**СУНЦ УрФУ**
**Вступительный экзамен по математике**
**для поступающих в 9 ХБ класс**
**21 марта 2025г.**
**Вариант 1**

**1.** *(2 балла)* Вычислите $\dfrac{(\frac{1}{26}+13^7)^2-(\frac{1}{26}-13^7)^2}{(39^2-13^2)^3} : (0{,}0625)^2$.

**2.** *(2 балла)* На стороне $AB$ треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $BC$ в точке $M$. Оказалось, что $BM = MC$. Найти угол $MAC$, если угол $MAB$ равен $35°$.

**3.** *(2 балла)* Вычислите $\left(\sqrt{57}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}+6\right)\left(\sqrt{57}-3\sqrt{6}-\sqrt{38}+6\right)$.

**4.** *(2 балла)* Сумма цифр двузначного числа $A$ равна 13. При делении числа $A$ на произведение его цифр частное равно 1, а остаток 34. Найдите число $A$.

**5.** *(2 балла)* Найдите $x$, если $a \star b = \dfrac{ab}{a+b}$ и $2 \star x = 3 \star 4$.

**6.** *(2 балла)* Решите уравнение $\dfrac{x^3-8}{2x-4} = 12x-18$.

**7.** *(2 балла)* Найдите все пары натуральных чисел $a$ и $b$, для которых НОД(a, $b$)=3, $a \cdot b = 108$.

**8.** *(2 балла)* Света гуляла в парке с младшей сестрой и встретила Таню. Таня спросила у Светы, сколько лет ее сестре. «Теперь ей столько лет, сколько было мне тогда, когда я была старше ее в 2,5 раза. А вместе нам 26 лет». Сколько лет сестре Светы?

**9.** *(2 балла)* Найти наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству $|4x+2| > 5x+3$.

**10.** *(2 балла)* В ромбе $MNPK$ высота $NH = 8$. Она пересекает диагональ $MP$ в точке O, причем $MO : OP = 1 : 3$. Найдите отрезок $OK$.

**11.** *(7 баллов)* Построить график функции $y = \dfrac{\left(\sqrt{2x^2-4x}\right)^2}{|x|}$. При каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в двух различных точках?

**12.** *(5 баллов)* Решите уравнение $\dfrac{19-2x}{x^2+5x+4} - \dfrac{2x+9}{x^2+3x+2} = \dfrac{4x}{x^2+6x+8}$.

**13.** *(6 баллов)* При каком наибольшем $a$ корни уравнения $x^2+3ax+8=0$ удовлетворяют условию $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{5}{2}$?

**14.** *(7 баллов)* $ABCD$ – квадрат со стороной 10. Точка $E$ – середина $AB$, точка $F$ – середина $BC$. Отрезки $DE$ и $AF$ пересекаются в точке $O$. Найти площадь треугольника $OFD$.

**15.** *(5 баллов)* Имеются три слитка. Масса первого 5 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

**СУНЦ УрФУ**
**Вступительный экзамен по математике**
**для поступающих в 9 ХБ класс**
**21 марта 2025г.**
**Вариант 2**

**1.** *(2 балла)* Вычислите $\dfrac{(\frac{1}{33}+11^9)^2-(\frac{1}{33}-11^9)^2}{(44^2-11^2)^4}:(0{,}008)^2\cdot 27^2$.

**2.** *(2 балла)* На стороне $MN$ треугольника $MNP$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $MP$ в ее середине. Найти угол $NPM$, если угол $NMP$ равен $40°$.

**3.** *(2 балла)* Вычислите $\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right)$.

**4.** *(2 балла)* Сумма цифр двузначного числа $A$ равна 11. При делении числа $A$ на произведение его цифр частное равно 2, а остаток 5. Найдите число $A$.

**5.** *(2 балла)* Найдите $x$, если $a\star b=\dfrac{a+b}{a-b}$ и $3\star x=2\star 4$.

**6.** *(2 балла)* Решите уравнение $\dfrac{x^3-125}{x-5}=8x+35$.

**7.** *(2 балла)* Найдите все пары натуральных чисел $a$ и $b$, для которых НОД$(\mathrm{a},b)$=4, $a\cdot b=288$.

**8.** *(2 балла)* 17-летнего Колю спросили, сколько лет его братьям. Коля ответил: «Младшему из них сейчас столько, сколько было старшему, когда он был старше младшего в 1,5 раза». Сколько лет старшему из братьев Коли, если сейчас им втроем 31 год.

**9.** *(2 балла)* Найти наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству $|5x-3|>6x-2$.

**10.** *(2 балла)* В ромбе $PSTE$ высота $SH$ пересекает диагональ $PT$ в точке О, причем $SO:OH=3:2$. Найдите отрезок $OE$, если $OH=4$.

**11.** *(7 баллов)* Построить график функции $y=\dfrac{\left(\sqrt{2x^2-4x}\right)^2}{|x-2|}$. При каких значениях параметра $a$ прямая $y=a$ не имеет с графиком функции общих точек?

**12.** *(5 баллов)* Решите уравнение $\dfrac{2x}{x^2+x-2}+\dfrac{2}{3(x^2-4x+3)}=\dfrac{5}{3(x^2-x-6)}$.

**13.** *(6 баллов)* При каком наименьшем $a$ корни уравнения $x^2+3ax+8=0$ удовлетворяют условию $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{5}{2}$?

**14.** *(7 баллов)* $MNPQ$ – квадрат. Точка $E$ – середина $MN$, точка $F$ – середина $NP$. Отрезки $FM$ и $QE$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $OFQ$ равна 30. Найти площадь квадрата $MNPQ$.

**15.** *(5 баллов)* Имеются три слитка. Масса первого 6 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 20% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 50% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

## Решения и критерии оценивания
## Вариант №1

1. Вычислите $\dfrac{(\frac{1}{26}+13^7)^2-(\frac{1}{26}-13^7)^2}{(39^2-13^2)^3}:(0{,}0625)^2$.

**Решение.** Проведем следующие преобразования

$$\frac{\left(\frac{1}{26}+13^7\right)^2-\left(\frac{1}{26}-13^7\right)^2}{(39^2-13^2)^3}:(0,0625)^2=\frac{\left(\frac{1}{26}+13^7-\frac{1}{26}+13^7\right)\left(\frac{1}{26}+13^7+\frac{1}{26}-13^7\right)}{(39-13)^3\cdot(39+13)^3}:\left(\frac{1}{16}\right)^2=$$
$$=\frac{4\cdot\frac{1}{26}\cdot 13^7\cdot 2^8}{26^3\cdot 52^3}=\frac{13^6\cdot 2^9}{(13\cdot 3)^3\cdot(13\cdot 2^2)^3}=1.$$

**Ответ:** 1.

2. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $BC$ в точке $M$. Оказалось, что $BM=MC$. Найти угол $MAC$, если угол $MAB$ равен $35°$.

**Решение.** $\angle AMB=90°$ (вписанный и опирается на диаметр). В треугольнике $ABC$ отрезок $AM$ – медиана и высота, значит, он является равнобедренным и $AM$ так же является биссектрисой. Значит, $\angle MAB=\angle MAC=35°$.

**Ответ:** $\angle MAC=35°$.

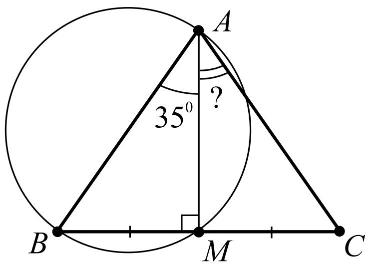

Рис. 1

3. Вычислите $\left(\sqrt{57}+3\sqrt{6}+\sqrt{38}+6\right)\left(\sqrt{57}-3\sqrt{6}-\sqrt{38}+6\right)$.

**Решение.**

$$\left(\sqrt{57}+6+(3\sqrt{6}+\sqrt{38})\right)\left(\sqrt{57}+6-(3\sqrt{6}+\sqrt{38})\right)=\left(\sqrt{57}+6\right)^2-\left(3\sqrt{6}+\sqrt{38}\right)^2=$$
$$=57+12\sqrt{57}+36-54-12\sqrt{57}-38=1.$$

**Ответ:** 1.

4. Сумма цифр двузначного числа $A$ равна 13. При делении числа $A$ на произведение его цифр частное равно 1, а остаток 34. Найдите число $A$.

**Решение.** Пусть $A=10x+y$, тогда $x+y=13$ и $10x+y=1\cdot xy+34$. Подставляя $y=13-x$ во второе уравнение, получаем $10x+13-x=13x-x^2+34$. Решая полученное квадратное уравнение $x^2-4x-21=0$, получаем $x_1=7$, $x_2=-3$ – посторонний корень. Итак, $x=7$, тогда $y=6$.

**Ответ:** 76.

5. Найдите $x$, если $a\star b=\dfrac{ab}{a+b}$ и $2\star x=3\star 4$.

**Решение.** Запишем уравнение $2\star x=3\star 4$ используя определение операции $\star$: $\dfrac{2x}{2+x}=\dfrac{3\cdot 4}{3+4}$. Откуда, при условии, что $x\neq -2$, $14x=24+12x$ и $x=12$.

**Ответ:** 12.

6. Решите уравнение $\dfrac{x^3-8}{2x-4}=12x-18$.

**Решение.**

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x-2)}=12x-18\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+2x+4=24x-36\\ x\neq 2,\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-22x+40=0\\ x\neq 2,\end{cases}$$

Решая первое уравнение системы получаем, что $x_1=20$, $x_2=2$. Учитывая ограничения, получаем

**Ответ:** 20.

7. Найдите все пары натуральных чисел $a$ и $b$, для которых НОД$(a, b)=3$, $a \cdot b = 108$.

**Решение.** Поскольку НОД$(a, b)=3$, то обозначим $a = 3a_1$, $b = 3b_1$, причем НОД$(a_1, b_1)=1$. Тогда из уравнения $9a_1b_1 = 108$, получаем $a_1b_1 = 12$. Учитывая, что НОД$(a_1, b_1)=1$, возможны варианты: $a_1 = 1$, $b_1 = 12$; $a_1 = 3$, $b_1 = 4$; $a_1 = 12$, $b_1 = 1$; $a_1 = 4$, $b_1 = 3$. Тогда

**Ответ:** $(3, 36), (9, 12), (36, 3), (12, 9)$.

8. Света гуляла в парке с младшей сестрой и встретила Таню. Таня спросила у Светы, сколько лет ее сестре. «Теперь ей столько лет, сколько было мне тогда, когда я была старше ее в 2,5 раза. А вместе нам 26 лет». Сколько лет сестре Светы?

**Решение.** Когда сестре было $x$ лет, Свете было $2,5x$ лет. Теперь сестре $2.5x$ лет. Значит, с тех пор прошло $2,5x - x = 1,5x$ лет. Поэтому Свете теперь $2,5x + 1,5x = 4x$ лет. Так как вместе девочкам 26 лет, то получаем уравнение $2,5x + 4x = 26$, откуда $x = 4$, а сестре Светы сейчас 10 лет.

**Ответ:** 10.

9. Найти наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству $|4x + 2| > 5x + 3$.

**Решение.** Рассмотрим два случая. Если $4x + 2 < 0$, то получаем неравенство $-4x - 2 > 5x + 3$, откуда $9x < -5$ и $x < -\frac{5}{9}$, пересекая с условием $x < -\frac{1}{2}$, получаем $x < -\frac{5}{9}$. Если $4x + 2 \geq 0$, то получаем неравенство $4x + 2 > 5x + 3$, откуда $x < -1$, пересекая с условием $x \geq -\frac{1}{2}$, получаем, что решений нет. Тогда наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству будет $x = -1$.

**Ответ:** $-1$.

10. В ромбе $MNPK$ высота $NH = 8$. Она пересекает диагональ $MP$ в точке $O$, причем $MO : OP = 1 : 3$. Найдите отрезок $OK$.

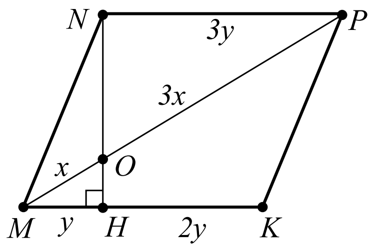


Рис. 2

**Решение.** Треугольники $MOH$ и $NOP$ подобны, поэтому $\frac{MH}{NP} = \frac{HO}{ON} = \frac{MO}{OP} = \frac{1}{3}$. Значит, $NO = 6, OH = 2, MH = y, NP = MN = 3y$. По теореме Пифагора для треугольника $MNH$ получим: $MN^2 = MH^2 + HN^2$, $y^2 + 8^2 = (3y)^2$, откуда $y = 2\sqrt{2}$. Осталось применить теорему Пифагора для треугольника $OHK$ и найти, что $OK = 6$.

**Ответ:** 6.

11. Построить график функции $y = \frac{\left(\sqrt{2x^2 - 4x}\right)^2}{|x|}$. При каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в двух различных точках?

**Решение.** Область определения данной функции задается следующими условиями: $\begin{cases} 2x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем, что $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. На области определения упростим формулу, которой задается данная функция:

$$y = \frac{2x^2 - 4x}{|x|} = \begin{cases} -2(x - 2), \text{если} x < 0, \\ 2(x - 2), \text{если} x \geqslant 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке №4. По графику находим, что прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в двух различных точках при $a > 4$.

**Ответ:** $a > 4$.

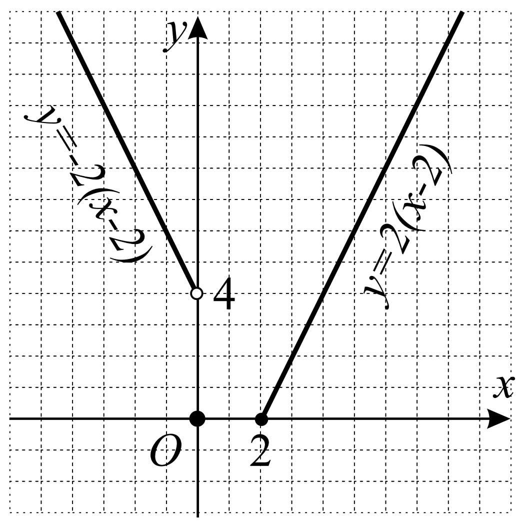


Рис. 5

12. Решите уравнение $\frac{19 - 2x}{x^2 + 5x + 4} - \frac{2x + 9}{x^2 + 3x + 2} = \frac{4x}{x^2 + 6x + 8}$.

**Решение.** Разложим знаменатели дробей на множители и приведем дроби к общему знаменателю.

$$\frac{19 - 2x}{(x + 1)(x + 4)} - \frac{2x + 9}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{4x}{(x + 2)(x + 4)} \Leftrightarrow \frac{(19 - 2x)(x + 2) - (2x + 9)(x + 4) - 4x(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)(x + 4)} = 0.$$

$$\begin{cases} -8x^2-6x+2=0 \\ x\neq -1, x\neq -2, x\neq -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, x=\frac{1}{4} \\ x\neq -1, x\neq -2, x\neq -4, \end{cases}$$

**Ответ:** 0,25.

13. При каком наибольшем $a$ корни уравнения $x^2+3ax+8=0$ удовлетворяют усл. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{5}{2}$?

**Решение.**

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{2}.$$

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем $\dfrac{9a^2-16}{8}=\dfrac{5}{2}$. Откуда, $a^2=4$, $a=\pm 2$. Убедимся, что при данных значениях параметра $a$ уравнение имеет решение. Получаем уравнения $x^2\pm 6x+8=0$, дискриминант которых $D=36-32>0$.

**Ответ:** 2.

14. $ABCD$ – квадрат со стороной 10. Точка $E$ – середина $AB$, точка $F$ – середина $BC$. Отрезки $DE$ и $AF$ пересекаются в точке $O$. Найти площадь треугольника $OFD$.

**Решение.** Пусть прямые $BC$ и $DE$ пересекаются в точке $K$. Треугольники $KBE$ и $EAD$ равны (по катету и острому углу), откуда $KB=AD=10$ и $S_{KFD}=S_{KBE}+S_{BEDF}=S_{ADE}+S_{BEDF}=S_{ABFD}=S_{ABCD}-S_{FCD}=75$. Пусть прямые $AF$ и $DE$ пересекаются в точке $O$. Треугольники $KFO$ и $AOD$ подобны (по двум углам), откуда $KO:OD=KF:AD=15:10=3:2$.

Треугольники $KFO$ и $FOD$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания. Значит, $S_{FOD}=\dfrac{2}{5}S_{KFD}=\dfrac{2}{5}\cdot 75=30$.

**Ответ:** 30.

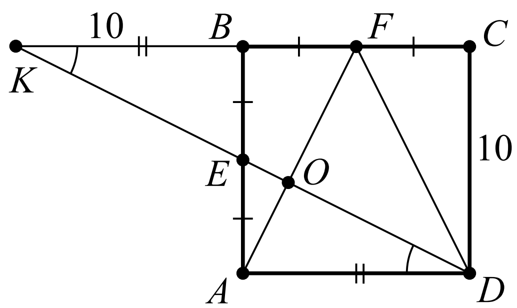


Рис. 3

15. Имеются три слитка. Масса первого 5 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

**Решение.** Пусть масса третьего слитка $m$ кг и он содержит $p\%$ меди. Тогда из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 0{,}3+\frac{mp}{100}=0{,}56(5+m) \\ 3\cdot 0{,}3+\frac{mp}{100}=0{,}60(3+m), \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $0,6=1-0{,}04m$, откуда $m=10$. Подставляя найденное значение $m$ в первой уравнение, получаем $1{,}5+0{,}1p=8{,}4$,откуда $p=69$. **Ответ:** Масса третьего слитка 10 кг, он содержит 69% меди.

**Критерии:**

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 2 балла за верный ответ, 1 балл, если кроме верного есть ответ 2.
7. 1 балл за каждую верную неупорядоченную пару, $-1$ за каждую неверную пару.
8. 2 балла за верный ответ.
9. 2 балла за верный ответ.
10. 2 балла за верный ответ.
11. *+1 балл* – верно найдена ОДЗ;

*+3 балла* – верно построен график функции;

*+3 балла* – верно определены значения параметра.

12. *+3 балла* – верно привели к общему знаменателю и получили квадратное уравнение в числителе;

*+2 балла* – верно найдены корни полученного квадратного уравнения;

*-1 балл* – если не учтена ОДЗ.

13. *+3 балла* – получение уравнения относительно параметра $a$;

*+2 балла* – получен верный ответ;

*+1 балл* – проверка, что при найденном $a$ уравнение имеет корни.

14. *+3 балла* – за верно найденные отношения отрезков, отношения площадей, которые могут быть использованы для получения ответа в задаче (но при этом задача не решена полностью);

*-1 балл* – за арифметическую ошибку.

15. *+2 балла* – верно составлена система уравнений;

*+3 балла* – составленная система уравнений верно решена.

**Решения и критерии оценивания**
**Вариант №2**

1. Вычислите $\dfrac{(\frac{1}{33}+11^9)^2-(\frac{1}{33}-11^9)^2}{(44^2-11^2)^4}:(0{,}008)^2\cdot 27^2$.

**Решение.** Проведем следующие преобразования

$$\frac{\left(\frac{1}{33}+11^9\right)^2-\left(\frac{1}{33}-11^9\right)^2}{(44^2-11^2)^4}:(0{,}008)^2{\cdot}27^2=\frac{\left(\frac{1}{33}+11^9-\frac{1}{33}+11^9\right)\left(\frac{1}{33}+11^9+\frac{1}{33}-11^9\right)}{((44-11)\cdot(44+11))^4}:\left(\frac{1}{125}\right)^2{\cdot}\left(3^3\right)^2=$$

$$=\frac{2\cdot 11^9\cdot 2\cdot\dfrac{1}{33}}{33^4\cdot 55^4}\cdot 5^6\cdot 3^6=\frac{4\cdot 11^8\cdot 5^6\cdot 3^5}{3^4\cdot 5^4\cdot 11^8}=300$$

**Ответ:** 300.

2. На стороне $MN$ треугольника $MNP$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $MP$ в ее середине. Найти угол $NPM$, если угол $NMP$ равен $40°$.

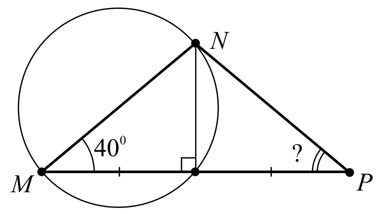


Рис. 1

**Решение.** Пусть точка $H$ – середина $MP$. $\angle NHM=90°$ (вписанный и опирается на диаметр). В треугольнике $MNP$ отрезок $NH$ – медиана и высота, значит, он является равнобедренным и в нем углы при основании равны. Значит, $\angle NPM=\angle NMP=40°$.

**Ответ:** $\angle NPM=40°$.

3. Вычислите $\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right)$.

**Решение.**

$$\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+(2\sqrt{26}+6)\right)\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-(2\sqrt{26}+6)\right)=\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}\right)^2-\left(2\sqrt{26}+6\right)^2=$$

$$=96+24\sqrt{26}+39-104-24\sqrt{26}-36=-5.$$

**Ответ:** 180.

4. Сумма цифр двузначного числа $A$ равна 11. При делении числа $A$ на произведение его цифр частное равно 2, а остаток 5. Найдите число $A$.

**Решение. Решение.** Пусть $A=10x+y$, тогда $x+y=11$ и $10x+y=2\cdot xy+5$. Подставляя $y=11-x$ во второе уравнение, получаем $10x+11-x=22x-2x^2+5$. Решая полученное квадратное уравнение $2x^2-13x+6=0$, получаем $x_1=6$, $x_2=\frac{1}{2}$ – посторонний корень. Итак, $x=6$, тогда $y=5$.

**Ответ:** 65.

5. Найдите $x$, если $a\star b=\dfrac{a+b}{a-b}$ и $3\star x=2\star 4$.

**Решение.**Запишем уравнение $3\star x=2\star 4$ используя определение операции $\star$: $\dfrac{3+x}{3-x}=\dfrac{2+4}{2-4}$. Откуда, при условии, что $x\neq 3$, $-6-2x=18-6x$ и $x=6$.

**Ответ:** 6.

6. Решите уравнение $\dfrac{x^3-125}{x-5}=8x+35$.

**Решение. Решение.**

$$\frac{(x-5)(x^2+5x+25)}{x-5}=8x+35\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2+5x+25=8x+35\\ x\neq 5,\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-3x-10=0\\ x\neq 5,\end{cases}$$

Решая первое уравнение системы получаем, что $x_1=-2$, $x_2=5$. Учитывая ограничения, получаем

**Ответ:** $-2$.

7. Найдите все пары натуральных чисел $a$ и $b$, для которых НОД(a, $b$)=4, $a \cdot b = 288$.
**Решение.** Поскольку НОД(a, $b$)=4, то обозначим $a = 4a_1$, $b = 4b_1$, причем НОД($a_1, b_1$)=1. Тогда из уравнения $16a_1b_1 = 288$, получаем $a_1b_1 = 18$. Учитывая, что НОД($a_1, b_1$)=1, возможны варианты: $a_1 = 1$, $b_1 = 18$; $a_1 = 2$, $b_1 = 9$; $a_1 = 18$, $b_1 = 1$; $a_1 = 9$, $b_1 = 2$. Тогда
**Ответ:** $(4, 72), (8, 36), (72, 4), (36, 8)$.

8. 17-летнего Колю спросили, сколько лет его братьям. Коля ответил: «Младшему из них сейчас столько, сколько было старшему, когда он был старше младшего в 1,5 раза». Сколько лет старшему из братьев Коли, если сейчас им втроем 31 год.
**Решение.** Когда младшему брату Коли было $x$ лет, старшему было $1,5x$ лет. Сейчас младшему брату $1.5x$ лет. Значит, с тех пор прошло $1,5x - x = 0,5x$ лет. Поэтому старшему брату сейчас $1,5x + 0,5x = 2x$ лет. Так как вместе всем братьям 31 год, то получаем уравнение $17 + 1,5x + 2x = 31$, откуда $x = 4$, а возраст старшего брата Коли 8 лет.
**Ответ:** 8.

9. Найти наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству $|5x - 3| > 6x - 2$.
**Решение.** Рассмотрим два случая. Если $5x - 3 < 0$, то получаем неравенство $-5x + 3 > 6x - 2$, откуда $11x < 5$ и $x < \frac{5}{11}$, пересекая с условием $x < \frac{3}{5}$, получаем $x << \frac{5}{11}$. Если $5x - 3 \geq 0$, то получаем неравенство $5x - 3 > 6x - 2$, откуда $x < -1$, пересекая с условием $x \geq \frac{3}{5}$, получаем, что решений нет. Тогда наибольшее целое $x$, удовлетворяющее неравенству будет $x = 0$.
**Ответ:** 0.

10. В ромбе $PSTE$ высота $SH$ пересекает диагональ $PT$ в точке O, причем $SO : OH = 3 : 2$. Найдите отрезок $OE$, если $OH = 4$.
**Решение.** $OH = 4 = \dfrac{2}{5}SH$, поэтому $SH = 10$. $\triangle POH \sim \triangle SOT$, значит $\dfrac{PH}{ST} = \dfrac{OH}{OS} = \dfrac{2}{3}$. Значит, $PH = 2y$, $PS = ST = 3y$. По теореме Пифагора для $\triangle PSH$ получим: $PS^2 = SH^2 + PH^2$, $(2y)^2 + 10^2 = (3y)^2$, откуда $y = 2\sqrt{5}$. Осталось применить теорему Пифагора для треугольника $OHE$ и найти, что $OE = 6$.
**Ответ:** 6.

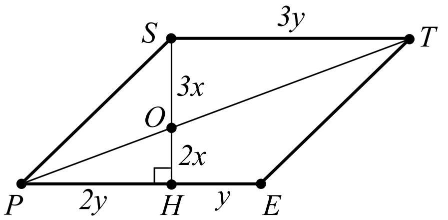

Рис. 2

11. Построить график функции $y = \dfrac{\left(\sqrt{2x^2 - 4x}\right)^2}{|x - 2|}$. При каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ не имеет с графиком функции общих точек?
**Решение.** Область определения данной функции задается следующими условиями: $\begin{cases} 2x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x - 2 \neq 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем, что $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. На области определения упростим формулу, которой задается данная функция:

$$y = \frac{2x^2 - 4x}{|x - 2|} = \begin{cases} -2x, \text{если} x < 0, \\ 2x, \text{если} x \geqslant 2. \end{cases}$$

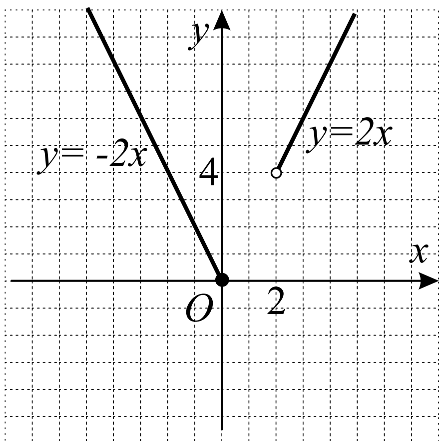

Рис. 5

График функции изображен на рисунке №4. По графику находим, что прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в одной точке при $0 \leqslant a < 4$.
**Ответ:** $0 \leqslant a < 4$.

12. Решите уравнение $\dfrac{2x}{x^2 + x - 2} + \dfrac{2}{3(x^2 - 4x + 3)} = \dfrac{5}{3(x^2 - x - 6)}$.

**Решение.** Разложим знаменатели дробей на множители и приведем дроби к общему знаменателю.

$$\frac{2x}{(x+2)(x-1)}+\frac{2}{3(x-1)(x-3)}=\frac{5}{3(x-3)(x+2)}\Leftrightarrow\frac{6x(x-3)+2(x+2)-5(x-1)}{3(x-1)(x+2)(x-3)}=0.$$

$$\begin{cases}6x^2-21x+9=0\\ x\neq 1, x\neq -2, x\neq 3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3, x=\frac{1}{2}\\ x\neq 1, x\neq -2, x\neq 3,\end{cases}$$

**Ответ:** 0,5.

13. При каком наименьшем $a$ корни уравнения $x^2+3ax+8=0$ удовлетворяют усл. $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{5}{2}$?

**Решение.**

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{5}{2}.$$

Воспользовавшись теоремой Виета, получаем $\dfrac{9a^2-16}{8}=\dfrac{5}{2}$. Откуда, $a^2=4$, $a=\pm 2$. Убедимся, что при данных значениях параметра $a$ уравнение имеет решение. Получаем уравнения $x^2\pm 6x+8=0$, дискриминант которых $D=36-32>0$.

**Ответ:** $-2$.

14. $MNPQ$ – квадрат. Точка $E$ – середина $MN$, точка $F$ – середина $NP$. Отрезки $FM$ и $QE$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $OFQ$ равна 30. Найти площадь квадрата $MNPQ$.

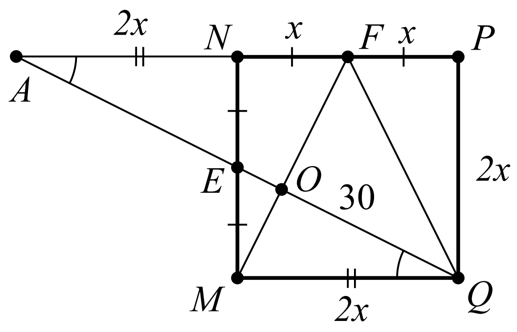

Рис. 3

**Решение.** Пусть прямые $NP$ и $QE$ пересекаются в точке $A$. $\triangle ANE=\triangle EMQ$ (по катету и острому углу), откуда $AN=MQ=2x$ и $S_{AFQ}=S_{APQ}-S_{FPQ}=\dfrac{1}{2}AP\cdot PQ-\dfrac{1}{2}FP\cdot PQ=3x^2$. Пусть прямые $MF$ и $QE$ пересекаются в точке $O$. Треугольники $MQO$ и $AOF$ подобны (по двум углам), откуда $AO:OQ=AF:MQ=3x:2x=3:2$.

Треугольники $AFO$ и $FOQ$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания. Значит, $\dfrac{S_{OFQ}}{S_{AFO}}=\dfrac{QO}{OA}=\dfrac{2}{3}$, $S_{OFQ}=\dfrac{2}{5}S_{AFQ}=3x^2\cdot\dfrac{2}{5}=30$, $x^2=25$. $S_{MNPQ}=(2x)^2=100$.

**Ответ:** 100.

15. Имеются три слитка. Масса первого 6 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 20% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 50% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание меди в нем.

**Решение.** Пусть масса третьего слитка $m$ кг и он содержит $p$% меди. Тогда из условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases}6\cdot 0{,}2+\frac{mp}{100}=0{,}50(6+m)\\ 3\cdot 0{,}2+\frac{mp}{100}=0{,}56(3+m),\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $0{,}6=1{,}32-0{,}06m$, откуда $m=12$. Подставляя найденное значение $m$ в первой уравнение, получаем $1{,}2+0{,}12p=9$, откуда $p=65$.

**Ответ:** Масса третьего слитка 12 кг, он содержит 65% меди.

**Критерии:**

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 2 балла за верный ответ, 1 балл, если кроме верного есть ответ 5.
7. 1 балл за каждую верную неупорядоченную пару, $-1$ за каждую неверную пару.
8. 2 балла за верный ответ.
9. 2 балла за верный ответ.
10. 2 балла за верный ответ.
11. *+1 балл* – верно найдена ОДЗ;

*+3 балла* – верно построен график функции;

*+3 балла* – верно определены значения параметра.

12. *+3 балла* – верно привели к общему знаменателю и получили квадратное уравнение в числителе;

*+2 балла* – верно найдены корни полученного квадратного уравнения;

*-1 балл* – если не учтена ОДЗ.

13. *+3 балла* – получение уравнения относительно параметра $a$;

*+2 балла* – получен верный ответ;

*+1 балл* – проверка, что при найденном $a$ уравнение имеет корни.

14. *+3 балла* – за верно найденные отношения отрезков, отношения площадей, которые могут быть использованы для получения ответа в задаче (но при этом задача не решена полностью);

*-1 балл* – за арифметическую ошибку.

15. *+2 балла* – верно составлена система уравнений;

*+3 балла* – составленная система уравнений верно решена.