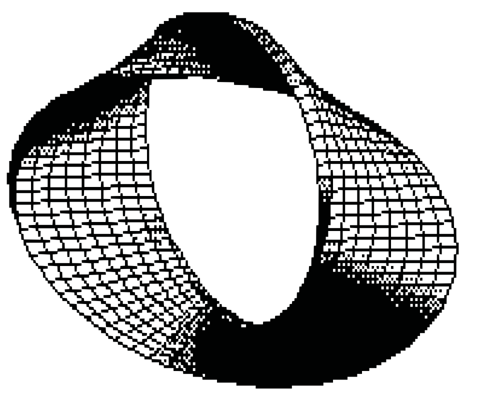
Федеральное агентство по образованию
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького
Специализированный учебно-научный центр

Математика

Алгебра

Задания №1–4 для заочного класса
(2005–2006 учебный год)



Екатеринбург
2005

Пособие подготовлено
кафедрой математики СУНЦ УрГУ

Составитель **С.А. Ануфриенко**

Математика: **Алгебра.** Задания №1–4 для заочного класса. — Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 2005, 101с.

Подписано в печать 15.9.2005. Формат $60 \times 84\ 1/16$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,86. Зак. . Тираж экз.
Уральский государственный университет
им. А.М. Горького

Отпечатано на ризографе в СУНЦ УрГУ.

Екатеринбург, ул. Д. Зверева, 30.

Оглавление

Введение

Перед Вами задания по алгебре заочной школы СУНЦ УрГУ. Это пособие состоит из двух частей. В первой части (главы 1–4) содержится теоретический материал по темам: “Квадратный трехчлен”, “Модуль числа. Метод интервалов”, “Иррациональные уравнения и неравенства” и “Системы уравнений”. Этот материал необходим для ответа на контрольные вопросы и решения контрольных задач. Во второй части (пятая глава) приведены четыре контрольных задания. Каждое контрольное задание состоит из двух частей: задачи для самостоятельной работы (с номерами С1, С2 и т.д.) и контрольные задачи (с номерами К1, К2 и т.д.). В конце книги приведены ответы и указания к решению задач для самостоятельной работы.

Вам следует внимательно прочитать все определения и утверждения первой части, разобрать приведенные там примеры. Затем письменно, в отдельной тетради (для каждого контрольного задания), дать ответы на каждый контрольный вопрос и решить каждую контрольную задачу (решения задач для самостоятельной работы присылать не надо). Не беда, если сначала правильно это сделать не удастся. Важно, чтобы Вы попытались **самостоятельно** решить **каждую** задачу.

Сроки выполнения заданий указаны в отдельном листке (см. приложение к этому учебному пособию).

Удачи!

Глава 1

Квадратный трехчлен

1.1. Преобразования графиков функций

Обсудим некоторые определения и обозначения.

Множество всех действительных чисел будем обозначать через R. Часто мы будем рассматривать не все множество R, а некоторые его подмножества. Тот факт, что множество A содержится во множестве R, обозначают через $A \subseteq R$. Например, для множества всех натуральных чисел N ($N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$) справедливо $N \subseteq R$. В общем случае числовое множество A задается следующим образом: $A = \{x \in R : P(x)\}$, где $P(x)$ — некоторое свойство, которому удовлетворяют элементы множества A и только они. Например, отрезок от 1 до 2 можно определить так: $[1; 2] = \{x \in R : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$. Числовые множества связывают друг с другом посредством функций.

Определение. Пусть $A \subseteq R$. Функцией f на множестве A будем называть правило, по которому каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие единственное число $f(x)$ (функцию обычно обозначают через $f : A \to R$). При этом множество A называется областью определения функции f и обозначается через $D(f)$. Множеством значений функции называют множество $E(f) = \{f(x) : x \in A\}$. Графиком функции $f : A \to R$ называют следующее подмножество точек координатной плоскости: $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in xOy : x \in A\}$.

Часто правило, о котором идет речь в определении функции, является алгебраическим выражением, зависящим от переменной x. В этом случае мы будем говорить, что функция задана формулой. Вспомним некоторые функции из школьного курса, их свойства и графики.

Пример 1. Линейная функция задается правилом $f(x) = kx + b$. Очевидно, что $D(f) = R$ и $\Gamma(f)$ — прямая. Смысл коэффициентов k и b следующий: $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона графика функции к оси Ox, а b задает смещение $\Gamma(f)$ относительно начала координат вдоль оси Oy (проще говоря, $b = f(0)$). При $k = 0$ прямая $\Gamma(f)$ параллельна оси Ox. На рис. 1 построен график линейной функции при $k < 0$, $b > 0$.

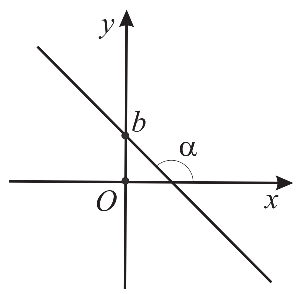


Рис. 1

Пример 2. Формула $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ задает квадратичную функцию. Ясно, что $D(f) = R$. Известно также, что $\Gamma(f)$ — парабола. Знак коэффициента a, как известно, указывает на направление ветвей параболы, $c = f(0)$ — ордината точки пересечения параболы с осью Oy. С осью абсцисс $\Gamma(f)$ пересекается только при условии $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$ в точках $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$. Вершина параболы имеет координаты (x_0, y_0), где $x_0 = -b/(2a)$, а $y_0 = -D/(4a)$. На рис. 2 изображен график квадратичной функции при $a > 0$, $c > 0$, $b < 0$. Подробнее о квадратичной функции мы поговорим в следующем параграфе.

Пример 3. Областью определения квадратного корня, т.е. функции $f(x) = \sqrt{x}$, является $\{x \in R : x \geqslant 0\}$. График функции квадратного корня (рис. 3) может быть получен симметрией относительно прямой $y = x$ из графика функции $y = x^2$, рассмотренной на множестве $\{x \in R : x \geqslant 0\}$.

Пример 4. Функция обратной пропорциональной зависимости задается формулой $f(x) = k/x$, где $k \neq 0$. $D(f) = \{x \in R : x \neq 0\}$, $\Gamma(f)$ — гипербола, расположенная в первом и третьем координатных углах при $k > 0$, и во втором и четвертом — при $k < 0$. На рис. 4 как раз изображен последний случай.

Пример 5. Функция абсолютной величины определяется следующим образом: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Из определения немедленно следует неравенство $|x| \geqslant 0$ при всех $x \in R$. Кроме того, при решении некоторых уравнений полезно помнить о геометрическом свойстве модуля: $|x|$ — это расстояние на числовой прямой от точки, изображающей число x до точки 0. График абсолютной величины изображен на рис. 5.

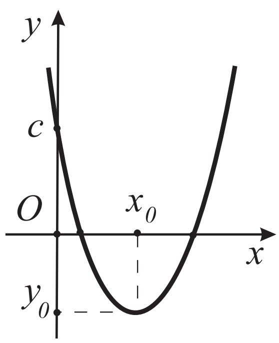


Рис. 2

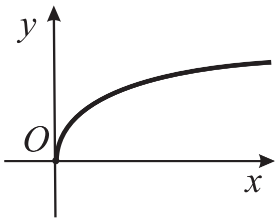


Рис. 3

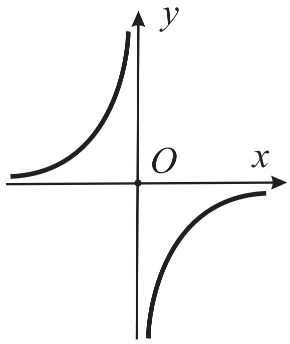


Рис. 4

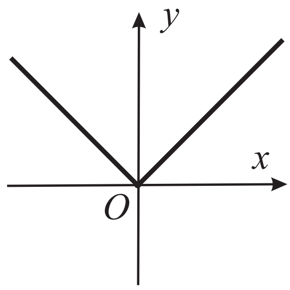


Рис. 5

Напомним основные способы преобразования графиков функций. В каждом из приведенных ниже способов мы считаем, что нам дан график функции $f(x)$, а также некоторая простая алгебраическая формула, выражающая “новую” функцию $g(x)$ через функцию $f(x)$. Наша задача состоит в построении графика функции $g(x)$ по $\Gamma(f)$ и известной формуле.

Для решения этой задачи обсудим понятия переноса на вектор, симметрии относительно прямой и растяжения относительно прямой. Для задания вектора $\overrightarrow{v}$ достаточно указать координаты его конца, при этом мы считаем, что его начало совпадает с началом координат. Точка B получена из точки A переносом на вектор $\overrightarrow{v}$, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ (т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{v}$ совпадают по длине и направлению). Так, например, точка $B(-1,4)$ получена из точки $A(1,1)$ переносом на вектор $\overrightarrow{v} = (-2,3)$. Понятно, что фигура Φ_2 получена переносом на вектор $\overrightarrow{v}$ из фигуры Φ_1, если она состоит из образов всех точек фигуры Φ_1 при этом переносе. Точки A и B называются симметричными относительно прямой l, если $(AB)\perp l$ и они расположены на одинаковом расстоянии, но по разные стороны от прямой l. И, наконец, точка B получена из точки A растяжением относительно прямой l в k раз ($k \neq 0$), если выполняются три условия: 1) $(AB)\perp l$, 2) расстояние от точки B до прямой l в $|k|$ раз больше расстояния от A до l, 3) точки A и B расположены по одну сторону от прямой l, при $k > 0$, и по разные — если $k < 0$.

I. $\boxed{f_1(x) = f(x) + a}$. Так как каждая точка $(x, f(x))$ графика функции f переходит в точку $(x, f(x)+a)$, лежащую уже на графике функции f_1, то $\Gamma(f_1)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **переносом на вектор** $\overrightarrow{v} = (0,a)$.

II. $\boxed{f_2(x) = f(x+a)}$. Заметим, что точка $(x+a, f(x+a))$ графика функции f, сдвигаясь на вектор $\overrightarrow{v} = (-a, 0)$ переходит в точку $(x, f(x+a))$, принадлежащую графику функции f_2. Поэтому $\Gamma(f_2)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **переносом на вектор** $\overrightarrow{v} = (-a, 0)$. Так, например, при $a > 0$ график функции f сдвигается влево на a единиц.

III. $\boxed{f_3(x) = -f(x)}$. Очевидно, что точки $(x, f(x))$ и $(x, -f(x))$ симметричны друг другу относительно оси Ox. Значит $\Gamma(f_3)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **отражением относительно оси** Ox.

IV. $\boxed{f_4(x) = f(-x)}$. При этом преобразовании точка $(-x, f(-x))$ графика функции $f(x)$ переходит в точку $(x, f(-x))$ графика функции f_4. Эти точки симметричны друг другу относительно оси Oy. Поэтому $\Gamma(f_4)$ **получается из** $\Gamma(f)$ **отражением относительно оси** Oy.

V. $\boxed{f_5(x) = k \cdot f(x)}$ $(k \neq 0)$. Заметим, что точке $(x, f(x)) \in \Gamma(f)$ будет соответствовать точка $(x, k \cdot f(x)) \in \Gamma(f_5)$. Первые координаты точек $(x, f(x))$ и $(x, k \cdot f(x))$ одинаковы, а вторые координаты отличаются в k раз, поэтому $\Gamma(f_5)$ **получается растяжением в** k **раз** $\Gamma(f)$ **относительно оси** Ox.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. Построить график функции $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$. После алгебраических преобразований $f(x) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 = 2(x+1)^2 - 3$ заключаем, что $\Gamma(f)$ может быть построен из $\Gamma(x^2)$ (т.е. самой простой из парабол) за три шага: сначала сдвигаем $\Gamma(x^2)$ на 1 влево (т.е. получаем $\Gamma((x+1)^2)$), затем растягиваем $\Gamma((x+1)^2)$ в 2 раза относительно оси Ox (после этого у нас будет $\Gamma(2(x+1)^2)$) и, наконец, сдвигаем $\Gamma(2(x+1)^2)$ на 3 единицы вниз.

Пример 7. Построить график функции $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Сначала немного изменим формулу, задающую эту функцию (это алгебраическое преобразование называется выделением целой части у дроби):

$$f(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Теперь легко указать способ построения $\Gamma(f)$ из обычной гиперболы — $\Gamma(1/x)$. На первом шаге сдвигаем $\Gamma(1/x)$ на 1 влево и получаем $\Gamma\left(\frac{1}{x+1}\right)$. Затем отражаем этот график относительно оси абсцисс и получаем график $\Gamma\left(-\frac{1}{x+1}\right)$. На последнем шаге сдвигаем этот график на 1 вверх.

Совет: сами сделайте рисунки к последним двум примерам, причем результат после каждого шага изображайте на отдельном чертеже.

1.2. Квадратичная функция

Определение. Квадратичной функцией называется функция $F(x) = ax^2 + bx + c$, при $a \neq 0$. При этом a называют старшим коэффициентом, b — вторым коэффициентом, а c — свободным членом. Графиком функции $F(x)$ является парабола.

Зададимся вопросом: как в общем случае получить график квадратичной функции из параболы $y = x^2$? Следующие алгебраические преобразования помогут нам ответить на этот вопрос.

$$F(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Итак, для построения графика функции $F(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) достаточно:

1. перенести график функции $y = x^2$ на вектор $\overrightarrow{v_1} = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ и получить тем самым график функции $f_1(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$;
2. подействовать на $\Gamma(f_1)$ растяжением в a раз относительно оси Ox для получения графика функции $f_2(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$;
3. перенести $\Gamma(f_2)$ на вектор $\overrightarrow{v_2} = \left(0, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Описанные выше преобразования приводят нас к следующим свойствам квадратичной функции $F(x)$. В записи свойств будем использовать обозначения: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$ (D, как известно, называют дискриминантом $F(x)$).

I. Областью определения $F(x)$ является вся действительная прямая R.

II. Вершина графика $F(x)$ имеет координаты (x_0, y_0).

III. Прямая $x = x_0$ является осью симметрии $\Gamma(F)$.

Напомним, что при растяжении в k раз относительно некоторой прямой l знак коэффициента растяжения (т.е. k) влияет на расположение точки и ее образа относительно l следующим образом: при положительном k точка и ее образ находятся в одной полуплоскости относительно l, а при отрицательном k — по разные стороны от l. Поэтому выполняется следующее свойство

IV. При $a > 0$ ветви параболы $\Gamma(F)$ направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз.

V. Множеством значений функции $F(x)$ при $a > 0$ является луч $[y_0; \infty)$, а при $a < 0$ — луч $(-\infty; y_0]$.

VI. При $a > 0$ функция $F(x)$ убывает на множестве $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; \infty)$; если же старший коэффициент отрицателен, т.е. $a < 0$, то, напротив, $F(x)$ возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на множестве $[x_0; \infty)$.

VII. При $a > 0$ минимальное значение $F(x)$ равно y_0, а при $a < 0$ число y_0 является максимальным значением этой функции.

Поскольку $F(0) = c$, легко определяется точка пересечения графика квадратичной функции с осью Oy.

VIII. График функции $F(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0, c)$.

Расположение $\Gamma(F)$ относительно оси Ox зависит от знака дискриминанта D. Вспомним, что среди промежуточных преобразований нам встретилось следующее выражение для $F(x)$:

$$F(x) = a\left(\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

Нетрудно заметить, что при $D < 0$ выражение в круглых скобках является суммой положительного числа $(-D)/(4a^2)$ и полного квадрата. Поэтому в этом случае функция $F(x)$ принимает значения одного знака, совпадающего со знаком коэффициента a.

IX. Пусть $D < 0$. Тогда функция $F(x)$ принимает только положительные значения при $a > 0$ и только отрицательные значения при $a < 0$. В первом случае график квадратичной функции расположен выше оси Ox, а во втором — ниже оси абсцисс.

X. Пусть $D = 0$. Тогда график функции $F(x)$ касается оси Ox в точке $(x_0, 0)$.

Если $D > 0$, то $D = \sqrt{D^2}$. Закончим прерванную цепочку алгебраических преобразований.

$$F(x) = a\left(\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \left[\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]^2\right) = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right).$$

Обозначив через $x_1 = (-b - \sqrt{D})/(2a)$ и через $x_2 = (-b + \sqrt{D})/(2a)$, получим важное представление для функции $F(x)$ при $D > 0$:

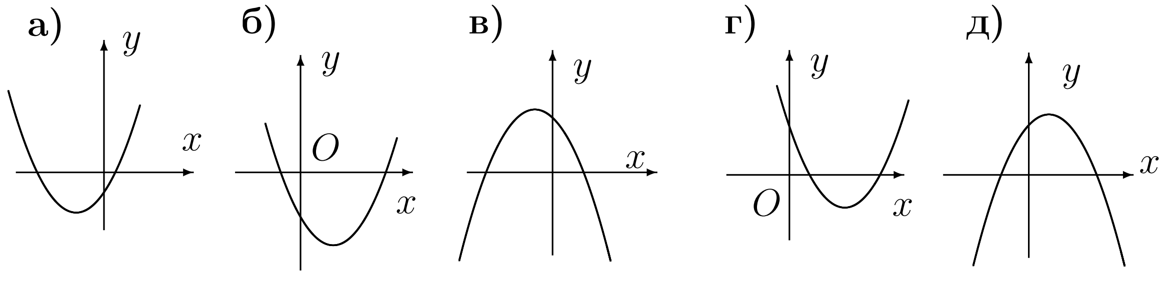
$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Итак, из этого представления и предыдущих двух свойств приходим к последнему свойству квадратичной функции.

XI. График функции $F(x)$ пересекает ось Ox в двух различных точках тогда и только тогда, когда $D > 0$. При этом первыми координатами точек пересечения являются числа x_1 и x_2.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Известно, что $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$. На каком из следующих рисунков изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$?



Условию $a > 0$ удовлетворяют только параболы на рисунках (а), (б) и (г). Поскольку $c < 0$, точка пересечения графика функции с осью Oy (т.е. точка $(0, c)$) лежит ниже оси Ox. Остаются только две параболы — на рисунках (а) и (б). Наконец, из условий $a > 0$, $b < 0$ следует, что $x_0 = (-b)/(2a) > 0$. Поэтому условиям задачи удовлетворяет только парабола на рисунке (б).

Пример 2. Известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии графика функции $y = ax^2 - (a + 6)x + 3$. Постройте ее график.

Данная функция не всегда будет квадратной. При $a = 0$ получим $y = -6x + 3$ и прямая $x = 2$ не может быть осью симметрии графика этой функции. Во всех остальных случаях мы имеем дело с квадратичной функцией, причем первая координата ее вершины равна $x_0 = (a+6)/(2a)$. Из уравнения $(a + 6)/(2a) = 2$ находим $a = 2$. Осталось построить график $y = 2x^2 - 8x + 3 = 2(x - 2)^2 - 5$. Он легко получается из $\Gamma(x^2)$ сдвигом на 2 вправо, растяжением в два раза относительно оси Ox и, наконец, сдвигом на 5 единиц вниз. Выполните все эти преобразования самостоятельно.

Пример 3. При каких значениях k графики функций $y = x^2 - 4x + 2$ и $y = kx - 2$ пересекаются в одной точке?

Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - 4x + 2 = kx - 2$ имеет единственное решение. Другими словами, парабола $y = x^2 - (4 + k)x + 4$ должна касаться оси Ox. Приравнивая дискриминант к нулю, получим $(4 + k)^2 - 16 = 0$. Откуда $k = 0$ или $k = -8$.

1.3. Квадратное уравнение. Теорема Виета

Определение. Квадратным называется уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$.

Из свойств квадратичной функции немедленно получаем следующие утверждения о корнях квадратного уравнения.

I. Квадратное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

II. Квадратное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $D = 0$, причем этим решением будет $x = x_0 = (-b)/(2a)$.

III. Квадратное уравнение имеет два различных решения тогда и только тогда, когда $D > 0$, причем этими решениями являются $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$.

IV. x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Кстати, в случае совпадения корней квадратного уравнения между собой (т.е. когда $D = 0$ и $x_1 = x_2 = x_0$), разложение на множители также имеет место: $F(x) = a(x + b/2a)^2 = a(x - x_0)(x - x_0)$. Возможность разложить на множители квадратный трехчлен часто играет ключевую роль в решении задач. В качестве иллюстрации воспользуемся свойством IV при выводе теоремы Виета. Итак, x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$. Напомним, что два многочлена равны, если их коэффициенты при соответствующих степенях переменной одинаковы. Поэтому приравнивая коэффициенты при первой степени x, а также приравнивая свободные коэффициенты, получим систему $\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2), \\ c = ax_1x_2. \end{cases}$ Осталось сократить первое и второе уравнения системы на $-a$ и на a соответственно, что и завершит доказательство следующего утверждения, называющегося теоремой Виета.

V. Числа x_1, x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1x_2 = c/a. \end{cases}$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Разложить на множители квадратный трехчлен $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

Легко заметить, что $x = 1$ является корнем уравнения $f(x) = 0$. Из теоремы Виета следует, что $x_1 \cdot x_2 = 2/3$. Поэтому корнями данного квадратного трехчлена являются $x_1 = 2/3$ и $x_2 = 1$. Отсюда $f(x) = -3(x - 2/3)(x - 1)$. *Замечание: при разложении на множители не забывайте о старшем коэффициенте перед скобками! Так, в рассмотренном примере,* $f(x) \neq (x - 2/3)(x - 1)$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых единственный корень имеет уравнение $\dfrac{x^2 - (2a+1)x + a^2 + a}{x - 2} = 0$.

ОДЗ (т.е. областью допустимых значений) этого уравнения являются все $x \neq 2$. В поиске корней уравнения $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) = 0$ нам поможет теорема Виета. Нетрудно заметить, что $x_1 = a$ и $x_2 = a + 1$ удовлетворяют условиям $x_1 + x_2 = 2a + 1$ и $x_1x_2 = a^2 + a$. Поэтому $x_1 = a$ и $x_2 = a + 1$ являются нулями числителя. Кстати, всегда $a \neq a + 1$, поэтому уравнение $x^2 - (2a+1)x + a(a+1) = 0$ имеет два различных корня при всех значениях a. Но было бы ошибочно полагать, что исходное уравнение имеет всегда два решения. **Не забывайте об ОДЗ!** Так, например, если $x_1 = 2$, то исходное уравнение имеет только один корень — x_2. Если же $x_2 = 2$, то единственным решением данного уравнения будет x_1. Отсюда искомыми значениями параметра a будут два числа: $a = 2$ и $a = 1$.

Пример 3. Известно, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найти значение $x_1^3 + x_2^3$.

Из теоремы Виета следует, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$. Выразим сумму $x_1^3 + x_2^3$ через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$. Это сделать несложно: $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)([x_1 + x_2]^2 - 3x_1 x_2) = -p(p^2 - 3q)$.

Пример 4. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

Пусть $x^2 + px + q = 0$ — искомое уравнение (p, q — рациональные числа). Домножив числитель и знаменатель данной нам дроби на $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ (т.е. на сопряженное к знаменателю), получим

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}{3 - 5} = -4 + \sqrt{15}.$$

Поэтому $(-4 + \sqrt{15})^2 + p(-4 + \sqrt{15}) + q = 0$, т.е.

$$(31 - 4p + q) + (p - 8)\sqrt{15} = 0.$$

По условию p, q — рациональные числа, поэтому последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $p - 8 = 0$ и $31 - 4p + q = 0$. Отсюда $p = 8$ и $q = 1$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 7 = 0$ равна 10.

Из условия задачи следует, что корни уравнения должны существовать, поэтому должно выполняться неравенство $D = a^2 - 4a - 28 \geqslant 0$. Кроме того, используя равенство $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$ и теорему Виета, получим $a^2 - 2a - 14 = 10$. Из последнего уравнения находим $a_1 = -4$ и $a_2 = 6$. Нетрудно заметить, что условию $D \geqslant 0$ удовлетворяет только a_1. Ответ: $a = -4$.

Теорема Виета позволяет легко находить знаки корней квадратного уравнения (конечно в том случае, когда они существуют) не находя при этом сами корни.

VI. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и положительны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -b/a > 0, \\ c/a > 0. \end{cases}$

Из существования положительных корней немедленно следует, что $D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -b/a > 0$, $x_1 x_2 = c/a > 0$. Докажем теперь обратное утверждение. Из условия $D \geqslant 0$ получаем существование корней x_1 и x_2. Неравенство $x_1 x_2 = c/a > 0$ говорит о том, что x_1 и x_2 имеют одинаковый знак, а второе неравенство системы в дополнение к этому позволяет нам утверждать, что этот знак — плюс. Аналогично доказываются следующие два утверждения.

VII. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и отрицательны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -b/a < 0, \\ c/a > 0. \end{cases}$

VIII. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ существуют и имеют разные знаки тогда и только тогда, когда $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ c/a < 0. \end{cases}$

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых решения уравнения $x^2 + 4x + 2a = 0$ существуют и отрицательны.

Из системы $\begin{cases} D = 16 - 8a \geqslant 0, \\ -4 < 0, \\ 2a > 0. \end{cases}$ получаем, что одновременно должно быть $a \leqslant 2$ и $a > 0$. Окончательно имеем, что корни данного уравнения существуют и отрицательны при $a \in (0; 2]$.

1.4. Уравнения, сводящиеся к квадратным

В этом параграфе рассмотрим некоторые типы уравнений, сводящиеся с помощью стандартных замен к квадратным уравнениям.

I. *Трехчленные уравнения.* Уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \quad a \neq 0, \quad n \geqslant 2, \quad n \in N,$$

называется трехчленным уравнением, а при $n = 2$ — биквадратным уравнением.

Такие уравнения после замены $y = x^n$ легко сводятся к уравнению $ay^2 + by + c = 0$. Если y_1 и y_2 — корни этого уравнения, то исходное уравнение равносильно совокупности: $x^n = y_1$ или $x^n = y_2$.

Пример 1. Решить уравнение $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Корнями квадратного уравнения $y^2 - 17y + 16 = 0$ являются $y_1 = 1$ и $y_2 = 16$. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности: $x^4 = 1$ или $x^4 = 16$. Окончательно получаем $x = \pm 1$, $x = \pm 2$.

II. *Симметрические уравнения третьей и четвертой степени.* Такими уравнениями называются уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0;$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0, \quad a \neq 0.$$

Нетрудно заметить, что $x = -1$ всегда является корнем симметрического уравнения третьей степени, поэтому после преобразования $ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a) = 0$ получим, что такое уравнение равносильно совокупности квадратного и линейного уравнения.

Для решения симметрического уравнения четвертой степени надо разделить обе части на x^2 ($x = 0$ никогда не является корнем такого уравнения) и получить эквивалентное уравнение $a(x^2+1/x^2)+b(x+1/x)+c = 0$ (или $a(x^2+1/x^2)+b(x-1/x)+c = 0$) и сделать замену $y = x+1/x$ (или $z = x - 1/x$). В результате симметрическое уравнение четвертой степени сведется к уравнению $a(y^2 - 2) + by + c = 0$ (или $a(z^2 + 2) + bz + c = 0$).

Пример 2. Решить уравнение $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

Поскольку $x = 0$ не является корнем этого уравнения, то, разделив обе его части на x^2 приходим к $x^2 - 2x - 1 - 2/x + 1/x^2 = 0$, откуда

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Сделав замену $y = x+1/x$, получим $y^2-2y-3 = 0$. Отсюда находим $y_1 = -1$ и $y_2 = 3$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности: $x + 1/x = -1$ или $x + 1/x = 3$. Первое уравнение решений не имеет, а решениями второго являются $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$.

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых удачная замена позволяет понизить степень уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $(x^2+x-2)(x^2+x-3)=12$.

Сделав замену $y=x^2+x-2$, получим $y^2-y-12=0$. Его корнями будут $y_1=-3$ и $y_2=4$. Делая обратную замену, приходим к совокупности двух уравнений: $x^2+x+1=0$ или $x^2+x-6=0$. Первое уравнение решений не имеет, а корнями второго являются $x_1=-3$ и $x_2=2$.

Пример 4. Решить уравнение $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

Перемножив первую с последней, а также вторую и третью скобки, получим $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$. Решение похожего уравнения было разобрано в предыдущем примере.

Пример 5. Решить уравнение $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(2+x)^2}=\dfrac{10}{9}$.

Сделаем так называемую *симметризационную* замену, положив $y=x+1$. Приводя к общему знаменателю и умножая обе части на $(y-1)^2(y+1)^2$, получим $2y^4+2=\frac{10}{9}(y^4-1)$. Дальнейшее решение не составляет большого труда.

1.5. Квадратные неравенства

Определение. Пусть $F(x)=ax^2+bx+c$ и $a\neq 0$. Тогда неравенства $F(x)\geqslant 0$, $F(x)\leqslant 0$, $F(x)>0$, $F(x)<0$ называются квадратными неравенствами.

Нестрогие квадратные неравенства (т.е. со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$) сводятся к совокупности строгого квадратного неравенства и квадратного уравнения. Поэтому в этом параграфе мы разберем решение строгих неравенств. Кроме того, любое квадратное неравенство равносильно квадратному неравенству с положительным старшим коэффициентом (при отрицательном старшем коэффициенте умножаем обе части неравенства на -1 и меняем знак неравенства на противоположный). Значит, достаточно научиться решать строгие квадратные неравенства с положительным старшим коэффициентом.

Из свойств квадратичной функции с отрицательным дискриминантом следует

I. При $a>0$ и $D<0$ неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех x, а неравенство $ax^2+bx+c<0$ не имеет решений.

Если же $D \geqslant 0$ и x_1, x_2 — корни уравнения $F(x) = 0$, то справедливо представление $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Пусть $a > 0$, тогда неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ равносильно $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Теперь предположим, для определенности, что $x_1 \leqslant x_2$. Тогда неравенство $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x < x_1, \\ x < x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > x_1, \\ x > x_2. \end{cases}$$

Учитывая условие $x_1 \leqslant x_2$, получаем, что $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

II. Если $a > 0$ и x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$ ($x_1 \leqslant x_2$), то множеством всех решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ являются все $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$.

Аналогично рассматривается неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D \geqslant 0$.

III. Если $a > 0$ и x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c = 0$ ($x_1 \leqslant x_2$), то множеством всех решений неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ являются все $x \in (x_1; x_2)$.

Результаты последних двух утверждений легко запомнить, если представить параболу $\Gamma(F)$ с направленными вверх ветвями и пересекающую ось Ox. Участки графика при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$ лежат выше оси Ox, а при $x \in (x_1; x_2)$ график функции $F(x)$ проходит ниже оси Ox. Поэтому $F(x) > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$, и $F(x) < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$.

Пример 1. Решить неравенство $4x - 3x^2 - 1 > 0$.

Умножив неравенство на -1, получим неравенство $3x^2 - 4x + 1 < 0$, равносильное исходному. Числа $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 1$ являются корнями уравнения $3x^2 - 4x + 1 = 0$. Значит, решением данного неравенства будут все $x \in (1/3; 1)$.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 7x + 6}{x} < 2$.

Данное неравенство легко преобразуется к $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x} < 0$, которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 5x + 6 < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$ являются корнями уравнения $x^2 + 5x + 6 = 0$, решением первой системы будут все $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 0)$. Вторая система не имеет решений. Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 0)$.

1.6. Нахождение максимальных и минимальных значений

В этом параграфе рассмотрим несколько задач на определение множества значений функций, а также нахождение наибольшего и наименьшего значения выражений от одной и нескольких переменных.

Пример 1. Найти множество значений функции $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$.

Возможно несколько способов решения этой задачи. Первый способ (*графический*). Немного преобразуем выражение, задающее $f(x)$.

$$f(x) = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Поэтому график $f(x)$ получается из $\Gamma(1/x)$ сдвигом на 1 вправо и на 1 вверх. Отсюда множество значений функции $f(x)$ — все $y \neq 1$. Второй способ (*аналитический*). Рассмотрим уравнение $a = \frac{x}{x-1}$. Тогда множество всех значений параметра a, при которых это уравнение имеет решение, составляет множество значений функции $f(x)$. При $x \neq 1$ сначала переходим к уравнению $ax - a = x$, а затем к $(a-1)x = a$. Если $a = 1$, то последнее уравнение превращается в $0 = 1$, которое не выполняется ни при каких x. Если же $a \neq 1$, сокращая на $(a-1)$, находим корень $x = a/(a-1)$. Итак, при всех a, кроме $a = 1$, данное уравнение имеет решение, поэтому $E(f) = \{y \in R : y \neq 1\}$.

Пример 2. Найти наибольшее значение функции $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 3}$.

Снова начнем с алгебраических преобразований.

$$y = \frac{2x^2 + 4x + 6 + 2}{x^2 + 2x + 3} = 2 + \frac{2}{x^2 + 2x + 3}.$$

Поскольку первое слагаемое и числитель дроби уже не зависят от x, нам осталось найти минимальное (чтобы дробь была максимальной) значение функции $g(x) = x^2 + 2x + 3$. Эта функция принимает свое минимальное значение в $x_0 = -1$, и это минимальное значение равно $g(-1) = 2$. Отсюда $y_{\max} = 2 + 2/g_{\min} = 3$.

Пример 3. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt{x+1} - x$.

Сделаем замену $t = \sqrt{x+1}$. Отсюда $t \geqslant 0$ и $x = t^2 - 1$. В результате поиск максимального значения функции $y(x)$ свелся к нахождению максимального значения функции $y(t) = t - t^2 + 1$ при $t \geqslant 0$. Так как $t_0 = (-1)/(-2) > 0$, то $y_{\max} = y(1/2) = 5/4$. (*Замечание:* если бы оказалось, что $t_0 < 0$, то $y_{\max} = y(0)$.)

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение выражения $x + y$, если $x^2 + 3xy + 3y^2 = 3$.

Пусть $a = x + y$. Тогда $y = a - x$ и $x^2 + 3x(a-x) + 3(a-x)^2 = 3$. Последнее уравнение легко преобразуется к $x^2 - 3ax + 3a^2 - 3 = 0$. Осталось выяснить при каком минимальном и максимальном значении параметра a это уравнение имеет решение. Существование решения квадратного уравнения равносильно условию $D \geqslant 0$. Отсюда $9a^2 - 12a^2 + 12 \geqslant 0$ или $a^2 \leqslant 4$. Таким образом, квадратное уравнение имеет решение только при $a \in [-2; 2]$. Ответ: $(x+y)_{\max} = 2$, $(x+y)_{\min} = -2$.

Глава 2

Модуль числа. Метод интервалов

2.1. Модуль числа и его свойства

Определение. Модулем числа $x \in R$ (или абсолютной величиной числа x) называется

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График функции $y = |x|$ изображен на рис. 6. Перечислим некоторые свойства абсолютной величины числа, которые сразу следуют из определения.

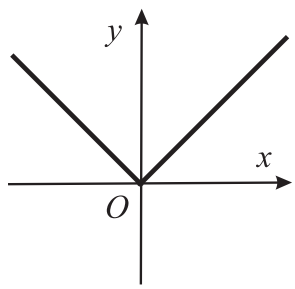


Рис. 6

I. При всех $x \in R$ выполняется неравенство $|x| \geqslant 0$.

Поэтому, например, уравнение $|x^5 - 6x^4| = -1$ не имеет решений. Следующее свойство модуля часто называют его "геометрическим смыслом".

II. Расстояние на числовой прямой от точки, соответствующей числу x, до начала координат равно $|x|$.

Используя это свойство, можно сразу находить корни простых уравнений с модулем. Например, корнями уравнения $|x| = 5$ являются числа, удаленные от 0 на расстояние 5, т.е. $x_1 = -5$ и $x_2 = 5$.

III. Расстояние на числовой прямой между точками, соответствующими числам x_1 и x_2, равно $|x_2 - x_1| = \begin{cases} x_2 - x_1, & \text{если } x_1 \leqslant x_2, \\ x_1 - x_2, & \text{если } x_1 > x_2. \end{cases}$

Это свойство также можно использовать при решении уравнений. Так, например, корнями уравнения $|x+1| = 3$ (или $|x-(-1)| = 3$) являются

$x_1 = 2$ и $x_2 = -4$, поскольку именно эти два числа удалены от -1 на расстояние 3. Из только что рассмотренного свойства немедленно следует

IV. Для любых чисел x_1 и x_2 верно $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$.

Благодаря этому свойству можно менять знак у подмодульного выражения, поэтому, например, уравнения $|8x - x^2 - 2| = 5$ и $|x^2 - 8x + 2| = 5$ равносильны.

В предыдущем задании (Глава 1, "Квадратный трехчлен") мы рассмотрели пять основных способов преобразования графиков функций. Добавим к ним еще два (**A** и **B** см. ниже). В них мы опишем способы построения графиков функций $|f(x)|$ и $f(|x|)$ по известному графику функции $f(x)$.

A. Пусть $f_A(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$ Из определения функции f_A следует, что точки $(x, f_A(x))$ и $(x, f(x))$ совпадают при $f(x) \geqslant 0$ и симметричны относительно оси Ox при $f(x) < 0$. Поэтому **для построения графика функции f_A достаточно отразить относительно оси Ox только те участки графика функции f, которые расположены ниже оси Ox.** Остальные участки $\Gamma(f)$ остаются без изменения. На рис. 7 и 8 изображены графики функций $f(x)$ и $|f(x)|$ соответственно.

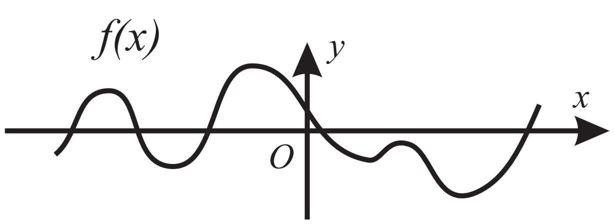


Рис. 7

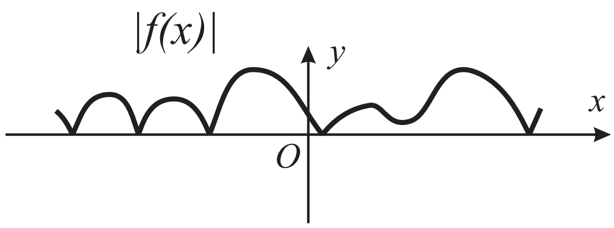


Рис. 8

B. Пусть $f_B(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Из определения функции f_B получаем, что точки $(x, f_B(x))$ и $(x, f(x))$ совпадают при $x \geqslant 0$ и симметричны относительно оси Oy при $x < 0$. Поэтому **для построения графика функции f_B достаточно оставить без изменения участок графика функции f, расположенный правее оси Oy, и затем его же симметрично отразить относительно оси Oy.** Заметим только, что участок графика функции f, расположенный левее оси Oy вообще не принимает участие в построении графика функции $f(|x|)$. На рис. 9 и 10 изображены графики функций $f(x)$ и $f(|x|)$ соответственно.

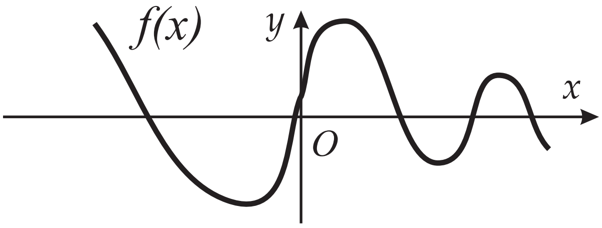


Рис. 9

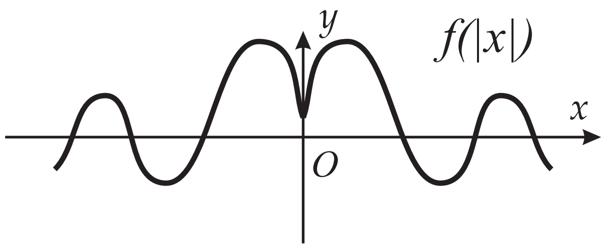


Рис. 10

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Построить график функции $y = \left|\dfrac{x+1}{x}\right|$. Данная функция преобразуется к виду $y = \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$. Сдвинув $\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)$ на 1 вверх, мы получим $\Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Отразив единственный отрицательный (т.е. лежащий ниже оси Ox) участок этого графика относительно оси Ox, получим график искомой функции (рис. 11).

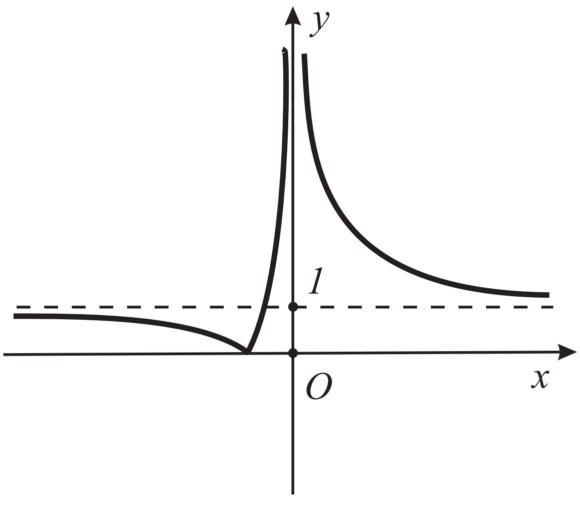


Рис. 11

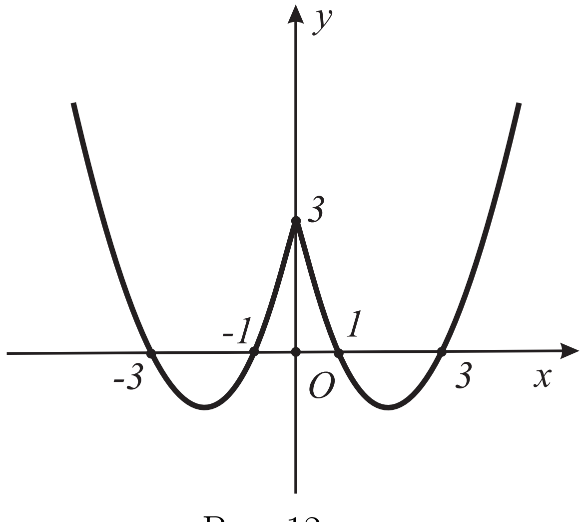


Рис. 12

Пример 2. Построить график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. Учитывая, что при любых $x \in R$ верно равенство $x^2 = |x|^2$, построим график функции $f(x) = |x|^2 - 4|x| + 3$. По правилу **B** достаточно построить участок параболы $g(x) = x^2 - 4x + 3$ при $x \geqslant 0$ и затем его же симметрично отразить относительно оси Oy. Результат изображен на рис. 12.

2.2. Уравнения и неравенства с модулем

Начнем с самых простых уравнений, содержащих знак модуля.

I. $|f(x)| = a$. При $a < 0$ это уравнение не имеет решений, а при $a \geqslant 0$ данное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

Пример 1. Решить уравнение $\Big||x-1|-2\Big| = 3$. Раскрывая внешний модуль, получим совокупность $\left[\begin{array}{l} |x-1|-2 = 3, \\ |x-1|-2 = -3 \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} |x-1| = 5, \\ |x-1| = -1. \end{array}\right.$ Второе уравнение совокупности решений не имеет, а первое уравнение опять можно свести к совокупности $\left[\begin{array}{l} x-1 = 5, \\ x-1 = -5. \end{array}\right.$ Окончательно получим $x = 6$ или $x = -4$.

II. $|f(x)| = g(x)$. Раскрывая модуль по определению, имеем

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Пример 2. Решить уравнение $|x| = -3x - 5$.

$$|x| = -3x - 5 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x = -3x - 5 \end{array}\right. \text{ или } \left\{\begin{array}{l} x < 0, \\ -x = -3x - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -5/2.$$

Пример 3. Решить уравнение $|3x+2| = x^2 + x$.

$$|3x+2| = x^2 + x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leqslant -1, x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3x+2 = x^2 + x, \\ 3x+2 = -x^2 - x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3}, \\ x = -2 + \sqrt{6} \\ x = -2 - \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

III. $|f(x)| + |g(x)| = h(x)$. Для решения этого уравнения достаточно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. На прямой нанести нули подмодульных выражений, а также точки, в которых подмодульные выражения не определены.

2. На каждом из получившихся промежутков определить знаки подмодульных выражений.

3. В соответствии со знаками из предыдущего пункта на каждом из получившихся промежутков раскрыть модули.

Пример 4. Решить уравнение $|x-1|+|x-3|=2$. Нулями подмодульных выражений являются $x=1$ и $x=3$. Знаки подмодульных выражений на каждом из промежутков указаны в таблице (она, кстати, называется *таблицей знаков*).

	$x \leqslant 1$	$1 < x \leqslant 3$	$x > 3$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

При раскрытии модулей на каждом из трех промежутков пользуемся простым правилом: заменяем знаки модуля круглыми скобками и ставим перед скобками тот знак, который соответствует подмодульному выражению на этом промежутке.

1 случай: $x \leqslant 1$. После раскрытия модулей получим уравнение $-(x-1)-(x-3)=2$. Корнем этого уравнения является число $x=1$, удовлетворяющее условию $x \leqslant 1$.

2 случай: $1 < x \leqslant 3$. На этом промежутке имеем $(x-1)-(x-3)=2$ или $2=2$. Последнее уравнение выполняется при всех $x \in R$, поэтому весь промежуток $1 < x \leqslant 3$ состоит из корней исходного уравнения.

3 случай: $3 < x$. Получаем $2x=6$ или $x=3$. Это число не попадает в рассматриваемый промежуток, поэтому этот случай не добавит новых решений.

Ответ: $x \in [1;3]$.

Пример 5. Решить уравнение $|x^2-4|+|9-x^2|=5$. Подмодульные выражения обращаются в ноль при $x=\pm 2$ и $x=\pm 3$. При заполнении таблицы знаков в этой задаче удобно использовать свойства квадратичных функций. Так, например, функция $f(x)=9-x^2$ имеет своим графиком параболу, с направленными вниз ветвями и пересекающую ось Ox в точках $x_1=-3$ и $x_2=3$. Очевидно, что эта функция положительна на интервале $(-3;3)$ и не положительна на оставшемся множестве.

	$x \leqslant -3$	$-3 < x \leqslant -2$	$-2 < x < 2$	$2 \leqslant x < 3$	$x \geqslant 3$
$x^2 - 4$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$9 - x^2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$

Поскольку пары знаков на некоторых промежутках совпадают, достаточно рассмотреть только три случая.

1 случай: $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$. После раскрытия модулей получим $x^2 = 9$. Корнями этого уравнения являются числа $x = \pm 3$ (оба они удовлетворяют условию раскрытия модуля).

2 случай: $x \in (-3; -2] \cup [2; 3)$. На этом промежутке получаем уравнение $x^2 - 4 + 9 - x^2 = 5$ или $5 = 5$. Последнее уравнение выполняется при всех $x \in R$, поэтому все множество $(-3; -2] \cup [2; 3)$ состоит из корней исходного уравнения.

3 случай: $-2 < x < 2$. Получаем $x^2 = 4$ или $x = \pm 2$. Эти числа не попадают в рассматриваемый интервал, поэтому этот случай не добавит новых решений.

Ответ: $x \in [-3; -2] \cup [2; 3]$.

Благодаря предыдущим двум примерам может сложится ложное мнение: уравнения с модулем всегда имеют бесконечно много решений, а подмодульные выражения определены всюду на числовой прямой. Поэтому рассмотрим еще один пример.

Пример 6. Решить уравнение $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| - \left|x - \dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{4}(x + 2)$. Второе подмодульное выражение обращается в ноль только при $x = \pm 1$, первое всегда отлично от нуля. Кроме того, в точке $x = 0$ подмодульные выражения не определены. Знаки подмодульных выражений на каждом из четырех промежутков (рис. 13) легко определяются подстановкой внутренних точек.

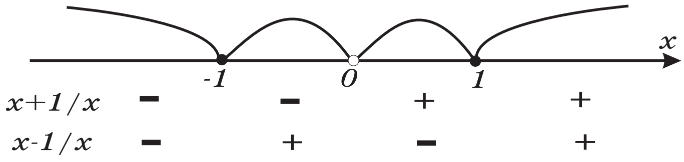


Рис. 13

Раскроем теперь модули на каждом из промежутков.

1 случай: $x \leqslant -1$. После раскрытия модулей получим уравнение $-2/x = (x+2)/4$, которое легко преобразуется к уравнению $x^2+2x+8 = 0$ без корней.

2 случай: $-1 < x < 0$. На этом промежутке имеем $-2x = (x+2)/4$. Это уравнение имеет корень $x = -2/9$, который принадлежит рассматриваемому промежутку.

3 случай: $0 < x \leqslant 1$. Получаем $2x = (x+2)/4$ или $x = 2/7 \in (0;1]$.

4 случай: $x > 1$. Раскрывая модули на этом последнем промежутке, получим уравнение $2/x = (x+2)/4$. Оно сводится к квадратному уравнению $x^2 + 2x - 8 = 0$ с корнями $x = -4$ и $x = 2$. Условию $x > 1$ удовлетворяет только $x = 2$.

Итак, искомым решением является множество $\{-2/9,\ 2/7,\ 2\}$.

Рассмотрим теперь два основных типа неравенств с модулем.

IV. $|f(x)| < g(x)$. Раскрывая модуль по определению, имеем

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x). \end{cases}$$

Равносильность итоговой системы и совокупности двух предыдущих следует из таких соображений. При $g(x) < 0$ ни совокупность, ни итоговая система решений не имеют. При $g(x) \geqslant 0$ решением первой системы совокупности являются все x, удовлетворяющие двойному неравенству $0 \leqslant f(x) < g(x)$; решением второй системы совокупности являются все x, для которых $-g(x) < f(x) < 0$. В результате решением совокупности будут все x, для которых одновременно $g(x) \geqslant 0$ и $-g(x) < f(x) < g(x)$.

Пример 7. Решить неравенство $|x^2 - 4| - 3x < 0$. Воспользуемся итоговой системой из **IV**.

$$|x^2-4| < 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 - 4 < 3x \\ x^2 - 4 > -3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ -1 < x < 4, \\ x \in (-\infty; -4) \cup (1; \infty) \end{cases}$$

Решением последней системы является интервал $x \in (1;4)$.

V. $|f(x)| > g(x)$. Раскрывая модуль по определению, имеем

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right.$$

Обозначим через A совокупность первых двух систем, а через B — последнюю совокупность из двух неравенств и докажем, что A и B равносильны (т.е. множества решений у них одинаковы). Выберем произвольное x_0. Если $g(x_0) < 0$, то x_0 является решением и A, и B, поэтому дальше будем считать, что $g(x_0) \geqslant 0$. Если x_0 является решением A, то для него обязательно выполнено $f(x_0) > g(x_0)$ или $f(x_0) < -g(x_0)$, откуда следует, что x_0 — одно из решений B. Предположим обратное, x_0 удовлетворяет совокупности B. Возможны два случая: $f(x_0) > g(x_0)$ или $f(x_0) < -g(x_0)$. В первом случае, учитывая, что $g(x_0) \geqslant 0$, имеем $f(x_0) > g(x_0) \geqslant 0$, откуда x_0 — решение первой системы совокупности A. Если $f(x_0) < -g(x_0)$, то, снова принимая во внимание условие $g(x_0) \geqslant 0$, имеем $f(x_0) < 0$ и $-f(x_0) > g(x_0)$, т.е. x_0 — решение второй системы совокупности A. Это и завершает доказательство равносильности A и B.

Пример 8. Решить неравенство $|x^2 - 2x - 3| > 3x - 3$. Используя **V**, сводим данное неравенство к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, \\ x^2 - 2x - 3 < -3x + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x > 0, \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \cup (5; \infty), \\ x \in (-3; 2). \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty)$.

Завершим этот параграф двумя примерами систем с модулем.

Пример 9. Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} |x+1| = 4y - 4, \\ |y-1| + |x+1| = 5. \end{array}\right.$ Используя метод подстановки, получим уравнение $|y-1| + 4y - 4 = 5$ или $|y-1| = 9 - 4y$. Последнее уравнение решаем, используя **II**:

$$\left\{\begin{array}{l} y \leqslant 9/4, \\ \left[\begin{array}{l} y - 1 = 9 - 4y, \\ y - 1 = -9 + 4y \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y \leqslant 9/4, \\ \left[\begin{array}{l} y = 2, \\ y = 8/3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow y = 2.$$

Подставив $y = 2$ в первое уравнение системы, имеем $|x+1| = 4$. Его корнями являются $x = -5$ и $x = 3$. Ответ: $(-5, 2)$, $(3, 2)$.

Пример 10. Решить систему уравнений $\left\{\begin{array}{l} |x^2 - 2x| + y = 1, \\ x^2 + |y| = 1. \end{array}\right.$ Ясно, что $x^2 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$. Для решения системы достаточно рассмотреть четыре случая:

Первый случай: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, $y \geqslant 0$. Раскрывая модули, получим $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$ Пара $(0, 1)$ удовлетворяет условиям раскрытия модулей.

Второй случай: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; \infty)$, $y < 0$. Раскрывая модули, получим $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 1, \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0, \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (1 \pm \sqrt{5})/2, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$
Условию раскрытия модулей удовлетворяет только $x = (1 - \sqrt{5})/2$ и $y = (1 - \sqrt{5})/2$.

Третий случай: $x \in (0; 2)$, $y \geqslant 0$. Раскрывая модули, получим
$\begin{cases} -(x^2 - 2x) + y = 1, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 2x = 0, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = 1, \\ x^2 + y = 1. \end{cases}$ Учитывая условия раскрытия модулей, получаем решение $(1, 0)$.

Четвертый случай: $x \in (0; 2)$, $y \leqslant 0$. Раскрывая модули, получим
$\begin{cases} -(x^2 - 2x) + y = 1, \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2, \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$ Пара $(1, 0)$ удовлетворяет условиям раскрытия модулей.

Ответ: $(0, 1)$, $((1 - \sqrt{5})/2, (1 - \sqrt{5})/2)$, $(1, 0)$.

2.3. Метод интервалов

Метод интервалов используется при решении неравенств довольно общего вида: $f(x) \geqslant g(x)$ (*) (знак у неравенства может быть другим: $\leqslant, >, <$). Единственным ограничением на функции f и g является требование их непрерывности. Не будем давать строгое определение понятия непрерывной функции (это будет сделано в 11 классе), отметим только, что все элементарные функции (а именно такие и рассматриваются в школьном курсе математики) непрерывны на своей области определения.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов. Для решения неравенства $f(x) \geqslant g(x)$ (знак у неравенства может быть $\leqslant, >, <$) достаточно:

1. Нанести на прямую “светлыми” (или “выколотыми”) все точки, которые не входят в ОДЗ неравенства (*).

2. Решения уравнения $f(x) = g(x)$ нанести на прямую “темными”, если

знак у неравенства (*) нестрогий, т.е. $\geqslant$ или $\leqslant$; в случае строго знака у исходного неравенства решения уравнения наносятся на прямую “светлыми”.

3. Выбрав в каждом из получившихся промежутков по точке и подставив в исходное неравенство, убедиться, выполняется неравенство (*) на каждом из этих промежутков, или нет.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{(x+2)^7(x-3)^4}{(x+1)^3} \leqslant 0$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех $x \in R$, кроме $x = -1$.

2. Уравнение, соответствующее данному неравенству, равносильно на ОДЗ совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x-3=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Наносим найденные корни на прямую “темными” (рис. 14).

Рис. 14

3. Подставляя $x = -3$, $x = -3/2$, $x = 0$ и $x = 4$ в исходное неравенство, убеждаемся, что из всех промежутков подходит только интервал $(-2; -1)$ (на рис. 14 “в” и “н.в.” означают соответственно выполняется и не выполняется).

Ответ: $x \in [-2; -1) \cup \{3\}$

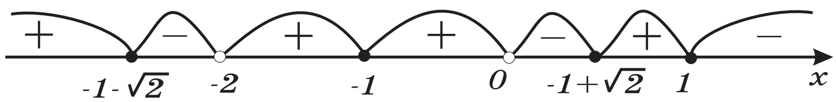
Замечание 1. У “нестрогих” неравенств (т.е. неравенств вида $f(x) \geqslant g(x)$ или $f(x) \leqslant g(x)$) могут быть изолированные корни ($x = 3$ — в предыдущем примере). Изолированными корнями будут те решения уравнения $f(x) = g(x)$, которые являются границей двух смежных интервалов, на которых исходное неравенство не выполняется или не определено.

Замечание 2. Некоторые функции $F(x)$ можно представить в виде произведения $F(x) = a(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k}$, где $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ и $n_i \in N$ при $i \leqslant k$. Тогда натуральное число n_i называется кратностью корня x_i. Используя кратность корня можно сформулировать правило расстановки знаков функции $F(x)$: знак функции при переходе через корень нечетной кратности меняется на противоположный, а при переходе через корень четной кратности остается неизменным.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{x^2+2x} - (x^2+2x)(x-1) \leqslant 0$. После приведения к общему знаменателю и разложения на множители, получим

$$\frac{-1(x-1)(x+1)^2(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{x(x+2)} \leqslant 0.$$

Используя предыдущее замечание, имеем следующую расстановку знаков



Ответ: $x \in [-1-\sqrt{2}; -2) \cup \{-1\} \cup (0; -1+\sqrt{2}] \cup [1; \infty)$.

Пример 3. Решить неравенство $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| > 3$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех $x \in R$, кроме $x = 1$.

2. Решаем уравнение, соответствующее данному неравенству.

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x+2}{x-1} = 3, \\ \frac{x+2}{x-1} = -3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5/2, \\ x = 1/4. \end{array}\right.$$

   Корни уравнения на числовой оси отмечаем “светлыми” (рис. 15)

3. Подставив в исходное неравенство числа $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 2$ и $x = 3$, находим, что множеством решений данного неравенства являются все $x \in (1/4; 1) \cup (1; 5/2)$.

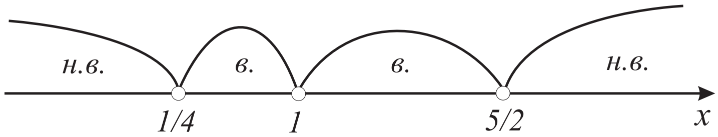


Рис. 15

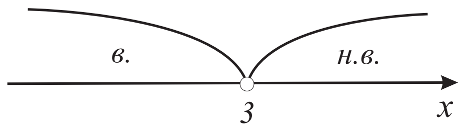


Рис. 16

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geqslant 2x$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех $x \in R$, кроме $x=3$.

2. Решая уравнение, соответствующее данному неравенству, быстро приходим к $|x| = -(x^2-6x+12)$. Выражение, стоящее в скобках, всегда положительно, поэтому правая часть неравенства отрицательна при всех $x \in R$. Таким образом, уравнение не имеет корней.

3. На прямой получились только два промежутка (рис. 16). Подставляя числа $x=0$ и $x=4$, убеждаемся, что решениями будут все $x<3$.

2.4. Нестандартные задачи

В этом параграфе разберем несколько задач с модулем, которые встречались в разные годы на конкурсных экзаменах в СУНЦ УрГУ.

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y^2-3y}{|y|} - |x+1| \leqslant 1.$$

Заметим, что точки с координатой $y=0$ не входят в область допустимых значений (ОДЗ) этого неравенства. Раскрывая модуль при $y>0$ и при $y<0$, получаем

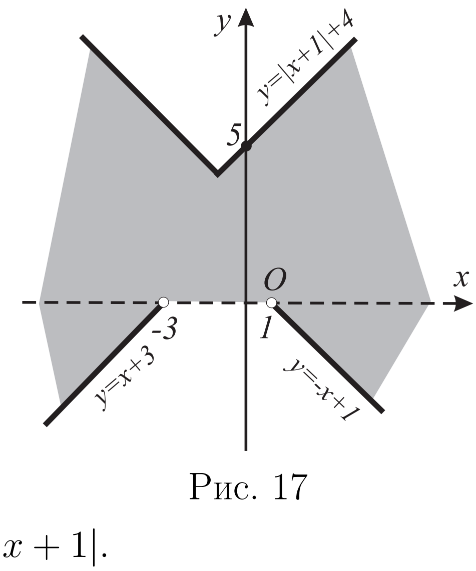


Рис. 17

$$\begin{cases} y>0, \\ y \leqslant |x+1|+4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y<0, \\ y \geqslant 2-|x+1|. \end{cases}$$

Раскрывая теперь $|x+1|$, окончательно имеем следующие системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} y>0, \\ x \geqslant -1, \\ y \leqslant x+5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y>0, \\ x<-1, \\ y \leqslant -x+3, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} y < 0, \\ x \geqslant -1, \\ y \geqslant 1 - x, \end{cases} \qquad \text{или} \quad \begin{cases} y < 0, \\ x < -1, \\ y \geqslant 3 + x. \end{cases}$$

На рис. 17 изображено объединение решений этих четырех систем.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$x = \frac{2a}{|x-2|}$$

имеет единственное решение?

Областью допустимых значений уравнения $x = 2a/|x-2|$ являются все x, кроме $x = 2$. Поэтому

$$x = \frac{2a}{|x-2|} \Leftrightarrow \begin{cases} x|x-2| = 2a, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Число решений исходного уравнения совпадает с числом точек пересечения графика функции $f(x) = x|x-2|, x \neq 2$ с прямой $y = 2a$. Раскрывая модуль, получаем

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 2, \\ 2x - x^2, & x < 2. \end{cases}$$

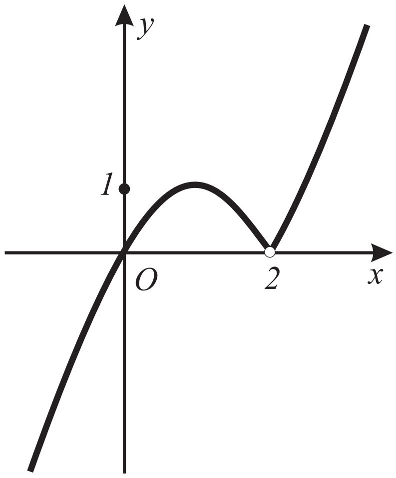


Рис. 18

График $f(x)$ изображен на рис. 18. Легко определить координаты вершины параболы $y = 2x - x^2$. Они равны $(1, 1)$. Поэтому график функции $y = f(x)$ и прямая $y = 2a$ имеют единственное пересечение при $a \leqslant 0$ и при $a > 1/2$ (при $a = 0$ пересечение единственно, так как $x = 2$ не входит в область определения функции $f(x)$).

Пример 3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x < -1, \\ -2x - 5, & \text{если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

(a) Решить неравенство $f(x) \leqslant x - 5$.

(b) Найти значения a, b, c таким образом, чтобы при всех значениях x было выполнено равенство $f(x) = ax + b - |3x + c|$.

(a) Необходимо решить это неравенство на каждом из промежутков $x < -1$ и $x \geqslant -1$. Получаем

$$\begin{cases} 4x + 1 \leqslant x - 5, \\ x < -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2x - 5 \leqslant x - 5, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -2, \\ x < -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

(b) Обозначим через $g(x)$ функцию, стоящую в правой части равенства $f(x) = ax + b - |3x + c|$. Раскрывая модуль, получаем

$$g(x) = \begin{cases} ax + b - 3x - c, & x \geqslant -c/3 \\ ax + b + 3x + c, & x < -c/3 \end{cases} = \begin{cases} (a-3)x + b - c, & x \geqslant -c/3, \\ (a+3)x + b + c, & x < -c/3. \end{cases}$$

Сравнивая полученные выражения для $g(x)$ с определением функции $f(x)$, получаем, что для выполнения тождества $f(x) = g(x)$ необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты были равны между собой, т.е.

$$\begin{cases} -c/3 = -1, \\ a - 3 = -2, \\ b - c = -5, \\ a + 3 = 4, \\ b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3, \\ a = 1, \\ b = -2. \end{cases}$$

Ответ: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

Пример 4. Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}.$$

Преобразуем сначала выражение, задающее функцию $y(x)$. Так как $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ являются корнями уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ и $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$, то

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} = \frac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{(x+2)^2}} = \frac{(x+2)(x-3)}{|x+2|}.$$

Заметим, что областью определения функции $y(x)$ являются все x, за исключением $x=-2$. Раскрывая модуль, получаем

$$y(x)=\begin{cases}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}, & x>-2\\ \frac{(x+2)(x-3)}{-(x+2)}, & x<-2\end{cases}=\begin{cases}x-3, & x>-2,\\ 3-x, & x<-2.\end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 19.

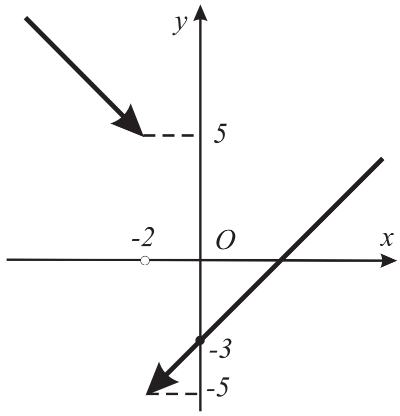


Рис. 19

Пример 5. При каком значении параметра a решение неравенства

$$|2x-4|+x-1\leqslant a$$

существует и симметрично относительно $x_0 = 1$?

Раскрывая модуль, получаем, что $|2x-4|+x-1\leqslant a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x\geqslant 2,\\ 2x-4+x-1\leqslant a,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x<2,\\ 4-2x+x-1\leqslant a,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x\leqslant \frac{a+5}{3},\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x<2,\\ x\geqslant 3-a.\end{cases}$$

Первая система имеет решение, если $(a+5)/3\geqslant 2$, т.е. при $a\geqslant 1$. Аналогично если $3-a<2$ или $a>1$, то существует решение второй системы. Итак, решение исходного неравенства существует только при $a\geqslant 1$ и является объединением $[3-a,2)\cup[2,(a+5)/3]$, т.е. является промежутком $[3-a,(a+5)/3]$. Для того чтобы отрезок $[3-a,(a+5)/3]$ был симметричен относительно $x_0=1$, необходимо, чтобы

$$\left(3-a+\frac{a+5}{3}\right)/2=1\Leftrightarrow 9-3a+a+5=6.$$

Следовательно, $a=4$.

Пример 6. При каких значениях a уравнение

$$|x+4|-a=|x-1|$$

имеет больше двух решений?

Перепишем исходное уравнение в виде $|x+4|-|x-1|=a$ и рассмотрим функции $y=|x+4|-|x-1|$ и $y=a$. Рассматривая первую функцию на промежутках, где подмодульные выражения сохраняют знак, получаем что она равна -5 при $x\leqslant -4$, $2x+3$ при $-4<x<1$ и 5 при $x\geqslant 1$. Следовательно, ее график — ломаная, имеющая два горизонтальных участка, для одного из которых $y=-5$, а для другого $y=5$. Следовательно, при $a=5$ и $a=-5$ решений бесконечно много, и эти значения a входят в ответ. При $-5<a<5$ уравнение имеет только одно решение, а при $|a|>5$ решений нет совсем, следовательно, эти a в ответ не входят.

Ответ: $a=-5$ или $a=5$.

Глава 3

Иррациональные уравнения и неравенства

3.1. Квадратный и кубический корни, их свойства

Определение. Квадратным корнем из неотрицательного числа x называется такое неотрицательное число y, что $y^2 = x$.

Функцию квадратного корня обозначают через $y = \sqrt{x}$. Определена она при всех $x \geqslant 0$ и имеет множеством своих значений все $y \geqslant 0$. График функции $y = \sqrt{x}$ изображен сплошной линией на рис. 20. Он может быть получен из половины параболы, являющейся графиком функции $f(x) = x^2$ при $x \geqslant 0$ (на том же рисунке этот график изображен штриховой линией), отражением относительно прямой $y = x$.

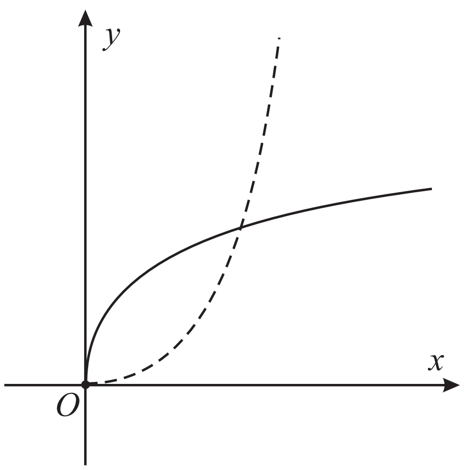


Рис. 20

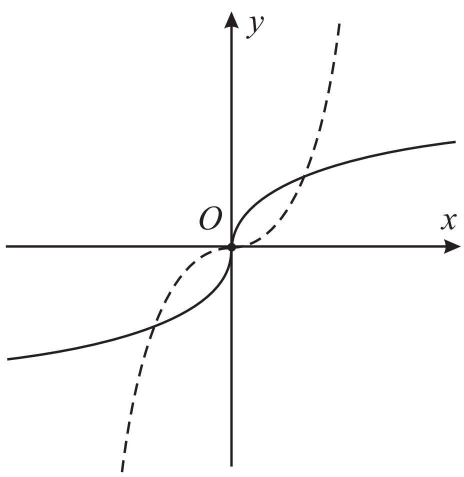


Рис. 21

Определение. Кубическим корнем из произвольного числа x называется такое число y, что $y^3 = x$.

Функцию кубического корня обозначают через $y = \sqrt[3]{x}$. Определена она при всех $x \in R$ и имеет множеством своих значений все $y \in R$. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображен сплошной линией на рис. 21. Он может быть получен из графика функции $f(x) = x^3$ (на рис. 21 этот график изображен штриховой линией) отражением относительно прямой $y = x$.

Стандартные способы решения иррациональных уравнений рассматриваются в следующем параграфе, но при решении некоторых иррациональных уравнений бывает достаточно правильно определить область допустимых значений переменной x или множество значений входящих в уравнение функций. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 1$.

Областью допустимых значений этого уравнения являются все x, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x - 2 \geqslant 0, \\ 1 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

Последняя система решений не имеет, поэтому ОДЗ уравнения является пустым множеством и уравнение решений не имеет.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-2} = 1 - x$.

Областью допустимых значений этого уравнения являются все $x \leqslant 2$. На этом множестве правая часть уравнения (т.е. выражение $1 - x$) отрицательна, в то время как левая часть принимает только неотрицательные значения. Следовательно данное уравнение решений не имеет.

Монотонность функций является еще одним свойством, которое также можно использовать при решении уравнений. Вспомним, как определяется это свойство. Пусть некоторая функция $f(x)$ определена на числовом множестве A. Будем называть функцию $f(x)$ возрастающей (строго возрастающей) на множестве A, если для любых x_1, $x_2 \in A$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < < f(x_2)$). Другими словами, функция является строго возрастающей, если при бо́льших значениях аргумента эта функция принимает бо́льшие значения. Аналогично определяются убывающие и строго убывающие функции: функция $f(x)$ называется убывающей (строго убывающей) на множестве A, если для любых x_1, $x_2 \in A$ из условия $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$). Для строго убывающей функции при бо́льших значениях аргумента мы всегда получаем меньшее значение функции. Функция $f(x)$ называется монотонной (строго монотонной) на множестве A, если она возрастает или убывает (соответственно, строго возрастает или строго убывает) на множестве A.

Проверьте самостоятельно, что любая функция, которая является константой (например, $f(x) = 4$ для всех $x \in R$), удовлетворяет одновременно определению как убывающей, так и возрастающей функции.

Пример 3. Доказать, что функция $f_1(x) = x^2$ на множестве $x \geqslant 0$ и функция $g_1(x) = x^3$ на R строго возрастают.

Действительно, при $0 \leqslant x_1 < x_2$ верно $f_1(x_2) - f_1(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$. Для функции $g_1(x)$ рассмотрим два случая. Первый случай: числа x_1 и x_2 разного знака, т.е. $x_1 < 0 < x_2$. Тогда $g_1(x_1) < 0 < g_1(x_2)$. Второй случай: $x_1 < x_2 \leqslant 0$ или $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда

$$g_1(x_2) - g_1(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) > 0.$$

Сохраним обозначения предыдущего примера и докажем, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ строго возрастает. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Верно ли, что $f(x_1) = \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} = f(x_2)$? Вспомнив, что функция $f_1(x) = x^2$ строго возрастает при $x \geqslant 0$, получаем, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ тогда и только тогда, когда $(\sqrt{x_1})^2 < (\sqrt{x_2})^2$, т.е. $x_1 < x_2$, поэтому $f(x) = \sqrt{x}$ является строго возрастающей функцией. Аналогично доказывается строгое возрастание функции $g(x) = \sqrt[3]{x}$ на всей числовой прямой.

Использование монотонности при решении уравнений основано на следующей теореме.

Теорема 1. *Если функции $F(x)$ и $G(x)$ монотонны на некотором множестве A, имеют разный характер монотонности (т.е. одна из них возрастает, а другая — убывает), причем хотя бы одна из функций строго монотонна, то тогда на этом множестве уравнение $F(x) = G(x)$ имеет не более одного решения.*

Для определенности будем считать, что $F(x)$ строго возрастает, а $G(x)$ — убывает на множестве A. Предположим противное: уравнение $F(x) = G(x)$ имеет по крайней мере два корня. Обозначим меньший из них через x_1, больший — через x_2. Тогда

$$F(x_1) < F(x_2) = G(x_2) \leqslant G(x_1).$$

Отсюда равенство $F(x_1) = G(x_1)$ невозможно. Противоречие. Теорема доказана.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x} = 2 - x^2$.

ОДЗ этого уравнения составляют все $x \geqslant 0$. На этом множестве функция $\sqrt{x}$ строго возрастает, а $2 - x^2$ — убывает, поэтому по предыдущей теореме у этого уравнения не может быть более одного корня. Сразу видно, что $x = 1$ является корнем этого уравнения. Больше у этого уравнения корней нет.

При решении более сложных задач используются некоторые свойства монотонных функций, о которых пойдет речь в следующей теореме. Но прежде дадим определение композиции двух функций. Пусть A — это множество всех x, для которых одновременно определены два числа: $f(x)$ и $g(f(x))$. Тогда композицией функций f и g называется функция h, определенная на множестве A и действующая по следующему правилу: $h(x) = g(f(x))$. Так, например, композицией функций $f(x) = x + 1$ и $g(x) = \sqrt{x}$ является функция $h(x) = \sqrt{x+1}$, определенная на множестве всех $x \geqslant -1$.

Теорема 2. *1) Если две функции монотонны на некотором множестве A с одинаковым характером монотонности, то сумма этих функций имеет тот же характер монотонности на этом множестве. 2) Если характер монотонности двух функций совпадает, то композиция этих функций является возрастающей функцией; а если характер монотонности различен, то композиция этих функций убывает.*

Первое утверждение теоремы очевидно, для доказательства второй части рассмотрим для определенности две убывающие функции $f(x)$ и $g(x)$ и докажем, что их композиция $h(x) = g(f(x))$ возрастает. Возьмем произвольные числа x_1 и x_2, в которых определена функция $h(x)$. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$ и $g(y_1) \leqslant g(y_2)$. Посему $h(x_1) = g(f(x_1)) \leqslant g(f(x_2)) = h(x_2)$. Возрастание функции $h(x)$ доказано. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Нетрудно заметить, что если в первом утверждении теоремы одна из функций будет строго монотонна, то сумма также получится строго монотонной функцией. Во втором утверждении для получения в результате композиции строго монотонной функции достаточно потребовать, чтобы каждая из участвующих в композиции функций была строго монотонна.

Из предыдущей теоремы следует, что на своих областях определения возрастают функции $f_1(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x^3}$, $f_3(x) = \sqrt{x-1}$, а функции $g_1(x) = \sqrt{1-x}$, $g_2(x) = \sqrt{-x} + \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ являются убывающими функциями.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+4} = 4$.

ОДЗ этого уравнения являются все $x \geqslant 4$. На этом множестве левая часть этого уравнения строго возрастает (по теореме 2), правая часть представляет из себя убывающую функцию. По теореме 1 это уравнение может иметь не более одного корня. Поэтому число $x = 5$ является единственным корнем этого уравнения.

В заключение этого параграфа сделаем несколько замечаний. Первое. Применение теоремы 1 обосновано при решении такого уравнения, корень которого легко находится подбором. В противном случае надо воспользоваться одним из стандартных способов решения иррациональных уравнений, о которых идет речь в следующем параграфе. И второе. Если функции, входящие в уравнение, не являются монотонными на всей области допустимых значений переменной, иногда удается разбить ОДЗ на части, на каждой из которых функции монотонны. Затем к каждой из этих частей следует применить теорему 1. Поясним последнее замечание примером.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{|x-3| - 1} = 6x - x^2 - 4$.

ОДЗ этого уравнения составляют все x, удовлетворяющие неравенству $|x-3| \geqslant 1$, т.е. $x \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$. Рассмотрим отдельно два множества: $A_1 = (-\infty; 2]$ и $A_2 = [4; \infty)$. На множестве A_1 левая часть данного уравнения строго убывает (поскольку является композицией строго убывающей функции $2-x$ и строго возрастающей функции квадратного корня), правая же часть строго возрастает на этом множестве (правую часть уравнения лучше всего представить в виде $6x - x^2 - 4 = -(x-3)^2 + 5$). Значит, по теореме 1 на множестве A_1 данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень, $x = 1$, легко угадывается. На множестве A_2 характер монотонности левой и правой частей меняется на противоположный. Это позволяет снова воспользоваться теоремой 1 и утверждать, что и на множестве A_2 данное уравнение может иметь не более одного корня. Им будет $x = 5$. Ответ: $x = 1$, $x = 5$.

3.2. Иррациональные уравнения

Прежде, чем мы начнем рассматривать конкретные способы решения иррациональных уравнений, вспомним несколько важных понятий и обозначений.

Уравнение с одной переменной в общем виде выглядит так:

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые алгебраические выражения. Областью допустимых значений (или ОДЗ) этого уравнения называют множество всех таких значений x, для которых одновременно определены левая и правая части уравнения. Корнем уравнения (1) (или его решением) называется такое x_0, что верно числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Уравнения $f(x) = g(x)$ и $f_1(x) = g_1(x)$ называются равносильными, если множества их решений совпадают. Обозначается факт равносильности так: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$. Например, $x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$. Аналогично равносильным уравнениям определяются равносильные неравенства, системы или совокупности уравнений или неравенств (напомним, что совокупность двух уравнений обозначается через $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$ и решением совокупности является объединение решений каждого из ее уравнений). Когда по каким-то причинам не удается перейти к равносильному уравнению, переходят к следствию. При этом уравнение $f_1(x) = g_1(x)$ называют следствием уравнения $f(x) = g(x)$ (обозначается это так: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$), если каждый корень уравнения $f(x) = g(x)$ является корнем уравнения $f_1(x) = g_1(x)$. Таким образом, множество всех решений $f_1(x) = g_1(x)$ содержит все корни исходного уравнения и, может быть, другие корни (которые часто называют посторонними корнями). Способ борьбы с посторонними корнями достаточно прост: необходимо все корни следствия подставить в исходное уравнение. Этот способ применим не во всех случаях (например, у следствия может быть бесконечно много решений), поэтому переход к равносильному уравнению или системе уравнений или неравенств будет предпочтительным.

Начнем с самых простых способов решения иррациональных уравнений.

I. *Возведение в степень.* При возведении в четную степень мы всегда переходим к следствию, в частности, $\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = g^2(x)$. Не будем забывать о том, что все корни следствия требуют подстановки в исходное уравнение. Если мы возводим в нечетную степень, всегда получается равносильное уравнение, в частности, $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{17+x} - \sqrt{17-x} = 2$. ОДЗ этого уравнения состоит из всех $x \in [-17; 17]$. После возведения в квадрат, получим $34 - 2\sqrt{17^2 - x^2} = 4$ или $\sqrt{17^2 - x^2} = 15$. Еще раз возведем в квадрат и придем к $x^2 = 64$ или $x = \pm 8$. Проверка убеждает нас в том, что $x = 8$ является корнем исходного уравнения, а $x = -8$ — посторонний корень. Ответ: $x = 8$.

Замечание. В предыдущем примере при подстановке $x = -8$ в исходное уравнение получается неверное числовое равенство $-2 = 2$, но возведение его в квадрат приводит уже к верному соотношению $4 = 4$. Как раз после первого перехода к следствию число $x = -8$ появилось в качестве постороннего корня.

При проверке всех корней следствия мы можем столкнуться с некоторыми трудностями. Например, при переходе $\sqrt{x^2} = x \Rightarrow x^2 = x^2$ мы получим следствие с бесконечным множеством решений и проверка оказывается физически невозможной. В следующем способе мы заменим следствие равносильной системой.

II. $$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Исчезновение неравенства $f(x) \geqslant 0$ при переходе к последней системе объясняется очень просто: уравнение $f(x) = g^2(x)$ гарантирует неотрицательность функции $f(x)$.

Пример 2. Решить уравнение $t - 6 = \sqrt{2t+12}$. Сразу перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} t - 6 \geqslant 0, \\ t^2 - 12t + 36 = 2t + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geqslant 6, \\ t^2 - 14t + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 12.$$

III. *Замена переменной.* Суть метода замены переменной в следующем: (a) выделение некоторого выражения относительно x (т.е. преобразование уравнения $f(x) = 0$ к равносильному $f(g(x)) = 0$); (б) нахождение $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — множества всех решений уравнения $f(y) = 0$, где $y = g(x)$; (в) "обратная замена", т.е. нахождение решения совокупности уравнений $g(x) = y_1, \ldots, g(x) = y_n$. Рассмотрим несколько иррациональных уравнений, легко решающихся методом замены переменной.

Пример 3. Решить уравнение $x^2 - 4x - 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$. Сделав замену $t = x^2 - 4x$, приходим к уже знакомому уравнению $t - 6 = \sqrt{2t + 12}$ с единственным корнем $t = 12$. Сделав обратную замену, имеем $x^2 - 4x - 12 = 0$. Корнями этого уравнения являются $x = -2$ и $x = 6$. Ответ: $x = -2$ и $x = 6$.

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 16} - 6$. Умножив обе части уравнения на 2, можно прийти к эквивалентному уравнению $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = x + 4 + 2\sqrt{(x-4)(x+4)} + x - 4 - 12$ (конечно же, $2x = x + 4 + x - 4$). Теперь уже нетрудно заметить, что в правой части уравнения можно выделить полный квадрат:

$$x + 4 + 2\sqrt{(x-4)(x+4)} + x - 4 - 12 = (\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4})^2 - 12.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}$ и сразу заметим, что $t \geqslant 0$. Единственным неотрицательным корнем квадратного уравнения $t = t^2 - 12$ является $t = 4$. В результате исходное уравнение преобразуется к равносильному уравнению $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$. Его единственным корнем будет $x = 5$ (это уравнение было рассмотрено в первом параграфе). Ответ: $x = 5$.

IV. *Сведение к системе.* Этот способ применим к часто встречающимся уравнениям вида $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a$. Для решения этого уравнения введем сразу две новых переменных: $u = \sqrt{f(x)}$ и $v = \sqrt{g(x)}$. Тогда $u, v \geqslant 0$ и $u^2 = f(x)$, $v^2 = g(x)$. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ иногда удается подобрать такие коэффициенты $k, l \in R$, что в выражении $k \cdot f(x) + l \cdot g(x)$ переменная x взаимно уничтожается, т.е. справедливо равенство $k \cdot f(x) + l \cdot g(x) = b$ для некоторого числа $b \in R$. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \geqslant 0, \\ u + v = a, \\ k \cdot u^2 + l \cdot v^2 = b. \end{cases}$$

Поясним вышесказанное примером.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$. Сделав замену $u=\sqrt{x^2+9}$ и $v=\sqrt{x^2-7}$, получим $u^2=x^2+9$ и $v^2=x^2-7$. Для того, чтобы взаимно уничтожилась переменная x, достаточно из u^2 вычесть v^2 (коэффициенты k и l в этом случае равны 1 и -1 соответственно). Итак, исходное уравнение преобразуется к системе

$$\left\{\begin{array}{l} u,v \geqslant 0, \\ u-v=2, \\ u^2-v^2=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u,v \geqslant 0, \\ u-v=2, \\ (u-v)(u+v)=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u,v \geqslant 0, \\ u-v=2, \\ u+v=8. \end{array}\right.$$

Решением последней системы будет пара $u=5$, $v=3$. Сделав обратную замену, приходим к уравнению $\sqrt{x^2+9}=5$, корнями которого являются $x=\pm 4$. Легко заметить, что уравнение $\sqrt{x^2-7}=3$ имеет те же корни. Вообще, верно следующее правило: для нахождения x неважно, какую переменную (u или v) использовать. Ответ: $x=\pm 4$.

Способ сведения к системе даже упрощается, если в уравнении встречаются корни нечетных степеней. Так, например,

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=a \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u+v=a, \\ k\cdot u^3+l\cdot v^3=b, \end{array}\right.$$

где $u=\sqrt[3]{f(x)}$, $v=\sqrt[3]{g(x)}$ и коэффициенты $k,l\in R$ подбираются так, что слагаемые, содержащие переменную x взаимно уничтожаются в выражении $k\cdot u^3+l\cdot v^3$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$. Обозначив через u и v соответственно $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}$ и $\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}$, получим

$$\left\{\begin{array}{l} u+v=4, \\ u^3+v^3=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u+v=4, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u=4-v, \\ u^2-uv+v^2=4. \end{array}\right.$$

Подставляя $u=4-v$ во второе уравнение, быстро приходим к уравнению $v^2-4v+4=0$, имеющее единственный корень $v=2$. Сделав обратную замену, находим корень исходного уравнения. Ответ: $x=0$.

V. *Выделение полного квадрата.* Иногда от квадратного корня можно избавиться "внутренними" средствами — представить подкоренное выражение в виде полного квадрата. Тогда $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g^2(x)}=|g(x)|$. Рассмотрим пример.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}=1.$$

Представим первое подкоренное выражение в виде

$$x-1+2\sqrt{x-2}=x-2+2\sqrt{x-2}+1=(\sqrt{x-2}+1)^2.$$

Второе подкоренное выражение преобразуется к квадрату разности. Итак, исходное уравнение равносильно уравнению

$$|\sqrt{x-2}+1|-|\sqrt{x-2}-1|=1.$$

ОДЗ этого уравнения являются все $x \geqslant 2$. Учитывая, что на ОДЗ верно $\sqrt{x-2}+1 \geqslant 0$, приходим к уравнению $|\sqrt{x-2}-1|=\sqrt{x-2}$. Сделав замену $t=\sqrt{x-2}$ и решив уравнение $|t-1|=t$, получим $t=1/2$. Откуда $x=9/4$. Ответ: $x=9/4$.

В заключение этого параграфа рассмотрим одно уравнение с параметром, а также несколько конкурсных задач.

Пример 8. При всех значениях параметра a решить уравнение $\sqrt{x+a}=x$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x+a=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2-x-a=0. \end{cases}$$

Корни $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1+4a})/2$ квадратного уравнения $x^2-x-a=0$ существуют только при $a \geqslant -1/4$. Осталось выяснить, при каких значениях параметра a они неотрицательны. Заметим, что $x_2=(1+\sqrt{1+4a})/2 \geqslant 0$ при всех $a \geqslant -1/4$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2=-a$. Поэтому неравенство $x_1 \geqslant 0$ выполняется при $a \in [-1/4;0]$.

Ответ: при $a<-1/4$ решений нет;
при $a \in [-1/4;0]$: $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{1+4a})/2$; при $a>0$: $x=(1+\sqrt{1+4a})/2$.

Пример 9. Имеет ли корни уравнение $x^2+5x-8\sqrt{x}+20=0$? Докажем, что это уравнение не имеет корней. Для этого рассмотрим выражение $f(x)=5x-8\sqrt{x}+20$. Сделав замену $t=\sqrt{x}$ приходим к всегда положительному квадратному трехчлену $5t^2-8t+20$ (докажите это). Поэтому левая часть данного уравнения положительна и уравнение корней не имеет.

Пример 10. Пусть $f(x)=\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+x-2}\right)^2$.

(a) Найти область определения функции $y = f(x)$.

(b) Построить график функции $y = f(x)$.

(a) Областью определения функции $f(x)$ является решение системы

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $9 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 9$ является множество $[-3, 3]$. По теореме Виета находим, что $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ являются корнями уравнения $x^2 + x - 2 = 0$. Следовательно, $x^2 + x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$. Пересекая найденные решения неравенств, получаем, что $f(x)$ определена на множестве $[-3, -2] \cup [1, 3]$.

(b) На области определения, найденной в (a), преобразуем выражение, задающее $f(x)$. Итак, для любого x на множестве $[-3, -2] \cup [1, 3]$ имеем

$$f(x) = (\sqrt{9 - x^2})^2 + (\sqrt{x^2 + x - 2})^2 = 9 - x^2 + x^2 + x - 2 = x + 7.$$

Таким образом, графиком $f(x)$ является объединение двух отрезков прямой $y = x + 7$ (изобразить самим).

Пример 11. Доказать, что разность

$$\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|} - \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$$

является целым числом. Найти это число.

Обозначим $\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|} - \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$ через a. Тогда

$$a^2 = |2\sqrt{2} - 3| - 2\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|(2\sqrt{2} + 3)} + 2\sqrt{2} + 3.$$

Заметим, что $2\sqrt{2} < 3$, поэтому $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$a^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2} + 3 = 6 - 2 = 4.$$

Из уравнения $a^2 = 4$ находим, что $a = -2$ или $a = 2$. Поскольку $\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|} < \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$, то $a < 0$. Окончательно находим, что $a = -2$.

3.3. Иррациональные неравенства

Сразу сделаем несколько полезных замечаний о преобразовании неравенств.

1. Возводить в квадрат (или в любую другую четную степень) неравенство в общем случае с сохранением знака неравенства нельзя. Так, например, верное неравенство $1 > -2$ после возведения в квадрат превращается в ложное неравенство $1 > 4$.

2. Если обе части неравенства неотрицательны, то его можно возвести в квадрат с сохранением знака неравенства. Действительно, пусть $a, b \geqslant 0$. Тогда $a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow (b-a)(b+a) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

3. Если левая и правая части неравенства имеют разные знаки, то справедливость неравенства можно установить без возведения в квадрат. Например, если известно, что $a < 0$, а $b \geqslant 0$, то неравенство $a < b$ выполняется, а $a > b$ — нет.

4. Если обе части неравенства неположительны, то, умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, мы получим неравенство с неотрицательными обеими частями. Затем неравенство можно возвести в квадрат с сохранением знака неравенства.

5. При возведении неравенств в нечетную степень всегда получается равносильное неравенство с тем же знаком.

Учитывая эти замечания, рассмотрим два основных типа иррациональных неравенств.

$$\textbf{I.}\quad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$. Переходим к равносильной системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -3] \cup [4; \infty), \\ x \geqslant 0, \\ -12 < x \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 4.$$

Ответ: $x \geqslant 4$.

Иррациональные неравенства с противоположным знаком (т.е. неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$) решаются намного сложнее. Они требуют рассмотрения двух случаев: $g(x) < 0$ и $g(x) \geqslant 0$. В первом случае неравенство выполняется на ОДЗ (т.е. при $f(x) \geqslant 0$), а во втором — неравенство можно возвести в квадрат с сохранением знака. Формально это можно записать следующим образом.

$$\textbf{II.}\quad \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Небольшое упрощение второй системы совокупности связано с простым наблюдением: условие $f(x) > g^2(x)$ гарантирует выполнение неравенства $f(x) \geqslant 0$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{3x^2 - 22x} > 2x - 7$. Рассмотрим два случая: $2x - 7 < 0$ и $2x - 7 \geqslant 0$. В первом случае получаем

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 7 < 0, \\ 3x^2 - 22x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x < 7/2, \\ x \in (-\infty; 0] \cup [22/3; \infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \leqslant 0.$$

Во втором случае имеем

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 7 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 22x > 4x^2 - 28x + 49 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - 7 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 49 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \leqslant 0$.

III. *Метод интервалов.* Метод интервалов был подробно описан в предыдущем задании (№2: “Модуль числа. Метод интервалов”). Напомним только, что для решения неравенства этим методом достаточно проделать три шага: (1) найти ОДЗ неравенства; (2) решить уравнение, соответствующее данному неравенству; (3) выбрать те из полученных промежутков, на которых данное неравенство выполняется. Воспользуемся этим нехитрым алгоритмом при решении следующих неравенств.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{x\sqrt{x+2}}{x+3} \geqslant 0$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех $x \geqslant -2$.

2. Уравнение, соответствующее неравенству, имеет своими корнями $x = 0$ и $x = -2$, которые наносим на числовую прямую “темными”, так как знак неравенства нестрогий.

3. Надо рассмотреть только два промежутка (поскольку числа $x < -2$ не входят в ОДЗ). Подставляя $x = -1$ и $x = 1$ в исходное неравенство, убеждаемся, что подходит промежуток $x \geqslant 0$.

Ответ: $x = -2$, $x \geqslant 0$.

Не забывайте о том, что у нестрогих неравенств могут быть изолированные корни! Таким корнем является число -2 в рассмотренном выше примере.

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех $x \in [-5; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Преобразуя уравнение, соответствующее данному неравенству, получим
$$\sqrt{x+5} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1, \\ x + 5 = 1 - 2x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

3. Осталось подставить в исходное неравенство числа $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$. Неравенство выполняется на промежутках $[-5; -1)$ и $(1; \infty)$.

Ответ: $x \in [-5; -1) \cup (1; \infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x+4}$.

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих системе $\begin{cases} 6 + x - x^2 \geqslant 0, \\ x \neq -5/2, x \neq -4. \end{cases}$
Ее множеством решений является отрезок $[-2; 3]$.

2. Уравнение, соответствующее данному неравенству, равносильно на ОДЗ совокупности
$$\left[\begin{array}{l} 6 + x - x^2 = 0, \\ 1/(2x+5) = 1/(x+4). \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 3, \\ x = -1. \end{array} \right.$$
Наносим найденные корни на прямую “темными” (рис. 22).

Рис. 22

3. Подставляя $x = -3/2$ и $x = 0$ в исходное неравенство, убеждаемся, что на интервале $(-2; -1)$ данное неравенство выполняется, а на интервале $(-1; 3)$ оно не верно.

Ответ: $x \in [-2; -1] \cup \{3\}$

В заключении этого параграфа рассмотрим два примера иррациональных неравенств с параметрами.

Пример 6. При всех значениях параметра a решить неравенство $\sqrt{5x^2 + a^2} \geqslant -3x$. Решение этого неравенства требует рассмотрения двух случаев: $x > 0$ и $x \leqslant 0$.

Первый случай. При $x > 0$ правая часть неравенства отрицательна, а левая — больше нуля. Следовательно, все $x > 0$ являются решениями неравенства.

Второй случай. При $x \leqslant 0$ возведем неравенство в квадрат с сохранением знака неравенства. Получим: $a^2 \geqslant 4x^2$ или $|x| \leqslant |a|/2$. Последнее неравенство выполняется при $x \in [-|a|/2; |a|/2]$. Учитывая условие $x \leqslant 0$, окончательно получим $x \in [-|a|/2; 0]$.

Для получения ответа осталось объединить решения первого и второго случаев. Ответ: $x \geqslant -|a|/2$.

Пример 7. Найти все значения параметров a и b, при которых решением неравенства $\sqrt{x - a} > \sqrt{2x - b}$ является промежуток $1 \leqslant x < 5$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x - a \geqslant 0, \\ 2x - b \geqslant 0, \\ x - a > 2x - b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - b \geqslant 0, \\ x - a > 2x - b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geqslant b/2, \\ x < b - a. \end{array}\right.$$

Учитывая, что решением данного неравенства должен быть полуинтервал $1 \leqslant x < 5$, получаем, что $b/2 = 1$ и $b - a = 5$. Отсюда находим $b = 2$ и $a = -3$. Ответ: $a = -3$ и $b = 2$.

Глава 4

Системы уравнений

4.1. Основные способы решения систем уравнений

Функции двух переменных. Координатную плоскость Oxy будем обозначать через R^2. Запись $A \subseteq R^2$ означает, что A является плоской фигурой и состоит из некоторого множества упорядоченных пар. Пусть $A \subseteq R^2$, тогда функцией двух переменных $f(x, y) : A \to R$ называют правило, по которому каждой упорядоченной паре $(x, y) \in A$ ставится в соответствие единственное число $f(x, y)$. Как и для функции одной переменной, множество A называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$.

Например, функция $f(x, y) = x - y$ определена для любой пары $(x, y) \in R^2$, т.е. $D(f) = R^2$. Функция $g(x, y) = \sqrt{xy}$ определена только при $x \cdot y \geqslant 0$, поэтому $D(g)$ является объединением первой и третьей координатных четвертей. Для рассмотрения более сложных примеров, нам понадобится уравнение окружности.

Рассмотрим две произвольные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ координатной плоскости. Если прямая AB не параллельна координатным осям, легко получается прямоугольный треугольник ABC (на рис. 23 прямые AC и BC параллельны координатным осям) с катетами, длины которых равны $AC = |x_2 - x_1|$ и $BC = |y_2 - y_1|$. Применяя теорему Пифагора, получим формулу для вычисления расстояния между точками A и B: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (эта формула остается верной и в случае, когда прямая AB параллельна одной из координатных осей). Поэтому точка $M(x, y)$ лежит на окружности с центром в $O'(x_0, y_0)$ и радиусом

$R \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad \textit{(уравнение окружности)}.$$

Как известно, кругом с центром в O' и радиусом $R \geqslant 0$ называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих неравенству $O'M \leqslant R$. Поэтому неравенство $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2$ на координатной плоскости задает круг с центром в $O'(x_0, y_0)$ и радиусом $R \geqslant 0$. Воспользуемся этим замечанием в следующем примере.

Пример 1. Найти области определения функций

$$f_1(x, y) = \sqrt{4x - x^2 - y^2} \quad \text{и} \quad f_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y}}.$$

Решение. Функция $f_1(x, y)$ определена, если $x^2 - 4x + y^2 \leqslant 0$ или $x^2 - 4x + 4 + y^2 \leqslant 4$. Последнее неравенство равносильно $(x-2)^2 + y^2 \leqslant 0$ и задает на плоскости круг радиуса 2, с центром в точке $(2, 0)$ (рис. 24). Для функции f_2 получаем неравенство $x^2 + y^2 - 2x + 4y > 0$. Выделяя полные квадраты, приходим к $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 > (\sqrt{5})^2$. Это неравенство на плоскости задает область вне круга с центром в точке $(1, -2)$ и радиусом $\sqrt{5}$ (рис. 25).

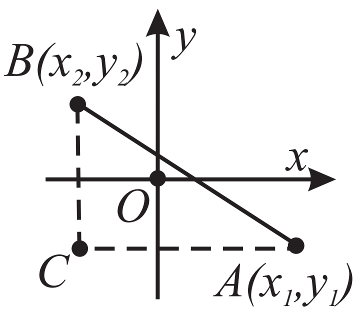


Рис. 23

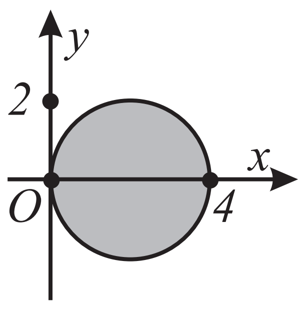


Рис. 24

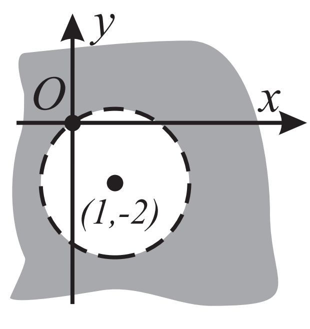


Рис. 25

Замечание. Обратите внимание, что граница круга на последнем рисунке не входит в область определения функции $f_2(x, y)$. Линии, не входящие в область определения функции, изображают **пунктиром**.

Уравнение с двумя переменными в общем случае выглядит так;

$$f(x, y) = g(x, y). \tag{1}$$

Его ОДЗ — это общая часть областей определения функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$, т.е. ОДЗ(1) $= D(f)\cap D(g)$. Решением уравнения (1) называется такая упорядоченная пара (x_0, y_0), что $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$. Два уравнения называются равносильными (или эквивалентными), если множества всех их решений совпадают. Как и прежде переход к равносильному уравнению (системе уравнений или совокупности уравнений) обозначается с помощью двойной стрелки: $\Leftrightarrow$.

Множество $\{(x,y)\in xOy : f(x,y) = g(x,y)\}$, состоящее из всех решений уравнения (1), будем называть *графиком* этого уравнения. Такое название выбрано не случайно. **Важным частным случаем** уравнений с двумя переменными являются уравнения вида $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция уже одной переменной. Множеством всех решений последнего уравнения является график функции $f(x)$. В общем случае график уравнения (1) является объединением нескольких линий на координатной плоскости, и обычно *для решения уравнений двух переменных достаточно из уравнения (1) найти зависимость (или несколько зависимостей) переменной y от x и на координатной плоскости изобразить график (соответственно, несколько графиков) полученной зависимости.* Кстати, не всегда удобно выражать y через x. Так, в следующем примере легко находятся зависимости x от y и строятся графики двух функций: $x = f_1(y)$ и $x = f_2(y)$.

Пример 2. На координатной плоскости изобразить множество всех решений уравнения $x^2 = y^4$.

Решение. Очевидно, что $x^2 = y^4 \Leftrightarrow (x-y^2)(x+y^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y^2, \\ x = -y^2. \end{array}\right.$ Множество решений последней совокупности — это объединение пары парабол, общей осью симметрии которых является ось Ox (рис. 26).

Пример 3. На координатной плоскости изобразить множество всех решений уравнения $|x| + |y| = 1$.

Решение. Рассмотрим два случая раскрытия $|y|$. Первый случай: $y \geqslant 0$. Получаем $y = -|x| + 1$. Изображаем участок графика этой функции, лежащий не ниже оси Ox (т.е. получаем ломаную ABC на рис. 27а). Второй случай: $y < 0$. Получаем $y = |x| - 1$. Изображаем участок графика этой функции, лежащий ниже оси Ox (ломаная ADC на рис. 27б). Объединяя решения обоих случаев, получаем замкнутую ломаную $ABCDA$ (т.е. границу квадрата $ABCD$) на рис. 27в, которая и является искомой.

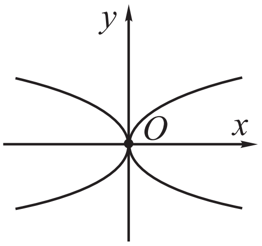


Рис. 26

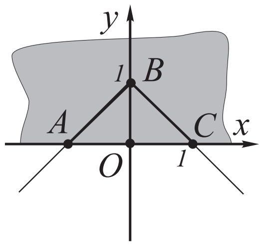


Рис. 27а

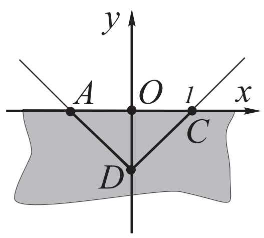


Рис. 27б

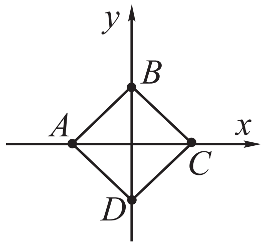


Рис. 27в

Завершим этот пункт следующими двумя замечаниями.

- Множеством всех решений неравенства с двумя переменными $y > f(x)$ ($y < f(x)$) является область координатной плоскости, лежащая выше (соответственно ниже) графика функции $f(x)$. В случае неравенства с нестрогим знаком к области добавляется график функции $f(x)$. Так, например, неравенству $y \geqslant x^2$ удовлетворяют все точки координатной плоскости выше параболы $y = x^2$, а также точки самой параболы. В примере 3 это замечание использовано при решении двух тривиальных неравенств: $y \geqslant 0$ и $y < 0$.

- При решении уравнений с двумя переменными будем считать зависимости y от x более предпочтительными (график $y = f(x)$ изображать обычно проще и его построение не требует дополнительных поворотов). Поэтому в примере 3 мы выражали y через x, а не наоборот.

Эквивалентные системы. Следствия. В этом пункте обсудим основные понятия, связанные с системами уравнений двух переменных. Внимательный читатель без труда сможет перенести эти понятия и утверждения на системы с бо́льшим числом неизвестных. В общем виде система двух уравнений с двумя неизвестными x и y выглядит следующим образом

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y), \\ f_2(x,y) = g_2(x,y). \end{cases} \tag{2}$$

ОДЗ системы (2) является пересечением областей допустимых значений каждого из уравнений системы. Решением системы (2) называется упорядоченная пара (x_0, y_0), которая одновременно удовлетворяет обоим уравнением системы. Множество всех решений системы (2) — это пересечение графиков первого и второго уравнений системы.

Если множества всех решений одной системы совпадает с множеством всех решений другой системы, то эти системы называются эквивалентными (или равносильными). Переход к эквивалентной системе обозначают символом $\Leftrightarrow$. Сразу из определений получаем следующее простое утверждение (A).

A. *При замене уравнений системы на эквивалентные им уравнения, получается эквивалентная система.*

Так, например, система (2) равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0, \end{array}\right. \tag{3}$$

где $F(x,y) = f_1(x,y) - g_1(x,y)$ и $G(x,y) = f_2(x,y) - g_2(x,y)$. Именно систему (3) из-за меньшего количества символов мы будем предпочитать в дальнейшем.

Уравнение $H(x,y) = 0$ называется *следствием* системы (3), если *каждое* решение системы является также решением уравнения $H(x,y) = 0$. В частности, если сложить уравнения системы, то получится ее следствие. Переход от системы (3) к следствию $H(x,y) = 0$ обозначают так: (3) $\Rightarrow H(x,y) = 0$. Оказывается, что при добавлении к системе ее следствия всегда получается эквивалентная система.

B. *Пусть уравнение $H(x,y) = 0$ является следствием системы (3). Тогда*

$$\left\{\begin{array}{l} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0, \\ H(x,y)=0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Если пара (x_0, y_0) является решением системы (3), то $H(x_0, y_0) = 0$, поскольку $H(x,y) = 0$ является следствием системы (3). Отсюда (x_0, y_0) является решением системы (4). То, что каждое решение системы (4) является решением системы (3), очевидно. Таким образом, системы (3) и (4) эквивалентны.

Воспользуемся утверждением **B** в следующем примере.

Пример 4. Решить систему $\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x}. \end{cases}$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим ее следствие $(xy+24)(xy-6) = x^2y^2$, которое равносильно $xy = 8$. Таким образом,

$$\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y}, \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x}, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3}{y} = 32, \\ \frac{y^3}{x} = 2, \\ xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 2^8, \\ y^4 = 2^4, \\ xy = 8. \end{cases}$$

Для последнего перехода первое и второе уравнения предпоследней системы домножили на ее последнее уравнение. Нетрудно убедиться, что эти преобразования приводят к равносильной системе. Из первого и второго уравнений последней системы имеем $x = \pm 4$ и $y = \pm 2$. Учитывая, что $xy = 8$, получаем, что решениями исходной системы являются две пары: $(4,2)$ и $(-4,-2)$. Ответ: $(4,2)$, $(-4,-2)$.

Основные способы преобразования систем. Симметрические и однородные системы. Обычно поиск решений системы состоит в построении цепочки равносильных систем, в начале которой — исходная система, в конце — простейшая система вида $\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 \end{cases}$ (или совокупность систем такого вида). В этом разделе мы разберем основные способы получения равносильных систем. Начнем с самого известного.

I. *Метод подстановки.* Используя одно из уравнений системы, необходимо выразить одну переменную через другую и подставить полученное выражение в оставшееся уравнение системы. Таким образом, задача сводится к решению уравнения с одной переменной. В следующей формальной записи этого метода из первого уравнения системы мы выразим y через x (если проще найти зависимость переменной x через y, находите выражение x через y) и подставим это выражение во второе уравнение системы.

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x), \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x), \\ G(x, f(x)) = 0. \end{cases}$$

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} x+4=y^3, \\ x^2-y^6=8. \end{cases}$

Решение. Выразив x через y из первого уравнения и подставив выражение $x=y^3-4$ во второе уравнение, имеем $(y^3-4)^2-y^6=8$ или $-8y^3=-8$. Отсюда $y=1$ и $x=-3$. Ответ: $(-3,1)$.

Пример 6. Решить систему $\begin{cases} ax+y=2, \\ x+ay=2a. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения $y=2-ax$. После подстановки во второе уравнение и приведения подобных, получаем $(1-a^2)x=0$. Рассмотрим три случая. Если $a\neq\pm1$, то $x=0$, $y=2$ — единственное решение системы. Если $a=1$, то x — любое число, а $y=2-x$. И, наконец, при $a=-1$, x — любое, а $y=2+x$. Ответ: при $a=1$ получается бесконечно много решений вида $(x,2-x)$, где $x\in R$; при $a=-1$ решения имеют вид $(x,2+x)$, где $x\in R$; при всех остальных a система имеет единственное решение $(0,2)$.

II. *Метод линейного преобразования.* Частным случаем этого метода является замена одного из уравнений системы суммой (или разностью) уравнений этой системы. В общем случае, справедливо следующее утверждение.

C. *Если числа $a_1,a_2,b_1,b_2\in R$ таковы, что $a_1b_2-a_2b_1\neq0$, то*

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\cdot F(x,y)+a_2\cdot G(x,y)=0, \\ b_1\cdot F(x,y)+b_2\cdot G(x,y)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим через $\Delta=a_1b_2-a_2b_1$ и докажем, что системы (3) и (5) при $\Delta\neq0$ эквивалентны. Пусть (x_0,y_0) — решение системы (3) и, для краткости, $u_0=F(x_0,y_0)$ и $v_0=G(x_0,y_0)$. Тогда $u_0=0$ и $v_0=0$ и оба уравнения системы (5) верны. Предположим теперь, что выполняется система (5), т.е. одновременно выполнены два уравнения: $a_1u_0+a_2v_0=0$ и $b_1u_0+b_2v_0=0$. Из условия $\Delta\neq0$ имеем $a_1\neq0$ или $a_2\neq0$. Для определенности считая, что $a_1\neq0$, преобразуем первое уравнение к виду $u_0=-a_2v_0/a_1$. Подставив это выражение во второе уравнение и приводя подобные, имеем $\dfrac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1}v_0=0$. Поскольку $a_1\neq0$ и $\Delta\neq0$, получаем $v_0=0$ и $u_0=0$. Следовательно, пара (x_0,y_0) является также решением и системы (3). Таким образом, эквивалентность систем (3) и (5) доказана.

Следствие. *Если* $b \neq 0$, *то*

$$\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ G(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x,y) = 0, \\ a \cdot F(x,y) + b \cdot G(x,y) = 0. \end{cases}$$

Здесь $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = a$, $b_2 = b$, поэтому $\Delta = b \neq 0$. Значит, системы эквивалентны. Рассмотрим пример использования метода линейного преобразования.

Пример 7. Решить систему $\begin{cases} x^2 - x + y = 2, \\ 2x^2 - 2x - y = -2. \end{cases}$

Решение. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, тогда $\Delta = -3 \neq 0$ и данная система равносильна

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x = 0, \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,\ x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0, 2)$, $(1, 2)$.

III. *Метод замены переменной.* Суть этого метода в следующем: в каждом уравнении системы (3) выделяем два выражения от x и y (например, $u(x,y)$ и $v(x,y)$) так, что исходные переменные x и y входят только в эти выражения. Затем находим все решения системы

$$\begin{cases} F_1(u,v) = 0, \\ G_1(u,v) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

полученной из системы (3) заменой выражений $u(x,y)$ и $v(x,y)$ на u и v соответственно. Пусть $\{(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)\}$ — все решения системы (6). Сделав обратную замену, получаем, что исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} u(x,y) = u_1, \\ v(x,y) = v_1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u(x,y) = u_2, \\ v(x,y) = v_2, \end{cases} \quad \ldots, \quad \text{или} \quad \begin{cases} u(x,y) = u_n, \\ v(x,y) = v_n. \end{cases}$$

Рассмотрим пример.

Пример 8. Решить систему $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y} + \dfrac{1}{2y-x} = 1, \\ \dfrac{1}{(2x-y)^2} - \dfrac{1}{(2y-x)^2} = 2. \end{cases}$

Решение. Сделав замену $u = \dfrac{1}{2x-y}$ и $v = \dfrac{1}{2y-x}$, получаем

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^2-v^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1, \\ 1\cdot(u-v)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3/2, \\ v=-1/2. \end{cases}$$

После обратной замены

$$\begin{cases} 2x-y=2/3, \\ 2y-x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-2/3, \\ 3y=-10/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2/9, \\ y=-10/9. \end{cases}$$

Ответ: $(-2/9, -10/9)$.

IV. *Разложение на множители.* Этот метод нужно применять, если левую часть хотя бы одного из уравнений системы (3) удается разложить на множители, а правая часть этого уравнения равна нулю. Тогда исходная система сводится к совокупности более простых систем. В следующей записи мы считаем, что левая часть первого уравнения раскладывается на множители, а символ $\overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow}$ означает, что равносильный переход осуществляется на ОДЗ исходной системы.

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)\cdot g(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{cases} \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y)=0, \\ G(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x,y)=0, \\ G(x,y)=0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 9. Решить систему $\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение преобразуется к виду $y^2-(2x+1)^2=0$ или $(y-2x-1)(y+2x+1)=0$. Отсюда исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} y=2x+1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=-2x-1, \\ 4x^2+y^2-3xy=1. \end{cases}$$

Каждая из этих систем легко решается методом подстановки. Ответ: $(0,1)$, $(-1/2,0)$, $(0,-1)$.

V. *Симметрические системы.* Функция $F(x,y)$ называется симметрической относительно x и y, если для любых x и y выполняется равенство $F(x,y)=F(y,x)$. Это равенство означает, что при одновременной замене x на y и y на x, получится равное исходному выражение при всех допустимых значениях переменных x и y. Примерами симметрических функций являются: x^2+y^2, $x^3+2xy+y^3$ и т.д. В то же время функции x^2-y^2, x^3+y^2 симметрическими относительно x и y не являются. Система (3) называется симметрической системой, если левые части обоих уравнений системы являются симметрическими функциями. При решении симметрических систем часто используют следующую замену переменных: $u = x+y$, $v = xy$. Так, приведенные выше симметрические функции несложно представляются в виде выражений от переменных $u=x+y$ и $v=xy$:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v,$$

$$x^3+y^3+2xy=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy=u(u^2-3v)+2v=u^3-3uv+2v.$$

Вспомним также, что решение простейшей симметрической системы

$$\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q \end{cases}$$

сводится к нахождению корней квадратного уравнения $t^2-pt+q=0$. Из теоремы Виета мы сразу получаем справедливость следующего утверждения.

D. *Пусть* $p^2-4q\geqslant 0$ *и* t_1 *и* t_2 *— корни уравнения* $t^2-pt+q=0$. *Тогда решениями системы*

$$\begin{cases} x+y=p, \\ xy=q \end{cases}$$

являются пары (t_1,t_2) *и* (t_2,t_1).

Обратите внимание, что при $t_1\neq t_2$, эта система имеет **два** различных решения.

Пример 10. Решить систему $\begin{cases} x^2y+xy^2=2, \\ xy+x+y=3. \end{cases}$

Решение. Сделав замену $u=x+y$, $v=xy$, приходим к

$$\begin{cases} uv=2, \\ v+u=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2, \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1, \\ v=2. \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2, \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=1, \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in\varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $(1,1)$.

VI. *Однородные системы.* Однородным уравнением второй степени относительно переменных x и y называется уравнение вида $ax^2+bxy+cy^2=0$, где $a,b,c\in R$. Все слагаемые левой части этого уравнения имеют вторую степень (напомним, что степенью выражения x^ny^m называется число $n+m$), в правой части стоит ноль. Покажем, как с помощью однородного уравнения можно выразить одну переменную через другую.

E. *Пусть* $a\neq 0$ *и* $b^2-4ac\geqslant 0$, *тогда уравнение* $ax^2+bxy+cy^2=0$ *равносильно совокупности* $x=t_1\cdot y$ *или* $x=t_2\cdot y$, *где* t_1,t_2 *— корни квадратного уравнения* $at^2+bt+c=0$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим два случая. Первый случай: $y=0$. Тогда из уравнения $ax^2+bxy+cy^2=0$ сразу получаем, что $x=0$ (напомним, что $a\neq 0$). Значит, пара $(0,0)$ — одно из решений однородного уравнения. Второй случай: $y\neq 0$. Разделив обе части уравнения на y^2 и сделав замену $t=x/y$, приходим к уравнению $at^2+bt+c=0$. Если t_1,t_2 — корни этого уравнения, получаем, что однородное уравнение свелось к совокупности двух линейных уравнений: $x=t_1\cdot y$ или $x=t_2\cdot y$. Кстати, пара $(0,0)$ из первого случая также находится среди решений этой совокупности. Утверждение **E** доказано.

Система уравнений называется *однородной*, если она содержит хотя бы одно однородное уравнение. Решать такие системы несложно. Достаточно из однородного уравнения этой системы линейно выразить одну переменную через другую и воспользоваться затем методом подстановки. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 11. Решить систему $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0,\\ \sqrt{x+y+2}+x+y=4.\end{cases}$

Решение. Корнями квадратного уравнения $t^2-5t+6=0$ являются числа $t_1=2$ и $t_2=3$. Из утверждения **E** следует, что первое уравнение системы равносильно совокупности: $x=2y$ или $x=3y$. Поэтому исходная система эквивалентна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x=2y,\\ \sqrt{x+y+2}+x+y=4\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x=3y,\\ \sqrt{x+y+2}+x+y=4.\end{cases}$$

Решаем первую систему. Подставляя $x=2y$ во второе уравнение, имеем $\sqrt{3y+2}=4-3y$. Возводим в квадрат обе части этого уравнения при условии, что $4-3y \geqslant 0$. Получаем уравнение $9y^2-27y+14=0$ с корнями $y_1 = 2/3$ и $y_2 = 7/3$. Условию $4-3y \geqslant 0$ удовлетворяет только y_1. Итак, $(4/3, 2/3)$ — единственное решение первой системы. Аналогично находим, что $(3/2, 1/2)$ — единственное решение второй системы. Ответ: $(4/3, 2/3)$, $(3/2, 1/2)$.

Пример 12. Решить систему $\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ 3x^2+2xy-2y^2=3. \end{cases}$

Решение. Эта система однородной не является. Применим сначала метод линейного преобразования, домножив первое уравнение на 3, а второе — на -4. По следствию из утверждения **C** получаем, что исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ -6x^2+xy+5y^2=0. \end{cases} \overset{\mathbf{E}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ x=y \end{cases} \\ \begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ x=-5y/6. \end{cases} \end{array} \right.$$

Решениями первой системы совокупности являются $(1,1)$ и $(-1,-1)$, а решение второй системы — $\varnothing$ (убедитесь в этом сами). Ответ: $(1,1)$, $(-1,-1)$.

VII. *Сложение или произведение всех уравнений системы.* Решение некоторых систем сильно упрощает добавление к системе следствия, являющегося суммой или произведением всех уравнений системы. Рассмотрим два примера.

Пример 13. Решить систему $\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9. \end{cases}$

Решение. Суммой всех уравнений системы является $4(x+y+z)=24$, откуда $x+y+z=6$. Утверждение **B** очевидно справедливо для уравнений с бо́льшим количеством неизвестных, поэтому

$$\begin{cases} 2x+y+z=7, \\ x+2y+z=8, \\ x+y+2z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x+y+z=7, \\ y+x+y+z=8, \\ z+x+y+z=9, \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ x+y+z=6. \end{cases}$$

Ответ: $(1,2,3)$.

Пример 14. Решить систему $\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$

Решение. Произведением уравнений системы является $(xy)^5 = 32$, откуда $xy = 2$. Используя утверждение **B**, получаем

$$\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^2 \cdot y = 16, \\ (xy)^2 \cdot x = 2, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 1/2, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(1/2, 4)$.

VIII. *Геометрическая интерпретация.* Этот способ применяется для нахождения числа решений системы. Для этого на плоскости строят графики каждого из уравнений системы (определение графика уравнения дано на стр. 54) и определяют количество точек пересечения построенных линий. В системах, которые мы будем здесь рассматривать, одно из уравнений всегда будет содержать параметр. Это уравнение задает на плоскости целое семейство линий (например, семейство параллельных прямых). Среди этого семейства необходимо выбрать те линии, которые пересекают график другого уравнения системы в требуемом количестве точек.

Пример 15. Найти все значения a, при которых единственное решение имеет система $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Решение. Второе уравнение системы задает на координатной плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом 2. Первое уравнение равносильно $y = x + a$ и является уравнением прямой, полученной из $y = x$ сдвигом на вектор $\overrightarrow{v} = (0, a)$. Система имеет единственное решение только в том случае, если прямая $y = x + a$ касается окружности. Одна из двух искомых прямых изображена на рис. 28. Учитывая, что треугольник OAB равнобедренный и прямоугольный (поскольку прямая AB параллельна биссектрисе первого координатного угла), получаем $a^2 = 2^2 + 2^2$ или $a = 2\sqrt{2}$ (для прямой на рисунке $a \geqslant 0$). Для второй прямой аналогично находим $a = -2\sqrt{2}$. Ответ: $a = \pm 2\sqrt{2}$.

Пример 16. При каких a имеет три решения система

$$\begin{cases} y + x^2 = 1, \\ y + |x| = a? \end{cases}$$

Решение. Графиком первого уравнения системы является парабола $y = -x^2 + 1$, а второго — график функции $y = -|x|$, который сдвинут на вектор $\overrightarrow{v} = (0, a)$. На рис. 29 изображен единственный случай, когда эти линии пересекаются в трех точках. Этот случай соответствует значению $a = 1$. Ответ: $a = 1$.

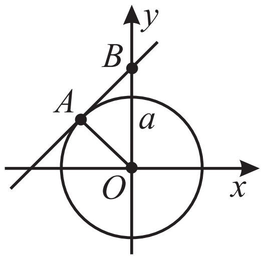


Рис. 28

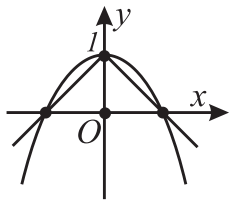


Рис. 29

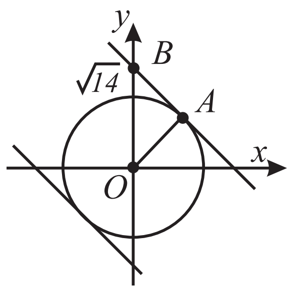


Рис. 30

Пример 17. В зависимости от a определить число решений системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения системы получаем, что $x + y = \sqrt{14}$ или $x+y = -\sqrt{14}$. Таким образом, второе уравнение на плоскости задает пару параллельных прямых, полученных из прямой $y = -x$ сдвигом на векторы $\overrightarrow{v_1} = (0, \sqrt{14})$ и $\overrightarrow{v_2} = (0, -\sqrt{14})$. Первое уравнение системы при $a < -1$ не имеет решений, а при $a > -1$ задает окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2(1 + a)}$, и, наконец, при $a = -1$ график первого уравнения состоит из одной точки — начала координат.. Рассмотрим случай, когда окружность касается этой пары прямых (рис. 30). Тогда $\sqrt{2(1 + a)} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$ или $a = 5/2$. Ответ: при $a < 5/2$ система не имеет решений; при $a = 5/2$ система имеет два решения; при остальных a система имеет четыре решения.

Следующая теорема оказывается полезной в определении числа решений системы линейных уравнений с параметрами.

F. *Пусть дана система линейных уравнений*

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ y = k_1 x + b_1. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда

1. *система (7) не имеет решений только в случае, когда одновременно выполняются равенства* $k = k_1$, $b \neq b_1$ *;*
2. *система (7) имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда* $k = k_1$, $b = b_1$ *;*
3. *во всех остальных случаях система (7) имеет единственное решение.*

Ясно, что условие 1 теоремы **F** описывает случай параллельных прямых на плоскости; условие 2 — случай совпадения двух прямых; последнее условие определяет пару непараллельных прямых на плоскости с единственной точкой пересечения.

Пример 18. При каких значениях a не имеет решений система

$$\begin{cases} a^2x + (2-a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a-1)y = a^5 - 2? \end{cases}$$

Решение. В случае, если $a = 2$ или $a = 1/2$, непосредственной подстановкой можно убедиться, что данная система будет иметь одно решение. Значит, эти два значения параметра не удовлетворяют условию задачи. Пусть теперь $a \neq 2$ и $a \neq 1/2$, тогда исходная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} y = -\frac{a^2}{2-a} \cdot x + \frac{4+a^3}{2-a}, \\ y = -\frac{a}{2a-1} \cdot x + \frac{a^5-2}{2a-1}. \end{cases}$$

Для того, чтобы эта система не имела решений необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия: $\dfrac{a^2}{2-a} = \dfrac{a}{2a-1}$ и $\dfrac{4+a^3}{2-a} \neq \dfrac{a^5-2}{2a-1}$. Корнями уравнения $\dfrac{a^2}{2-a} = \dfrac{a}{2a-1}$ являются числа $a = 0$, $a = \pm 1$. Неравенству $\dfrac{4+a^3}{2-a} \neq \dfrac{a^5-2}{2a-1}$ удовлетворяет только $a = 1$. Ответ: $a = 1$.

В заключение этого параграфа рассмотрим две алгебраических задачи, в решении которых помогают системы уравнений.

Пример 19. Найти прямую $y = kx + b$, проходящую через точку $(1, -1)$ и касающуюся графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ (при этом касательной к параболе будем называть прямую, не параллельную оси Oy, и имеющую с параболой только одну общую точку).

Решение. Подставляя координаты точки $(1,-1)$ в уравнение прямой $y = kx + b$, получим $-1 = k + b$ — первое уравнение будущей системы. Второе уравнение получается из условия единственности общей точки прямой и параболы, что равносильно единственности корня уравнения $kx+b = x^2 - 4x + 3$. Последнее означает, что дискриминант квадратного уравнения $x^2 - (k+4)x + 3 - b = 0$ должен быть равен нулю, т.е. $(k+4)^2 + 4b - 12 = 0$. Решая теперь методом подстановки систему

$$\begin{cases} b = -k - 1, \\ (k+4)^2 + 4b - 12 = 0, \end{cases}$$

находим, что $k_1 = 0$, $k_2 = -4$ и $b_1 = -1$, $b_2 = 3$. В результате получились две касательные, удовлетворяющие условию задачи. Ответ: $y = -1$, $y = -4x + 3$.

Пример 20. При каком значении параметра a два уравнения $x^2 - (a-2)x - 3 = 0$ и $x^2 + (3a-4)x + 3 = 0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Решение. Из условия задачи сразу получаем, что система

$$\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 3 = 0, \\ x^2 + (3a-4)x + 3 = 0 \end{cases}$$

должна иметь хотя бы одно решение. Заменив второе уравнение разностью уравнений системы, приходим к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x^2 - (a-2)x - 3 = 0, \\ (4a-6)x = -6. \end{cases}$$

Ясно, что при $a = 3/2$ второе уравнение не имеет решений, а а при всех других значениях параметра $x = -3/(2a-3)$. Подставим это значение в первое уравнение системы, получим уравнение относительно a и найдем его решения. Имеем

$$\frac{9}{(2a-3)^2} + \frac{3(a-2)}{2a-3} - 3 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)^2 - (a-2)(2a-3) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 5a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ или $a = 5/2$. Ответ: при $a = 0$ общим корнем будет $x = 1$, а при $a = 5/2$ общим корнем будет $x = -3/2$.

4.2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Числовые последовательности. Числовой последовательностью называется некоторое правило f, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное число $f(n)$. Другими словами, числовая последовательность — это функция, областью определения которой является множество всех натуральных чисел. Далее числовые последовательности будем просто называть последовательностями, а число $x_n = f(n)$ — n-ым членом последовательности. Всю последовательность обозначают через $\{x_n\}$. Для любой последовательности $\{x_n\}$ определяется последовательность $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$ — сумма первых n членов последовательности $\{x_n\}$. Существуют два основных способа задания последовательности.

Задание последовательности явно. Если правило $f(n)$ является алгебраическим выражением от натурального числа n, то говорят, что последовательность задается явно с помощью формулы $f(n)$. Например, последовательности $x_n = n^2$, $x_n = \frac{n}{n^3+1}$, где $n \in N$, заданы явно. Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть $x_1 = \frac{1}{1\cdot 2}$, $x_2 = \frac{1}{2\cdot 3} \ldots$, $x_n = \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$, где $n \in N$. Найти явную формулу для S_n.

Решение. Заметим, что $x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Отсюда

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Ответ: $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Рекуррентное задание последовательности. При этом способе x_n определяется через предыдущий член последовательности (или несколько предыдущих членов) и задано необходимое количество первых членов последовательности. Например, $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} \cdot n$ при $n \geqslant 2$ (принятое обозначение: $x_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$ — читается “эн факториал”). Для этой последовательности $x_2 = 2! = 2$, $x_3 = 3! = 6$, $x_4 = 4! = 24$ и т.д. Примером последовательности, в которой x_n выражается через два предыдущих члена, является *последовательность Фибоначчи.* Определяется она так: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$ при $n \geqslant 3$. Для этой последовательности $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 5$, $x_6 = 8$, и т.д.

Недостатком рекуррентно заданных последовательностей является необходимость для определения x_n вычислять все предыдущие члены последовательности. Поиск явной формулы для рекуррентно заданной последовательности является, за исключением простых случаев, серьезной проблемой. Например, для последовательности Фибоначчи явная формула, выражающая x_n в качестве элементарной функции от n существует, а для последовательности факториалов — нет. В дальнейшем мы буде предпочитать явный способ задания последовательности.

Арифметическая прогрессия. Арифметической прогрессией с первым членом a_1 и разностью d называется последовательность $\{a_n\}$, определенная условием $a_n = a_{n-1} + d$ при $n \geqslant 2$. Например, при $a_1 = 2$ и $d = -3$ получается последовательность: 2, -1, -4, $-7, \ldots$ Как видно из определения, арифметическая прогрессия задается рекуррентно. Явная формула (или *формула n-го члена*) приводится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия с первым членом a_1 и разностью d. Тогда:*
1) $a_n = a_1 + (n-1)d$, при $n \in N$;
2) если натуральные n, m, k, l таковы, что $n + m = k + l$, то
$a_n + a_m = a_k + a_l$;
3) $\dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = a_n$ при $n, k \in N$ и $k < n$;
4) $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$ при $n \in N$ и $n > 1$;
5) $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2} = \dfrac{\Big(2a_1 + (n-1)d\Big)n}{2}$.

Доказательство. 1) Из определения арифметической прогрессии сразу следует, что $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $\ldots$, $a_n = a_1 + (n-1)d$.

2) Используя (1) и равенство $n + m = k + l$, получаем

$$a_n + a_m = 2a_1 + (n + m - 2)d = 2a_1 + (k + l - 2)d = a_k + a_l.$$

3) Следует из (2), поскольку $a_{n-k} + a_{n+k} = a_n + a_n = 2a_n$.

4) Сразу следует из (3).

5) Из (2) получаем, что $a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \ldots = a_n+a_1$. Поэтому

$$2S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1) =$$

$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

откуда и следует требуемая формула. Вторая формула для вычисления S_n получается подстановкой в предыдущую формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна $5/3$, а произведение третьего и четвертого ее членов равно $65/72$. Найти сумму семнадцати первых членов прогрессии.

Решение. Запишем условие задачи в виде системы и воспользуемся свойством (3) из предыдущей теоремы.

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_5 = 5/3, \\ a_3a_4 = 65/72 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a_3 = 5/3, \\ a_3a_4 = 65/72 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_3 = 5/6, \\ a_4 = 13/12. \end{array}\right.$$

Отсюда $d = a_4 - a_3 = 1/4$ и $a_1 = a_3 - 2d = 1/3$. Подставляя эти значения в формулу для вычисления суммы первых членов прогрессии, имеем

$$S_{17} = \frac{\frac{2}{3} + 16 \cdot \frac{1}{4}}{2} \cdot 17 = \frac{14}{6} \cdot 17 = \frac{119}{3}. \quad \text{Ответ: } S_{17} = 119/3.$$

Пример 3. В арифметической прогрессии $a_p = q$, $a_q = p$ $(p \neq q)$. Найти формулу общего члена прогрессии.

Решение. Из формулы общего члена арифметической прогрессии получаем

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + (p-1)d = q, \\ a_1 + (q-1)d = p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + (p-1)d = q, \\ (p-q)d = q - p \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + (p-1)d = q, \\ d = -1. \end{array}\right.$$

При переходе к последней системе мы использовали условие $p - q \neq 0$. Подставляя $d = -1$ в первое равенство, находим $a_1 = p + q - 1$. Ответ: $a_n = p + q - n$.

Пример 4. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

Решение. Первое четное трехзначное число, делящееся на 3, равно 102, следующее — 108, последнее — 996. Очевидно, что эти числа образуют начальный отрезок арифметической прогрессии с $a_1 = 102$ и $d = 6$. Определим номер в этой прогрессии у числа 996. Из формулы общего члена $996 = 102 + 6(n-1)$, откуда $n = 150$. Подставляя эти значения в формулу для вычисления суммы первых членов прогрессии, имеем

$$S_{150} = \frac{102 + 996}{2} \cdot 150 = 82350. \quad \text{Ответ: } S_{150} = 82350.$$

Пример 5. Найти сумму $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1$.

Решение. Применяя достаточное число раз формулу разности квадратов, получаем

$$50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1 = 1 \cdot (50 + 49) + 1 \cdot (48 + 47) + \ldots 1 \cdot (2 + 1) =$$
$$= 99 + 95 + \ldots + 3.$$

Числа 99, $95, \ldots, 3$ образуют начальный отрезок арифметической прогрессии с $a_1 = 99$ и $d = -4$. Из равенства $3 = 99 - 4(n-1)$ находим, что $n = 25$. Поэтому искомая сумма равна $S_{25} = 25(99 + 3)/2 = 1275$. Ответ: 1275.

Пример 6. Найти сумму девятнадцати первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

Решение. Из свойств (2) и (3) предыдущей теоремы имеем $a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12} = 2a_{10}$. Поэтому $4a_{10} = 224$ или $a_{10} = 56$. Тогда

$$S_{19} = (a_1 + a_{19}) + (a_2 + a_{18}) + \ldots + (a_9 + a_{11}) + a_{10} = 19a_{10} = 1064.$$

Ответ: 1064.

Пример 7. Длины сторон четырехугольника являются последовательными положительными членами некоторой арифметической прогрессии с ненулевой разностью. Можно ли в него вписать окружность?

Решение. Нетрудно заметить, что если $d \neq 0$, то свойство (2) предыдущей теоремы можно усилить: $n + m = k + l \Leftrightarrow a_n + a_m = a_k + a_l$. Хорошо известно, что в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны между собой. Поскольку $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, то из сделанного выше замечания получаем, что в данный четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда члены прогрессии с наименьшим и наибольшим номером являются длинами его противоположных сторон.

Геометрическая прогрессия. Геометрической прогрессией с первым членом $b_1 \neq 0$ и знаменателем $q \neq 0$ называется последовательность $\{b_n\}$, определенная условием $b_n = b_{n-1} \cdot q$ при $n \geqslant 2$. Например, при $b_1 = 2$ и $q = 3$ получается последовательность: 2, 6, 18, $54, \ldots$ Как видно из определения, геометрическая прогрессия задается рекуррентно. Явная формула (или *формула n-го члена*) приводится в следующей теореме. Геометрическая прогрессия со знаменателем, удовлетворяющим условию $|q| < 1$, называются бесконечно убывающей. Например, при $b_1 = 3$ и $d = -1/2$ получается последовательность: 3, $-3/2$, $3/4$, $-3/8, \ldots$ В случае $|q| < 1$, сумма $S = b_1 + \ldots + b_n + \ldots$ называется суммой всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Теорема 2. *Пусть $\{b_n\}$ — геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q. Тогда:*
1) $b_n = b_1 q^{n-1}$, при $n \in N$;
2) если натуральные n, m, k, l таковы, что $n + m = k + l$, то
$b_n b_m = b_k b_l$;
3) $\sqrt{b_{n-k} b_{n+k}} = |b_n|$ при $n, k \in N$ и $k < n$;
4) $\sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} = |b_n|$ при $n \in N$ и $n > 1$;
5) $S_n = \dfrac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}$, при $q \neq 1$;
6) Если $|q| < 1$, то $S = b_1 + \ldots + b_n + \ldots = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Доказательство. 1) Из определения геометрической прогрессии сразу следует, что $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q = b_1 q^2$, $\ldots$, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

2) Используя (1) и равенство $n + m = k + l$, получаем

$$b_n b_m = (b_1)^2 q^{n+m-2} = (b_1)^2 q^{k+l-2} = b_k b_l.$$

3) Следует из (2), поскольку $b_{n-k} b_{n+k} = b_n b_n = b_n^2$.

4) Сразу следует из (3).

5) Из (1) получаем, что

$$S_n - qS_n = (b_1 + b_1q + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}) - (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n) =$$
$$= b_1 - b_1q^n = b_1(1 - q^n),$$

откуда и следует требуемое (можно разделить на $1 - q$, так как $q \neq 1$).

6) Поскольку $|q| < 1$, выражение q^n стремится к нулю при увеличении n. Отсюда числитель дроби в формуле для S_n стремится к b_1 при увеличении n. Таким образом, сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $b_1/(1 - q)$. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 8. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти эти числа.

Решение. Запишем условие задачи в виде системы и воспользуемся свойством (3) из предыдущей теоремы.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_1b_2b_3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 13, \\ b_2^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 3, \\ b_1 + b_3 = 10, \\ b_1b_3 = 9. \end{cases}$$

Отсюда условию задачи удовлетворяют две тройки: $(b_1, b_2, b_3) \in \{(1, 3, 9), (9, 3, 1)\}$ (заметьте, что вторая тройка является частью бесконечно убывающей прогрессии со знаменателем $1/3$). Ответ: 1, 3, 9.

Пример 9. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести ее первых членов рана 1820.

Решение. Из формулы

$$S_6 = \frac{b_1\left(1 - 3^6\right)}{1 - 3} = 1820$$

находим $b_1 = 5$. Отсюда $b_5 = 5 \cdot 81 = 405$. Ответ: $b_1 = 5$, $b_5 = 405$.

Пример 10. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов ее членов равна $153\frac{3}{5}$. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

Решение. Из равенства $b_n^2 = (b_1)^2\left(q^2\right)^{n-1}$ следует, что квадраты членов геометрической прогрессии также образуют геометрическую прогрессию, но уже с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. По условию $|q| < 1$, значит $\left|q^2\right| < 1$ и новая прогрессия также является бесконечно убывающей. Применяем формулу (6) из теоремы 2 к исходной прогрессии и к прогрессии из квадратов членов исходной прогрессии:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 16, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 768/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 16(1-q), \\ \frac{16^2(1-q)^2}{1-q^2} = 768/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 16(1-q), \\ 5(1-q) = 3(1+q). \end{cases}$$

Отсюда $q = 1/4$ и $b_1 = 12$. В результате $b_4 = 12/4^3 = 3/16$. Ответ: $b_4 = 3/16$ и $q = 1/4$.

Пример 11. Сторона первого квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился второй квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей всех этих квадратов.

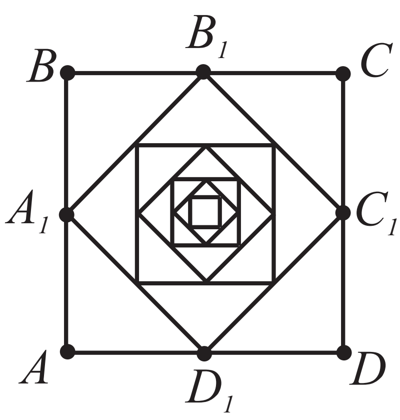


Рис. 31

Решение. Пусть $ABCD$ — первый квадрат и $A_1B_1C_1D_1$ — второй квадрат (рис. 31). Очевидно, что площадь $A_1B_1C_1D_1$ в два раза меньше площади $ABCD$. Всякий раз, соединяя середины сторон очередного квадрата, мы получаем квадрат половинной площади. Таким образом, площади квадратов образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом a^2 и знаменателем $1/2$. Осталось применить формулу (6) теоремы 2.
Ответ: $2a^2$.

4.3. Текстовые задачи

Обычно решение текстовой задачи состоит из трех этапов.

I. *Выбор неизвестных.* При выборе неизвестных следует придерживаться одинаковых единиц измерения. Например, в одной задаче у вас не должно быть одновременно двух скоростей v_1 и v_2, измеряющихся соответственно в км / час и м / сек. Кроме того, названия переменных должны нести информацию о том, что они обозначают. Так, $v_{\text{к}}$ — удачное обозначение для скорости катера (а не $\Xi_{\text{к}}$, например). Для обозначения расстояния часто используют переменные S или l, скорости чего-то — $v_{\text{чего-то}}$, времени — t, работы и объема — A и V соответственно и т.д.

II. *Составление системы уравнений или неравенств.* **Каждое** условие текстовой задачи, используя введенные переменные, надо записать в виде уравнения или неравенства. Кроме того, к системе необходимо добавить также ограничения на переменные, которые появляются или при записи уравнений или из-за смысла того, что эти переменные обозначают. Так, например, скорости и расстояния положительны, число деталей или рабочих обычно является натуральным числом и т.д.

III. *Решение системы.* При решении правильно составленной системы достаточно использовать методы, описанные в § 1. Всегда нужно помнить, значение какой переменной необходимо определить: в некоторых задачах число уравнений будет меньше количества переменных, но, тем не менее, требуемая величина определяется однозначно. Также важным моментом в решении системы является отбор корней в соответствии с ограничениями на переменные, о которых (об ограничениях, естественно) речь шла выше.

Задачи на движение и на работу. В решении этих задач используются простейшие физические и экономические формулы. Так, например, скорость — это отношение пройденного пути ко времени, за которое этот путь был пройден; производительность (экономический аналог скорости) — это отношение объема выпущенной продукции ко времени и т.д.

Пример 1. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B и повернул обратно. При этом первую четверть обратного пути автомобиль ехал с той же скоростью, что и вперед, а затем увеличил скорость на 30 км/ч, и поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч меньше. Найти первоначальную скорость автомобиля, если известно, что расстояние от пункта A до B равно 240 км.

Решение. Пусть C — та точка, которая соответствует четверти пути от B до A. Обозначим через v км/ч скорость автомобиля от A до B и от B до C. Тогда оставшуюся часть пути от C до A автомобиль двигался со скоростью $(v+30)$ км/ч. Заметим, что на путь от C до B и на обратный путь от B до C автомобиль затратил одинаковое время (его скорость на этих отрезках была равна v км/ч). Следовательно, на путь от C до A автомобиль затратил на один час меньше, чем от A до C. Так как длина пути от A до C равна 180 км, получаем уравнение

$$\frac{180}{v} = \frac{180}{v+30} + 1, \quad v > 0.$$

После несложных преобразований приходим к квадратному уравнению $v^2 + 30v - 5400 = 0$, с корнями $v_{1,2} = -15 \pm 75$. Выбирая положительное значение, окончательно получаем $v = 60$ км/ч. Ответ: 60 км/ч.

Пример 2. На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 минут меньше, чем второй. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за 7 часов, если первый за это время обрабатывает на 8 деталей больше второго?

Решение. Обозначим через t мин время, необходимое первому рабочему на изготовление одной детали, тогда $(t+6)$ мин необходимо второму рабочему на изготовление одной детали. Из условия задачи получаем уравнение

$$\frac{420}{t} - \frac{420}{t+6} = 8$$

с ограничением $t > 0$. Решая квадратное уравнение $315 = t(t+6)$ находим $t_1 = -21$ и $t_2 = 15$. Условию $t > 0$ удовлетворяет только $t_2 = 15$. Отсюда $\frac{420}{15} = 28$ деталей изготовил первый рабочий и $28 - 8 = 20$ деталей — второй. Ответ: 28 и 20 деталей.

Пример 3. Из двух пунктов A и B реки навстречу друг другу плывут две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Скорость течения реки равна 2 км/ч. До встречи лодка, идущая по течению, шла $0,9$ ч, а другая — 1 ч. Найти собственную скорость лодок, если лодка, идущая по течению, прошла на 2 км больше другой.

Решение. Пусть v км/ч — собственная скорость каждой моторной лодки. Тогда $(v+2)\cdot 0,9$ — расстояние, которая прошла лодка, движущаяся по течению, до встречи со второй лодкой. Аналогично $(v-2)\cdot 1$ — расстояние, пройденное второй лодкой. Отсюда $(v+2)\cdot 0,9 = (v-2)+2$, $v > 2$. Выражая из этого уравнения v, получаем, что $v = 18$ км/ч. Ответ: 18 км/ч.

Пример 4. Пустой бассейн через три трубы (каждая своей постоянной производительности) наполняется за 6 часов. Если одновременно открыть первую и вторую трубу, то бассейн будет заполнен за 7 часов. За сколько часов может наполнить бассейн одна третья труба?

Решение. Обозначим через v_1, v_2, v_3 м^3/час — производительность первой, второй и третьей трубы соответственно; а также через V — объем бассейна. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{V}{v_1+v_2+v_3} = 6, \\ \dfrac{V}{v_1+v_2} = 7, \\ V, v_1, v_2, v_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1+v_2+v_3 = V/6, \\ v_1+v_2 = V/7, \\ V, v_1, v_2, v_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \frac{V}{42}.$$

Ответ: 42 часа.

Пример 5. Катер проходит путь от A до B по течению реки за a часов, плот проплывает тот же путь за b часов. Сколько часов будет плыть катер от B до A? Предполагается, что собственная скорость катера постоянна в течение всего времени движения.

Решение. Введем некоторые обозначения. Пусть l — длина пути от A до B; v км/ч — скорость катера в неподвижной воде и v_0 км/ч — скорость течения реки. Тогда $a = l/(v+v_0)$ и $b = l/v_0$. Необходимо найти $x = l/(v-v_0)$. Проще определить значение $1/x$. Так,

$$\frac{1}{x} = \frac{v-v_0}{l} = \frac{v+v_0-2v_0}{l} = \frac{v+v_0}{l} - 2\cdot\frac{v_0}{l} = \frac{1}{a} - 2\cdot\frac{1}{b} = \frac{b-2a}{ab}.$$

Отсюда $x = \dfrac{ab}{b-2a}$.

Пример 6. Из A в B вышла машина с почтой. Через 20 мин по тому же маршруту выехала вторая машина, скорость которой 45 км / ч. Догнав первую машину, шофер передал пакет и немедленно поехал обратно с той же скоростью (время, затраченное на остановку и разворот, не учитывается). В тот момент, когда первая машина прибыла в пункт B, вторая достигла лишь середины пути от места встречи ее с первой машиной до пункта A. Найти скорость первой машины, если расстояние между A и B равно 40 км.

Решение. Пусть C — это точка встречи первой и второй машины, l — расстояние между A и C и, наконец v — скорость первой машины. Тогда

l/v и $l/45$ — промежутки времени, которые понадобились соответственно первой и второй машине чтобы достигнуть пункта C. Учитывая, что вторая машина вышла с запаздыванием на $1/3$ часа получаем первое уравнение системы. Второе уравнение системы составляется аналогично. Итак

$$\begin{cases} \frac{l}{v} = \frac{l}{45} + \frac{1}{3}, \\ \frac{40}{v} = \frac{3}{2} \cdot \frac{l}{45} + \frac{1}{3}, \\ 0 < l < 40,\ v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45l = lv + 15v, \\ 1200 = lv + 10v, \\ 0 < l < 40,\ v > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45l - 1200 = 5v, \\ 1200 = lv + 10v, \\ 0 < l < 40,\ v > 0 \end{cases}$$

Выразив $l = \dfrac{v}{9} + \dfrac{80}{3}$ и подставив это значение во второе уравнение системы, после несложных преобразований получим квадратное уравнение $v^2 + 330v - 10800 = 0$, из которого находим

$$(v)_{1,2} = -165 \pm \sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 + 5^2 \cdot 3^2 \cdot 48} = -165 \pm 15 \cdot 13 = -165 \pm 195.$$

Выбирая положительное значение, получим $v = 30$ км/час.
Ответ: 30 км/час.

Пример 7. Дорожка стадиона имеет форму окружности, ее длина 400 м. Вася пробегает ее за 4 мин, Коля — за 2 мин. Они стартуют в одном месте одновременно и бегут в одну сторону. Кто кого догонит в первый раз и через сколько минут это произойдет?

Решение. Покажем, что Коля догонит Васю через 4 минуты. В первые 2 минуты Вася пробежит ровно половину дистанции, в то время как Коля пробежит всю дистанцию целиком. В этот момент до финиша Васе останется еще 200 метров, которые он пробежит за 2 минуты. За эти 2 минуты Коля также придет к финишу, закончив свой второй круг. Итак, в первый раз Коля догонит Васю через 4 минуты. Ответ: в первый раз Коля догонит Васю через 4 минуты.

Пример 8. Два судна движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В любой момент времени рассматривается треугольник с вершинами, которыми являются порт и два судна. В начальный момент времени положение судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник стал прямоугольным. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени, если в момент прибытия первого судна в порт второму осталось пройти 120 км.

Решение. Введем некоторые обозначения. Пусть A, B — начальные расположения первого и второго судов и C — порт, $AB = x$; A_1, B_1 — расположение судов после того, как второе судно прошло 80 км; t_1, t_2 — время, за которое первое судно прошло из A до A_1 и из A до C соответственно. И, наконец, обозначим через v_1 и v_2 скорости первого и второго судов. Из условий задачи имеем $AB = AC = BC = x$ и $v_1 > v_2$. Поэтому $A_1C < B_1C$ и $A_1C = 2B_1C$ (здесь был использован тот факт, что $\widehat{ABC} = 60^0$, и то, что треугольник A_1CB_1 является прямоугольным). Получаем следующую систему

$$\begin{cases} v_2t_1 = 80, \\ 2(x - v_1t_1) = x - 80, \\ v_1t_2 = x, \\ v_2t_2 = x - 120. \end{cases}$$

Исключая t_1 из первых двух уравнений и t_2 из последних двух, получаем

$$\begin{cases} x - 160 \cdot \frac{v_1}{v_2} = -80, \\ x \cdot \frac{v_2}{v_1} = x - 120. \end{cases}$$

Подставляя $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{x}{x-120}$ в первое уравнение, получаем

$$x - 160 \cdot \frac{x}{x-120} = -80.$$

Единственным положительным корнем уравнения $x^2 - 200x - 80 \cdot 120 = 0$ является $x = 240$. Ответ: 240 км.

Задачи на проценты и на концентрацию. Нетривиальные задачи на проценты — это задачи с использованием "сложных" процентов. Типичное развитие событий в таких задачах: дано некоторое исходное количество x_1 какого-то вещества, затем несколько раз происходит изменение этого количества на одно и то же число процентов — $p\%$. Вопрос: по какому закону будет меняться количество вещества. Будем считать для определенности, что происходит рост количества вещества, тогда

$$x_2 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot x_1 = \frac{100+p}{100} \cdot x_1, \quad x_3 = \frac{100+p}{100} \cdot x_2 = \left(\frac{100+p}{100}\right)^2 \cdot x_1, \ \ldots$$

$$x_n = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} \cdot x_1.$$

Последняя формула и называется *формулой сложных процентов*. Внимательный читатель легко заметит, что $\{x_n\}$ является геометрической прогрессией с первым членом x_1 и знаменателем $q = \frac{100+p}{100}$. Таким образом, ничего сложного в задачах на "сложные" проценты нет.

Теперь о концентрации. Пусть некоторое вещество B массы m_B содержит вещество A массы m_A, тогда *концентрацией* вещества A в B называется $p_A = \frac{m_A}{m_B} \cdot 100\%$. Ясно, что концентрация указывает на то, какую часть от B составляет вещество A. Так, например, в $1,5$ литрах 60%-го апельсинового напитка настоящего сока содержится только $0,9$ литра. Естественно, концентрация p_A меняется, если добавляется (или уменьшается) *только* вещество A. Если же вещество A в B распределено равномерно, то уменьшение на m всего вещества B не влияет на концентрацию p_A. Действительно, m_A уменьшится на $m \cdot p_A$, тогда новая концентрация будет равна

$$\frac{m_A - m\cdot p_A}{m_B - m}\cdot 100\% = \frac{m_A - m\cdot \frac{m_A}{m_B}\cdot 100\%}{m_B - m}\cdot 100\% = \frac{m_A}{m_B}\cdot\frac{m_B-m}{m_B-m}\cdot 100\% = p_A.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. После двух последовательных повышений зарплата составила $\frac{36}{25}$ от первоначальной. Повышение производилось оба раза на одно и то же число процентов. Найти это число.

Решение. Пусть x — число процентов, на которые повышалась заработная плата. И пусть также A руб — первоначальная зарплата. Тогда $A + A\cdot x/100 = A(1+x/100)$ — величина заработной платы после первого повышения и $A(1+x/100)(1+x/100)$ — заработная плата после второго повышения. Получаем уравнение

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{36}{25}A.$$

Учитывая, что $1+\frac{x}{100} > 0$ м $A \neq 0$, преобразуем уравнение следующим образом:

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{36}{25}A \Leftrightarrow 1+\frac{x}{100} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 1/5.$$

Окончательно находим, что $x = 20\%$. Ответ: 20%.

Пример 10. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 15%. На сколько процентов в результате снизилась цена этого продукта?

Решение. Обозначим через a первоначальную цену продукта, a_1 и a_2 — цены после первого и второго понижения. Тогда $a_2 = \frac{85}{100} \cdot a_1 = \left(\frac{85}{100}\right)^2 \cdot a$. Искомая величина равна

$$\frac{a - \left(\frac{85}{100}\right)^2 \cdot a}{a} \cdot 100\% = \frac{100^2 - 85^2}{100}\% = 27,75\%. \quad \text{Ответ: } 27,75\%.$$

Пример 11. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла $1,5\,\%$?

Решение. В 30 кг морской воды содержится $\frac{5}{100} \cdot 30 = 1,5$ кг соли. Если $1,5$ кг соли составляют $1,5\,\%$, то общая масса раствора должна быть 100 кг. Поэтому к 30 кг морской воды нужно добавить 70 кг пресной. Ответ: 70 кг.

Пример 12. В результате плохо организованного хранения влажность некоторой массы ягод в начале хранения составляет 99%, а в конце — 98%. Как изменилась масса хранимого продукта, если в начале хранения ягоды имели массу m?

Решение. Обозначим через m_c массу сухих ягод, т.е. влажность которых составляет 0%. Тогда если m — масса ягод в начале хранения и m_1 — их масса в конце, то $m_c = m/100$ и $m_c = 2m_1/100$. Отсюда получаем, что $m/100 = 2m_1/100$ или $m = 2m_1$. Таким образом, масса ягод уменьшилась в два раза. Ответ: масса ягод уменьшилась в два раза.

Пример 13. В сосуде, объем которого равен 10 литрам, содержится 70%-й раствор соли. С ним последовательно производят следующую процедуру, которая называется переливанием: из сосуда выливается 2 литра смеси и добавляется 2 литра воды, после чего раствор перемешивается. Какова будет концентрация соли после первого переливания? После второго переливания?

Решение. В 8 л 70%-го раствора соли (именно столько оказалось после выливания 2 л смеси) содержится $8 \cdot \frac{70}{100} = \frac{28}{5}$ л соли и $8 \cdot \frac{30}{100} = \frac{12}{5}$ л воды. Добавив 2 л воды, получим раствор, состоящий из $\frac{22}{5}$ л воды и $\frac{28}{5}$ л соли. Таким образом, соль будет составлять $\frac{28}{5}$ л $\cdot\, 10 = 56\%$ всего полученного раствора. Аналогично в 8 л 56%-го раствора соли содержится $8 \cdot \frac{56}{100}$ л соли и $8 \cdot \frac{44}{100}$ л воды. Поэтому $8 \cdot \frac{56}{100}$ л соли в десятилитровом растворе составляют $8 \cdot \frac{56}{100 \cdot 10}$ л $\cdot\, 100 = 44,8\%$. Ответ: 56% и $44,8\%$.

Пример 14. В сосуде было 10 литров соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили тем же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде остался 64%-й раствор соляной кислоты?

Решение. Пусть x литров отливают каждый раз ($0 < x < 10$), тогда концентрация кислоты после первого раза равна $\frac{10-x}{10} \cdot 100\%$. Отливая после этого x литров раствора, мы уменьшаем количество кислоты на $x \cdot \frac{10-x}{10}$ литров. В результате

$$64\% = \frac{(10-x) - x \cdot \frac{10-x}{10}}{10} \cdot 100\% = (10-x)^2.$$

Отсюда $x = 2$ или $x = 8$. Учитывая ограничение $0 < x < 10$, окончательно получаем $x = 2$. Ответ: 2 литра.

Задачи на смеси. В задачах на смеси часто бывает удобно обозначить за некоторую переменную общую массу смеси и уже через нее определить массы входящих в смесь веществ.

Пример 15. Соотношение металлов в первом сплаве $1:3$, а во втором — $3:2$. Сколько нужно взять того и другого (в соотношении), чтобы в получившемся сплаве металлов было поровну?

Решение. Если мы возьмем a кг первого сплава, то при этом будет выбрано $a/4$ кг первого металла и $3a/4$ кг — второго. Аналогично взяв b кг второго сплава, будем иметь $3b/5$ кг первого металла и $2b/5$ кг — второго. Чтобы массы первого и второго металлов в суммарном сплаве были равны, необходимо, чтобы

$$\frac{a}{4} + \frac{3b}{5} = \frac{3a}{4} + \frac{2b}{5}.$$

Следовательно, $b : a = 5 : 2$. Ответ: в соотношении $5 : 2$.

Пример 16. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток с 40% содержанием золота. Если же сплавить равные по весу части этих слитков, то получится слиток с 35% содержанием золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго.

Решение. Обозначим через M кг и m кг — массы первого и второго слитков соответственно, а через $M_з$ кг и $m_з$ кг — количество золота, которое они содержат. Перепишем условие задачи в виде уравнений $M_з : M = 2,5 \cdot m_з : m$ и $(m_з + M_з)/(m+M) = 4/10$. Из первого уравнения получаем $M_з = 2,5 \cdot m_з \cdot \frac{M}{m}$. Поэтому m кг первого слитка содержит $2,5 \cdot m_з$ кг золота. Последнее условие задачи дает $(m_з + 2,5 \cdot m_з) : (m+m) = 35/100$. Отсюда получаем $m_з : m = 1 : 5$ и $M_з : M = 1 : 2$. И, наконец,

$$\frac{\frac{m}{5} + \frac{M}{2}}{m+M} = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 2m + 5M = 4m + 4M \Leftrightarrow M = 2m.$$

Ответ: в два раза.

Пример 17. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих соответственно m и n кг, было отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

Решение. Пусть x кг — масса каждого из отрезанных кусков и p_1 и p_2 — концентрация меди в первом и втором сплаве соответственно, будем также использовать числовые коэффициенты $q_1 = p_1/100$ и $q_2 = p_2/100$. Тогда $q_1 \neq q_2$, $x < n$ и $x < m$. Приравнивая новые концентрации, получаем

$$\frac{q_1 m - q_1 x + q_2 x}{m} \cdot 100\% = \frac{q_2 n - q_2 x + q_1 x}{n} \cdot 100\% \Leftrightarrow$$

$q_1 mn - q_1 nx + q_2 nx = q_2 nm - q_2 mx + q_1 mx \Leftrightarrow x = \frac{mn(q_2 - q_1)}{(n+m)(q_2-q_1)} = \frac{mn}{n+m}$.
Ответ: $\frac{mn}{n+m}$ кг.

Пример 18. Имеются три колбы с водой: первая вместимостью 500 мл, а во вторую и третью налито 300 и 150 мл соответственно (вторая и третья колбы имеют бóльшую вместимость, чем объемы налитой в них воды). Если долить первую колбу доверху из второй, то вторая останется заполненной наполовину. Если вместо этого долить вторую колбу доверху из третьей, то последняя останется заполненной на $\frac{1}{4}$. Если же вместо этого долить третью колбу водой доверху из первой, то в первой останется 350 мл воды. Сколько воды было в первой колбе?

Решение. Введем несколько переменных. Пусть v_1, v_2, v_3 соответственно обозначают вместимость первой, второй и третьей колб, x — количество налитой в первую колбу воды. Тогда условия задачи можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} v_1 = 500, \\ v_1 = x + (300 - v_2/2), \\ v_2 = 300 + (150 - v_3/4), \\ v_3 = 150 + (x - 350) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 500, \\ 200 = x - v_2/2, \\ v_2 = 450 - v_3/4, \\ v_3 = x - 200. \end{cases}$$

Подставляя v_3 в третье уравнение последней системы и затем v_2 — во второе уравнение, получим $450 = 9x/8$. Отсюда $x = 400$ мл. Ответ: 400 мл.

Пример 19. В цехе фасуют в коробки печенье, пряники и вафли. 4 коробки печенья и 1 коробка пряников вместе весят столько же, сколько 5 коробок вафель; а по одной самой тяжелой и самой легкой из этих коробок, да еще 1 коробка пряников и 3 коробки вафель весят столько же, сколько 7 коробок печенья. Найти массы коробок с каждым из этих продуктов, если масса самой тяжелой из них на 2 кг больше массы самой легкой?

Решение. Обозначим соответственно через $m_{\text{печ}}$, $m_{\text{в}}$, $m_{\text{пр}}$, $m_{\text{л}}$, $m_{\text{т}}$ массы коробок с печеньями, вафлями, пряниками и самой легкой и самой тяжелой коробок. Тогда условия задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 4m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}} = 5m_{\text{в}}, \\ m_{\text{л}} + m_{\text{т}} + m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 7m_{\text{печ}}, \\ m_{\text{т}} - m_{\text{л}} = 2. \end{cases}$$

Заметим сразу, что из первого уравнения системы следует, что $m_{\text{в}} \neq m_{\text{т}}$ и $m_{\text{в}} \neq m_{\text{л}}$, поэтому $m_{\text{л}} + m_{\text{т}} = m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}}$ и второе уравнение превращается в уравнение $2m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 6m_{\text{печ}}$. Из только что полученного уравнения следует, что $m_{\text{печ}} = m_{\text{л}}$. Это означает, что $m_{\text{пр}} = m_{\text{т}}$ и $m_{\text{пр}} - m_{\text{печ}} = 2$. Решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}} = 5m_{\text{в}}, \\ 2m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 6m_{\text{печ}}, \\ m_{\text{пр}} - m_{\text{печ}} = 2 \end{cases}$$

является тройка $m_{\text{печ}} = 5,2$ кг, $m_{\text{в}} = 5,6$ кг, $m_{\text{пр}} = 7,2$ кг.
Ответ: $m_{\text{печ}} = 5,2$ кг, $m_{\text{в}} = 5,6$ кг, $m_{\text{пр}} = 7,2$ кг.

Задачи с целочисленными переменными. Напомним, что множеством целых чисел называется множество $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$. Пусть $a, b \in Z$ и $b \neq 0$, тогда a делится на b (обозначается $a \vdots b$), если найдется такое $c \in Z$, что $a = bc$. Заметьте, что $6 : 2$ и $6 \vdots 2$ имеют разный смысл: в первом случаем — это результат деления 6 на 2, т.е. 3, а во втором — только лишь факт делимости 6 на 2. *Простым* числом называется такое натуральное $p \in N$, которое имеет *ровно два* делителя: 1 и p. Первые простые числа: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ (число 1 простым не является, поскольку имеет только один делитель). Два натуральных числа a и b называются *взаимно простыми*, если у них нет кроме единицы других общих делителей (обозначение: $(a, b) = 1$). Например, $(8, 9) = 1$, хотя 8 и 9 простыми числами не являются.

Пусть a_i — цифра, т.е. элемент множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$, тогда запись натурального числа a в виде $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ означает, что

$$a = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(черта сверху отличает это число от произведения цифр). Так, например, трехзначное число $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Вспомним основные свойства и признаки делимости.

A. Пусть $a, b, c \in Z$ и $c \neq 0$. Если из трех чисел a, b, $a + b$ два делятся на c, то и третье делится на c.

B. Любое натуральное число представляется в виде произведения своих простых делителей, причем это представление единственно с точностью до порядка сомножителей (*основная теорема арифметики*).

C. Если произведение ab делится на c и $(a, c) = 1$, то b делится на c. В частности, если ab делится на простое число p, то хотя бы одно из чисел (a или b) должно делиться на p.

D. Если a делится на каждое из чисел b и c и $(b, c) = 1$, то $a \,\vdots\, (b \cdot c)$. В частности, если a делится на два различных простых числа p_1 и p_2, то $a \,\vdots\, (p_1 \cdot p_2)$.

E. Пусть $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$. Основные признаки делимости:

$\boxed{\text{на 3:}}$ $a \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \,\vdots\, 3$;

$\boxed{\text{на 4:}}$ $a \,\vdots\, 4 \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \,\vdots\, 4$;

$\boxed{\text{на 5:}}$ $a \,\vdots\, 5 \Leftrightarrow a_0 = 0$ или $a_0 = 5$;

$\boxed{\text{на 8:}}$ $a \,\vdots\, 8 \Leftrightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} \,\vdots\, 8$;

$\boxed{\text{на 9:}}$ $a \,\vdots\, 9 \Leftrightarrow (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \,\vdots\, 9$;

$\boxed{\text{на 11:}}$ $a \,\vdots\, 11 \Leftrightarrow (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots - a_1 - a_3 - a_5 - \ldots) \,\vdots\, 11$.

В последнем признаке из суммы цифр, стоящих на нечетных местах, вычитается сумма цифр, стоящих на четных местах. Например, $22418771914 \,\vdots\, 11$, поскольку $4+9+7+8+4+2-1-1-7-1-2 = 22 \,\vdots\, 11$.

Деление с остатком. Хорошо известно, что любое целое число a можно единственным образом разделить на натуральное число b с остатком, т.е. представить a в виде $a = b \cdot q + r$, где $q, r \in Z, 0 \leqslant r < b$, при этом q называют неполным частным, а r — остатком. Так, например, при делении на 3, у чисел 7 и -7 получаются остатки 1 и 2 соответственно, поскольку $7 = 3 \cdot 2 + 1$ и $-7 = 3 \cdot (-3) + 2$ (в последнем случае было бы ошибкой в качестве остатка взять отрицательное число -1).

F. Существуют только b различных остатков при делении на натуральное число b: 0, 1, $\ldots, (b-1)$.

G. Пусть $n \in N$. Среди n последовательных целых чисел точно одно делится на n.

Обсудим, почему выполняется последнее свойство. Запишем n последовательных целых чисел в виде: $a+1$, $a+2$, $\ldots, a+(n-1)$, $a+n$, где $a \in Z$. Разделим a на n с остатком: $a = n \cdot q + r$. Поскольку $0 \leqslant r < n$, верно

$$1 \leqslant r+1 < r+2 < \ldots < r+n < 2n.$$

Отсюда в точности одно из последовательных чисел $r+1$, $r+2$, $\ldots, r+n$ будет равно n (пусть $r+i_0 = n$), но тогда $a+i_0 = n\cdot q+r+i_0 = n\cdot q+n$ — единственное число из данного набора, которое делится на n.

Оставшуюся часть раздела составляют примеры задач, в решении которых используются свойства **A**–**G**.

Пример 20. Доказать, что если при некоторых целых значениях a, b и c число $3a+5b+c$ делится нацело на 7, то и число $11a+9b+13c$ при этих же a, b и c также делится на 7.

Решение. Обозначим $3a+5b+c$ через x и $11a+9b+13c$ — через y. Заметим, что число $x+y = 14a+14b+14c$ делится на 7. Так как x и $x+y$ делятся на 7, то и y также делится на 7.

Пример 21. Найти все целые x и y, удовлетворяющие уравнению $x^2 = 79 + y^2$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $(x-y)(x+y) = 79$. Так как 79 является простым числом, то целыми делителями 79 являются только ± 1 и ± 79. Поэтому для нахождения целочисленных решений достаточно рассмотреть следующие системы:

$$\begin{cases} x-y=-1, \\ x+y=-79, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-79, \\ x+y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1, \\ x+y=79, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=79, \\ x+y=1. \end{cases}$$

Решая подстановкой каждую из систем, получаем четыре пары решений. Ответ: $(-40,-39)$, $(-40,39)$, $(40,39)$, $(40,-39)$.

Пример 22. Дано двузначное число. Если сумму квадратов его цифр разделить на сумму его цифр, то получится 4 и в остатке 1. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, составляет 208% данного числа. Найти данное число.

Решение. Пусть x — первая цифра числа, а y — вторая. Тогда само число равно $10x+y$, а число, записанное теми же числами, но в обратном порядке, равно $10y+x$. Условия задачи дают систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4(x+y)+1, \\ 10y+x = 208(10x+y)/100. \end{cases}$$

Из второго уравнения после приведения подобных получаем $y = 5x/2$, а после подстановки этого значения y в первое уравнение и приведения подобных, получаем квадратное уравнение $29x^2 - 56x - 4 = 0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2/29$. Но значение x должно быть целым неотрицательным числом, меньшим 10. Поэтому $x = 2$, а $y = 5$. Ответ: 25.

Пример 23. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 1, а в остатке 16. Если же к квадрату разности цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится заданное число. Найти это число.

Решение. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число, тогда условия задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ 10x + y = (x-y)^2 + xy, \\ x, y \text{ — цифры} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ (x-y)^2 = 16, \\ x, y \text{ — цифры} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + y = xy + 16, \\ \left[\begin{array}{l} x = y + 4, \\ x = y - 4, \end{array} \right. \\ x, y \text{ — цифры.} \end{cases}$$

Теперь достаточно рассмотреть два случая. *Первый случай:* $x = y + 4$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем квадратное уравнение $y^2 - 7y - 24 = 0$ без целых корней. *Второй случай:* $x = y - 4$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем уравнение $y^2 - 15y + 56 = 0$ с корнями $y_1 = 7$ и $y_2 = 8$. Ответ: 37 и 48.

Пример 24. Можно ли число 133 представить в виде суммы некоторых различных натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел было равно 133?

Решение. Представим число 133 в виде произведения различных натуральных множителей. Получаем $133 = 1 \cdot 7 \cdot 19 = 1 \cdot 133 = 7 \cdot 19$. Заметим, что число $27 = 1 + 7 + 19$ является максимальным из чисел, не превосходящих 133, которые могут быть получены суммой различных чисел, произведение которых равно 133. Ответ: нет.

Пример 25. Какой цифрой оканчивается $54^{35} + 28^{21}$?

Решение. Рассмотрим первое из двух слагаемых — 54^{35}. Легко заметить, что при возведении 54 в любую натуральную степень получится число, последняя цифра которого — 4 или 6. Если показатель n степени четный, то последней цифрой 54^n является 6, если нечетный, то последняя цифра — 4. Следовательно, последней цифрой числа 54^{35} является 4. Аналогично рассуждая для степени 28^{21}, находим, что при $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ последние цифры чисел 28^n соответственно равны $8, 4, 2, 6, 8, \ldots$. Элементы этой последовательности последних цифр повторяются через четыре, поэтому 21-й цифрой в этой последовательности будет 8. Итак, 8 — последняя цифра числа 28^{21}. Отсюда получаем, что последней цифрой числа $54^{35} + 28^{21}$ является цифра 2. Ответ: 2.

Пример 26. Докажите, что число $12^{42} + 9^{42}$ делится на 15.

Решение. Очевидно, что это число делится на 3. Кроме того, последней цифрой числа 9^{42} является 1, а последняя цифра числа 12^{42} равна 4 (см. предыдущую задачу). Поэтому данное число делится на 5. Учитывая простоту 3 и 5, из **D** получаем требуемое.

Пример 27. Найти среднее арифметическое всех целых чисел n, при которых дробь $\dfrac{2n^2 + n + 1}{n + 2}$ также является целым числом.

Решение. Выделим целую часть у дроби следующим образом

$$\frac{2n^2 + n + 1}{n + 2} = \frac{2n(n + 2) - 3n + 1}{n + 2} = \frac{2n(n + 2) - 3(n + 2) + 7}{n + 2} =$$

$$= 2n - 3 + \frac{7}{n + 2}.$$

Исходная дробь и $2n - 3$ являются целыми числами, поэтому дробь $\frac{7}{n+2}$ также должна быть целым числом. Последнее выполняется только тогда, когда $7 \vdots (n + 2)$, что возможно (в силу простоты числа 7) только при $n + 2 = \pm 1$ или $n + 2 = \pm 7$. Отсюда $n \in \{-3, -1, -9, 5\}$. Ответ: -2.

Пример 28. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

Решение. Среди этих чисел (по **G**) есть делящееся на 3 и два последовательных четных числа. Нетрудно заметить, что среди двух последовательных четных чисел одно делится на 2, другое — на 4. Таким образом, данное число делится на 24.

Пример 29. Найти все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ также простые.

Решение. Докажем, что хотя бы одно число из тройки p, $p+2$, $p+4$ делится на 3. Если $p\,\vdots\,3$, то все доказано, иначе $p = 3q + 1$ или $p = 3q + 2$. В первом случае число $p + 2 = 3q + 3$ делится на 3, а во втором — $p + 4 = 3q + 6$ кратно трем. Учитывая, что все три числа являются простыми, то кратное трем число должно быть равно трем. Отсюда $p = 3$ — единственное число, удовлетворяющее условию задачи. Ответ: $p = 3$.

Пример 30. Десять детей пошли за грибами и вместе нашли 85 штук. При этом оказалось, что каждый из них нашел либо 3, либо 7, либо 9 грибов. Возможно ли такое? Ответ обосновать.

Решение. Обозначим через x, y и z количество детей, которые нашли соответственно 3, 7 и 9 грибов. Тогда условия задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} 3x + 7y + 9z = 85, \\ x + y + z = 10. \end{cases}$$

Выразим x из второго уравнения и подставим полученное значение в первое уравнение системы. Получим $4y + 6z = 55$. Это уравнение не выполняется ни при каких целых y и z, так как числа в правой и левой части этого уравнения отличаются четностью. Ответ: нет, невозможно.

Пример 31. На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек, причем число игрушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили бы на 1 игрушку больше, то прежнего количества игрушек не хватило бы. Сколько игрушек было подарено детям, если известно, что число детей на празднике было нечетным.

Решение. Обозначим через a число детей и через b — количество игрушек, подаренных каждому ребенку. Тогда условия задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} a \text{ — нечетное число}, \\ b = a - 9, \\ 9(b+1) > a \cdot b. \end{cases}$$

Подставляя $b = a - 9$ в неравенство системы, приходим к

$$a(a-9) < 9(a-8) \Leftrightarrow a^2 - 18a + 72 < 0.$$

Решением последнего неравенства являются $a \in (6, 12)$. Выбирая нечетные числа, получаем $a \in \{7, 9, 11\}$. Из условия задачи также следует, что $a > 9$. Поэтому $a = 11$ и $a \cdot (a-9) = 22$ — общее число игрушек. Ответ: 22.

Пример 32. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них — белые. Если отложить 3 самых маленьких гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

Решение. Пусть x — количество белых и y — число остальных грибов. Тогда $x + y \leqslant 70$ и $x/(x+y) = 52/100$. Из последнего уравнения получаем $12x = 13y$. Таким образом, x должно делиться на 13. Поэтому возможными решениями будут пары $x_1 = 13,\ y_1 = 12$; $x_2 = 26,\ y_2 = 24$; $x_3 = 39,\ y_3 = 36$ и т.д. Легко заметить, что все пары, начиная с $x_3,\ y_3$, не удовлетворяют условию $x + y \leqslant 70$. Кроме того, пара $x_2,\ y_2$ не удовлетворяет последнему условию задачи: отбирая нечетное количество грибов, мы не можем уравнять количество белых и число остальных грибов. Итак, $x = 13$, $y = 12$ и $x + y = 25$. Ответ: 25 грибов.

Пример 33. Журнал "ЛицWay" сообщает, что процент лицеистов физико-математических классов, улучшивших свои достижения на математических олимпиадах, заключен в пределах от $1,7$ до $2,9$. Определить минимально возможное количество лицеистов в физико-математических классах.

Решение. Обозначим через x число лицеистов физико-математических классов. Пусть также a из них принимали участие в олимпиаде и b улучшили свои достижения. Определим минимальное значение x исходя из условий задачи. Очевидно, что $a \leqslant x$ и для минимальности x необходимо, чтобы $a = x$. Из неравенства $1,7\% \leqslant \frac{b}{x} \cdot 100\% \leqslant 2,9\%$ получаем, что $b \leqslant 2,9 \cdot x/100$. Так как $b \neq 0$, то минимальное x мы получим из условия $b = 1$, т.е. $1 \leqslant 2,9 \cdot x/100$ или $x > 34$. Учитывая условие $x \in N$, получаем $x = 35$. Нетрудно заметить, что при этом значении x неравенство $1,7\% \leqslant \frac{b}{x} \cdot 100\%$ также выполняется. Ответ: 35 человек.

Пример 34. Садовник должен рассадить деревья, число которых меньше 1000. Если он посадит их рядами по 37 штук, то у него останется 8 лишних деревьев; если же он посадит по 43 дерева в ряд, то у него останется 11 лишних деревьев. Сколько деревьев должен рассадить садовник?

Решение. Пусть садовник должен рассадить n деревьев, тогда найдутся такие натуральные k и l, что

$$\begin{cases} n = 37k + 8, \\ n = 43l + 11, \\ n < 1000. \end{cases}$$

Из неравенств $37k + 8 < 1000$ и $43l + 11 < 1000$ получаем оценки для k и l: $k \leqslant 26$ и $l < 23$. Рассмотрим теперь уравнение $37k + 8 = 43l + 11$ или равносильное ему $37(k - l) = 3(2l + 1)$. Заметим, что левая часть последнего уравнения делится на 37, поэтому и $3(2l+1)$ делится на 37. Так как 3 и 37 взаимно просты (т.е. нет кроме единицы других общих натуральных делителей), то $2l+1$ должно делиться на 37, т.е. $2l+1 = 37$ или $2l + 1 = 101$ ($2l + 1 \neq 74$, так как $2l + 1$ — нечетное число) и т.д. Решениями этих уравнений будут $l = 18$, $l = 50$ и т.д. Ограничению $l < 23$ удовлетворяет только $l = 18$. Подставляя найденное значение l во второе уравнение системы, находим, что $n = 785$. Ответ: 785 деревьев.

Глава 5

Контрольные работы

5.1. Контрольное задание №1: “Квадратный трехчлен”

C1. Лицеист Вася Пупочкин при построении графика функции $y = (x+2)^2$ сдвинул параболу $y = x^2$ на две единицы вправо. Как легко убедить его в том, что он не прав?

C2. Дан график функции $y = f(x)$. Чем отличается получение графиков функций $y_1 = f(-x)$ и $y_2 = -f(x)$ из данного графика?

C3. Тот же Вася при построении графика $y = -f(x)$ отобразил данный ему график функции $y = f(x)$ относительно оси Oy и, конечно же, совершил очередную ошибку. Более того, он стер первоначальный график. Как по построенному Василием графику получить правильный график?

C4. Напишите необходимые и достаточные условия для того, чтобы квадратичная функция $F(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ была отрицательна на всей числовой прямой.

C5. Известно, что решением квадратного неравенства $ax^2+bx+c > 0$ является интервал $(0;2)$. Что можно сказать о коэффициентах a, b и c?

C6. Найти все значения параметра a, при которых единственный корень имеет уравнение $\frac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a} = 0$.

K1. Построить график функции $y = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x+1}$.

K2. Известно, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения

$x^2 + px + q = 0$. Найти значения следующих выражений: **a)** $x_1^2 + x_2^2$, **b)** $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$, **c)** $x_1^4x_2 + x_2^4x_1$, **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$.

K3. Найти все значения параметра a, при которых положительны все корни уравнения $x^2 + (a+4)x + 8 = 0$.

K4. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 + 12x + 3a = 0$ имеют разные знаки.

Решить уравнения K5–K7 и неравенство K8.

K5. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$.

K6. $7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5$.

K7. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 35$.

K8. $\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + 2x - 3} \leqslant 0$.

K9. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$.

K10. Найти количество точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = 2x - 2$.

K11. Записать уравнение прямой, не параллельной оси Oy, касающейся графика функции $y = x^2 - 4x + 3$ в точке с абсциссой $x = 9$.

K12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2}.$$

5.2. Контрольное задание №2: “Модуль числа”

C1. Дайте определение четной функции. Дайте определение нечетной функции. Какими свойствами обладают графики этих функций?

C2. Какая из функций $|f(x)|$ или $f(|x|)$ всегда будет четной?

C3. Пусть $f(x) = kx + b$ — линейная функция. Найти все значения коэффициентов k и b, при которых $|f(x)|$ является четной функцией.

C4. Вася Пупочкин собрал большую коллекцию квадратичных функций $f(x) = ax^2 + bx + c$, удовлетворяющих равенству $f(|x|) = |f(x)|$ при всех $x \in R$. Что можно утверждать о коэффициентах собранных Васей функций?

C5. Решить уравнение $|x^2 - 1| = 1$.

C6. Решить уравнение $\Big| ||x+2| - 3| + 1 \Big| = 1$.

C7. Решить уравнение $|x + 1| = -2x - 2$.

C8. Решить неравенство $2|x + 1| > x + 4$.

K1. Построить график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

K2. Построить график функции $y = x^2 - |x| - 2$.

K3. Построить график функции $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$.

K4. Решить уравнение $|x + 2| + |x - 1| = 3$.

5. Решить уравнение $|x - 3| + |2x + 4| - |x + 1| = 2x + 4$.

K6. Решить уравнение $|x^2 - 2x| + |x - 3| = 3$.

K7. Решить неравенство $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \leqslant 0$.

K8. Решить неравенство $\left| \dfrac{2x - 1}{x + 2} \right| \leqslant 4$.

K9. Решить неравенство $\dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2$.

K10. Решить систему уравнений $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$

K11. Изобразить график функции $y = \dfrac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}{|x|}$.

K12. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}{|x|} = 2$.

K13. При каких значениях a уравнение $|x - 5| + a = |2 + x|$ имеет больше одного решения?

5.3. Контрольное задание №3: “Иррациональные уравнения и неравенства”

C1. Доказать, что уравнение $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{2+x-x^2}=3$ не имеет решений.

C2. Доказать, что уравнение $\sqrt{2+x-x^2}=x^2-5$ не имеет решений.

C3. Определить, какие из следующих функций монотонны, а какие нет (для монотонных указать характер монотонности): $f_1(x)=\sqrt{x+1}$, $f_2(x)=\sqrt[3]{1-x}$, $f_3(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt{2x+1}$, $f_4(x)=x^2-4x$.

C4. Для функций $f(x)=x^2-6x+8$ и $g(x)=-x^2+4x-3$ указать множества, на которых они возрастают и множества, на которых эти функции убывают.

C5. Доказать, что уравнение $\sqrt{x^3+1}=5-x$ имеет не более одного корня и найти этот корень.

C6. Доказать, что уравнение $\sqrt[3]{x^2-4x+11}=3-|x-2|$ имеет не более двух корней и найти эти корни.

Решить уравнения K1–K6.

K1. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

K2. $\sqrt{x^2+32}+\sqrt[4]{x^2+32}=3$.

K3. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

K4. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

K5. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

K6. При всех значениях параметра a решить уравнение $\sqrt{a-x^2}=x+1$.

Решить неравенства K7–K13.

K7. $\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant x+4$. **K8.** $\sqrt{x^2-4x}>x-3$.

K9. $\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{1-\sqrt{x+2}}\leqslant 0$. **K10.** $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$.

K11. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

K12. $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7} \geqslant \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$.

K13. Найти все значения параметра a, при которых решение неравенства $\sqrt{9-x^2} \geqslant -a^2x$ образует промежуток длины $15/4$, и найти этот промежуток.

K14. Найти все a, при котором любое x из промежутка $[1/4;1]$ является решением неравенства $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$.

5.4. Контрольное задание №4: “Системы уравнений”

Решить системы C1–C4.

C1. $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x^2+y^2=29. \end{cases}$ **C2.** $\begin{cases} x^2+2y=-5, \\ 2x^2+3y^2=29. \end{cases}$

C3. $\begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2. \end{cases}$ **C4.** $\begin{cases} x^2y+y^2x=20, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

C5. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 2, а сумма квадратов этих чисел равна $14/9$. Найти эти числа.

C6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

C7. Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму периметров этих квадратов.

C8. Зарплата лаборанта в 1985 году составила 100 рублей в месяц. После двух последовательных повышений на одно и то же число процентов она составила 121 рубль. На сколько процентов повысилась зарплата?

C9. Доказать, что если при некоторых целых значениях a, b и c число $6a+12b+11c$ делится нацело на 17, то и число $a+2b-c$ также делится на 17.

С10. Доказать, что сумма трех трехзначных чисел $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}$ делится на 37 и на 3.

С11. Найти все такие простые числа p, что числа $2p+1$ и $4p+1$ также простые.

С12. Докажите, что уравнение $x^5y=xy^5+1987$ не имеет решений в целых числах.

Решить системы К1–К6.

К1. $\begin{cases}(3+a)x+2y=3,\\ ax-y=3.\end{cases}$ **К2.** $\begin{cases}x+y=-1,\\ 16x^2-y^4=0.\end{cases}$

К3. $\begin{cases}4x^2-3xy-y^2=0,\\ 32x^2-36xy+9y^2=6.\end{cases}$ **К4.** $\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1,\\ 3x^2-xy+3y^2=13.\end{cases}$

К5. $\begin{cases}x+2y+3z=3,\\ 3x+y+2z=7,\\ 2x+3y+z=2.\end{cases}$ **К6.** $\begin{cases}\dfrac{yz}{x}=\dfrac{10}{3},\\ \dfrac{zx}{y}=\dfrac{15}{2},\\ \dfrac{xy}{z}=\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

К7. В зависимости от a определить число решений системы

$$\begin{cases}|x+y|=a,\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$$

К8. Найти $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}$, если известно, что $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия и $a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{16}=147$.

К9. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

К10. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.

К11. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

К12. Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 с. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 с. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

К13. Докажите, что если p — простое число больше 3, то p^2-1 делится на 24.

К14. Найти все натуральные числа, на которые может быть сократима дробь $\dfrac{5l+6}{8l+7}$.

К15. Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей перестроили по 7 человек в ряд, то все ряды были полными, а их число увеличилось на 2. Если бы их построили по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько всего было людей?

К16. Некто купил 30 птиц за 60 монет. Из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачено по две монеты, за каждого снегиря 1 монета, за каждого голубя — 4 монеты. Сколько всего куплено птиц каждой породы?

5.5. Ответы и указания к решению задач

Контрольная работа №1. **С1.** Графику функции должна принадлежать точка с координатами $(0,-2)$. **С2.** Отражение происходит относительно разных осей. При построении графика функции y_1 необходимо симметрично отразить график $f(x)$ относительно оси Oy, а при построении графика y_2 — относительно оси Ox. **С3.** Построенный Василием график достаточно отразить относительно начала координат, поскольку, действуя сначала симметрией относительно оси Oy (чтобы найти первоначальный график), а затем симметрией относительно оси Ox, мы получим в результате поворот вокруг начала координат на 180°. **С4.** $a < 0$ и $D = b^2 - 4ac < 0$. **С5.** $c = 0$, $a < 0$ и $b = -2a$. **С6.** $a = 1$, $a = 0$ и $a = 1/2$.

Контрольная работа №2. **С1.** Пусть функция $f(x)$ определена на множестве A. Тогда $f(x)$ называется четной (нечетной) функцией, если выполняются два свойства: (1) для каждого числа $x \in A$ число $-x$ также принадлежит множеству A; (2) для любого $x \in A$ верно $f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$). Функция является четной в том и только в том случае, когда ее график симметричен относительно оси Oy. Функция является нечетной в том и только в том случае, когда ее график симметричен относительно начала координат. **С2.** Функция $|f(x)|$ может не быть четной. Четность функции $g(x) = f(|x|)$ легко доказывается по определению. **С3.** $b = 0$. **С4.** $a > 0$, $c \geqslant 0$, $b = 0$. **С5.** $x = \pm\sqrt{2}$, $x = 0$. **С6.** $x = -5$ или $x = 1$. **С7.** $x = -1$. **С8.** $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Контрольная работа №3. **С1.** ОДЗ уравнения является пустым множеством. **С2.** На ОДЗ этого уравнения различаются знаки левой и правой частей. **С3.** Функция $f_1(x) = \sqrt{x+1}$ строго возрастает, поскольку является композицией двух строго возрастающих функций — $g(x) = x + 1$ и $h(x) = \sqrt{x}$. Функция $f_2(x) = \sqrt[3]{1-x}$ является композицией строго убывающей функции $g(x) = 1 - x$ и строго возрастающей функции $h(x) = \sqrt[3]{x}$, поэтому $f_2(x)$ строго убывает. Функция $f_3(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt{2x+1}$ представляет собой сумму двух строго возрастающих функций — $g(x) = \sqrt{x^3}$ и $h(x) = \sqrt{2x+1}$, поэтому $f_3(x)$ строго возрастает. И, наконец, функция $f_4(x) = x^2 - 4x$ не является монотонной функцией на всей числовой прямой. Из свойств квадратичной функции (см. задание №1) следует, что эта функция будет строго убывающей на множестве $(-\infty; 2]$ и строго возрастающей на промежутке $[2; \infty)$. **С4.** Функция $f(x) = x^2 - 6x + 8$ будет строго убывающей на множестве $(-\infty; 3]$ и строго возрастающей на промежутке $[3; \infty)$. Функция $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ будет строго возрастающей на множестве $(-\infty; 2]$ и строго убывающей на промежутке $[2; \infty)$. **С5.** ОДЗ этого уравнения составляют все $x \geqslant -1$. На этом множестве функция $\sqrt{x^3+1}$ строго возрастает (как композиция двух строго возрастающих функций), а

$5-x$ — убывает, поэтому по известной теореме у этого уравнения не может быть более одного корня. Сразу видно, что $x = 2$ является корнем этого уравнения. Больше у этого уравнения корней нет. **С6.** ОДЗ этого уравнения составляют все $x \in R$. Рассмотрим отдельно два множества: $A_1 = (-\infty; 2]$ и $A_2 = [2; \infty)$. На множестве A_1 левая часть данного уравнения строго убывает (поскольку является композицией строго убывающей функции $x^2 - 4x + 11$ и строго возрастающей функции кубического корня), правая же часть строго возрастает на этом множестве (правая часть уравнения на множестве $(-\infty; 2]$ равна $x+1$). Значит, по теореме 1 (см. §1 задания №3 "Иррациональные уравнения и неравенства") на множестве A_1 данное уравнение имеет не более одного корня. Этот корень, $x = 1$, легко угадывается. На множестве A_2 характер монотонности левой и правой части меняется на противоположный. Это позволяет снова воспользоваться теоремой 1 и утверждать, что и на множестве A_2 данное уравнение может иметь не более одного корня. Им будет $x = 3$.

Контрольная работа №4. С1. $(2, 5)$ и $(-14/5, -23/5)$. **С2.** $(1, -3)$. **С3.** $(1, 2)$ и $(2, 1)$. **С4.** $(1, 4)$, $(4, 1)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$. **С5.** $1/3$, $2/3$, 1. **С6.** 1, 3, 9. **С7.** $4a(2+\sqrt{2})$. **С8.** 10%. **С9.** Пусть $X = 6a + 12b + 11c$ и $Y = a + 2b - c$. Достаточно заметить, что $3X - Y$ делится на 17. **С10.** Достаточно заметить, что эта сумма делится на 111. **С11.** Доказать, что среди этих трех чисел есть всегда одно, которое кратно трем. Единственное значение: $p = 3$. **С12.** Достаточно доказать, что разность $x^5y - y^5x$ всегда четна при целых значениях переменных.