГМТ.

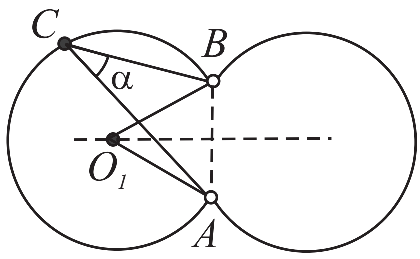


Рис. 7

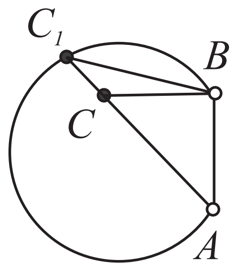


Рис. 8

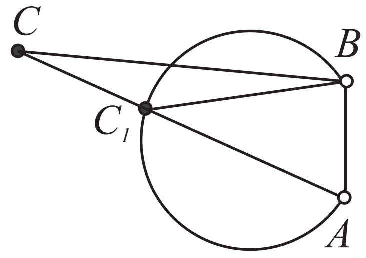


Рис. 9

ГМТ6. *ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$), является объединением двух равных дуг (рис. 7) с общей хордой AB, причем точки A и B из дуг исключены.*

Убедимся в выполнении свойств (а) и (б*). Сначала заметим, что искомое ГМТ симметрично относительно прямой AB, поэтому достаточно рассмотреть только одну из полуплоскостей с границей (AB). На серединном перпендикуляре к отрезку AB в фиксированной полуплоскости найдем такую точку O_1 (рис. 7), что $\angle AO_1B = 2\alpha$ (о построении такой точке написано в начале следующего параграфа). Пусть ω_1 — это окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A и Φ_1 — дуга этой окружности, лежащая в выбранной полуплоскости, за исключением точек A и B. Проверка свойства (а) для Φ_1 следует из теоремы о вписанном и центральном углах, опирающихся на одну дугу. Для доказательства свойства (б*) возьмем произвольную точку C выбранной полуплоскости и не лежащую на прямой AB. По крайней мере один из лучей — $[AC)$ или $[BC)$ — пересечет Φ_1 в некоторой точке C_1. Уже доказано, что $\angle AC_1B = \alpha$. Отсюда, а также из свойства внешнего угла треугольника имеем: для точек выбранной полуплоскости, расположенных внутри окружности ω_1 (рис. 8), данный отрезок виден под углом больше α; для точек вне ω_1 — меньше α (рис. 9).

Чуть позже (в четвертом параграфе этой главы) мы рассмотрим еще два важных ГМТ — радикальную ось дух окружностей и окружность Аполлония.

Переходим к решению задач. Обычно в решении этих задач данное в условии геометрическое свойство $\mathcal{Q}$ удается заменить эквивалентным свойством $\mathcal{P}$ (используя теоремы первых двух глав, простые геометрические или алгебраические соотношения), которое является одним из разобранных нами ГМТ1–ГМТ6. В этом случае достаточно привести доказательство эквивалентности свойств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$ и использовать фигуру, соответствующую ГМТ для свойства $\mathcal{P}$.

Пример 1. Найти ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых a и b.

Решение. Если $a = b$, то искомым ГМТ будет, очевидно, вся плоскость. Пусть теперь $a \neq b$. Выберем точки $A \in a$ и $B \in b$ так, что $(AB) \perp a$. Осталось доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку AB и является искомым ГМТ. Действительно, для произвольной точки X (рис. 10) опустим перпендикуляры XY и XZ на прямые a и b соответственно ($Y \in a$, $Z \in b$) и сразу заметим, что $YA = ZB$. Поэтому точка X принадлежит искомому ГМТ (т.е. $XY = XZ$) тогда и только тогда, когда $\triangle XYA = \triangle XZB$, что равносильно $XA = XB$. Используя ГМТ1 получаем, что серединный перпендикуляр к отрезку AB является искомым ГМТ.

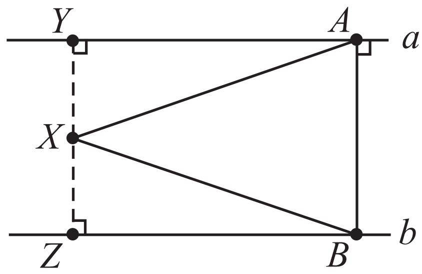


Рис. 10

Пример 2. Дан треугольник ABC. Найти ГМТ X, удовлетворяющих неравенствам $AX \leqslant BX \leqslant CX$.

Решение. Пусть a — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Согласно ГМТ1 для точек этой прямой и только для них выполняется равенство $XA = XB$. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, в одной из которой выполняется неравенство $XA \leqslant XB$, а в другой — обратное неравенство. Итак, ГМТ удовлетворяющих неравенству $AX \leqslant BX$, является полуплоскость с границей a, в которой содержится точка A. Аналогично построим серединный перпендикуляр к отрезку BC (на рис. 11 это прямая b) и выберем полуплоскость, в которой содержится точка B. Эта полуплоскость соответствует ГМТ, удовлетворяющих второму неравенству $BX \leqslant CX$. Поскольку искомое ГМТ должно одновременно удовлетворять обеим неравенствам, остается пересечь две найденные полуплоскости. В результате получится угол, изображенный на рис. 11.

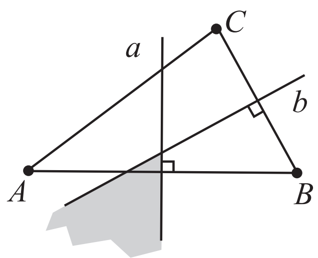


Рис. 11

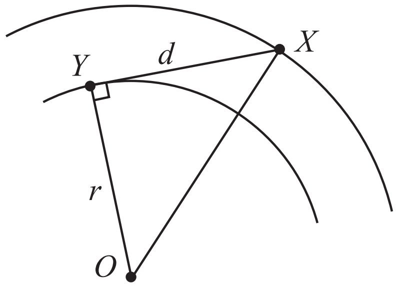


Рис. 12

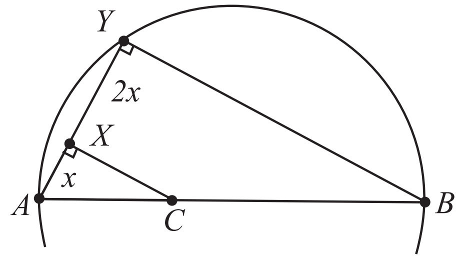


Рис. 13

Пример 3. Найти геометрическое место таких точек X, что касательные, проведенные из X к данной окружности, имеют данную длину d.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, r — ее радиус. Обозначим также через Y точку касания (рис. 12) и из прямоугольного треугольника OXY сразу найдем $OX = \sqrt{r^2 + d^2}$. Таким образом, используя ГМТ2, получаем, что искомой фигурой является окружность радиуса $\sqrt{r^2 + d^2}$ с центром в точке O.

Пример 4. На окружности фиксирована точка A. Найти ГМТ X, делящих хорды с концом в точке A в соотношении $1 : 2$, считая от точки A.

Решение. Пусть $[AB]$ — диаметр данной окружности, а точка C выбрана на луче $[AB)$ так, что $AC : CB = 1 : 2$ (рис. 13). Сразу замечаем, что C принадлежит искомому ГМТ. Предположим теперь, что точка X делит хорду AY в данном отношении, тогда треугольники AXC и AYB подобны (есть пропорциональность двух пар сторон и общий угол между ними). Отсюда $\angle AXC = \angle AYB = 90^\circ$ и, согласно ГМТ5, точка X лежит на окружности ω, построенной на отрезке AC как на диаметре. Исключим из этой окружности точку A (эта точка не может принадлежать искомому ГМТ, из-за невозможности деления на ноль) и докажем, что $\omega \backslash \{A\}$ — искомое ГМТ. Мы уже проверили свойство (а) (свойство (а) определяется в начале этого параграфа) для этой фигуры. Для проверки свойства (б) выберем произвольную точку $X \in \omega \backslash \{A\}$ и заметим, что $(XC) \| (YB)$. По теореме Фалеса получим $AX : XY = AC : CB = 1 : 2$, что и доказывает свойство (б) для фигуры $\omega \backslash \{A\}$.

Пример 5. Дан квадрат $ABCD$. Найти все такие точки X плоскости, что сумма расстояний от точки X до прямых, содержащих две противоположные стороны квадрата равна сумме расстояний до двух прямых, содержащих оставшиеся две стороны.

Решение. Для удобства обозначим длину стороны квадрата через a. Тогда для каждой точки квадрата $ABCD$ (включая его внутренние точки) обе суммы, о которых идет речь в условии задачи, равны a. Следовательно весь квадрат содержится в искомом ГМТ. Далее будем рассматривать точки вне данного квадрата. Прямые, содержащие стороны квадрата разбивают плоскость на несколько частей, занумеруем их так, как это сделано на рис. 14. В областях 1 и 5 сумма расстояний до прямых (AB) и (CD) равна a, а другая сумма больше, чем a. По схожей причине не подходят точки областей с номерами 3 и 7. Для точек прямого угла MCN (номер области — 2) сумма расстояний до прямых (AB) и (CD) равна $a+2x$, где x — расстояние от точки до луча $[CM)$; сумма же расстояний до прямых (AD) и (BC) равна $a+2y$, где x — расстояние от точки до луча $[CN)$. Таким образом, эти суммы равны только в случае $x=y$, что, согласно ГМТ3, дает нам биссектрису угла MCN. Аналогично получаются биссектрисы углов 4, 6 и 8. Итак, искомое ГМТ — это объединение квадрата и четырех биссектрис.

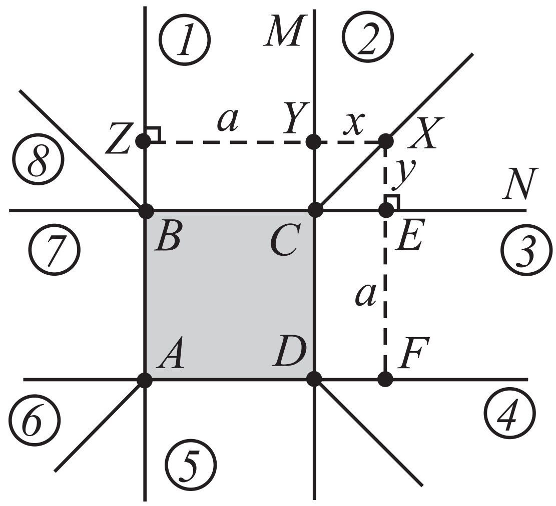


Рис. 14

Пример 6. Отрезок постоянной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла ABC. По какой траектории движется середина этого отрезка?

Решение. Пусть длина данного отрезка равна $2r$ и точки X и Y перемещаются соответственно по лучам $[BA)$ и $[BC)$. Определим ГМТ M, где M — середина отрезка XY. В крайних положениях отрезок XY целиком лежит на одном из лучей $[BA)$ или $[BC)$, что дает нам две точки этих лучей, удаленных от точки B на расстояние r. Во всех остальных случаях треугольник XBY прямоугольный, и точка M, будучи серединой гипотенузы этого треугольника, удалена от точки B на расстояние r.

Обозначим через Φ ту четверть окружности $\omega(B, r)$, которая содержится в угле ABC (рис. 15). Уже доказано, что всякая точка искомого ГМТ принадлежит Φ, т.е. для Φ проверено свойство (а). Выберем теперь произвольную точку $M_1 \in \Phi$ и проведем окружность радиуса r с центром в точке M_1 (рис. 16). Эта окружность пересечет стороны данного угла в точках X_1, B, Y_1. Треугольник X_1BY_1 прямоугольный (случай, когда M_1 лежит на одной из сторон угла рассмотрите сами) и M_1 — центр его описанной окружности. Отсюда $M_1 \in [X_1Y_1]$ и $X_1Y_1 = 2r$. Тем самым доказано свойство (б) для фигуры Φ.

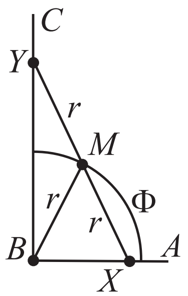


Рис. 15

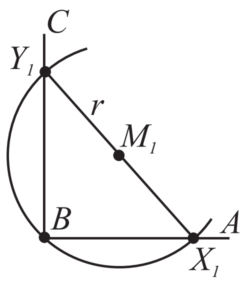


Рис. 16

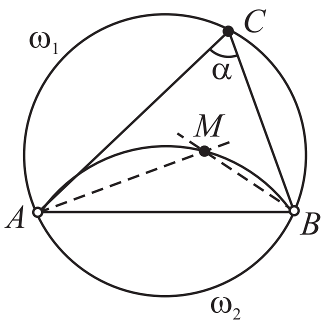


Рис. 17

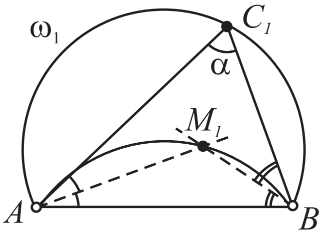


Рис. 18

Пример 7. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по этой окружности. Найти геометрическое множество точек пересечения биссектрис треугольника ABC.

Решение. Пусть ω — данная окружность с центром в точке O и M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Точки A и B делят ω на две дуги ω_1 и ω_2. Будем читать, что ω_2 меньшая из двух дуг и имеет величину 2α. Начнем со случая, когда $C \in \omega_1$ (рис. 17). Тогда, по свойству вписанного угла $\angle C = \alpha$. Отсюда $\angle AMB = 180^\circ - \angle A/2 - \angle B/2 = 90^\circ + \angle C/2 = 90^\circ + \alpha/2$. Это означает, по ГМТ6, что точка M лежит на некоторой дуге Φ_1, состоящей из точек рассматриваемой полуплоскости, из которых отрезок AB виден под углом $90^\circ + \alpha/2$. Точки A и B в Φ_1 не входят, поскольку при $C = A$ или $C = B$ треугольник вырождается. Также необходимо проверить, что всякая точка $M_1 \in \Phi_1$ будет точкой пересечения биссектрис одного из рассматриваемых треугольников. Удваивая углы M_1AB и M_1BA (рис. 18) мы получим точку C_1 со свойствами: M_1 является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC_1 и $\angle AC_1B = \alpha$. Учитывая, что события разворачиваются в полуплоскости с границей (AB), в которой находится дуга ω_1, мы получаем

$C_1 \in \omega_1$ и Φ_1 удовлетворяет свойству (б). Аналогично рассматривается оставшаяся полуплоскость (случай, когда $C \in \omega_2$). Здесь мы получим вторую дугу, состоящую из точек этой полуплоскости, из которых отрезок AB виден под углом $180^\circ - \alpha/2$.

3.3. Решение задач на построение

К четырем операциям, которые мы можем выполнить с помощью циркуля и линейки (см. первый параграф этой главы) добавим еще несколько элементарных операций, которые мы будем часто использовать при решении задач на построение. Эти операции должны быть хорошо известны каждому школьнику, поэтому напомним только цепочку построений, с помощью которых можно получить ту или иную фигуру. Анализ в силу простоты задач не приводится, доказательство и исследование в этих задачах (далее они называются базовыми задачами, сокращенно БЗ) выполните самостоятельно.

БЗ1. *Построить серединный перпендикуляр к данному отрезку AB.*

Для решения задачи достаточно провести две окружности одинакового радиуса $r = AB$ с центрами в точках A и B соответственно, а затем через две точки пересечения этих окружностей провести прямую.

БЗ2. *Через данную точку O провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.*

С центром в точке O строим произвольную окружность ω, пересекающую прямую a. Если A и B — точки пересечения ω и прямой a, то останется только (используя БЗ1) построить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Заметьте, что указанное построение проходит и в случае, когда $O \in a$.

БЗ3. *Через данную точку O провести прямую, параллельную данной прямой a.*

Сначала строим прямую b, проходящую через точку O и перпендикулярную прямой a (используем БЗ2). Точно также через точку O проводим прямую c, перпендикулярную уже прямой b. Прямая c будет искомой.

БЗ4. *Разделить данный отрезок AB на n равных частей ($n \in N$).*

Через произвольную точку C, не лежащую на прямой AB, проведем луч $[AC)$. На этом луче с помощью циркуля от точки A откладываем n равных отрезков (можно, например, откладывать сам отрезок AB), получая попарно различные точки A_1, A_2, $\ldots, A_n$. Останется соединить точки A_n и B и через каждую точку A_i провести прямую параллельно прямой A_nB (по БЗ3). Из теоремы Фалеса следует, что эти прямые разделят отрезок AB на n равных частей.

БЗ5. *Разделить данный угол BAC пополам.*

Начнем со случая, когда $\angle BAC < 180^\circ$. Проведем окружность с центром в точке A и найдем точки пересечения этой окружности со сторонами угла — точки K и L. Не изменяя радиус окружности проводим теперь пару окружностей с центрами в точках K и L. Пересечение этих окружностей — пара точек A и M. Поскольку отрезок AM является диагональю ромба $AKML$, луч $[AM)$ искомый. Очевидно, что в случае $\angle BAC = 180^\circ$ можно использовать БЗ2, если же $\angle BAC > 180^\circ$, надо сначала построить биссектрису дополнительного угла, а затем выбрать противоположный этой биссектрисе луч.

БЗ6. *От луча $[XY)$ отложить угол, равный данному углу BAC.*

Снова начнем со случая, когда $\angle BAC < 180^\circ$. С центром в точке A проведем окружность ненулевого радиуса и найдем точки пересечения этой окружности со сторонами угла — точки K и L. Окружность того же радиуса проведем с центром в X и обозначим через M точку пересечения этой окружности ω с лучом XY. Теперь проводим окружность ω_1 с центром в M радиуса KL. Если обозначить через P и Q точки пересечения окружностей ω и ω_1, имеем равенство равнобедренных треугольников AKL, XMP и XMQ. Отсюда $\angle PXM$ и $\angle QXM$ — искомые. Случай $\angle BAC = 180^\circ$ очевиден, а случай $\angle BAC > 180^\circ$ легко сводится к ранее рассмотренному.

БЗ7. *Дан угол величины α ($0 < \alpha < 180^\circ$) и некоторый отрезок AB ($A \neq B$). Построить множество точек, из которых данный отрезок виден под углом α.*

В случае $\alpha = 90^\circ$ с центром в точке P, середине отрезка AB (которую можно найти по БЗ4), строим окружность радиуса $AB/2$. Останется из этой окружности исключить точки A и B (см. ГМТ5). Пусть теперь $\alpha \neq 90^\circ$ и a — серединный перпендикуляр к отрезку AB. На прямой a выберем произвольную точку M, отличную от точки P. От луча $[MP)$

в полуплоскости, в которой находится, например, точка B откладываем угол, равный α (по БЗ6), и получаем луч $[MQ)$ (рис. 19). Через точки B и A проводим прямые, параллельные прямой MQ (по БЗ3), получаем точки O_1 и O_2. Строим две равные окружности радиуса O_1A с центрами в точках O_1 и O_2. Выбираем те дуги этих окружностей, которые соответствуют углу α (на рис. 19 выбраны дуги для $\alpha < 90^\circ$, а на рис. 20 — $\alpha > 90^\circ$).

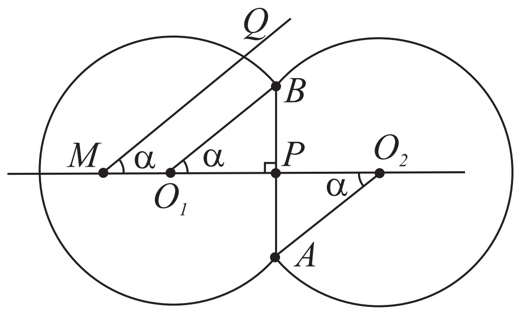


Рис. 19

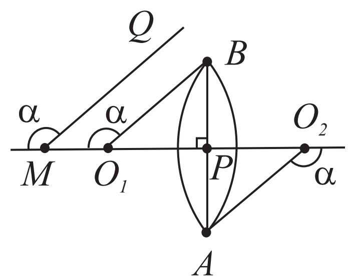


Рис. 20

Оставшаяся часть параграфа посвящена решению задач на построение. В записи решения мы будем стараться следовать общей схеме из первого параграфа и активно использовать ГМТ1-6 и БЗ1-7. Совет: не спешите сразу читать решения задач, пытайтесь решить задачи самостоятельно.

Пример 1. Построить треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и углу $\alpha = \angle A$.

Решение. Анализ. Предположим, что такой треугольник уже построен. Посмотрим, какими свойствами должна обладать точка A. Во-первых, она удалена от прямой BC на расстояние h_a и, во-вторых, из этой точки отрезок BC виден под углом α (рис. 21). *Построение.* На произвольной прямой откладываем отрезок $BC = a$. Строим ГМТ, удаленных от прямой BC на расстояние h_a. Получаем пару параллельных прямых l и m (несколько раз используем БЗ1). Затем строим ГМТ, из которых отрезок BC виден под углом α (ГМТ6, БЗ7). В пересечении этих двух ГМТ получаем недостающую вершину треугольника. *Доказательство.* Сразу следует из построения. *Исследование.* Можно заметить, что даже если прямые l и m

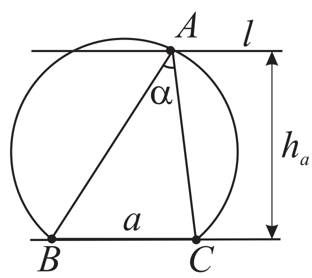


Рис. 21

пересекают дуги окружностей в четырех точках, все четыре треугольника будут равны между собой. Поэтому решение единственно, если такое пересечение непусто. Во всех остальных случаях решений нет.

Замечание. В предыдущем примере при исследовании не было приведено алгебраическое соотношение между числовыми данными, гарантирующее непустоту пересечения двух ГМТ (как это сделано в примере 1 первого параграфа). Договоримся, что в случае, если вывод таких соотношений требует непростых тригонометрических преобразований (в предыдущем примере для острых α надо было получить соотношение $0 < h_a < a(\cos\alpha + 1)/(2\sin\alpha)$), мы будем заменять их геометрическими свойствами типа "если прямые l и m пересекают дуги окружностей в четырех точках".

Пример 2. Построить прямую, проходящую через данную точку A и касающуюся данной окружности $\omega(O, r)$.

Решение. *Анализ.* Предположим, что такая прямая уже построена, и выделим два свойства, которыми обладает точка B — точка касания прямой и окружности. Во-первых, точка B удалена от точки O на расстояние r; во-вторых, отрезок OA виден из точки B под прямым углом. *Построение.* Строим на отрезке OA как на диаметре окружность и пересекаем ее с данной окружностью ω. Получаем в результате две точки касания. Остается соединить их с точкой A. *Доказательство.* Следует из того факта, что прямая, удаленная от центра окружности $\omega(O, r)$ на расстояние r, является касательной к этой окружности. *Исследование.* Существуют две касательные, если $OA > r$; одна, если $OA = r$; во всех остальных случаях касательную провести нельзя (точка A находится внутри окружности).

Пример 3. Даны прямая a и окружность $\omega(O, R)$, не имеющие общих точек. Постройте окружность данного радиуса r, касающуюся их.

Решение. *Анализ.* Снова предполагаем, что такая окружность уже построена (рис. 22) и определим свойства, которым обладает точка O_1 — центр искомой окружности. Точка O_1 одновременно удалена на расстояние r и от окружности $\omega(O, R)$, и от прямой a. *Построение.* Проводим пару окружностей $\omega_1 = \omega(O, R+r)$, $\omega_2 = \omega(O, R-r)$ (вторая существует только в случае $R-r > 0$). Строим параллельные прямые b и c, каждая из которых удалена от прямой a на расстояние r. Точки пересечения этих прямых с окружностями дают нам центры искомых окружностей. *Доказательство.* Следует из построения. *Исследование.* Пусть прямая b и точка O расположены по одну сторону от прямой a. Тогда прямая c не может пересечь ни ω_1, ни ω_2, а прямая b не пересекается с ω_2 (по условию ω и a не пересекаются, поэтому точки ω_2 удалены от a на расстояние больше r). Поэтому число решений совпадает с количеством точек пересечения прямой b и окружности ω_1 (на рис. 22 две точки пересечения дают две окружности). Если обозначить через h расстояние от точки O до прямой a, то количество искомых окружностей равно двум, если $h < R + 2r$; одному — если $h = R + 2r$; нулю — во всех остальных случаях.

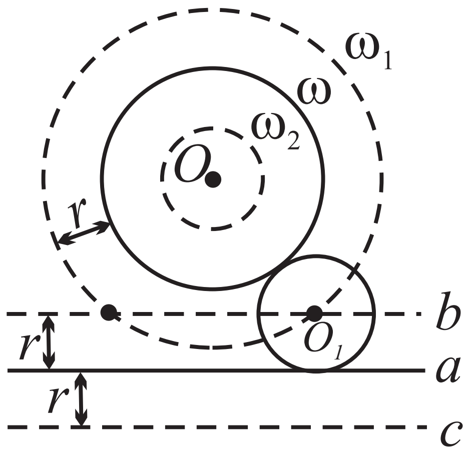


Рис. 22

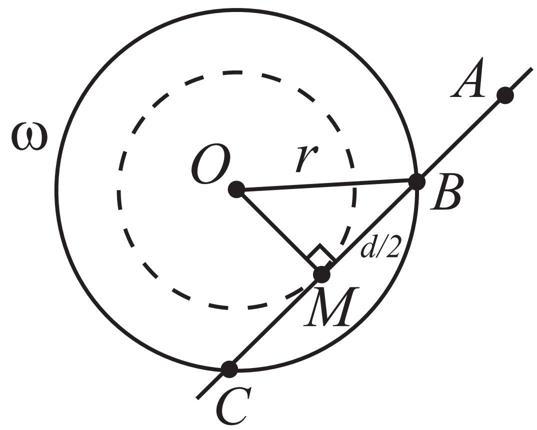


Рис. 23

Пример 4. Даны точка A и окружность $\omega(O, r)$. Провести через точку A прямую так, чтобы хорда, высекаемая данной окружностью на этой прямой, имела данную длину d.

Решение. Анализ. Предположим, что такая прямая уже построена и она высекает на окружности $\omega(O, r)$ хорду BC длины d. Обозначим через M середину хорды BC (рис. 23). Тогда в прямоугольном треугольнике OBM нам известна гипотенуза и катет (он равен $d/2$). Этот прямоугольный треугольник мы можем построить, т.е. длина отрезка OM определяется, а искомая прямая оказывается касательной из точки A к окружности $\omega(O, OM)$. *Построение.* Строим прямоугольный треугольник по гипотенузе r и катету $d/2$ и находим длину второго катета. Теперь к окружности с центром в точке O и только что найденным радиусом проводим касательную (см. пример 2). *Доказательство.* Следует из построения. *Исследование.* Ясно, что при $d > 2r$ решений нет. В остальных случаях число решений совпадает с количеством касательных из точки A к окружности $\omega(O, \sqrt{r^2 - d^2/4})$ (см. исследование в примере 2).

Пример 5. Постройте треугольник по медиане m, биссектрисе l и высоте h, проведенными из одной вершины.

Решение. Пусть $AM = m$, $AL = l$, $AH = h$. Сразу отметим, что в случае равенства каких-либо двух из данных отрезков, мы сразу получаем $AB = AC$, $m = l = h$, и бесконечное множество различных треугольников удовлетворяют условию задачи. Поэтому далее считаем, что $BA \neq AC$, для определенности, $BA < AC$. Тогда по основному свойству биссектрисы $BL < LC$ и поэтому L расположена между точками H и M (здесь мы еще используем, что из $BA < AC$ следует, что $\angle B > \angle C$, а из последнего неравенства следует $\angle BAH < \angle HAC$). Таким образом, при $BA \neq AC$ биссектриса AL всегда лежит между высотой AH и медианой AM и поэтому $h < l < m$. *Анализ.* Считаем треугольник ABC уже построенным и рассмотрим точку P — середину дуги BC описанной около $\triangle ABC$ окружности (рис. 24). Тогда P определяется двумя условиями: $P \in [AL)$ и P лежит на перпендикуляре к прямой HM, проведенному из точки M. Треугольники AHL и AHM строятся без труда (в каждом из них нам известен катет и гипотенуза). После определения точки P можно найти точку O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, поскольку точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AP и на прямой PM. Точки B и C определяются как точки пересечения прямой MH и окружности $\omega(O, OA)$. *Построение.* На произвольной прямой a отмечаем точку H, строим перпендикуляр к a в точке H и отмечаем на нем точку A так, что $HA = h$. На прямой a по одну сторону от точки H находим такие точки L и M, что $AL = l$ и $AM = m$. Затем через

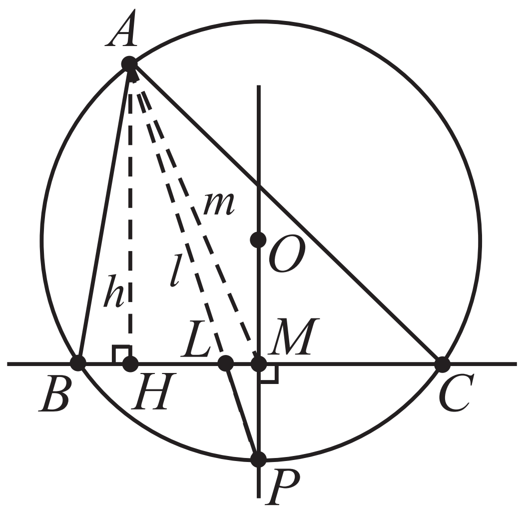


Рис. 24

M проводим перпендикуляр к прямой a и пересекаем его с прямой AL. Точка P найдена. Затем последовательно находим точки O, B и C, как это описано выше. *Доказательство.* Очевидно, что отрезки AH и AM будут соответственно высотой и медианой. Отрезок AL будет являться биссектрисой построенного треугольника, поскольку продолжение этого отрезка пересечет дугу BC в ее середине. *Исследование.* Как уже отмечалось, при $m = l = h$ существует бесконечное множество различных треугольников, удовлетворяющих условию задачи. При $h < l < m$ решение единственно, поскольку из анализа следует однозначность в определении точек B и C. Во всех остальных случаях решения не существует.

Пример 6. Построить треугольник ABC, зная три точки P, Q и R, в которых пересекают описанную окружность треугольника биссектрисы треугольника.

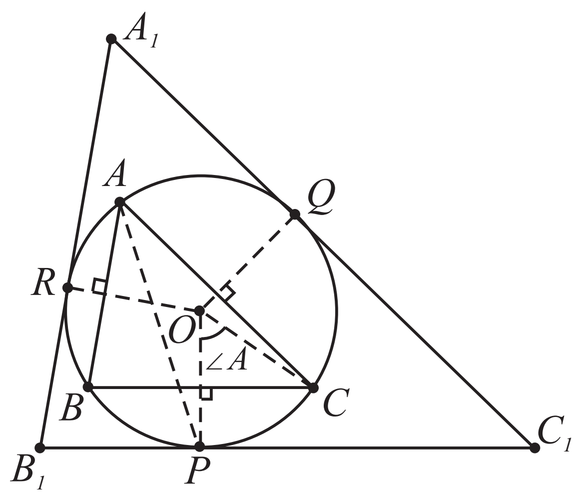


Рис. 25

Решение. Анализ. Считаем, что такой треугольник уже построен и AP, BQ, CR — его биссектрисы (рис. 25). Точки P, Q и R являются серединами дуг BC, CA и AB соответственно, поэтому прямые OP, OQ и OR будут серединными перпендикулярами к сторонам треугольника. Отсюда следует, что если построить касательные к окружности в точках P, Q и R, образуется треугольник, подобный искомому. Таким образом, мы можем найти углы треугольника ABC. Из теоремы о центральном и вписанном угле следует, что $\angle BOC = 2\angle A$. Поэтому вершины B и C можно получить откладывая от луча $[OP)$ угол, равный $\angle A$. *Построение.* Строим, как это указано выше, треугольник $A_1B_1C_1$, подобный искомому. От луча $[OP)$ откладываем угол, равный $\angle A_1$ и получаем точки B и C. Через точку B строим перпендикуляр к прямой OR и в пересечении с окружностью получаем последнюю вершину треугольника ABC. *Доказательство.* Из построения следует, что точки P, Q и R являются серединами дуг BC, CA и AB. Отсюда AP, BQ, CR — биссектрисы треугольника ABC. *Исследование.* Существование решения, конечно же, зависит от расположения точек P, Q и R на окружности. Величина каждой из трех дуг с концами в этих точках равна сумме двух углов искомого треугольника. Поэтому для существования решения необходимо, чтобы величина каждой из этих трех дуг была меньше $180°$. Из построения следует, что эти условия также достаточны для существования решения, и решение единственно.

3.4. Алгебраический подход

В этом параграфе речь пойдет о том, как алгебраические методы помогают в решении задач на построение и в описании различных ГМТ.

Предварительные алгебраические вычисления. Предположим, что в задаче по числовым значениям a_1, a_2, $\ldots$, a_n (которые обозначают, например, длины отрезков или величины углов) требуют построить некоторую фигуру. Ключевым в этом построении может оказаться неизвестная сторона длины x. Используя формулы и теоремы предыдущих двух глав, зачастую можно найти алгебраическое выражение x через a_1, a_2, $\ldots$, a_n, т.е. $x = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Возникает вопрос: какие алгебраические выражения $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ могут быть построены с помощью циркуля и линейки по известным a_1, a_2, $\ldots$, a_n? Об этом пойдет речь в следующих задачах (назовем их *задачами алгебраического метода* — сокращенно ЗАМ).

ЗАМ1. *По данному отрезку длины a построить отрезок длины $\frac{m}{n}\cdot a$, где $m, n \in N$.*

Сначала увеличиваем данный отрезок в m раз, а затем делим полученный отрезок на n равных частей (по БЗ4).

ЗАМ2. *По данным трем отрезкам, длины которых равны a, b и c, построить отрезок длины $\frac{ab}{c}$.*

Для построения подойдет произвольный острый угол BAC ненулевой величины (рис. 26). На одной стороне угла от точки A последовательно откладываем отрезки AK и KL длины c и b соответственно, а на другой стороне угла откладываем отрезок AM длины a. Проведем через точку L прямую параллельно (KM) и в пересечении с лучом $[AM)$ получим точку N. Отрезок MN имеет искомую длину. Действительно, обозначив его длину через x, по теореме Фалеса имеем $x/a = b/c$ или $x = \frac{ab}{c}$.

ЗАМ3. *По двум данным отрезкам, длины которых равны a и b, построить отрезок длины $\sqrt{ab}$ (среднее геометрическое a и b).*

На произвольной прямой l от произвольной точки $H \in l$ в разные стороны от H откладываем отрезки HA и HB, длины которых равны a и b соответственно (рис. 27). На отрезке AB как на диаметре строим окружность ω. Пусть C — одна из точек пересечения этой окружности с перпендикуляром, проведенном из точки H к прямой l. Тогда отрезок CH искомой длины. Действительно, $\angle C = 90^\circ$ и по свойству высоты прямоугольного треугольника $CH^2 = ab$ или $CH = \sqrt{ab}$.

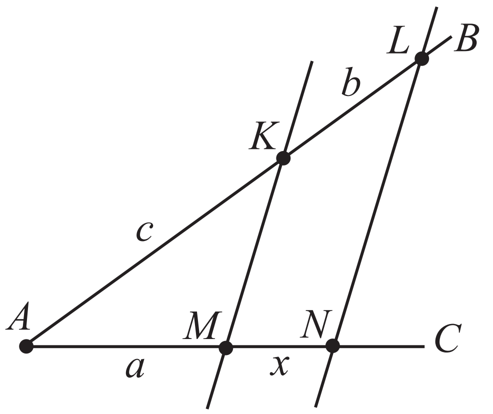


Рис. 26

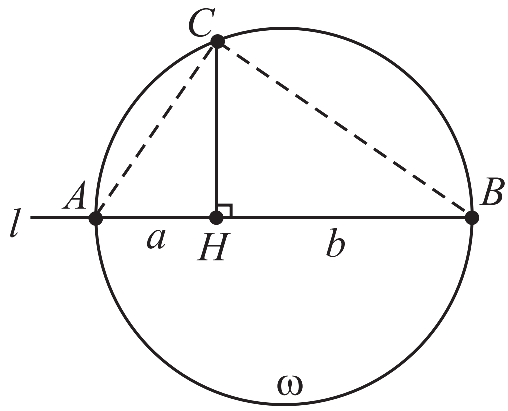


Рис. 27

ЗАМ4. *По двум данным отрезкам, длины которых равны x и y, построить отрезок длины $\sqrt{x^2+y^2}$.*

Достаточно построить прямоугольный треугольник с катетами длины x и y, тогда гипотенуза будет иметь искомую длину.

ЗАМ5. *По отрезку длины a построить отрезок длины $a\sqrt{n}$, где $n \in N$, $n \geqslant 2$.*

Выбрав в предыдущей задаче $x = y = a$, получаем отрезок длины $\sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$. Если же $x = a$ и $y = a\sqrt{2}$, то по ЗАМ4 получаем отрезок длины $a\sqrt{3}$. В общем случае применение ЗАМ4 к отрезкам $x = a$ и $y = a\sqrt{n}$ позволяет получить отрезок длины $a\sqrt{n+1}$.

ЗАМ6. *По отрезку длины a и острому углу α построить отрезки длины $a\sin\alpha$, $a\cos\alpha$, $a/\sin\alpha$ и $a/\cos\alpha$.*

Строим прямоугольный треугольник с гипотенузой длины a и острым углом α, тогда его катеты имеют длины $a\sin\alpha$ и $a\cos\alpha$. Для нахождения отрезка длины $a/\sin\alpha$ надо построить прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом величины α (ГМТ6, БЗ7), тогда его гипотенуза будет иметь искомую длину. Построение отрезка длины $a/\cos\alpha$ очевидно.

Теперь рассмотрим несколько более сложных задач.

Пример 1. Построить правильный десятиугольник, зная его сторону.

Решение. Анализ. Предположим, что такой десятиугольник $A_1\ldots A_{10}$ уже построен и O — центр описанной около него окружности. Тогда величина угла A_1OA_2 равна 36°. Поэтому задача сводится к построению равнобедренного треугольника с известным основанием A_1A_2 и величиной угла при вершине (сам угол пока не дан, нам еще предстоит его построить). Величина угла при основании такого треугольника равна 72° и поэтому биссектриса этого угла делит $\triangle A_1OA_2$ на два равнобедренных треугольника. Из свойства биссектрисы делить противоположную сторону пропорционально прилежащим ей сторонам можно найти выражение для длины боковой стороны через a: $A_1O = a\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. *Построение.* По заданной стороне длины a находим отрезки длины $a/2$ и $a\sqrt{5}/2$ (по ЗАМ1 и ЗАМ5). Сумма двух найденных отрезков даст радиус описанной окружности около искомого десятиугольника, что делает дальнейшее построение очевидным. *Доказательство.* Следует из анализа. *Исследование.* Задача, очевидно, всегда имеет единственное решение.

Разобранный пример имеет несколько полезных приложений.

Пример 2. Построить правильный пятиугольник, зная его сторону.

Решение. Строим произвольный десятиугольник, затем, соединяя его вершины через одну, получаем правильный пятиугольник, подобный искомому. Зная теперь угол при вершине правильного пятиугольника и его сторону, получаем искомую фигуру.

Пример 3. Построить угол величины 3°.

Решение. Напомним, что у нас уже есть угол, величина которого равна 36°, а значит и угол величины 18°. Проводя биссектрисы в равностороннем треугольнике, можно получить угол величины 15°. Разность углов 18° и 15° дает нам угол искомой величины.

Пример 4. Даны прямая a и не пересекающий ее отрезок AB. Построить окружность, касающуюся прямой a и проходящей через точки A и B.

Решение. Анализ. Для решения задачи достаточно найти точку C — точку касания искомой окружности с данной прямой. Рассмотрим два случая: $(AB)\|a$ и $(AB)\cap a\neq\varnothing$. В случае $(AB)\|a$ точка C находится без труда — это пересечение серединного перпендикуляра к отрезку AB с прямой a. В случае непараллельности прямых AB и a обозначим через L точку их пересечения (рис. 28). Из теоремы о касательной и секущей получаем $LC^2 = LA\cdot LB$ или $LC=\sqrt{LA\cdot LB}$.

Построение. Если прямые AB и a параллельны, построение очевидно. Во всех остальных случаях сначала находим точку L — точку пересечения этих прямых. Затем находим отрезок длины $\sqrt{LA\cdot LB}$ (по ЗАМ3) и откладываем его от точки L в обе стороны на прямой a. Получившиеся точки касания дают нам две искомых окружности. *Доказательство.* Остановимся только на случае, когда $(AB)\cap a\neq\varnothing$. Нам необходимо доказать, что точка C будет единственной токой пересечения прямой и построенной окружности. Предположим, что в этом пересечении есть еще одна точка D, отличная от точки C. Тогда $LC\cdot LD = LA\cdot LB = LC^2$. Откуда $LD = LC$, что противоречит предположению (так как обе точки — B и C — должны лежать на одном луче с вершиной в точке L). *Исследование.* Решение единственно в случае $(AB)\|a$. Во всех остальных случаях существует два различных решения.

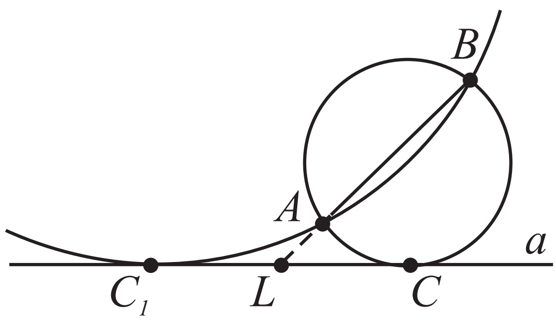


Рис. 28

Пример 5. Построить вписанный четырехугольник, зная все его стороны (задача Брахмагупты).

Решение. Анализ. Пусть длины сторон AB, BC, CD, DA искомого четырехугольника соответственно равны a, b, c и d (известные нам числа). Ясно, что для построения достаточно найти хотя бы одну диагональ четырехугольника $ABCD$. Обозначим через x, y и R соответственно длины диагоналей BD, AC и радиус описанной около $ABCD$ окружности. Из теоремы Птолемея (см. стр. 34) получаем первое соотношение:

$$xy = ac + bd. \tag{1}$$

Каждая диагональ разбивает четырехугольник на пару треугольников, поэтому, используя известную формулу площади треугольника через радиус описанной окружности и через его стороны, легко можно придти к

$$S_{ABCD} = \frac{adx}{4R} + \frac{bcx}{4R} = \frac{aby}{4R} + \frac{cdy}{4R},$$

откуда получаем второе соотношение

$$\frac{x}{y} = \frac{ab+cd}{ad+bc}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем систему из двух уравнений

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} \quad \text{и} \quad y = \frac{ac+bd}{x}. \tag{3}$$

Преобразуем первое из уравнений системы (3) к виду

$$x = \sqrt{\frac{\frac{ac+bd}{a} \cdot \frac{ab+cd}{a}}{\frac{ad+bc}{a}} \cdot a} = \sqrt{\frac{k \cdot l}{m} \cdot a} = \sqrt{p \cdot a}, \quad \text{где}$$

$$p = \frac{k \cdot l}{m}, \quad k = \frac{ac+bd}{a}, \quad l = \frac{ab+cd}{a}, \quad m = \frac{ad+bc}{a}.$$

Построение. По известным отрезкам, используя ЗАМ2, последовательно находим отрезки длины k, l, m, p (обозначения см. выше). Затем (по ЗАМ3) находим диагональ длины x. Дальнейшее построение очевидно.
Доказательство. Как это видно из системы (3) условие вписанности четырехугольника однозначно по сторонам позволяет найти длины диагоналей. Это означает, что если вписанный четырехугольник с известными сторонами существует, то он единственен и построенный нами четырехугольник является искомым. Осталось только доказать, что если существует четырехугольник со сторонами a, b, c и d, то обязательно существует и вписанный четырехугольник с такими же длинами сторон. Это следует из простого замечания: при достаточном увеличении диагонали BD сумма $\angle A + \angle C$ будет больше 180°, а при достаточном уменьшении диагонали BD сумма $\angle A + \angle C$ будет меньше 180°. Поэтому при некотором значении длины диагонали BD эта сумма будет равна 180° (здесь мы используем непрерывность[1] изменения рассматриваемой суммы) и че-

[1]Понятие непрерывной функции, а также используемое здесь свойство определенной на промежутке непрерывной функции принимать все промежуточные значения, рассматриваются в 11-ом классе.

тырехугольник будет вписанным. *Исследование.* Почти полностью проведено в доказательстве. Остается только отметить, что четырехугольник со сторонами a, b, c и d существует тогда и только тогда, когда его наибольшая сторона меньше суммы остальных сторон (аналог хорошо известного неравенства для треугольника).

Координатный метод. Напомним, в чем суть координатного метода. На плоскости вводится прямоугольная (декартова) система координат, при этом каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара ее координат — (x, y) (точку с ее координатами обычно записывают в виде $M(x, y)$). Появляется возможность некоторые фигуры на плоскости описать с помощью алгебраических уравнений. Напомним, что уравнение $f(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* фигуры Φ, если

$$M(x, y) \in \Phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ координаты точки } M \text{ удовлетворяют уравнению } f(x, y) = 0,$$

или, что то же самое, $\Phi = \{M(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Хорошо известны координатные уравнения прямых и окружностей. Любая прямая на плоскости имеет своим координатным уравнением уравнение вида $y = k \cdot x + b$, если она не параллельна оси Oy, и $x = x_0$ — в противном случае. Верно и обратное, любое уравнение вида $y = k \cdot x + b$ или $x = x_0$ является координатным уравнением некоторой прямой. Координатным уравнением окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ является уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Верно также, что любое такое уравнение задает на плоскости окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$.

Рассмотрим несколько задач, в которых поиск ГМТ осуществляется с использованием координатного метода.

Пример 6. На плоскости даны точки A и B ($A \neq B$). Найти ГМТ M, для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна и рана некоторому числу d^2 (где d — длина некоторого известного отрезка).

Решение. Введем систему координат так, что точки A и B лежат на оси Ox, и пусть их первые координаты равны соответственно a и b

(можно считать, что $b > a$). Точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$d^2 = (x-a)^2 + y^2 - (x-b)^2 - y^2 = 2(b-a)x - b^2 + a^2 \Leftrightarrow x = \frac{d^2 + b^2 - a^2}{2(b-a)}.$$

Последнее уравнение задает перпендикулярную к (AB) прямую вида $x = x_0$, причем отрезок длины x_0 может быть построен с помощью ЗАМ2.

Пример 7. Даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, причем ни одна из них не расположена внутри другой. Найти ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой (радикальная ось двух окружностей).

Решение. Выберем систему координат так, что ось Ox проходит через центры данных окружностей и начало координат совпадает с центром одной из них. Пусть, например, $\omega_1 = \omega(O, r)$, $\omega_2 = \omega(O_1, R)$, $O_1(x_1, 0)$ и $x_1 > 0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$. Квадрат касательной из точки M к первой окружности равен $MO^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$. Квадрат касательной из точки M ко второй окружности равен $MO_1^2 - R^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2$. Таким образом, точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 - r^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1^2 + r^2 - R^2}{2x_1}.$$

Последнее уравнение задает перпендикулярную к (OO_1) прямую вида $x = x_0$, причем причем отрезок длины x_0 может быть построен с помощью ЗАМ2 (заметьте, что из условий задачи следует, что $x_0 > 0$).

Добавим радикальную ось двух окружностей к шести основным ГМТ (ГМТ1–ГМТ6), рассмотренных во втором параграфе.

ГМТ7. *Пусть даны две непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2, причем ни одна из них не расположена внутри другой. Тогда ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой, является прямой, перпендикулярной линии центров данных окружностей.*

Замечание. Предыдущую задачу можно сформулировать для любых двух произвольно расположенных, но неконцентрических (т.е. центры которых не совпадают) окружностей ω_1 и ω_2. Прямая, уравнение которой было выведено в предыдущем примере, называется *радикальной осью* этих окружностей. Если обозначить через $[AB]$ максимальный по длине отрезок, по которому окружности ω_1 и ω_2 пересекают их радикальную ось, то рассуждения предыдущего примера дают нам, что ГМТ M, отрезки касательных из которых к окружностям ω_1 и ω_2 равны между собой является радикальная ось, из которой выброшен отрезок AB (точки искомого ГМТ должны быть расположены вне окружностей ω_1 и ω_2, этим и объясняется исключение отрезка AB).

Пример 8. На плоскости выбраны точки A и B ($A \neq B$) и задано число $k > 0$ ($k \neq 1$). Найти ГМТ M, для которых $AM : MB = k$ (окружность Аполлония[2]).

Решение. Введем систему координат так, что $B = O$, $A \in Ox$, причем $A(a, 0)$ и $a > 0$. Точка $M(x, y)$ принадлежит искомому ГМТ тогда и только тогда, когда

$$\frac{AM^2}{MB^2} = k^2 \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = k^2 \Leftrightarrow (1-k^2)x^2 - 2ax + a^2 + (1-k^2)y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2a}{1-k^2} \cdot x + \frac{a^2}{(1-k^2)^2} + y^2 = \frac{a^2}{(1-k^2)^2} - \frac{a^2}{1-k^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Последнее уравнение задает на плоскости окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{1-k^2}, 0\right)$ радиуса $\frac{ak}{|1-k^2|}$.

ГМТ8. *Пусть на плоскости выбраны точки A и B ($A \neq B$) и задано число $k > 0$ ($k \neq 1$). Тогда ГМТ M, для которых $AM : MB = k$ является окружностью, центр которой лежит на прямой (AB).*

Замечание. Если в предыдущем примере k является рациональным числом или числом вида $\sqrt{n}$, где $n \in N$, то окружность Аполлония можно построить циркулем и линейкой, используя задачи ЗАМ1 и ЗАМ5.

Дополнение. В заключение параграфа приведем геометрическое доказательство утверждения, сформулированного в ГМТ8, без использо-

[2] Аполлоний(2-я половина 3 в.– 1-я половина 2 в. до н.э.). Родился в Перге (Малая Азия). Главный его труд "Конические сечения" сохранился не полностью (первые четыре книги) в оригинале, частично (три последующие книги) в арабском переводе, восьмая книга утеряна. Исследуя свойства конических сечений, их диаметров, фокусов, нормалей и касательных, пользовался проективно-геометрическими методами.

вания координатного метода. Нам понадобятся несколько простых вспомогательных утверждений и одно свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.

Лемма 1. *Пусть* $k > 0$ *и на прямой* a *выбраны две различные точки* K *и* L. *Тогда на отрезке* KL *и на множестве* $a \backslash [KL]$ *(последнее множество есть прямая* a, *из которой выброшен отрезок* KL*) найдется не более чем по одной точке* P, *что* $KP : PL = k$.

Для доказательства этой леммы сначала рассмотрим отрезок KL. Предположим противное, найдутся две различные точки $P, S \in [KL]$, для которых $KP : PL = KS : SL = k$. Обозначим $PS = x > 0$ и будем считать, для определенности, что $S \in [PL]$. Тогда

$$\frac{KP}{PL} = \frac{KS}{SL} = \frac{KP + x}{PL - x} \Leftrightarrow KP \cdot PL - KP \cdot x = KP \cdot PL + PL \cdot x,$$

что приводит к $x(KP + PL) = 0$, что невозможно. Множестве $a \backslash [KL]$ является объединением двух открытых лучей, причем для точек P одного луча выполнено $KP : PL > 1$, для другого — $KP : PL < 1$. Поэтому, предположив существование двух разных точек $P, S \in a \backslash [KL]$, для которых $KP : PL = KS : SL$, сначала заключаем, что они принадлежат одному открытому лучу. Затем, обозначив $PS = x > 0$, приходи к противоречию также, как и в случае $P, S \in [KL]$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Дан треугольник* ABC. *Пусть точка* K *лежит на продолжении прямой* AC *за точку* C *и луч* $[CM)$ — *биссектриса угла* KCB *(т.е. биссектриса внешнего угла треугольника). Если луч* $[CM)$ *пересекает прямую* AB *в точке* P, *то* $AC : CB = AP : PB$.

Для доказательства рассмотрим треугольники ACP и BCP (рис. 29). Эти треугольники имеют общую высоту из вершины C, поэтому

$$\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{AP}{PB}. \qquad (1)$$

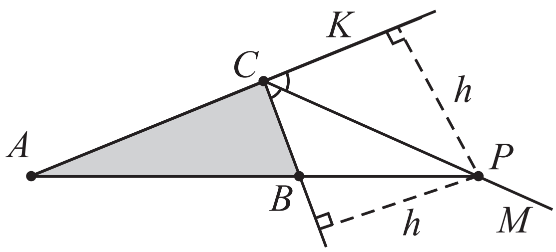


Рис. 29

Для этих же треугольников высоты, опущенные из вершины P на прямые AC и CB, равны по длине, отсюда

$$\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} = \frac{AC}{CB}. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем требуемое соотношение. Лемма 2 доказана.

Из предыдущих двух лемм легко выводится следующее утверждение.

Следствие. *Если для треугольника ABC $(AC \neq CB)$ точки K и L выбраны так, что $K \in [AB]$, $L \in (AB) \setminus [AB]$ и $AK : KB = AL : LB = AC : CB$, тогда лучи $[CK)$ и $[CL)$ являются соответственно биссектрисами внутреннего и внешнего углов данного треугольника.*

Действительно, из свойств биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника ABC каждая из точек их пересечения с прямой AB дает пару отрезков, отношение длин которых равно $AC : CB$. Тогда, по лемме 1 получаем, что $[CK)$ и $[CL)$ — биссектрисы внутреннего и внешнего углов $\triangle ABC$. Следствие доказано. Теперь перейдем к доказательству утверждения, сформулированного в ГМТ8.

Теорема. *Пусть на плоскости выбраны точки A и B $(A \neq B)$ и задано число $k > 0$ $(k \neq 1)$. Тогда ГМТ M, для которых $AM : MB = k$ является окружностью, центр которой лежит на прямой (AB).*

Не ограничивая общность можно считать, что $k > 1$. На отрезке AB и на продолжении стороны AB за точку B найдутся такие две точки K и L, что $AK : KB = AL : LB = k$. Докажем, что окружность ω, построенная на отрезке KL как на диаметре, является искомым ГМТ. Для этого проверим выполнение для ω свойств (а) и (б).

Пусть M — произвольная точка, не лежащая на прямой AB, для которой $AM : MB = k$. Тогда $AK : KB = AL : LB = AM : MB$ и по следствию получаем, что $[MK)$ и $[ML)$ — биссектрисы внутреннего и внешнего углов $\triangle ABM$ (рис. 30). Учитывая, что эти лучи являются биссектрисами двух смежных углов, имеем $\angle KML = 90^\circ$, откуда $M \in \omega$, и свойство (б) для окружности ω выполняется.

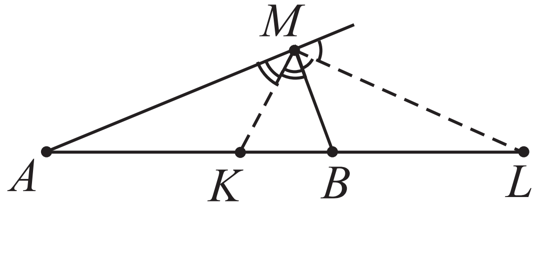


Рис. 30

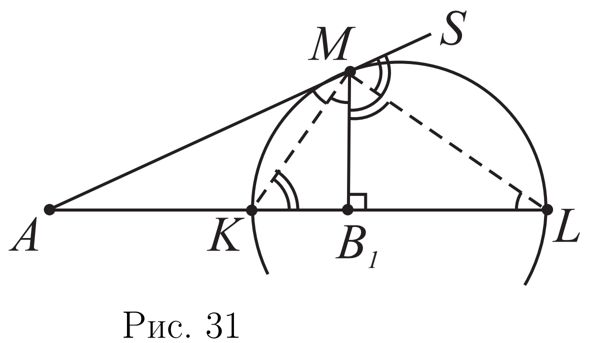


Рис. 31

Рассмотрим теперь произвольную точку M окружности ω, не совпадающую с точками K и L. Возможны два случая: (AM) является касательной к ω или прямая (AM) пересекает ω, помимо точки M, еще в некоторой точке N.

Если (AM) касательная к ω (рис. 31), то опустим перпендикуляр MB_1 на прямую AB и докажем, что $B_1 = B$. Из подобных прямоугольных треугольников и по свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получаем, что $\angle AMK = \angle MLK = \angle KMB_1$ и $\angle SML = \angle MKL = \angle LMB_1$. Таким образом, $[MK)$ и $[ML)$ — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника AMB_1, что дает $AK : KB_1 = AL : LB_1$ или $LB_1 : KB_1 = AL : AK = LB : KB$. Равенство $LB_1 : KB_1 = LB : KB$ и лемма 1 дают совпадение точек B и B_1. Значит, $[MK)$ — биссектриса уже треугольника AMB и $AM : MB = AK : KB = k$, что и завершает доказательство этого случая.

Пусть теперь прямая (AM) пересекает ω, помимо точки M, еще в некоторой точке N и $N \in [AM]$ (рис. 32). Обозначим точку пересечения прямых LM и KN через P, а точку пересечения прямых LN и KM через H. Учитывая, что $\angle LMK = \angle LNK = 90°$, получаем, что H — ортоцентр треугольника LPK и прямая PH содержит высоту PB_1 этого треугольника. Используя свойство ортоцентричного треугольника NMB_1 (см. стр. 13), имеем $\angle AMK = KMB_1$, что с учетом условия $(KM) \perp (BL)$ дает $\angle LMB_1 = \angle PMN = \angle SML$. В результате лучи $[MK)$ и $[ML)$ являются соответственно биссектрисами внутреннего и внешнего углов треугольника AMB_1, откуда $AK : KB_1 = AM : MB_1 = AL : LB_1$ и $B = B_1$ (так как эти две точки делят отрезок KL в одинаковом отношении). Значит, $[MK)$ — биссектриса уже треугольника AMB и $AM : MB = AK : KB = k$, что и завершает доказательство последнего случая. Свойство (а) для окружности ω выполняется, теорема доказана.

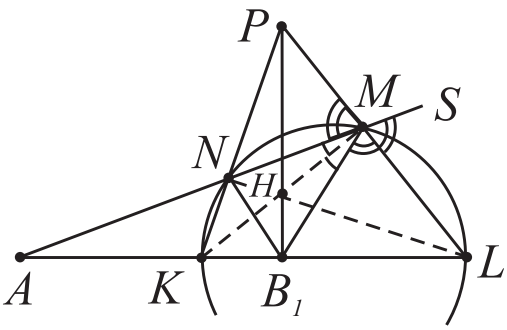


Рис. 32

3.5. Использование движений при решении задач на построение

Этот параграф посвящен преобразованиям и движениям плоскости, а также использованию последних в решении задач на построение. В школе движения плоскости часто называют перемещениями. Тем, кому хорошо знакомо понятие движения плоскости и известны его основные свойства, можно пропустить начало параграфа и перейти к задачам (стр. 77), решаемым с помощью параллельного переноса, осевой и центральной симметрий.

Преобразованием f плоскости α называется такое соответствие между точками этой плоскости, которое одновременно удовлетворяет следующим трем свойствам: 1) **каждой** точке A плоскости α ставится в соответствие **единственная точка** A' этой же плоскости, при этом точка $A' = f(A)$ называется *образом* точки A; 2) **каждая** точка плоскости является образом некоторой точки этой плоскости (т.е. для любой точки $Y \in \alpha$ найдется такая точка $X \in \alpha$, что $Y = f(X)$); 3) **различным** точкам плоскости f ставит в соответствие **разные** образы (т.е. из условия $A, B \in \alpha$, $A \neq B$ всегда следует $f(A) \neq f(B)$).

Приведем несколько примеров преобразований плоскости. Самым простым преобразованием плоскости является ее *тождественное преобразование*, которое обозначается ε и определяется так: для любой точки $A \in \alpha$ выполнено $\varepsilon(A) = A$ (очевидно, что ε удовлетворяет свойствам 1–3). Кстати, для преобразования f такие точки A, для которых верно $f(A) = A$, называются *неподвижными точками* этого преобразования. Тождественное преобразование обладает максимальным запасом неподвижных точек. Еще один пример. Пусть на плоскости α задана декартова система координат Oxy. Определим соответствие f_0 следующим образом: каждая точка оси Ox будет неподвижной точкой f_0, а любая другая точка будет сдвигаться на единицу вправо (конечно же, вдоль оси Ox). Самостоятельно проверьте, что f_0 удовлетворяет свойствам 1–3, т.е. является преобразованием.

В учебном пособии по алгебре (Алгебра, Гл. 3, § 1) для произвольных двух функций определялась функция, являющаяся их композицией. Аналогично и для любых двух преобразований f и g плоскости α их *композицией* называется такое преобразование h (обозначающееся через $g \circ f$), которое любую точку $A \in \alpha$ отображает в точку $g(f(A))$ (т.е. на точку A сначала действует f, а затем, на точку $A' = f(A)$ действует преобразование g). Так, например, композиция $f_0 \circ f_0$ (описание f_0 дано выше) будет действовать так: каждая точка оси Ox по-прежнему будет неподвижной, а любая другая точка будет сдвигаться уже на две единицы вправо.

Важным частным случаем преобразований плоскости являются движения плоскости (в школе часто движение плоскости называют ее перемещением). *Движением* f плоскости α называется такое преобразование этой плоскости, которое сохраняет расстояние между точками, т.е. для любых двух точек $A, B \in \alpha$ выполняется $AB = A'B'$, где $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$. Примеры движений хорошо известны, среди них: параллельные переносы, осевые симметрии, тождественное преобразование и т.д. Доказательство некоторых свойств всех движений основаны на неравенстве треугольника: для любых трех точек A, B, C плоскости выполняется неравенство $AB + BC \geqslant AC$, причем равенство возможно только в случае, когда B является точкой отрезка AC. Рассмотрим произвольную точку B отрезка AC и обозначим через A', B' и C' соответственно образы точек A, B и C при произвольном движении f, тогда из определения движения следует, что

$$A'C' = AC = AB + BC = A'B' + B'C'.$$

Отсюда немедленно следует, что B' является точкой отрезка $A'C'$. Из этого свойства и из определения движения можно вывести следующие свойства всех без исключения движений:

1) образом отрезка при движении является отрезок (при этом *образом фигуры* Φ при движении f называется фигура $\Phi' = \{f(A) : A \in \Phi\}$);

2) образом прямой при движении является прямая (чтобы найти образ прямой AB при движении достаточно провести прямую через образы точек A и B);

3) образом треугольника при движении является равный ему треугольник;

4) угол при движении переводится в равный ему угол;

5) образом окружности $\omega(O, r)$ при движении f является окружность того же радиуса с центром в точке $f(O)$.

Теперь попробуем выяснить, как конкретные виды движений помогают в решении задач на построение.

Параллельный перенос. *Параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{AB}$ (обозначается через $T_{\overrightarrow{AB}}$) называется преобразование плоскости, переводящее произвольную точку C в такую точку C', что $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$. Среди свойств параллельных переносов можно отметить следующие: перенос на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек, а композиция двух и большего количества параллельных переносов также является параллельным переносом (на суммарный вектор). Теперь несколько примеров использования параллельного переноса в задачах на построение.

Пример 1. Дан угол ABC и прямая l, пересекающая обе стороны этого угла. Построить прямую, параллельную прямой l, на которой стороны угла ABC отсекают данный отрезок длины a.

Решение. Предположим, что такая прямая l_1 уже построена. Обозначим через K, L, M и N точки пересечения прямых l и l_1 со сторонами данного угла так, как это сделано на рис. 33. Отрезок MN должен иметь заданную длину и при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{NK}$ этот отрезок перейдет в отрезок такой же длины, отложенный на луче $[KL)$ от точки K. Из этого анализа вытекает следующее построение. Откладываем на луче $[KL)$ от точки K данный отрезок длины a и получаем точку P. Затем через нее проводим прямую, параллельную (BC), которая дает нам точку M. Последним шагом будет построение прямой, параллельной l и проходящей через точку M. Доказательство следует из свойств параллельного переноса (сохраняет длину отрезка и любую прямую переводит в параллельную прямую). В условиях задачи искомая прямая всегда существует и единственна.

Пример 2. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая l. Построить прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы расстояние между хордами, высекаемыми на прямой l_1 окружностями ω_1 и ω_2, имело заданную величину a.

Решение. Предположим, что такая прямая уже построена. Воспользуемся обозначениями рис. 34. По условию $BC = a$ и при параллельном переносе вдоль прямой l на вектор длины a точка B перейдет в точку C. Поэтому построение будем осуществлять так. Строим $\omega_1' = T_{\overrightarrow{v}}(\omega_1)$, где $\overrightarrow{v} \| l$ и длина $\overrightarrow{v}$ равна a (как обсуждалось выше — см. свойства движений — для построения ω_1' достаточно найти образ центра окружности ω_1). Через точку пересечения окружностей ω_1' и ω_2 проводим прямую l_1, параллельную прямой l. Из анализа следует, что прямая l_1 искомая. Число решений всегда не превосходит двух и зависит от количества точек пересечения окружностей ω_1' и ω_2 (на рис. 34 приведен случай с двумя решениями). Стоит заметить, что если к образованию решений не приводит параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{v}$, то необходимо рассматривать также параллельный перенос окружности ω_1 на вектор $-\overrightarrow{v}$.

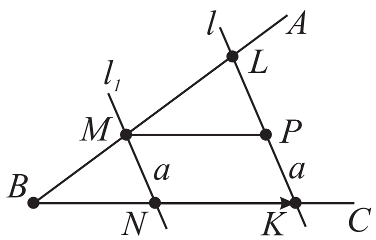


Рис. 33

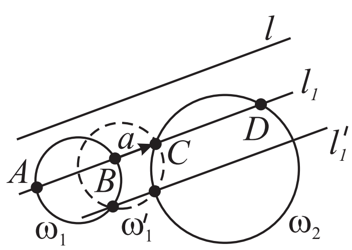


Рис. 34

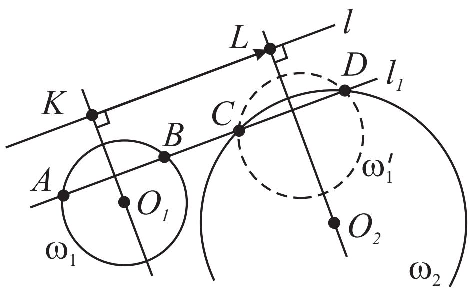


Рис. 35

Пример 3. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая l. Построить прямую l_1, параллельную прямой l, так, чтобы окружностями ω_1 и ω_2 высекали на l_1 равные хорды.

Решение. Снова предполагаем, что искомая прямая l_1 уже построена. Точки пересечения l_1 с окружностями ω_1 и ω_2 обозначим так, как это сделано на рис. 35. Через центры данных окружностей Проведем перпендикуляры O_1K и O_2L к прямой l ($K, L \in l$). Эти две прямые также будут серединными перпендикулярами к хордам AB и CD. По условию должно выполняться равенство $AB = CD$, поэтому при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{KL}$ отрезок AB отобразится на отрезок CD. Теперь опишем построение. Сначала находим $\omega_1' = T_{\overrightarrow{KL}}(\omega_1)$, а затем через любую точку пересечения окружностей ω_1' и ω_2 проводим прямую l_1, параллельную прямой l. Из анализа следует, что прямая l_1 искомая. Решение существует и единственно только при условии $\omega_1' \cap \omega_2 \neq \varnothing$.

Пример 4. Постройте четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и отрезкам AB и CD.

Решение. Пусть такой четырехугольник уже построен (рис. 36 и 37). Обозначим длины известных отрезков AB и CD через a и b соответственно. Действуя на отрезок AB параллельным переносом $T_{\overrightarrow{BC}}$ получим отрезок $A'C$ той же длины.

Далее будем рассматривать два случая: $\angle C \geqslant 180^\circ - \angle B$ (рис. 36) и $\angle C < 180^\circ - \angle B$ (рис. 37). В каждом из этих двух случаев треугольник CDA' может быть построен по двум сторонам a, b и углу между ними $\alpha = |\angle C - (180^\circ - \angle B)|$. Из этого треугольника определяется $\beta = \angle CDA'$

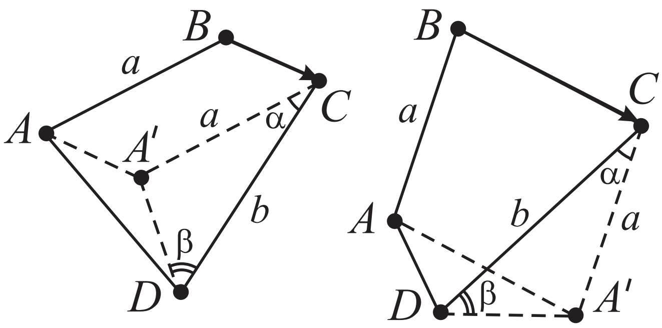


Рис. 36 Рис. 37

и отрезок DA'. Остается рассмотреть треугольник DAA'. В этом треугольнике известна сторона DA' и два прилежащих к ней угла. Действительно, в первом случае $\angle ADA' = \angle D - \beta$ и $\angle DA'A = 360^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \angle B = 180^\circ + \alpha + \beta - \angle B$, а во втором — $\angle ADA' = \angle D + \beta$ и $\angle DA'A = 180^\circ - \alpha - \beta - \angle B$. Таким образом, построение $ABCD$ нужно начинать с треугольника DCA', затем строить треугольник DAA'. После нахождения вершины A остается отложить от луча $[AD)$ известный угол $\angle A$ и на его стороне (отличной от $[AD)$) отложить отрезок длины a. То, что построенный четырехугольник является искомым, следует из анализа задачи. Решение задачи единственно, за исключением случая, когда $A' = D$. В случае, когда одновременно выполнены два равенства $a = b$ и $\angle B = 180^\circ - \angle C$, можно построить бесконечно много различных четырехугольников, удовлетворяющих условиям задачи.

Центральная симметрия. *Центральной симметрией* относительно точки O (обозначается через Z_O) называется преобразование плоскости, переводящее произвольную точку C в такую точку C', что точка O является серединой отрезка CC' (если $C = O$, то по определению считаем, что $C' = O$). Среди свойств центральной симметрии можно отметить следующие: центральная симметрия имеет единственную неподвижную точку — точку O, а композиция двух центральных симметрий Z_O и Z_{O_1} является параллельным переносом на вектор $2\overrightarrow{OO_1}$ (убедитесь в этом самостоятельно, используя свойство средней линии треугольника). Теперь несколько примеров использования центральной симметрии в задачах на построение.

Пример 5. Через общую точку A окружностей ω_1 и ω_2 провести прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

Решение. Предположим, что такая прямая найдена и AB и AC — равные хорды ($B \in \omega_1$). Тогда точка A является серединой отрезка BC и при центральной симметрии относительно точки A точка B перейдет в C, а окружность ω_1 отобразится на некоторую окружность ω_1', пересекающую окружность ω_2 в точках A и C (рис. 38). Из этого анализа вытекает следующее построение. Строим окружность $\omega_1' = Z_A(\omega_1)$ и находим точку C. То, что прямая AC искомая, следует из определения центральной симметрии. Такая прямая определяется однозначно, за исключением случая $\omega_1' = \omega_2$ (т.е. когда данные окружности имеют равные радиусы и касаются в точке A), при котором любая прямая, проходящая через точку A, будет высекать на окружностях равные хорды.

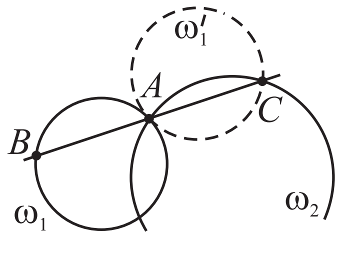


Рис. 38

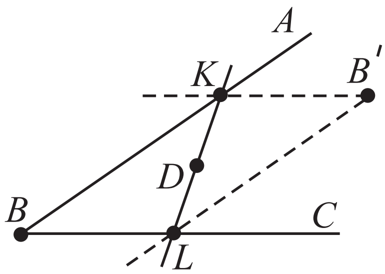


Рис. 39

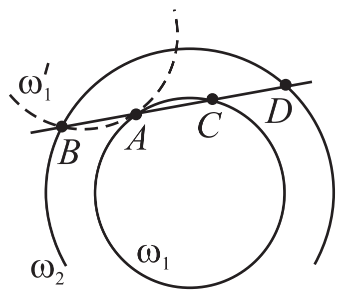


Рис. 40

Пример 6. Дан угол ABC ($0° < \angle ABC < 180°$) и точка D внутри его. Построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D.

Решение. Пусть такой отрезок KL уже построен (рис. 39) и $B' = Z_D(B)$. Поскольку четырехугольник $BKB'L$ центральносимметричен относительно точки D, он является параллелограммом. Следовательно для нахождения искомого отрезка достаточно построить образ угла ABC при центральной симметрии Z_D (для этого строим $B' = Z_D(B)$ и проводим с началом в этой точке лучи, противоположно направленные $[BA)$ и $[BC)$) и пересечь его со сторонами данного угла. Из $L = Z_D(K)$ следует, что отрезок KL искомый, а условие $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ гарантирует существование и единственность этого отрезка.

Пример 7. Даны две концентрические окружности ω_1 и ω_2 (ω_1 расположена внутри ω_2) и точка $A \in \omega_1$. Провести через точку A прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

Решение. Сразу заметим, что если данные окружности высекают на прямой три отрезка, то из условия совпадения центров окружностей следует равенство двух из этих отрезков (тех, которые расположены между ω_1 и ω_2). Поэтому нам достаточно добиться равенства $AB = AC$ (используем обозначения рис. 40). Как обычно, предполагаем искомую прямую уже построенной. Из равенства $AB = AC$ должно следовать $B = Z_A(C)$, что приводит к следующему построению. Находим окружность $\omega_1' = Z_O(\omega_1)$ и точку B — точку пересечения окружностей ω_1' и ω_2. Из анализа задачи следует, что на прямой AB данные окружности высекают три равные хорды. Число решений совпадает с количеством точек пересечения окружностей ω_1' и ω_2 и может принимать значения 0, 1 и 2 (для окружностей на рис. 40 найдутся две различные прямые с требуемым свойством).

Осевая симметрия. *Осевой симметрией* с осью a (обозначается через S_a) называется преобразование плоскости, переводящее произвольную точку C в такую точку C', что прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку CC' (если $C \in a$, то по определению считаем, что $C' = C$). Среди свойств осевых симметрий можно отметить следующие: неподвижными точками осевой симметрии являются только точки оси симметрии, композиция двух осевых симметрий S_a и S_b с перпендикулярными осями является центральной симметрией относительно точки пересечения прямых a и b, если же оси параллельны, то композиция $S_b \circ S_a$ является параллельным переносом на вектор $2\overrightarrow{AB}$, где $A \in a$, $B \in b$ и $(AB) \perp a$ (последние два утверждения доказать самим). Теперь несколько примеров использования осевой симметрии в задачах на построение.

Пример 8. Построить четырехугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A, зная длины его сторон.

Решение. Пусть $ABCD$ — искомый четырехугольник (рис. 41). По условию $[AC)$ является биссектрисой угла A, поэтому при симметрии относительно прямой AC луч $[AB)$ отобразится на луч $[AD)$ а точка B перейдет в некоторую точку B' последнего луча. В треугольнике CDB' известны все стороны: CD, $CB' = CB$ и $DB' = |AD - AB|$. Поэтому построение $ABCD$ можно проводить в следующем порядке. Сначала на произвольном луче с вершиной в точке A откладываем отрезки AD и $AB' = AB$ и строим по трем сторонам треугольник CDB'. Определив точку C, симметрично отображаем относительно прямой AC точку B' и получаем вершину B. Из свойств осевой симметрии сразу следует, что построенный четырехугольник удовлетворяет всем условиям задачи. Обсудим вопрос числа решений. Если каждый из отрезков CD, CB' и DB' меньше суммы двух оставшихся, то искомый четырехугольник строится однозначно. Если $AB = AD$ и $BC = CD$ (в этом случае точки B' и D совпадут) существует бесконечно много четырехугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Во всех остальных случаях решений нет.

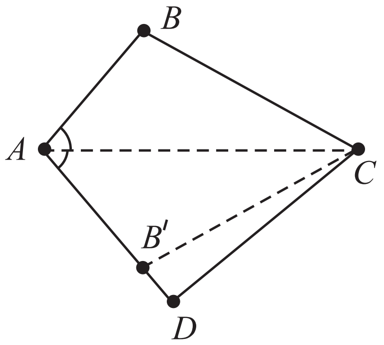


Рис. 41

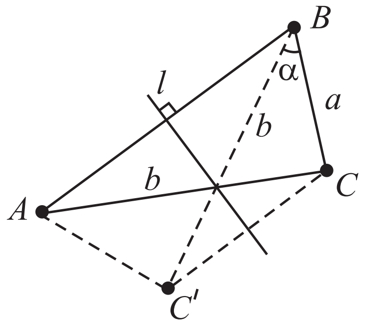


Рис. 42

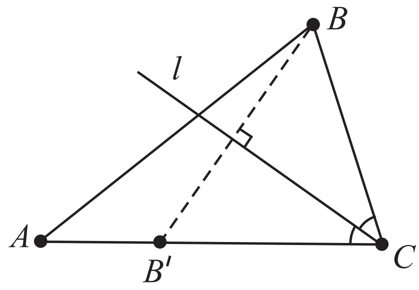


Рис. 43

Пример 9. Построить треугольник ABC, зная его стороны $BC = a$, $AC = b$ и разность углов B и A.

Решение. Пусть такой треугольник построен (рис. 42), прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AB, и точка C' является образом точки C относительно прямой l. Тогда $ABCC'$ — равнобедренная трапеция, причем в треугольнике BCC' известны следующие элементы: $BC = a$, $BC' = b$ и $\alpha = \angle B - \angle A$. Теперь для нахождения искомого треугольника достаточно по двум сторонам и углу между ними построить треугольник BCC', а затем относительно серединного перпендикуляра к отрезку CC' (т.е. относительно прямой l) отразить точку B. Из анализа задачи и построения следует, что треугольник ABC искомый и строится по исходным числовым значениям однозначно.

Пример 10. Построить треугольник ABC, если даны точки A, B и прямая, на которой лежит биссектриса угла C (при этом дано, что точки A, B лежат по разные стороны от этой прямой).

Решение. Предположим, что такой треугольник уже построен и $B' = S_l(B)$, где l — прямая, на которой лежит биссектриса угла C (рис. 43). Тогда $B' \in (AC)$ и вершина C может быть получена как точка пересечения прямых (AB') и l. Таким образом, для построения недостающей вершины треугольника ABC достаточно найти точку $B' = S_l(B)$ и пересечь прямую (AB') с прямой l. Подробнее остановимся на определении количества решений. Ясно, что если прямые (AB') и l не параллельны, то решение задачи существует и единственно. Задача не имеет решений, если прямые (AB') и l параллельны (выше было доказано, что из существования решения следует, что эти прямые пересекаются). И, наконец, в случае $B' = A$ существует бесконечное число различных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи (в качестве C можно выбирать произвольную точку прямой l, за исключением точки пересечения $[AB] \cap l$).

3.6. Построения одной линейкой

Этот и следующий параграфы являются дополнительным материалом по теме “Геометрические построения”, и при первом прочтении этой главы их можно опустить. Далее мы поговорим о построениях с ограниченным набором инструментов — о построениях с использованием только линейки или только циркуля. Этот параграф посвящен построениям одной линейкой. Без дополнительно нарисованных линий на плоскости (например, двух параллельных прямых) одной линейкой мало что можно сделать. Например, с помощью только одной линейки без дополнительных линий нельзя даже разделить пополам произвольный отрезок. Но, зато, если на плоскости нарисована хотя бы одна окружность и отмечен ее центр, все дальнейшие построения можно выполнять только с помощью одной линейки. В 1833 году швейцарский математик Якоб Штейнер доказал следующую теорему: *любая задача на построение, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена только одной линейкой, если в плоскости чертежа задана хотя бы одна окружность и отмечен ее центр (при этом задача на построение какой-либо окружно-*

сти считается решенной, если найден ее центр и отрезок, длина которого равна радиусу искомой окружности). Чуть раньше, эту же теорему совершенно другими методами удалось доказать французским математиком Жаном Понселе (будучи участником войны 1812 года Понселе попал в плен и несколько важных работ по геометрии им были написаны в Саратове в 1812–14 годах). Здесь мы разберем несколько задач геометрии линейки (эту часть геометрии принято называть *геометрией Понселе-Штейнера*).

Пример 1. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки построить прямоугольник.

Решение. Через точку O — центр данной окружности достаточно провести два различных диаметра. Концы этих диаметров будут вершинами прямоугольника, поскольку каждый из углов этого вписанного четырехугольника опирается на диаметр.

Пример 2. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Разделить данный отрезок пополам, используя одну линейку.

Решение. Пусть $a \| b$ и $[AB] \subseteq a$ (рис. 44). Выберем произвольно $D \in b$ и на продолжении прямой AD за точку D отметим точку M. В пересечении прямых b и BM получим точку C, а в пересечении прямых AC и BD — точку O. Точки пересечения прямой OM с прямыми a и b обозначим через K и L соответственно. Четырехугольник $ABCD$ является трапецией, отсюда (см. стр. 41) точки K и L — середины ее оснований.

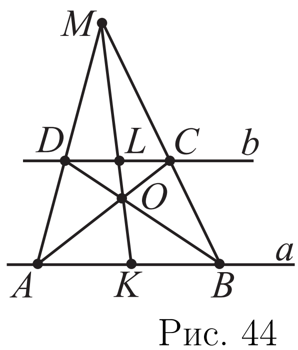


Рис. 44

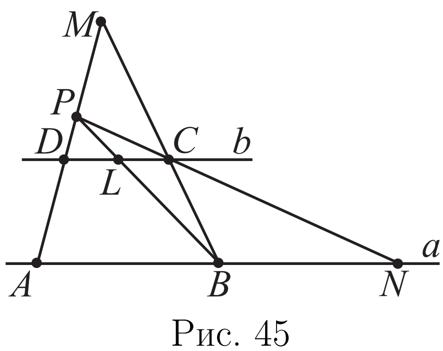


Рис. 45

Пример 3. Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Увеличить данный отрезок в два раза, используя одну линейку.

Решение. Используем обозначения предыдущей задачи и рис. 45. Последовательно найдем точки P и N, где $\{P\} = (BL) \cap (AM)$ и $\{N\} = (PC) \cap a$. Снова применяя свойство, о котором идет речь на стр. 41, но уже к трапеции $ADCN$, получаем, что B — середина отрезка AN. Отсюда отрезок AN — искомый.

Пример 4. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки вписать в эту окружность квадрат.

Решение. Пусть $ABCD$ — вписанный в данную окружность прямоугольник (он построен в первом примере). Его противоположные стороны параллельны, поэтому, используя пример 2, мы можем найти точки K, L, M и N, которые являются соответственно серединами его сторон AB, BC, CD и DA. Прямые KM и LN содержат перпендикулярные диаметры данной окружности, поэтому высекают на ней четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.

Пример 5. Дана прямая a и два равных отрезка AB и BN, лежащих на это прямой. Через произвольную точку D провести прямую, параллельную прямой a.

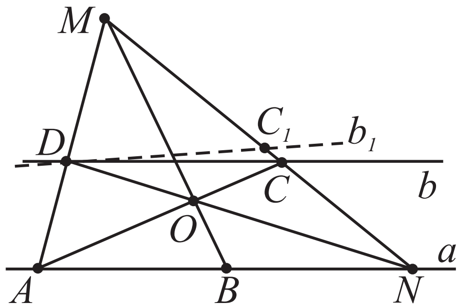


Рис. 46

Решение. Фактически, эта задача является обратной к задаче из примера 2. Сначала на продолжении прямой AD за точку D произвольно выберем точку M (рис. 46). Пусть O — точка пересечения прямых MB и DN, а C — точка пересечения прямых AO и MN. Докажем, что прямая $b = (DC)$ является искомой. Пусть это не так, тогда рассмотрим прямую b_1, которая проходит через D, параллельна прямой a и не совпадает с b. Точку пересечения прямых b_1 и MN обозначим через C_1. Тогда ANC_1D — трапеция, причем точка O, одновременно лежащая на прямых DN и MB должна быть точкой пересечения диагоналей этой трапеции. Таким образом, $C_1 \in (AO)$, откуда $C = C_1$ и $b_1 = b$. Это противоречит предположению $b_1 \neq b$. Параллельность прямых b и a доказана.

Пример 6. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, параллельную данной прямой a.

Решение. Используя примеры 1 и 2 в данную окружность можно вписать прямоугольник $ABCD$ и найти середины его сторон. Прямая a не может быть параллельна каждой стороне этого прямоугольника. Пусть, например прямые AB и a не параллельны. Обозначим через K и M середины отрезков AB и CD. Тогда тройка параллельных прямых — (AD), (KM) и (BC) — высечет согласно теореме Фалеса на прямой a два равных отрезка. Затем, используя результат предыдущей задачи, через любую точку плоскости, в том числе и через H, можно провести прямую, параллельную данной прямой a (используя при этом только линейку).

Пример 7. На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку H провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

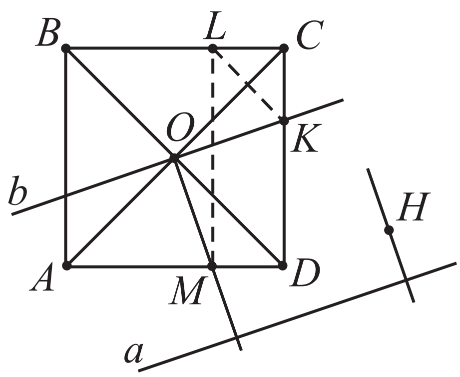


Рис. 47

Решение. Можно считать, что на плоскости, кроме данных прямой и точки нарисован квадрат $ABCD$ (см. пример 4), его центр — точка O, а также прямая b (см. пример 5), которая проходит через точку O и параллельна прямой a (рис. 47). Пусть K — точка пересечения прямой a со стороной CD, прямая KL параллельна диагонали BD (см. пример 5), причем $L \in [BC]$. И, наконец, проводя через L прямую параллельно (AB), получаем на стороне AD точку M. Докажем, что $(OM) \perp b$. Из равенств $DM = CL = CK$ следует равенство треугольников ODM и OCK (две пары соответственно равных сторон и равенство углов между ними). Из равенства этих треугольников и условия $(OC) \perp (OD)$ следует, что $(OM) \perp b$. Теперь остается через точку H провести прямую, параллельную прямой OM (см. пример 5).

3.7. Построения одним циркулем

Теория построения одним циркулем получила свою известность благодаря книге “Геометрия циркуля” (1797 г.) Лоренцо Маскерони[3]. Значительно позже в одном из букинистических магазинов была обнаружена книга датского математика Георга Мора “Датский Евклид”, датированная 1672 годом! Обе книги содержат следующий основной результат геометрии циркуля.

Теорема Мора-Маскерони. *Все построения, выполненные с помощью циркуля и линейки, могут быть проделаны только с помощью циркуля (при этом мы считаем прямую построенной, если найдены хотя бы две точки этой прямой).*

Для доказательства этой теоремы достаточно научиться находить только с помощью циркуля пересечения двух прямых, прямой и окружности. Решения этих задач мы приведем чуть позже, а сначала исследуем еще один вид преобразований плоскости.

В 1831 году Л. Дж Магнус впервые стал рассматривать преобразование плоскости, которое получило название симметрии относительно окружности или инверсии (от лат. *inversio* — обращение). Под инверсией плоскости α относительно окружности $\omega(O,R)$ с центром в точке O и радиусом R понимают такое преобразование множества $\alpha\backslash\{O\}$, при котором каждой точке $A\in\alpha\backslash\{O\}$ ставится в соответствие такая точка A', что A' лежит на луче $[OA)$ и $OA\cdot OA'=R^2$ (далее будем использовать обозначение $inv_O^R(A)=A'$).

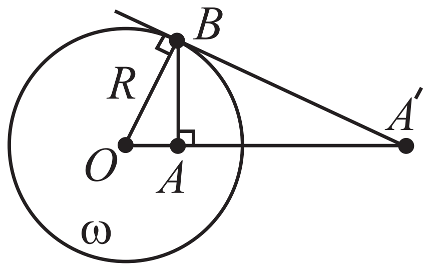


Рис. 48

Заметим сразу, что инверсия не определена в точке O, но иногда бывает полезно добавить к плоскости одну бесконечно удаленную точку, т.е. рассмотреть множество $\alpha\cup\{\infty\}$ и при этом считать, что $inv_O^R(O)=\infty$ и $inv_O^R(\infty)=O$.

На рис. 48 указан способ построения образа точки A при инверсии относительно окружности $\omega=\omega(O,R)$. Для этого (если точка A расположена внутри окружности) проводят перпендикуляр (AB) к прямой OA ($B\in\omega\cap(AB)$) и из точки B проводят касательную к окружно-

[3]Л. Маскерони(1750-1800), итальянский инженер, изучал математику самостоятельно. Работы относятся к теории геометрических построений, теории многоугольников, интегральному исчислению. Результаты его геометрических исследований доложил в 1797 году на заседании Национального института Наполеон Бонапарт.

сти ω. Из подобия треугольников OAB и OBA' получаем отношение $OA : OB = OB : OA'$ или $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Следовательно $inv_O^R(A) = A'$. Если же точка A расположена вне окружности, то сначала из точки A проводят касательную к окружности, затем из точки касания опускают перпендикуляр на прямую OA и получают точку A'.

На рис. 49 построение образа выполнено только с помощью циркуля (в предположении, что $OA > R/2$). Для этого достаточно провести окружность $\omega(A, OA)$ и для двух точек пересечения $\omega(O,R) \cap \omega(A, OA)$ построить равные окружности $\omega(B,R)$ и $\omega(C,R)$. Вторая точка пересечения $\omega(B,R) \cap \omega(C,R)$, отличная от точки O, является искомой. Для доказательства используем подобие равнобедренных треугольников OBA' и OBA. Сначала получаем $OA' : OB = OB : OA$, а затем, необходимое $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Если же $OA \leqslant R/2$, то сначала увеличивают отрезок OA в n раз до отрезка OB (удвоение отрезка показано на рис. 50 — последовательно откладывают радиус OA на окружности $\omega(A, OA)$ и используют свойство правильного вписанного шестиугольника), после этого находят $B' = inv_O^R(B)$ и снова увеличивают (а не уменьшают!) отрезок OB' в n раз до отрезка OC. Можно доказать, что $C = inv_O^R(A)$.

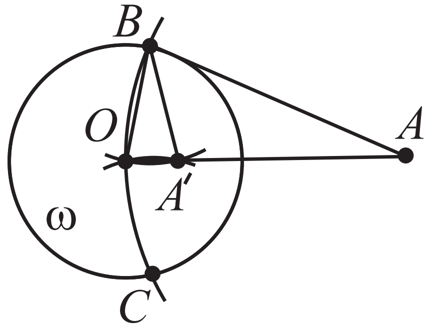


Рис. 49

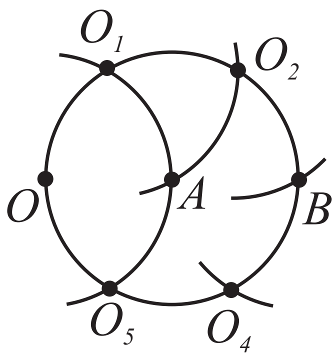


Рис. 50

Из многочисленных свойств инверсии рассмотрим лишь следующие. Пусть $A' = inv_O^R(A)$ и $B' = inv_O^R(B)$.

I. Если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Утверждение требует проверки только когда лучи $[OA)$ и $[OB)$ совпадают. В этом случае $OA \neq OB$ и поэтому $OA' \neq OB'$. Приходим к неравенству $A' \neq B'$.

II. Все точки окружности $\omega(O,R)$ при инверсии inv_O^R остаются неподвижными. Внутренние точки круга с границей $\omega(O,R)$ переходят во внешние, а внешние — во внутренние.

Первая часть утверждения очевидна, а вторая следует из замечания: если $OA < R$, то $OA' = R^2/OA > R$.

III. Если $A' = inv_O^R(A)$, то $A = inv_O^R(A')$. Для произвольных фигур Φ и Φ' из условия $\Phi' = inv_O^R(\Phi)$ также следует $\Phi = inv_O^R(\Phi')$.

IV. Треугольники AOB и $A'OB'$ подобны, причем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

Достаточно заметить, что эти треугольники имеют общий угол, а из равенства $OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$ следует равенство отношений $OA : OB' = OB : OA'$. Обратите внимание, что в отличие от подобия, пропорциональность связывает стороны OA и OB', OB и OA', а не OA и OA', OB и OB'. Из подобия получаем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

V. $A'B' = \dfrac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2$. Действительно, по свойству IV имеем

$$A'B' = \frac{AB \cdot OA'}{OB} = \frac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2.$$

VI. Прямая a, проходящая через центр инверсии, отображается в себя. Если же $O \notin a$ и A — основание перпендикуляра из точки O на прямую a (рис. 51), то образом прямой a будет окружность ω_1, построенная на отрезке OA' как на диаметре ($A' = inv_O^R(A)$).

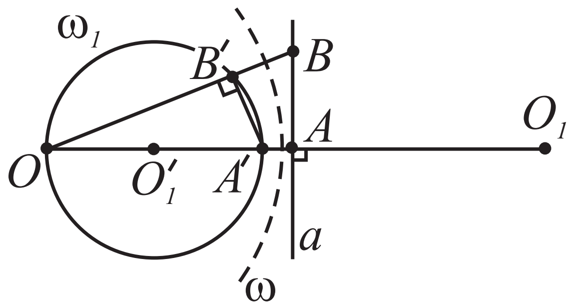


Рис. 51

Для доказательства этого свойства рассмотрим произвольную точку B прямой a. По свойству IV имеем $\angle OB'A' = \angle OAB = 90^\circ$. Следовательно точка B' лежит на окружности с диаметром OA'. Удивление от такого неожиданного действия инверсии на произвольную прямую пройдет, если принять в расчет бесконечно удаленную точку. Каждая прямая проходит через ∞. Поэтому переход точки ∞ в точку O заставляет концы прямой сжиматься к точке O.

Следующее свойство позволяет определить центр окружности, которая является образом прямой из свойства VI.

VII. Пусть $\omega_1 = inv_O^R(a)$. Обозначим через $O_1 = S_a(O)$, где S_a — осевая симметрия с осью a (рис. 51). Тогда центром окружности ω_1 является точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$.

Сохраняя принятые в предыдущем свойстве обозначения, имеем $OO_1 = 2OA$. Подставляя это в равенство $OA{\cdot}OA' = R^2 = OO_1{\cdot}OO_1'$ получаем $OO_1' = OA'/2$. Поэтому точка O_1' является серединой отрезка OA'.

VIII. Окружность $\omega_1(O_1, r)$, проходящая через центр инверсии, отображается на некоторую прямую a. Более того, если A — конец диаметра, проходящего через O и O_1 ($A \neq O$), то прямая a проходит через точку $A' = inv_O^R(A)$ и перпендикулярна прямой OO_1.

Справедливость этого свойства сразу следует из свойств III и VI.

IX. Окружность $\omega_1(O_1, r_1)$, не проходящая через центр инверсии, отображается при inv_O^R на некоторую окружность $\omega_2(O_2, r_2)$. Точнее, если точки A и B являются концами диаметра, лежащего на прямой OO_1 (рис. 52), то отрезок $A'B'$ является диаметром окружности ω_2 ($A' = inv_O^R(A),\ B' = inv_O^R(B)$).

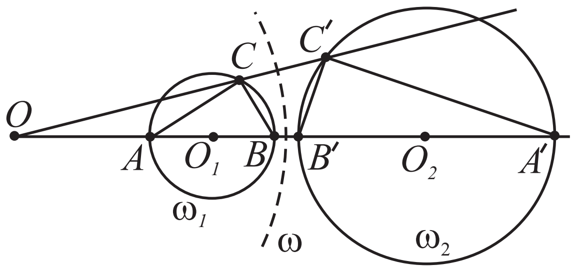


Рис. 52

Для доказательства рассмотрим произвольную точку C окружности ω_1 и покажем, что $C' = inv_O^R(C) \in \omega_2$. Из свойства IV имеем равенства $\angle OCA = \angle OA'C'$ и $\angle OCB = \angle OB'C'$. Поэтому

$$\angle A'C'B' = \angle OB'C' - \angle OA'C' = \angle OCB - \angle OCA = 90^\circ.$$

Следовательно $C' \in \omega_2$.

Переходит ли центр O_1 в центр окружности ω_2, точку O_2? Оказывается, никогда не переходит (убедитесь в этом с помощью прямых вычислений, т.е. докажите, что точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$ не может быть серединой $[A'B']$). Этот "недостаток" инверсии с лихвой компенсируется замечательным ее свойством сохранять величину угла. Напомним, что угол между пересекающимися окружностями по определению равен углу между касательными к этим окружностям в точке их пересечения. Аналогично определяется и угол между пересекающимися прямой и окружностью. Рассмотрим частный случай: для двух касающихся окружностей ω_1 и

ω_2 определим величину угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$. Вид образов $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ во многом зависит от положения точки O относительно окружностей ω_1 и ω_2. Так, если $O \notin \omega_1 \cup \omega_2$, то из свойств I и IX получаем, что $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются касающимися окружностями. Если же O лежит только на одной из окружностей, например на ω_1, то из свойств I, VIII и IX получим касающиеся прямую $inv_O^R(\omega_1)$ и окружность $inv_O^R(\omega_2)$. И, наконец, если O совпадает с точкой касания окружностей, то $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются параллельными прямыми (величина угла между параллельными прямыми по определению равна нулю). Итак, в каждом из случаев, величина угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ равна нулю. Аналогично можно установить, что если прямые a и b параллельны, то величина угла между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ также равна нулю.

X. Инверсия сохраняет величину угла между прямыми, пересекающимися окружностями, пересекающимися прямой и окружностью.

Докажем сначала, что для любых прямых угол $\angle ab$ совпадает с углом между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$. Утверждение очевидно, если прямые проходят через точку O. Пусть теперь $O \in a$ и $O \notin b$ (рис. 53). Обозначим через ω_1 окружность, в которую переходит прямая b, и через b_1 — касательную к ω_1 в точке O. Так прямые b и b_1 перпендикулярны одному и тому же диаметру, то они параллельны. Поэтому угол между a и ω_1, равный по определению углу между a и b_1, совпадает с углом $\angle ab$. Рассуждения аналогичны и в случае, когда $O \notin a \cup b$ (надо рассмотреть касательные к окружностям $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ в точке O).

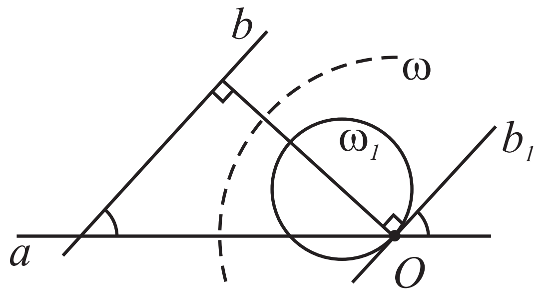


Рис. 53

Поскольку угол между окружностями и между прямой и окружностью определялся через касательные, то доказательство остальных двух утверждений легко сводятся к случаю сохранения угла между прямыми.

Далее рассмотрим несколько задач, в решении которых разрешается пользоваться только циркулем.

Пример 1. Разделить с помощью циркуля данный отрезок AB на n равных частей ($n \in N$).

Решение. Чтобы разделить отрезок AB на n равных частей, сначала увеличим его в n раз, т.е. на луче $[AB)$ найдем точку C, что $AC = n \cdot AB$. А затем построим точку C' — образ точки C при инверсии относительно окружности $\omega(A, AB)$. Из соотношения $AC \cdot AC' = AB^2$ получаем $AC' = AB/n$. Все указанные построения можно выполнить только с помощью циркуля (для этого даже не нужна прямая AB).

Пример 2. Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

Решение. Выберем произвольную точку O окружности $\omega_1(X, r)$, центр X которой нам нужно определить (рис. 54). Из точки O проведем произвольную окружность $\omega(O, R)$ так, чтобы она пересекала исходную окружность ω_1. Обозначим точки пересечения $\omega \cap \omega_1$ через A и B. Куда перейдет прямая AB при инверсии inv_O^R? Конечно же в ω_1, поскольку точки A и B остаются неподвижными (свойства II и VI). По свойству VII центр $inv_O^R((AB))$ (т.е. центр ω_1) является образом точки $S_{(AB)}(O)$ при inv_O^R. Из этих рассуждений следует цепочка необходимых построений. Сначала находим точку $O_1 = S_{(AB)}(O)$, симметричную O относительно прямой AB. А затем строим образ точки O_1 при inv_O^R, он и будет искомым центром. Все указанные построения выполняются только с помощью циркуля.

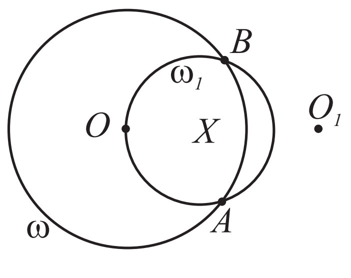


Рис. 54

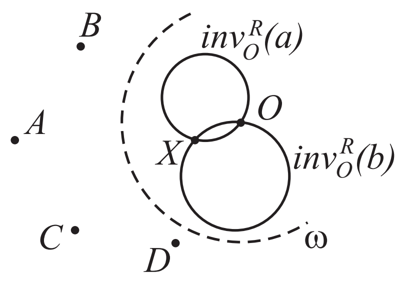


Рис. 55

Пример 3. Даны точки A, B, C, D и окружность ω. Только с помощью циркуля найти пересечение прямых AB и CD, а также точки пересечения прямой AB с окружностью ω.

Решение. Опишем поиск пересечения двух прямых только с помощью циркуля. Пусть даны точки A, B, C и D (рис. 55). Выберем точку O

так, чтобы она не лежала на прямых $a = (AB)$ и $b = (CD)$ (для этого достаточно провести две окружности, описанные около треугольников ABC и BCD и выбрать точку их пересечения, отличную от точки C; если же эти две окружности совпадают, т.е. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, выбираем на этой окружности любую точку, отличную от A, B, C и D). При инверсии inv_O^R прямые a и b должны перейти в окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, а их точка пересечения отобразится в точку пересечения окружностей $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, отличную от точки O (свойства VI и I). Теперь необходимые построения становятся очевидными: с помощью свойства VII строим окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, находим точку пересечения этих окружностей — точку X, и снова действуем инверсией уже на точку X. Точка $Y = inv_O^R(X)$ является искомой. Пересечение прямой и окружности находится похожим образом.

Теперь терема Мора-Маскерони следует из решения задач предыдущих трех примеров. Поскольку уже доказано, что добавление линейки к циркулю не приводит к появлению новых возможностей при решении задач на построение, можно снять ограничения на набор инструментов для построения. Будем считать, что у нас есть циркуль и линейка, и сосредоточим внимание только на том, как предварительное использование инверсии существенно помогает в решении нескольких классических задач.

Пример 4. Построить окружность, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности ω_1.

Решение. Чтобы построить окружность ω_2, проходящую через точки A и B и касающуюся данной окружности ω_1, рассмотрим инверсию с центром в точке $O = A$ относительно окружности произвольного радиуса R. Образом ω_2 при инверсии inv_O^R должна быть некоторая прямая a, проходящая через точку $B' = inv_O^R(B)$ и касающаяся окружности $inv_O^R(\omega_1)$ (свойства VIII и IX). Напомним, что касательные из произвольной точки X к произвольной окружности $\omega(Y, r)$ провести довольно легко: для этого достаточно построить вспомогательную окружность ω' на диаметре $[XY]$ и соединить X с точками пересечения $\omega \cap \omega'$. Теперь выполняем необходимые построения в следующем порядке: находим $B' = inv_O^R(B)$ и $inv_O^R(\omega_1)$, через точку B' проводим касательные a и b к окружности $inv_O^R(\omega_1)$, строим образы $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ при инверсии

inv_O^R. В зависимости от расположения точки B' относительно окружности $inv_O^R(\omega_1)$ может быть два, одно и ни одного решения (например, когда B' находится внутри $inv_O^R(\omega_1)$).

Пример 5. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

Решение. Для решения этой задачи достаточно уметь проводить общую касательную к двум произвольным окружностям $\omega(X, r)$ и $\omega'(Y, R)$. Будем считать, что $r < R$. Проведем из точки X касательную a к окружности $\omega_1(Y, R - r)$ (рис. 56), тогда искомая внешняя касательная b к окружностям ω и ω' будет параллельна прямой a и находится от нее на расстоянии r. Для проведения внутренней касательной вместо $\omega_1(Y, R - r)$ надо рассмотреть окружность $\omega_2(Y, R + r)$. В общем случае возможно до четырех решений. Теперь вернемся к исходной задаче. Пусть даны точка A и две окружности ω_1 и ω_2. Искомая окружность ω, проходящая через A и касающаяся ω_1 и ω_2, при инверсии с центром $O = A$ должна перейти в некоторую прямую a, которая касается окружностей $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ (свойства VIII и IX). Таким образом, приходим к следующему порядку построений: находим $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$, проводим общие касательные (a, b, c, d) и строим образы этих касательных при inv_O^R. В общем случае получится до четырех искомых окружностей, однако в одном случае решений будет бесконечно много (представьте, что произойдет после инверсии с окружностями ω_1 и ω_2, если они касаются в точке A).

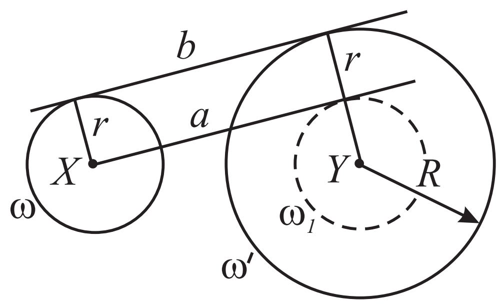


Рис. 56

Пример 6. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

Решение. Задача Аполлония сводится к предыдущей задаче. Пусть даны окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$, и $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$. Построим окружность $\omega(O, R)$, проходящую через точку O_1 и касающуюся окружностей $\omega_2(O_2, r_2 - r_1)$ и $\omega_3(O_3, r_3 - r_1)$. Уменьшив радиус окружности ω на r_1, т.е. рассматривая $\omega(O, R - r_1)$, приходим к одной из искомых окружностей. Количество решений исследовать самим.

Глава 4

Контрольные работы

4.1. Контрольное задание №5

C1. Известный формулировщик ложных высказываний Вася Пупочкин утверждает, что если три угла одного треугольника равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны. Докажите, что Вася ошибся и на этот раз.

C2. Вася придумал новый критерий равенства треугольников: если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Прав ли Вася?

C3. Стороны треугольника ABC меньше 1 см. Может ли радиус описанной около него окружности быть больше 1 км?

C4. Можно ли через одну точку окружности провести три равные между собой хорды?

C5. Основания трапеции равны a и b. Найти длину отрезка, высекаемого боковыми сторонами трапеции на прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям.

C6. Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника, образованного средними линиями данного треугольника.

C7. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Для каких четырехугольников этот параллелограмм является прямоугольником, для каких — ромбом, для каких — квадратом?

С8. Точки A и B высекают на окружности с центром O дугу величиной 60°. На этой дуге взята точка M. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и OB, перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков MB и OA.

С9. Вершина угла BAC расположена внутри окружности. Выразить величину угла BAC через угловые величины дуг окружности, заключенных внутри угла BAC и внутри угла, симметричному ему относительно вершины A.

С10. Треугольник ABC прямоугольный. На гипотенузе AB во внешнюю строну построен квадрат. Точка O — его центр. Доказать, что CO — биссектриса угла ACB.

С11. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника, c — длина его гипотенузы. Доказать, что радиус вписанной в этот треугольник окружности равен $\dfrac{a+b-c}{2}$.

С12. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ ($(AD)\|(BC)$) пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников AOB и COD.

С13. Внутри равностороннего треугольника ABC произвольно выбрана точка X. Докажите, что сумма расстояний от точки X до сторон треугольника ABC не зависит от выбора точки X.

К1. Найти площадь треугольника ABC, если $|AB| = 3$, $|BC| = 7$ и длина медианы BM равна 4.

К2. Медианы треугольника ABC равны 12, 15 и 21. Найти площадь треугольника ABC.

К3. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найти площадь данного треугольника.

К4. Даны квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше, чем 225. Найти длину стороны квадрата.

K5. В треугольнике ABC известно: $AB = BC = a$ и $AC = b$. Найти радиус описанной около ABC окружности.

K6. Дан равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b. Найти отношение, в котором центр вписанной окружности делит биссектрису угла при основании треугольника.

K7. В треугольнике ABC сторона $AB = 15$, окружность, проходящая через вершину C, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найти AC и BC, если известно, что $AP = 3$, $BQ = 2$ и CL является биссектрисой угла C.

K8. В равностороннем треугольнике ABC со стороной $AB = a$ проведена средняя линия MN, параллельная AC. Точка K делит отрезок MN в отношении $MK : KN = 1 : 2$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке E. Найти длину отрезка AE.

K9. Доказать, что длина отрезка AL, где L — точка касания с лучом $[AB)$ вневписанной окружности треугольника ABC (вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон), равна p, где p — полупериметр треугольника ABC.

K10. Пусть r — радиус вписанной окружности треугольника ABC, p — его полупериметр. Пусть также r_a — радиус той вневписанной окружности треугольника ABC, которая касается стороны BC, $BC = a$. Доказать, что $pr = r_a(p - a)$.

K11. Пусть r и r_a — радиусы вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC, p — его полупериметр. Доказать, что
$rr_a = (p - b)(p - c)$.

K12. Докажите формулу Герона-Архимеда для треугольника ABC

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

4.2. Контрольное задание №6

C1. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы в параллелограмм можно было вписать окружность.

C2. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы около параллелограмма можно было описать окружность.

C3. Известно, что биссектрисы углов четырехугольника $ABCD$ образуют четырехугольник $LMNK$. Доказать, что четырехугольник $LMNK$ можно вписать в окружность.

C4. Вывести из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

C5. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.

K1. Точки K, L, M и N лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$, причем $AK : KB = 3 : 1$, $BL : LC = 2 : 3$, $CM : MD = 1 : 2$ и $DN : NA = 1 : 1$. Найти отношение площадей четырехугольников $KLMN$ и $ABCD$.

K2. В треугольник с боковыми сторонами 9 и 15 см вписан параллелограмм так, что одна из его сторон длиной 6 см лежит на основании треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны боковым сторонам треугольника. Найти другую сторону параллелограмма и основание треугольника.

K3. Точки M, N, P и Q являются серединами сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$. Вычислить площадь фигуры, являющейся пересечением четырехугольников $ABCD$, $ANCQ$ и $BPDM$, если площадь ромба равна $100\,\text{см}^2$.

K4. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

K5. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

К6. Найти длины боковой стороны и диагонали равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

К7. Большее основание трапеции имеет длину 24 см. Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

К8. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найти отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

К9. Площадь трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$) равна S. Найти площадь треугольника KLC, где KL — средняя линия трапеции.

К10. В трапеции $ABCD$ даны основания $AD = a$ и $BC = b$. На продолжении BC выбрана точка M так, что прямая AM отсекает от площади трапеции $1/4$ ее часть. Найти длину отрезка CM.

4.3. Контрольное задание №7

С1. Найти ГМТ середин отрезков с концами на двух данных параллельных прямых.

С2. Найти ГМТ, удаленных от данного отрезка AB на расстояние $r > 0$ (расстояние от точки X до отрезка AB — это наименьшее из расстояний от точки X до всех точек отрезка AB).

С3. Найти ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под углом 60°.

С4. Найти ГМТ середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.

С5. Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

С6. По отрезку длины a и острому углу α построить отрезки длины $a \operatorname{tg} \alpha$, $a \operatorname{ctg} \alpha$

К1. Найти ГМТ, из которых граница данного квадрата $ABCD$ видна под углом 45°.

К2. Дан равносторонний треугольник со стороной a. Найти площадь ГМТ, удаленных от границы этого треугольника на расстояние не больше, чем $a\sqrt{3}/12$.

К3. Дан прямоугольник $ABCD$. Найти ГМТ X, для которых выполняется равенство $AX + BX = CX + DX$.

К4. Построить треугольник ABC по стороне a, высоте h_a и радиусу R описанной окружности.

К5. Даны окружность и две точки A и B внутри ее. Вписать в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через данные точки.

К6. Построить радикальную ось к двум окружностям, центры которых находятся в точках с координатами $(0,0)$ и $(5,5)$, а радиусы соответственно равны 1 и 2.

К7. На координатной плоскости даны точки $A(0,0)$ и $B(0,3)$. Построить ГМТ X, для которых $XA : XB = 2$.

К8. Даны две параллельные прямые и на одной из них — отрезок AB. а) Увеличить отрезок AB в три раза используя только линейку. б) Уменьшить отрезок AB в три раза используя только линейку.

К9. На плоскости нарисована окружность ω и в ней проведен диаметр AB. Для любой точки C, не лежащей на прямой AB, только с помощью линейки провести перпендикуляр из точки C к прямой AB.

К10. Разделить данный отрезок на три равные части, используя только циркуль.

К11. Используя только циркуль, найти центр окружности, описанной около данного треугольника ABC.

Ответы и указания

Контрольная работа №5. С1. Достаточно привести пример двух равносторонних треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ таких, что $AB = 1$ и $A_1B_1 = 2$. **С2.** Вася ошибается. Для доказательства этого приведем пример двух различных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, которые удовлетворяют "критерию" Васи. В качестве $\triangle ABC$ возьмем прямоугольный треугольник с $\widehat{A} = 90^\circ$ и $\widehat{C} = 30^\circ$. Пусть O — середина гипотенузы BC этого треугольника. Тогда $OA = OB = AB$. Осталось в качестве треугольника $A_1B_1C_1$ выбрать треугольник AOC. **С3.** Да, может. Возьмем окружность ω радиуса 2 км. На этой окружности выберем две различные точки A и B так, что $AB < 1$ см. Пусть C — середина меньшей дуги окружности ω, которая стягивается хордой AB. Тогда ABC — равнобедренный треугольник, каждая из сторон которого меньше 1 см, и ω — описанная около него окружность. **С4.** Нет, нельзя. Предположим противное: на некоторой окружности ω нашлись различные точки A, B, C и D такие, что $AB = AC = AD$. Рассмотрим окружность ω_1 с центром в A и радиусом AB. Тогда ω и ω_1 — различные окружности, описанные около треугольника BCD. Противоречие. **С5.** $2ab/(a+b)$. **С6.** $S/4$. **С7.** Провести диагонали четырехугольника и использовать свойства средних линий. **С8.** Используя предыдущую задачу доказать, что эти прямые содержат диагонали ромба. **С9.** Провести хорду в окружности и использовать теорему о вписанном и центральном углах и свойство внешнего угла треугольника. **С10.** Сначала доказать, что четырехугольник $ACBO$ вписан в некоторую окружность. **С11.** Использовать теорему о равенстве отрезков касательных из одной точки. **С12.** $1:1$. **С13.** Разбить данный треугольник на три треугольника с общей вершиной в точке X и воспользоваться формулой площади треугольника.

Контрольная работа №6. С1. Он должен быть ромбом. **С2.** Он должен быть прямоугольником. **С3.** Выразить сумму углов L и N этого четырехугольника через углы данного четырехугольника и убедиться, что эта сумма равна 180°. **С4.** Отобразить прямоугольный треугольник относительно середины гипотенузы и получить прямоугольник с диагоналями, равными c, и сторонами длины a и b. **С5.** 12 и 4.

Контрольная работа №7. **С1.** Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся от них на одинаковом расстоянии. **С2.** Фигура, состоящая из двух параллельных отрезков, равных отрезку AB и находящихся от него на расстоянии r, а также из двух полуокружностей радиуса r с центрами в точках A и B. **С3.** Две дуги окружностей радиуса AB, с центрами в вершинах равносторонних треугольников с общей стороной AB. **С4.** Окружность половинного радиуса, касающаяся данную окружность внутренним образом в данной точке. **С5.** Построить катет и из одного его конца провести перпендикуляр, а другой — выбрать в качестве центра окружности радиуса, равному данной гипотенузе. **С6.** Построить два прямоугольных треугольника с катетом a так, чтобы в одном треугольнике α был прилежащим углом к катету длины a, а в другом — противолежащим. Вторые катеты в этих треугольниках будут иметь искомые длины.