**СУНЦ УрФУ**
**Разбор вступительного экзамена по математике**
**для поступающих в 9ФММИ, 2025 год**
**Вариант 1**

## Часть 1

| Номер задачи | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ: | 1 | 35 | $-2027$ | $-27$ | $-16$ | 197 или 208 | 10 | $[2;3)$ | 6 | $\dfrac{1}{18\sqrt{a}}$ |

**1.** *(2 балла)* Вычислить: $\dfrac{(\frac{1}{26}+13^7)^2-(\frac{1}{26}-13^7)^2}{(39^2-13^2)^3} : (0,0625)^2$.

**Решение.** Проведем следующие преобразования

$$\frac{(\frac{1}{26}+13^7)^2-(\frac{1}{26}-13^7)^2}{(39^2-13^2)^3} : (0,0625)^2 = \frac{(\frac{1}{26}+13^7-\frac{1}{26}+13^7)(\frac{1}{26}+13^7+\frac{1}{26}-13^7)}{(39-13)^3\cdot(39+13)^3} : (\frac{1}{16})^2 =$$

$$= \frac{4\cdot\frac{1}{26}\cdot 13^7\cdot 2^8}{26^3\cdot 52^3} = \frac{13^6\cdot 2^9}{(13\cdot 3)^3\cdot(13\cdot 2^2)^3} = 1$$

**Ответ.** 1.

**2.** *(2 балла)* На стороне $AB$ треугольника $ABC$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $BC$ в точке $M$. Оказалось, что $BM = MC$. Найти угол $MAC$, если угол $MAB$ равен $35°$.

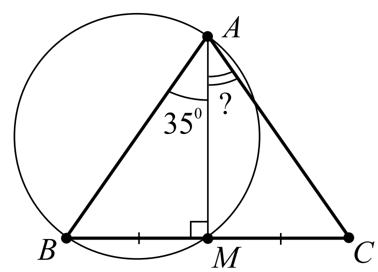

Рис. 1

**Решение.** $\angle AMB = 90°$ (вписанный и опирается на диаметр). В треугольнике $ABC$ отрезок $AM$ — медиана и высота, значит, он является равнобедренным и $AM$ так же является биссектрисой. Значит, $\angle MAB = \angle MAC = 35°$

**Ответ.** $\angle MAC = 35°$.

**3.** *(2 балла)* Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то результат увеличится на 2025. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1? Ответ дать в виде числа со знаком (плюс — увеличение, минус — уменьшение).

**Решение.** Пусть $a$ — первый множитель, $b$ — второй. По условию задачи $(a+1)(b-1) = ab+2025$. Тогда $a - b = -2026$. Получаем: $(a-1)(b+1) = ab + (a-b-1) = ab - 2027$. Это означает, что произведение уменьшилось на 2027.

**Ответ.** $-2027$.

**4.** *(2 балла)* Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось ординат в точке $(0;48)$, а ось абсцисс в точках $(-2;0)$ и $(-8;0)$. Найти наименьшее значение данной квадратичной функции.

**Решение.** Пусть $(x_0, y_0)$ координаты вершины параболы. Так как точки пересечения параболы с осью абсцисс симметричны отосительно прямой $x = x_0$, то $x_0 = -5$. Поэтому, уравнение параболы можно переписать в виде $y = a(x+5)^2 + y_0$. Подставим в него координаты точек $(-2;0)$ и $(0;48)$ и получим систему $\begin{cases} 48 = 25a + y_0, \\ 0 = 9a + y_0, \end{cases}$ решая которую, находим $a = 3$ и $y_0 = -27$. Поскольку $a > 0$, то $y_0 = -27$ является наименьшим значением данной квадратичной функции.

**Ответ.** $-27$.

**5.** *(2 балла)* Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{18-7x-x^2}}{x^2+2x-15} \leqslant 0$. В ответе указать сумму его целых решений.

**Решение.** $\dfrac{\sqrt{(2-x)(x+9)}}{(x-3)(x+5)} \leqslant 0$. Неравенство определено при условии, что подкоренное выражение неотрицательно, то есть на отрезке $[-9;2]$. Решая неравенство методом интервалов на этом отрезке, получим, что $x \in (-5;2] \cup \{-9\}$. Значит, сумма целых решений неравенства равна: $-9-4-3-2-1+0+1+2=-16$.

**Ответ.** $-16$.

**6.** *(2 балла)* Таня написала на доске 11 последовательных натуральных чисел. Ваня подбежал, стер одно из них и сказал: "Смотри, фокус! Сумма оставшихся равна 2025!" Какое число стер Ваня?

**Решение.** Пусть Таня написала на доске числа $n, n+1, n+2, .., n+10$. Сумма всех чисел, которые написала Таня, равна $11n+(1+2+...+10)=11n+55$. Пусть Ваня стер число $n+p$, где $0 \leqslant p \leqslant 10$. Тогда получаем уравнение: $11n+55=2025+(n+p)$, решая которое получаем: $10n=1970+p$. Последнее уравнение имеет два решения: $p=0, n=197; p=10, n=198$. Значит, на доске могли быть написаны числа $197, 198, .., 207$, тогда Ваня стер 197; либо были написаны числа $198, 199, ..., 208$, тогда Ваня стер 208.

**Ответ.** 197 или 208.

**7.** *(2 балла)* Света гуляла в парке с младшей сестрой и встретила Таню. Таня спросила у Светы, сколько лет ее сестре. "Теперь ей столько лет, сколько было мне тогда, когда я была старше ее в 2,5 раза. А вместе нам 26 лет". Сколько лет Светиной сестре?

**Решение.** Когда сестре было $x$ лет, Свете было $2,5x$ лет. Теперь сестре $2.5x$ лет. Значит, с тех пор прошло $2,5x-x=1,5x$ лет. Поэтому Свете теперь $2,5x+1,5x=4x$ лет. Так как вместе девочкам 26 лет, то получаем уравнение $2,5x+4x=26$, откуда $x=4$.
Возраст сестры $2.5 \cdot 4 = 10$ лет.

**Ответ.** 10 лет.

**8.** *(2 балла)* Найдите значения параметра $a$, при которых система неравенств $\begin{cases} a-2 \leqslant x \leqslant a+6, \\ x \geqslant 3 \end{cases}$ имеет ровно 6 целых решений.

**Решение.** Система неравенств будет иметь решения, если $a-2 \leqslant 3 \leqslant a+6$. В этом случае решением системы будет отрезок $[3; a+6]$. Шесть целых чисел, лежащих на этом отрезке: 3, 4, 5, 6, 7, 8, поэтому правая граница промежутка должна удовлетворять условию: $8 \leqslant a+6 < 9$, значит, $2 \leqslant a < 3$ .

**Ответ.** $a \in [2;3)$.

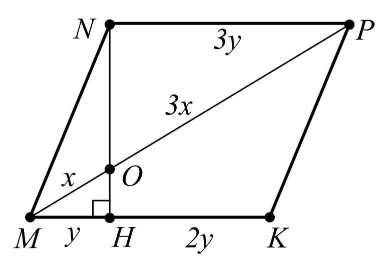

Рис. 2

**9.** *(3 балла)* В ромбе $MNPK$ высота $NH=8$. Она пересекает диагональ $MP$ в точке О, причем $MO:OP=1:3$. Найдите отрезок $OK$.

**Решение.** Треугольники $MOH$ и $NOP$ подобны, поэтому $\dfrac{MH}{NP}=\dfrac{HO}{ON}=\dfrac{MO}{OP}=\dfrac{1}{3}$. Значит, $NO=6$, $OH=2$, $MH=y$, $NP=MN=3y$. По теореме Пифагора для треугольника $MNH$ получим: $MN^2=MH^2+HN^2$, $y^2+8^2=(3y)^2$, откуда $y=2\sqrt{2}$. Осталось применить теорему Пифагора для треугольника $OHK$ и найти, что $OK=6$.

**Ответ.** 6.

**10.** *(3 балла)* Упростить выражение: $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(18a\sqrt{a}-18b\sqrt{a})+\frac{\sqrt{b}}{9(a+\sqrt{ab})}$.

**Решение.**

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):(18a\sqrt{a}-18b\sqrt{a})+\frac{\sqrt{b}}{9(a+\sqrt{ab})}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right):18\sqrt{a}(a-b)+\frac{\sqrt{b}}{9\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{18\sqrt{a}(a-b)}+\frac{\sqrt{b}}{9\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{b}}{18\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{1}{18\sqrt{a}}$$

.

**Ответ.** $\frac{1}{18\sqrt{a}}$.

## Часть 2

**11.** *(5 баллов)* Прямая $y=mx+n$ $(m\neq 0, n\neq 0)$ пересекает параболу $y=\frac{x^2}{b}$ в точках с абсциссами $x_2$ и $x_3$, а ось абсцисс в точке $(x_1,0)$. Докажите, что $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ .

**Решение.** Число $x_1$ - корень уравнения $mx+n=0$, поэтому $x_1=-\frac{n}{m}$. Числа $x_2$ и $x_3$ являются корнями уравнения $\frac{x^2}{b}=mx+n$. Тогда по теореме Виета $\begin{cases} x_2+x_3=mb, \\ x_2\cdot x_3=-nb \end{cases}$ .

Получаем: $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2+x_3}{x_2\cdot x_3}=\frac{mb}{-nb}=-\frac{n}{m}=\frac{1}{x_1}$.

**12.** *(6 баллов)* $ABCD$ — квадрат со стороной 10. Точка $E$ — середина $AB$, точка $F$ — середина $BC$. Отрезки $DE$ и $AF$ пересекаются в точке $O$. Найти площадь треугольника $OFD$.

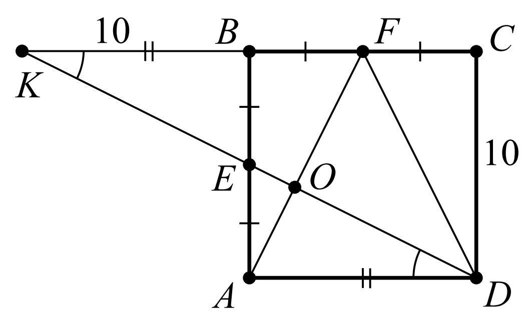

Рис. 3

**Решение.** Пусть прямые $BC$ и $DE$ пересекаются в точке $K$. Треугольники $KBE$ и $EAD$ равны (по катету и острому углу), откуда $KB=AD=10$ и $S_{KFD}=S_{KBE}+S_{BEDF}=$ $=S_{ADE}+S_{BEDF}=S_{ABFD}=S_{ABCD}-S_{FCD}=75$. Пусть прямые $AF$ и $DE$ пересекаются в точке $O$. Треугольники $KFO$ и $AOD$ подобны (по двум углам), откуда $KO:OD=$ $=KF:AD=15:10=3:2$. Треугольники $KFO$ и $FOD$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания. Значит, $S_{FOD}=\frac{2}{5}S_{KFD}=\frac{2}{5}\cdot 75=30$.

**Ответ.** 30.

**13.** *(5 баллов)* Найти все значения параметра $k$, при которых уравнения $2x^2(x+1)=kx$ имеет ровно три различных корня.

**Решение.** Значение $x=0$ является корнем данного уравнения при любом значении $k$, поэтому чтобы исходное уравнение имело три различных корня, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $2x^2+2x-k=0$ имело два различных ненулевых корня.

Значит, $\begin{cases} D>0, \\ k\neq 0. \end{cases}$ Решая данную систему, находим, что $k\in(-\frac{1}{2};0)\cup(0;+\infty)$.

**Ответ.** $k\in(-\frac{1}{2};0)\cup(0;+\infty)$.

**14.** *(6 баллов)* На день рождения Вероника купила треугольную пиццу и разрезала ее по каждой из биссектрис. В результате у нее получилось 6 кусков. Опаздавшему Сергею достался кусок в виде прямоугольного треугольника. «Я утверждаю, что первоначально пицца имела форму равнобедренного треугольника»,— сказал Сергей. Прав ли он? Ответ обоснуйте.

**Решение.** Любой кусок пиццы имеет углы трех типов: *угол первого типа* — это половина какого-то из углов исходного треугольника. Такие углы прямыми быть не могут, потому что это бы означало, что исходный треугольник имел угол 180°;

*угол второго типа* — это угол с вершиной в точке пересечения биссектрис исходного треугольника. Этот угол является внешним для треугольника, два угла которого — это половины углов исходного треугольника, поэтому он равен их сумме и тоже не может быть прямым (так как тогда сумма двух углов исходного треугольника была бы равна 180°);

*угол третьего типа* — это угол между биссектрисой и сторонй треугольника. Если он прямой, то это означает, что в исходном треугольнике биссектриса совпадает с высотой, а, значит, этот треугольник является равнобедренным.

Из приведенных выше рассуждений следует, что Сергей прав.

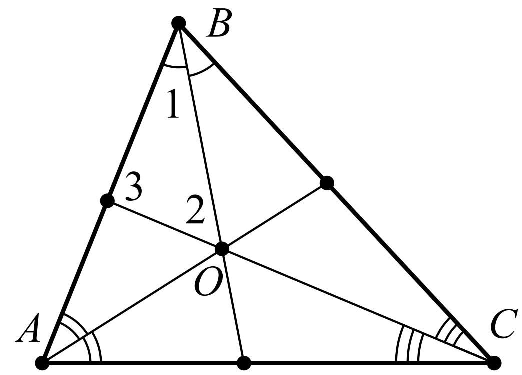


Рис. 4

**Ответ.** Сергей прав.

**15.** *(6 баллов)* Построить график функции $y = \dfrac{\left(\sqrt{2x^2-4x}\right)^2}{|x|}$. При каких значениях параметра $a$ прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в двух различных точках?

**Решение.** Область определения данной функции задается следующими условиями: $\begin{cases} 2x^2-4x \geqslant 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем, что $x \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. На области определения упростим формулу, которой задается данная функция:

$$y = \frac{2x^2-4x}{|x|} = \begin{cases} -2(x-2), \text{ если } x < 0, \\ 2(x-2), \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 5. По графику находим, что прямая $y = a$ пересекает график функции ровно в двух различных точках при $a > 4$.

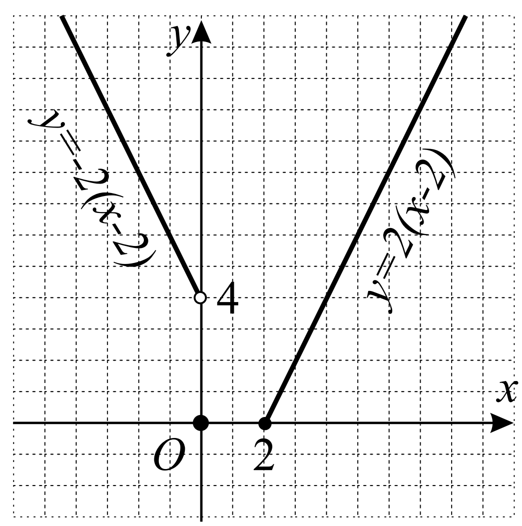


Рис. 5

**Ответ.** $a > 4$.

## СУНЦ УрФУ
## Разбор вступительного экзамена по математике для поступающих в 9ФМФТМИ, 2025 год
## Вариант 2

# Часть 1

| Номер задачи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ответ: | 300 | 40 | +2023 | $-\dfrac{3}{2}$ | $-18$ | 220 или 230 | 8 | $(5;6]$ | 6 | $\dfrac{\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ |

**1.** *(2 балла)* Вычислить: $\dfrac{(\frac{1}{33}+11^9)^2-(\frac{1}{33}-11^9)^2}{(44^2-11^2)^4} : (0{,}008)^2 \cdot 27^2$.

**Решение.** Проведем следующие преобразования

$$\frac{(\frac{1}{33}+11^9)^2-(\frac{1}{33}-11^9)^2}{(44^2-11^2)^4} : (0{,}008)^2 \cdot 27^2 = \frac{(\frac{1}{33}+11^9-\frac{1}{33}+11^9)(\frac{1}{33}+11^9+\frac{1}{33}-11^9)}{((44-11)\cdot(44+11))^4} : (\frac{1}{125})^2 \cdot (3^3)^2 =$$

$$= \frac{2\cdot 11^9 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{33}}{33^4\cdot 55^4} \cdot 5^6 \cdot 3^6 = \frac{4\cdot 11^8\cdot 5^6\cdot 3^5}{3^4\cdot 5^4\cdot 11^8} = 300$$

**Ответ.** 300.

**2.** *(2 балла)* На стороне $MN$ треугольника $MNP$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону $MP$ в ее середине. Найти угол $NPM$, если угол $NMP$ равен $40°$.

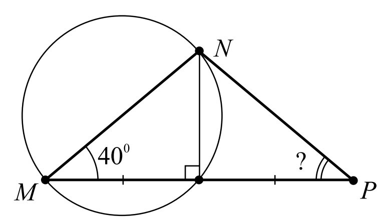


Рис. 1

**Решение.** Пусть точка $H$ — середина $MP$. $\angle NHM = 90°$ (вписанный и опирается на диаметр). В треугольнике $MNP$ отрезок $NH$ — медиана и высота, значит, он является равнобедренным и в нем углы при основании равны. Значит, $\angle NPM = \angle NMP = 40°$.

**Ответ.** $\angle NPM = 40°$.

**3.** *(2 балла)* Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то результат уменьшится на 2025. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1? Ответ дать в виде числа со знаком (плюс — увеличение, минус — уменьшение).

**Решение.** Пусть $a$ — первый множитель, $b$ — второй. По условию задачи $(a+1)(b-1) = ab-2025$. Тогда $a-b = 2024$. Получаем: $(a-1)(b+1) = ab+(a-b-1) = ab+2023$. Это означает, что произведение увеличилось на 2023.

**Ответ.** +2023.

**4.** *(2 балла)* Парабола $y = ax^2+bx+c$ пересекает ось ординат в точке $(0,-18)$. Прямая $x = 4$ является его осью симметрии. Найти коэффициент $a$, если известно, что наибольшее значение этой функции равно 6.

**Решение.** Пусть $(x_0, y_0)$ координаты вершины параболы. Тогда по условию задачи $x_0 = 4$, $y_0 = 6$. Поэтому, уравнение параболы можно переписать в виде $y = a(x-4)^2+6$. Подставим в него координаты точек $(0;-18)$ и найдем,что коэффициент $a = -\dfrac{3}{2}$.

**Ответ.** $-\dfrac{3}{2}$.

**5.** *(2 балла)* Решить неравенство: $\dfrac{\sqrt{18-3x-x^2}}{8-7x-x^2} \geqslant 0$. В ответе указать сумму его целых решений.

**Решение.** $\dfrac{\sqrt{(x+6)(3-x)}}{(x+8)(1-x)} \geqslant 0$. Неравенство определено при условии, что подкоренное выражение неотрицательно, то есть на отрезке $[-6;3]$. Решая неравенство методом интервалов на этом отрезке, получим, что $x \in [-6;1) \cup \{3\}$. Значит, сумма целых решений неравенства равна: $-6-5-4-3-2-1+0+3=-18$.

**Ответ.** $-18$.

**6.** *(2 балла)* Таня написала на доске 10 последовательных натуральных чисел. Ваня подбежал, стер одно из них и сказал: "Смотри, фокус! Сумма оставшихся равна 2025!" Какое число стер Ваня?

**Решение.** Пусть Таня написала на доске числа $n, n+1, n+2, .., n+9$. Сумма всех чисел, которые написала Таня, равна $10n+(1+2+...+9)=10n+45$. Пусть Ваня стер число $n+p$, где $0 \leqslant p \leqslant 9$. Тогда получаем уравнение: $10n+45=2025+(n+p)$, решая которое получаем: $9n=1980+p$. Последнее уравнение имеет два решения: $p=0, n=220; p=9, n=221$. Значит, на доске могли быть написаны числа $220, 221, .., 229$, тогда Ваня стер 220; либо были написаны числа $221, 222, ..., 230$, тогда Ваня стер 230.

**Ответ.** 220 или 230.

**7.** *(2 балла)* 17-летнего Колю спросили, сколько лет его братьям. Коля ответил: «Младшему из них сейчас столько, сколько было старшему, когда он был старше младшего в 1,5 раза». Сколько лет старшему из братьев Коли, если сейчас им втроем 31 год.

**Решение.** Когда младшему брату Коли было $x$ лет, старшему было $1,5x$ лет. Сейчас младшему брату $1.5x$ лет. Значит, с тех пор прошло $1,5x-x=0,5x$ лет. Поэтому старшему брату сейчас $1,5x+0,5x=2x$ лет. Так как вместе всем братьям 31 год, то получаем уравнение $17+1,5x+2x=31$, откуда $x=4$, а возраст старшего брата Коли 8 лет.

**Ответ.** 8 лет.

**8.** *(2 балла)* Найдите значения параметра $a$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} a-8 \leqslant x \leqslant a+1, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет ровно 5 целых решений.

**Решение.** Система неравенств будет иметь решения при условии, что $a-8 \leqslant 2 \leqslant a+1$. В этом случае решением системы будет отрезок $[a-8;2]$. Пять целых чисел, которые лежат на этом отрезке: $-2, -1, 0, 1, 2$. Поэтому левая граница отрезка должна удовлетворять условию: $-3 < a-8 \leqslant -2$. Значит, $a \in (5;6]$

**Ответ.** $(5;6]$.

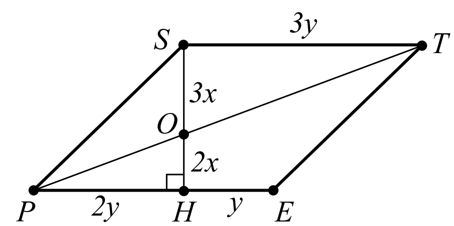


Рис. 2

**9.** *(3 балла)* В ромбе $PSTE$ высота $SH$ пересекает диагональ $PT$ в точке O, причем $SO : OH = 3 : 2$. Найдите отрезок $OE$, если $OH = 4$.

**Решение.** $OH = 4 = \dfrac{2}{5}SH$, поэтому $SH = 10$. $\triangle POH \sim \triangle SOT$, значит $\dfrac{PH}{ST} = \dfrac{OH}{OS} = \dfrac{2}{3}$. Значит, $PH = 2y$, $PS = ST = 3y$. По теореме Пифагора для $\triangle PSH$ получим: $PS^2 = SH^2 + PH^2$, $(2y)^2 + 10^2 = (3y)^2$, откуда $y = 2\sqrt{5}$. Осталось применить теорему Пифагора для треугольника $OHE$ и найти, что $OE = 6$.

**Ответ.** 6.

**10.** *(3 балла)* Упростить выражение: $\dfrac{a\sqrt{a}+8}{-a+2\sqrt{ab}-b}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-2\sqrt{a}+4}-\dfrac{\sqrt{ab}-4}{a\sqrt{a}+8}\right)+\dfrac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-2b}$.

**Решение.**

$$\frac{a\sqrt{a}+8}{-a+2\sqrt{ab}-b}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-2}{a-2\sqrt{a}+4}-\frac{\sqrt{ab}-4}{a\sqrt{a}+8}\right)+\frac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-2b}=$$

$$\frac{(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)}{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}\cdot\frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)-(\sqrt{ab}-4)}{(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)}+\frac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-2b}=$$

$$\frac{a-4-\sqrt{ab}+4}{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}+\frac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-2b}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}+\frac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=$$

$$\frac{-2\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}}{2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

**Ответ.** $\dfrac{\sqrt{a}}{2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$.

## Часть 2

**11.** *(5 баллов)* Прямая $y=kx+b$ ($k\neq 0, b\neq 0$) пересекает параболу $y=ax^2$ в точках с абсциссами $x_1$ и $x_2$, а ось абсцисс в точке $(x_3,\,0)$. Докажите, что $\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ .

**Решение.** Число $x_3$ - корень уравнения $kx+b=0$, поэтому $x_3=-\dfrac{b}{k}$. Числа $x_1$ и $x_2$ являются корнями уравнения $ax^2=kx+b$. Тогда по теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{k}{a}, \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$ .

Получаем: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{k}{a}:(-\dfrac{b}{a})=-\dfrac{k}{b}=\dfrac{1}{x_3}$.

**12.** *(6 баллов)* $MNPQ$ — квадрат. Точка $E$ — середина $MN$, точка $F$ — середина $NP$. Отрезки $FM$ и $QE$ пересекаются в точке $O$. Площадь треугольника $OFQ$ равна 30. Найти площадь квадрата $MNPQ$.

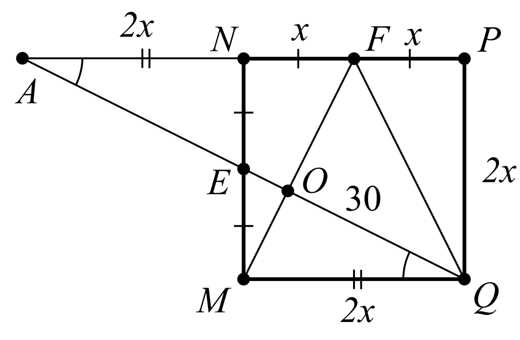


Рис. 3

**Решение.** Пусть прямые $NP$ и $QE$ пересекаются в точке $A$. $\triangle ANE=\triangle EMQ$ (по катету и острому углу), откуда $AN=MQ=2x$ и $S_{AFQ}=S_{APQ}-S_{FPQ}=\dfrac{1}{2}AP\cdot PQ-\dfrac{1}{2}FP\cdot PQ=3x^2$. Пусть прямые $MF$ и $QE$ пересекаются в точке $O$. Треугольники $MQO$ и $AOF$ подобны (по двум углам), откуда $AO:OQ=AF:MQ=3x:2x=3:2$. Треугольники $AFO$ и $FOQ$ имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания. Значит, $\dfrac{S_{OFQ}}{S_{AFO}}=\dfrac{QO}{OA}=\dfrac{2}{3}$, $S_{OFQ}=\dfrac{2}{5}S_{AFQ}=$ $=3x^2\cdot\dfrac{2}{5}=30$, $x^2=25$. $S_{MNPQ}=(2x)^2=100$.

**Ответ.** 100.

**13.** *(5 баллов)* Найти все значения параметра $k$, при которых уравнения $2x^2(x-1)=kx$ имеет не более двух различных корней.

**Решение.** $x=0$ является корнем данного уравнения при любом значении $k$, поэтому чтобы количество его корней не превышало двух, нужно, чтобы уравнение $2x^2+2x-k=0$ (*) имело не более одного корня ($D \leqslant 0$), либо чтобы одним из его корней являлось число 0. $x=0$ является корнем уравнения (*) при $k=0$, $D=4+8k$. Решая неравенство $4+8k \leqslant 0$, находим, что $k \leqslant -\frac{1}{2}$.

**Ответ.** $k \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{0\}$.

**14.** *(6 баллов)* На день рождения Лиза купила треугольную пиццу и разрезала ее по каждой из биссектрис. В результате у нее получилось 6 кусков. Опаздавшему Матвею достался кусок в виде прямоугольного треугольника. «Я утверждаю, что первоначально пицца имела форму равнобедренного треугольника»,— сказал Матвей. Прав ли он? Ответ обоснуйте.

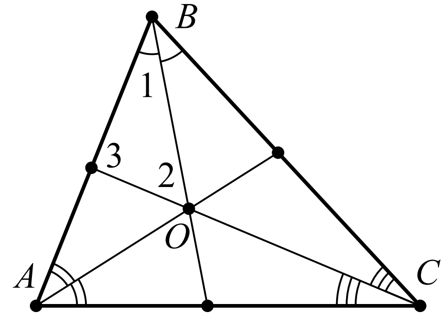


Рис. 4

**Решение.** Любой кусок пиццы имеет углы трех типов:
*Угол первого типа* — это половина какого-то из углов исходного треугольника. Такие углы прямыми быть не могут, потому что это бы означало, что исходный треугольник имел угол 180°;

*Угол второго типа* — это угол с вершиной в точке пересечения биссектрис исходного треугольника. Этот угол является внешним для треугольника, два угла которого — это половины углов исходного треугольника, поэтому он равен их сумме и тоже не может быть прямым (так как тогда сумма двух углов исходного треугольника была бы равна 180°);

*Угол третьего типа* — это угол между биссектрисой и сторонй треугольника. Если он прямой, то это означает, что в исходном треугольнике биссектриса совпадает с высотой, а, значит, этот треугольник является равнобедренным.
Из приведенных выше рассуждений следует, что Матвей прав.

**Ответ.** Матвей прав.

**15.** *(6 баллов)* Построить график функции $y=\frac{\left(\sqrt{2x^2-4x}\right)^2}{|x-2|}$.
При каких значениях параметра $a$ прямая $y=a$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку?

**Решение.** Область определения данной функции задается следующими условиями: $\begin{cases} 2x^2-4x \geqslant 0, \\ x-2 \neq 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем, что $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. На области определения упростим формулу, которой задается данная функция:

$$y=\frac{2x^2-4x}{|x-2|}=\begin{cases} -2x, \text{ если } x<0, \\ 2x, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

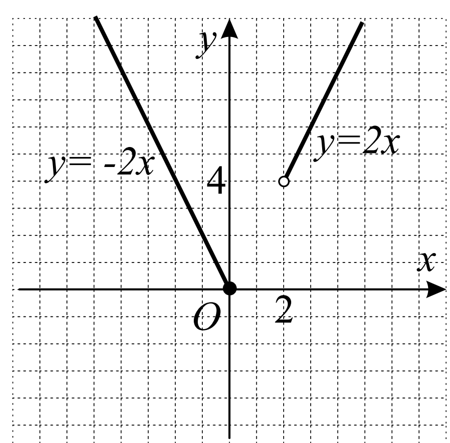


Рис. 5

График функции изображен на рис. 5. По графику находим, что прямая $y=a$ пересекает график функции ровно в одной точке при $0 \leqslant a \leqslant 4$.

**Ответ.** $0 \leqslant a \leqslant 4$.

# Критерии оценки

*(одинаковые для обоих вариантов)*

# Первая часть:

**Задача 3.** 1 балл — за верно найденный модуль числа.

**Задача 5.** 1 балл — за верно найденный промежуток (потеряна изолированная точка) В I варианте ответ $-7$, во II - $-21$.

**Задача 6.** 1 балл — за верно найденный один из ответов.

# Вторая часть:

**Задача 11.** 1 балл — за верно найденную точку пересечения прямой с осью абсцисс.

1 балл — за правильно записаную теорему Виета для квадратного уравнения.

**Задача 12.** 2 балла — за обоснованно и верно найденные отношения отрезков, отношения площадей, которые могут быть использованы для получения ответа в задаче (но при этом задача не решена полностью).

минус 1 балл — за арифметическую ошибку.

**Задача 13.** 3 балла — за обоснованное и верное рассмотрение случая со знаком дискриминанта квадратного уравнения.

1 балл — за обоснованное рассмотрение случая, когда корень квадратного уравнения $=0$.

минус 1 балл — за арифметическую ошибку.

**Задача 14.** по 2 балла за верный анализ каждого типа углов (обоснование почему они могут/не могут быть прямыми).

**Задача 15.** 2 балла — график построен без учета ОДЗ корня (но с учетом ОДЗ дроби).

1 балл — верно найдена область оперделения функции.

1 балл — верно упрощена формула, по которой вычисляются значения функции.

4 балла — полностью верно построен график, но не выполнено (выполнено неверно) задание.

1 балл — верно выполнено задание (по тому графику, который был построен).

-1 балл — ошибка в границах промежутка при выполнении задания.