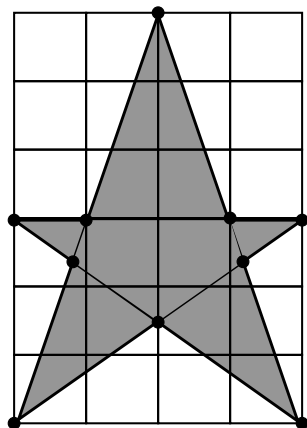


Младшая лига

1. На уроке по чистописанию лицеист Петя Васечкин поставил кляксу в виде звезды (смотри рисунок). Найдите площадь кляксы, считая размер одной клетки 5×5 мм. Ответ дайте в мм^2 , единицы измерения указывать не нужно.



Ответ: 240.

2. Из квадратной доски со стороной один метр Винтик и Шпунтик выпилили в центре квадратную доску со стороной 80 сантиметров. На какое наименьшее количество частей они смогут распилить оставшуюся рамку, чтобы из нее можно было сложить квадрат?

Ответ: 6.

3. Катя играет в странную игру. Для начала она выписала на доску натуральное число a , в записи которого все цифры различные. Затем Катя написала еще одно число b таким образом, чтобы в нем не использовались цифры, которые участвовали в записи числа a , и b делилось на a . Затем Катя делает следующий свой ход по аналогичным правилам: пишет натуральное число c , которое делится на b , используя цифры, которых не было в a или b . После этого Катя допишет по тем же правилам еще 2 числа. В итоге на доске получилось пять чисел a, b, c, d, e . Катя побеждает в игре, если ни одно из чисел на доске не является квадратом целого числа. Если Катя может победить, то в ответе укажите наибольшую возможную сумму чисел на доске, в противном случае укажите в ответе 0.

Ответ: 9801.

4. Все n оленеводов крайнего севера вышли на несанкционированный митинг против полярной ночи. Местный НИИ решил посадить всех оленеводов на вертолеты и свозить их на популярную лекцию по астрономии. Причем это можно сделать одним из двух способов: либо двумя вертолетами типа A за несколько рейсов, либо тремя вертолетами типа B за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого вертолета типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого вертолета типа A . В каждом из случаев вертолеты заполняются полностью. Какое максимальное количество n оленеводов удовлетворяет условию задачи, если в вертолет типа B входит на 7 человек меньше, чем в вертолет типа A ?

Ответ: 1980.

5. Полную бочку меда разлили по трем, необязательно одинаковым, бочонкам и раздали Маше, Шуре и Даше. Оказалось, что мед распределился между девочками поровну. При этом бочонок Маши заполнен на $1/2$, Шуры – на $2/3$, а Даши – на $3/4$. В бочку и каждый бочонок помещается целое число литров меда. Найдите наименьший возможный объем бочки (в литрах). Единицы измерения в ответе указывать не надо.

Ответ: 18.

6. Каждую клетку квадратной доски 6×6 раскрасили произвольным образом в один из двух цветов, красный или синий. Юный Каземир очень любил перекрашивать квадраты и для этого он использовал следующий алгоритм. За один шаг он мог перекрасить все клетки в некотором квадрате 2×2 либо в прямоугольнике 1×4 в противоположный цвет. И для данной исходной раскраски Каземир продолжал заниматься творчеством до тех пор, пока доска не станет максимально красной, т.е. количество оставшихся на доске синих клеток уже нельзя будет уменьшить с помощью любой последовательности разрешенных перекрашиваний. Найдите все возможные значения n , где n – количество синих клеток, которое могло остаться в конце творчества Каземира, в зависимости от исходной раскраски. В ответе выпишите эти значения по убыванию без пробелов и иных разделительных знаков. (Т.е. если получились числа 1, 11, 25, то записать следует 25111.)

Ответ: 210.

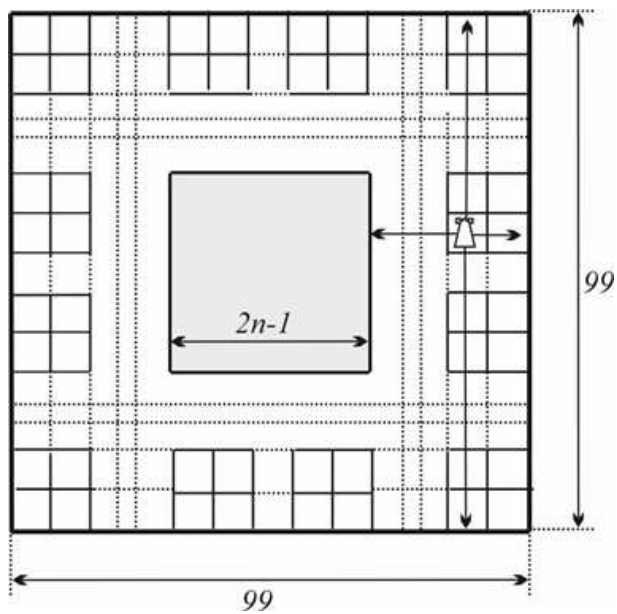
7. Взломщик сможет открыть сейф, если наберет любой код из 12 цифр, каждая из которых равна 0 или 1, причем никакие три единицы не должны идти подряд. С какой попытки, в худшем случае, взломщику удастся открыть сейф, если он владеет информацией только о длине кода и о том, что код записывается с помощью 0 и 1, но не знает, что в нем не должно быть трех последовательных единиц.

Ответ: 2392.

8. Есть две кучи по 10 камней, масса каждого из которых является целым числом граммов, кратным 10, причем массы всех 20 камней различные и не превосходят 200 граммов. Марина взвесила всевозможные пары камней, в которых первый камень выбирался из первой кучи, а второй камень – из второй и записала полученные в результате взвешиваний суммарные массы. Какое наибольшее количество различных сумм могло получиться у Марины?

Ответ: 35.

9. Нестандартная шахматная доска представляет собой квадрат со стороной 99 клеток, в центре которого вырезана дыра – квадрат со стороной $2n - 1$ клетка (смотри рисунок). Электронный гроссмейстер Stockfish 12 выставляет на эту шахматную доску максимально возможное число обычных шахматных ладей так, что ни одна ладья не находится под боем другой. (Ладья в данном случае бьет на любое число клеток вдоль одной строки или столбца, но через клетки дыры ладья пройти не может. Т.е. если две ладьи стоят по разные стороны от дыры в одной строке или одном столбце, то друг друга они бить не могут.) Сколько ладей выставит Stockfish 12, если $n = 20$?



Ответ: 120.

Старшая лига

1. Сева называет целое число n от 0 до 3 включительно, а Кирилл для числа, названного Севой, пытается составить тройку чисел (a, b, c) , где ровно n чисел рациональные, для которых выполняется равенство $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c + 1$. В ответе укажите сумму всех возможных значений n , для которых Кирилл сумеет составить такую тройку.

Ответ: 3.

2. На окружности последовательно выбраны точки $A_1, A_2, \dots, A_{17}$ так, что величины дуг $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{17}A_1$ относятся как $1 : 2 : 3 : \dots : 17$. Вася Пупочкин последовательно соединяет вершины через три: сначала проводя отрезок A_1A_4 , затем A_4A_7 и т.д. Обойдя окружность три раза, он вернулся в точку A_1 , получив звездчатый многоугольник. Найдите сумму углов этого многоугольника при вершинах $A_1, A_2, \dots, A_{17}$. В ответе знак градуса писать не нужно.

Ответ: 1980.

3. Катя играет в странную игру. Для начала она выписала на доску натуральное число a , в записи которого все цифры различные. Затем Катя написала еще одно число b таким образом, чтобы в нем не использовались цифры, которые участвовали в записи числа a , и b делилось на a . Затем Катя делает следующий свой ход по аналогичным правилам: пишет натуральное число c , которое делится на b , используя цифры, которых не было в a или b . После этого Катя допишет по тем же правилам еще 2 числа. В итоге на доске получилось пять чисел a, b, c, d, e . Катя побеждает в игре, если ни одно из чисел на доске не является квадратом целого числа и в записях a, b, c, d, e ровно по одному разу встречаются все цифры. В ответе укажите количество всех возможных множеств на доске, на которых Катя победит.

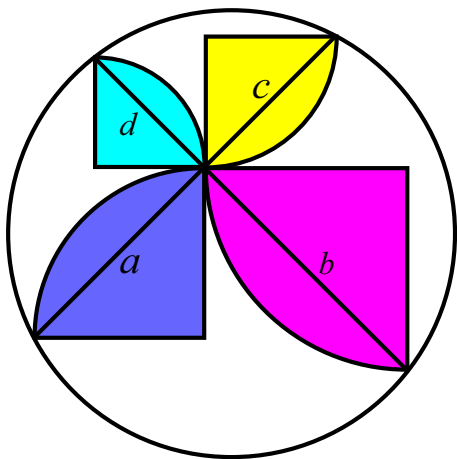
Ответ: 7 (все возможные наборы, на которых выигрывает Катя, такие:

3, 6, 18, 72, 5904 (или 9504);

3, 6, 54, 108, 972;

3, 6, 18, 54, 2970 (7290, 9072 или 9720).

4. Девочка Тася нарисовала на круглом листе бумаги цветочек и раскрасила его лепестки (смотри рисунок) со скоростью 1 см^2 в секунду, причем лепестки являются секторами кругов попарно различных радиусов. Соня хочет узнать, сколько еще секунд ей придется ждать Тасю, пока она закрасит весь лист полностью и они вместе пойдут гулять. Помогите решить Соне эту задачу, если известно, что площадь круга равна 2020 см^2 , а Тася будет заканчивать раскраску с вдвое большей скоростью, чем раньше. В ответе секунды писать не нужно.



Ответ: 505.

5. Вася учит английские слова с помощью программы, которая работает следующим образом. Вася называет английское слово и с помощью цифр от 0 до 9, звездочки и знака $-$ (минус) набирает код, который состоит из двух целых чисел, x и y , разделенных звездочкой, например, $-132 * -1870$. Программа напишет в ответ для Васи перевод слова, если окажется, что для набранных чисел x и y выражение $5x^2 - 6xy + y^2$ является сотой степенью числа 6. К какому наибольшему количеству слов сможет таким образом узнать перевод Вася?

Ответ: 19594.

6. Двоечник Дима и девочка Марина устроили в пятидесятиметровом бассейне заплыв. Дима проплывает каждые 50 метров за две минуты, а Марина — за три. Наши спортсмены стартуют с тумбочки и плавают непрерывно кругами целый час. Дима утверждает, что в течение всего заплыва они побывают 21 раз на одном и том же расстоянии от места старта. Разумеется, будучи двоечником, он ошибся. Марина, пока плавала, в уме вычислила сколько раз за это время, включая момент старта, они находились на одном расстоянии от того края бассейна, где находится тумбочка. Посчитайте и вы.

Ответ: 26.

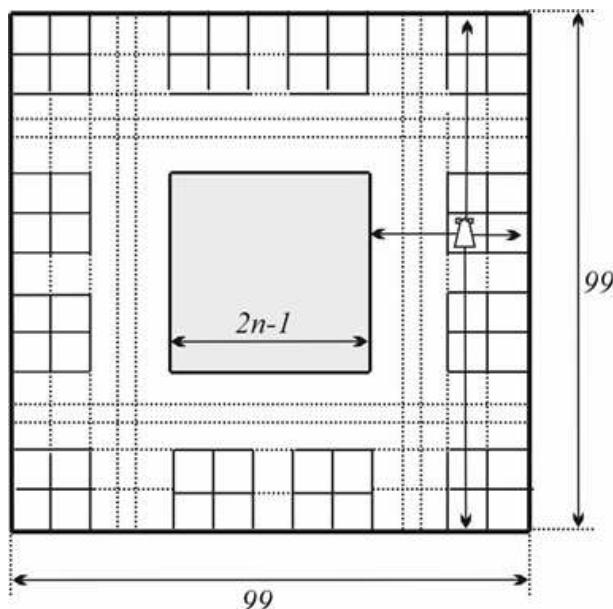
7. На плоскости расположены две окружности ω_1 и ω_2 так, что их внешняя касательная (т.е. отрезок между точками касания) в два раза больше внутренней касательной. Известно, что радиусы этих окружностей равны 9 и 22. Найдите расстояние между центрами ω_1 и ω_2 .

Ответ: 35.

8. Даниил и Сергей смотрят 5 матчей с участием Роджера Федерера и независимо друг от друга совершенно случайным образом говорят, каким счетом закончится каждый матч. Вероятность того, что Сергей не угадает счет матча, не зависит от номера матча и равна $1/2$. Даниил верно угадывает счет любого матча с вероятностью $2/3$ независимо от номера матча. После окончания просмотра выяснилось, что Даниил дал ровно на два правильных прогноза больше, чем Сергей. С какой вероятностью p это могло произойти? В ответе укажите значение $8100p$.

Ответ: 1625.

9. Нестандартная шахматная доска представляет собой квадрат со стороной 99 клеток, в центре которого вырезана дыра — квадрат со стороной $2n - 1$ клетка (смотри рисунок), где n — натуральное число, меньшее 50. Электронный гроссмейстер Stockfish 12 выставляет на эту шахматную доску максимально возможное число обычных шахматных ладей так, что ни одна ладья не находится под боем другой. (Ладья в данном случае бьет на любое число клеток вдоль одной строки или столбца, но через клетки дыры ладья пройти не может. Т.е. если две ладьи стоят по разные стороны от дыры в одной строке или одном столбце, то друг друга они бить не могут.) Пусть Stockfish 12 выставил 112 ладей. Найдите все возможные значения n . В ответе запишите все эти значения в возрастающем порядке без пробелов и иных символов. (Т.е. если получились числа 1, 14, 28, то ответ выглядит так: 11428.)



Ответ: 722.