СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 11 МИФ класс
24 марта 2025 г.

1. *(1 балл)* Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(2-17{,}5\pi)\cdot \mathrm{tg}(9{,}5\pi-1)}{\sin\sqrt{4-4\pi+\pi^2}\cdot\cos\sqrt{4+8\pi+4\pi^2}}$.

2. *(2 балл)* Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{2x-3y}{5x+3y}$, если $y^2-3xy+2x^2=0$.

3. *(2 балла)* Вычислить $\log_{12}^2 2+\dfrac{\log_{12}24}{\log_6 12}$.

4. *(2 балла)* Решите уравнение $7^{x^2+x}\cdot 2^{x\log_2 7}=1$.

5. *(3 балла)* Решите неравенство $\dfrac{3-x+\sqrt{x^2-5x+4}}{\sqrt{x+7}}\geq 0$.

6. *(3 балла)* Квадратный трехчлен ax^2+bx+c при $x=2$ принимает наименьшее значение, модуль которого равен 2, а при $x=1$ обращается в 0. Какое значение он принимает при $x=0$.

7. *(3 балла)* При каком значении параметра p уравнение $(p^2-4)x^2+2x\sqrt{p+2}+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

8. *(3 балла)* Решите уравнение $\sqrt{8+2x-x^2}=|x-1|-3$.

9. *(3 балла)* В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 120°. Боковые ребра образуют с высотой пирамиды, равной 16, углы 45°. Найдите площадь основания пирамиды.

10. *(3 балла)* В остроугольном треугольнике ABC известно, что угол B равен 45°, CH – высота, X – точка на стороне AC, а Y – точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY=AC=10$, а площадь треугольника ABC равна 60.

11. *(5 баллов)* Решите уравнение

$$\left(\sin\pi x-\sqrt{3}\cos\pi x\right)\cdot\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)=0$$

и найдите сумму его корней.

12. *(5 баллов)* Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x-2)\leq\log_{x-2}0{,}0625.$$

13. *(4 баллов)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2-8x+2a}{11x^2-8ax-3a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

14. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P.

а) *(2 балла)* Докажите, что угол AA_1C_1 равен углу ABP.

б) *(3 балла)* Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны AC, если $A_1C_1=6$ и угол ABC равен 60°.

15. В правильном тетраэдре $SABC$ точки K и L – середины ребер AB и SC соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой KL и пересекает ребро BC в точке P.

а) *(2 балла)* Докажите, что прямая KL перпендикулярна ребрам AB и SC.

б) *(4 балла)* Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если известно, что $BP=2$, $PC=6$.

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 11 МИФ класс 24 марта 2025г.

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(2-17{,}5\pi)\cdot\operatorname{tg}(9{,}5\pi-1)}{\sin\sqrt{4-4\pi+\pi^2}\cdot\cos\sqrt{4+8\pi+4\pi^2}}$.

Решение.

$$\frac{\sin(2-17{,}5\pi)\cdot\operatorname{tg}(9{,}5\pi-1)}{\sin\sqrt{4-4\pi+\pi^2}\cdot\cos\sqrt{4+8\pi+4\pi^2}}=\frac{\sin(2+\frac{\pi}{2}-18\pi)\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-1+9\pi)}{\sin\sqrt{(\pi-2)^2}\cdot\cos 2\sqrt{(\pi+1)^2}}=$$
$$=\frac{\sin(2+\frac{\pi}{2})\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-1)}{\sin|\pi-2|\cdot\cos 2|\pi+1|}=\frac{\cos 2\cdot\operatorname{ctg}1}{\sin 2\cdot\cos 2}=\frac{\operatorname{ctg}1}{2\sin 1\cos 1}=\frac{1}{2\sin^2 1}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2\sin^2 1}$.

2. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{2x-3y}{5x+3y}$, если $y^2-3xy+2x^2=0$.

Решение.
Решив однородное уравнение $y^2-3xy+2x^2=0$, получаем $y_1=2x$, $y_2=x$. Подставляя найденные значения в дробь, получаем

$$\frac{2x-3y}{5x+3y}=\frac{2x-3\cdot 2x}{5x+3\cdot 2x}=-\frac{4x}{11x}=-\frac{4}{11};$$
$$\frac{2x-3y}{5x+3y}=\frac{2x-3\cdot x}{5x+3\cdot x}=-\frac{x}{8x}=-\frac{1}{8}.$$

Выбирая Наименьшее значение, получаем **Ответ:** $-\dfrac{4}{11}$.

3. Вычислить $\log_{12}^2 2+\dfrac{\log_{12}24}{\log_6 12}$.

Решение.

$$\log_{12}^2 2+\frac{\log_{12}24}{\log_6 12}=\log_{12}^2 2+\log_{12}(12\cdot 2)\cdot\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)=$$
$$=\log_{12}^2 2+(\log_{12}12+\log_{12}2)(\log_{12}12-\log_{12}2)=\log_{12}^2 2+1-\log_{12}^2 2=1.$$

Ответ: 1.

4. Решите уравнение $7^{x^2+x}\cdot 2^{x\log_2 7}=1$.

Решение.

$$7^{x^2+x}\cdot 2^{x\log_2 7}=1\quad\Leftrightarrow\quad 7^{x^2+x}\cdot 2^{\log_2 7^x}=1\quad\Leftrightarrow\quad 7^{x^2+x}\cdot 7^x=1\quad\Leftrightarrow\quad 7^{x^2+2x}=7^0\quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x=0.$$

Откуда получаем, что $x_1=0$, $x_2=-2$.
Ответ: $-2;0$.

5. Решите неравенство $\dfrac{3-x+\sqrt{x^2-5x+4}}{\sqrt{x+7}}\geq 0$.

Решение.

$$\frac{3-x+\sqrt{x^2-5x+4}}{\sqrt{x+7}}\geq 0\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}x+7>0\\ \sqrt{x^2-5x+4}\geq x-3\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-7\\ x-3<0\\ x^2-5x+4\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x>-7\\ x-3\geq 0\\ x^2-5x+4\geq x^2-6x+9\end{cases}\end{array}\right.\;\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-7<x<3\\ x\geq 4 \text{ или } x\leq 1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\geq 3\\ x\geq 5\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-7<x\leq 1\\ x\geq 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-7;1]\cup[5;\infty)$.

6. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c при $x=2$ принимает наименьшее значение, модуль которого равен 2, а при $x=1$ обращается в 0. Какое значение он принимает при $x=0$.

Решение. Обозначим $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. По условию $y(1)=0$, $|y(2)|=2$. Так как при $x=2$ квадратный трехчлен принимает наименьшее значение, то $x=2$ – абсцисса вершина параболы и $a>0$. Составим систему согласно условию:

$$\left\{\begin{array}{l}y(1)=0\\ |y(2)|=2\\ -\dfrac{b}{2a}=2\\ a>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+b+c=0\\ |4a+2b+c|=2\\ b=-4a\\ a>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=-4a\\ -3a+c=0\\ |-4a+c|=2\\ a>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}b=-4a\\ c=3a\\ |a|=2\\ a>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=2\\ b=-8\\ c=6\end{array}\right.$$

Найти нужно $y(0)$, $y(0)=c=6$.

Ответ: 6.

7. При каком значении параметра p уравнение $(p^2-4)x^2+2x\sqrt{p+2}+3=0$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. Уравнение имеет хотя бы одно решение, если оно линейное или квадратное. Рассмотрим два случая.

а) $p^2-4=0$, т.е. $p=\pm 2$. Если $p=2$, то $x=-\frac{3}{4}$ – удовлетворяет условию. Если $p=-2$, то $0\cdot x+3=0$ – решений нет.

б) $p^2-4\neq 0$, т.е. $p\neq\pm 2$. Область изменения параметра $p\geq -2$. Для всех $p\in[-2;2)\cup(2;\infty)$ уравнение квадратное, поэтому имеет хотя бы одно решение, если $D\geq 0$. Найдем дискриминант $D=4(p+2)-4\cdot 3\cdot(p^2-4)=4(-3p^2+p+14)\geq 0$, откуда $p\in\left[-2;\frac{7}{3}\right]\setminus\{2\}$.

Учитывая а) и б) получаем, что $p\in\left(-2;\frac{7}{3}\right]$.

Ответ: $p\in\left(-2;\frac{7}{3}\right]$.

8. Решите уравнение $\sqrt{8+2x-x^2}=|x-1|-3$.

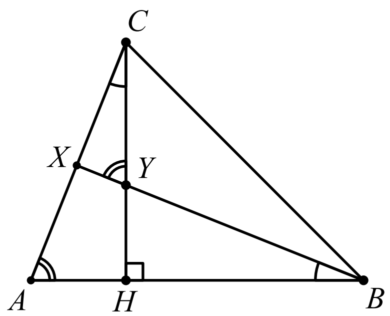
Решение.

$$\sqrt{8+2x-x^2}=|x-1|-3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}|x-1|-3\geq 0\\ 8+2x-x^2=(x-1)^2-6|x-1|+9\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}x\leq -2 \text{ или } x\geq 4\\ 2x^2+4x+2-6|x-1|=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geq 4\\ 2x^2-10x+8=0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\leq -2\\ 2x^2+2x-4=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\geq 4\\ x=4;\ x=1\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\leq -2\\ x=-2;\ x=1\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $-2;4$.

9. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом $120°$. Боковые ребра образуют с высотой пирамиды, равной 16, углы $45°$. Найдите площадь основания пирамиды.



Решение. так как боковые ребра образуют с высотой пирамиды равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности описанной около основания ABC. Поскольку $SH\perp ABC$, $\angle(SH;BS)=45°$, то $BH=SH=16=R$. По тереме синусов найдем AC: $AX=2R\sin 120°=16\sqrt{3}$. Площадь ABC вычислим по формуле $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BB_1$, где BB_1 – высота треугольника ABC. $BB_1=AB_1\cdot\operatorname{tg}30°=8$. Получаем $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 16\sqrt{3}\cdot 8=64\sqrt{3}$.

Ответ: $64\sqrt{3}$.

10. В остроугольном треугольнике ABC известно, что угол B равен $45°$, CH – высота, X – точка на стороне AC, а Y – точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY=AC=10$, а площадь треугольника ABC равна 60.

Решение. Поскольку $\angle CBH = 45°$, то $\triangle CHB$ – равнобедренный, $CH = HB$, $BY = AC = 10$. Треугольники HBY и HCA равны по гипотенузе и катету. Пусть $\angle YBH = \angle ACH = \alpha$, $\angle CAH = \beta$, тогда $\angle HYP = \beta$ и $\alpha + \beta = 90°$. Так как $\angle HYB = \angle CYX$ как вертикальные, то в треугольнике XCY $\alpha+\beta = 90°$, значит $\angle CXY = 90°$, т.е. $BX \perp AC$. Тогда $BX = \dfrac{2S_{ABC}}{AC} = 12$, и $XY = XB-BY = 12 - 10 = 2$.

Ответ: 2.

11. Решите уравнение

$$\left(\sin \pi x - \sqrt{3} \cos \pi x\right) \cdot \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0$$

и найдите сумму его корней.

Решение. Найдем ОДЗ уравнения: $\left|\dfrac{x-2}{2}\right| \le 1$, откуда $0 \le x \le 4$. Решая уравнение на ОДЗ, получаем

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x - \sqrt{3}\cos \pi x = 0 \\ \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \pi x = \sqrt{3} \\ \frac{x-2}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + k, k \in \mathbb{Z} \\ x = 2. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ: $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{7}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $x = 2$. Сумма всех корней составляет $\frac{28}{3}$.

Ответ: $\frac{28}{3}$.

12. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x-2) \le \log_{x-2} 0{,}0625.$$

Решение. Неравенство равносильно $\log_2(x-2) \ge 4\log_{x-2} 2$ или $\log_2(x-2) \ge \dfrac{4}{\log_2(x-2)}$. Обозначив $\log_2(x-2) = t$, решим методом интервалов неравенство $t \ge \frac{4}{t}$. Получаем $-2 \le t < 0$ или $t \ge 2$. Выполнив обратную замену, получаем $2{,}25 \le x < 3$ или $x \ge 6$.

Ответ: $[2{,}25; 3) \cup [6; \infty)$.

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 8x + 2a}{11x^2 - 8ax - 3a^2} = 0$$

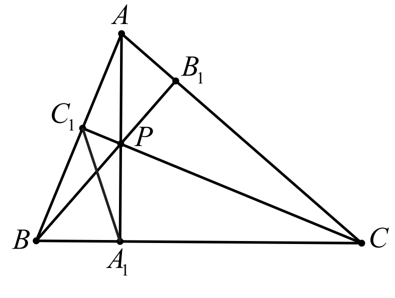
имеет ровно два различных корня.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 8x + 2a = 0 \\ 11x^2 - 8ax - 3a^2 \ne 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение системы имеет два различных корня, если $D = 64 - 8a > 0$, т.е. $a < 8$. Знаменатель обращается в нуль, если $x = a$ или $x = -\frac{3a}{11}$. Найдем, при каких a корни числителя совпадают с данными корнями. Если $x = a$, получаем уравнение $a^2 - 8a + 2a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = 6$. Если $x = -\frac{3a}{11}$, получаем уравнение $\frac{9a^2}{121} + \frac{24a}{11} + 2a = 0$, откуда $a = 0$ или $a = -\frac{506}{9}$. В итоге получаем, что уравнение имеет два различных корня, если $a \in (-\infty; 8) \setminus \left\{0; 6; -\frac{506}{9}\right\}$.

Ответ: $a \in (-\infty; 8) \setminus \left\{0; 6; -\frac{506}{9}\right\}$.



14. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке P.

а) *(2 балла)* Докажите, что угол AA_1C_1 равен углу ABP.

б) *(3 балла)* Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны AC, если $A_1C_1 = 6$ и угол ABC равен $60°$.

Решение. а) все три высоты остроугольного треугольника пересекаются в точке P, которая лежит внутри треугольника ABC. По второму признаку подобия треугольников $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$: $\angle B$ – общий, $\frac{BC_1}{BC} = \cos B = \frac{BA_1}{BA}$. Из подобия треугольников следует, что $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$. Из прямоугольного треугольника ABB_1 получаем, что $\angle ABB_1 = 90° - \angle BAC$, $\angle AA_1C_1 = \angle AA_1B - \angle BA_1C_1 = 90° - \angle BAC = \angle ABP$.

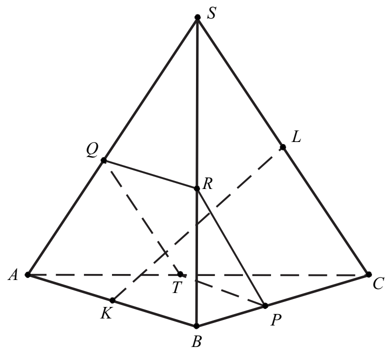
б) $\frac{A_1C_1}{AC} = \cos B$, значит $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{2}$, т.е. $AC = 2A_1C_1 = 12$. По теореме синусов $\frac{AC}{2\sin B} = 2R$, где R – радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности. Тогда $R = \frac{12}{2\sin 60°} = 4\sqrt{3}$. Пусть O – центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, тогда $OA = OC = R$, длина OK - искомое расстояние, K – середина отрезка AC, $CK = 6$. По теореме Пифагора $OK = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{48-36} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

15. В правильном тетраэдре $SABC$ точки K и L – середины ребер AB и SC соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой KL и пересекает ребро BC в точке P.

а) *(2 балла)* Докажите, что прямая KL перпендикулярна ребрам AB и SC.

б) *(4 балла)* Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если известно, что $BP = 2$, $PC = 6$.



Решение. а) $\triangle ALB = \triangle SKC$ – равные равнобедренные. $AL = BL = SK = KC$ – как медианы равных равносторонних треугольников ASC, SBC, SAB, ABC. В треугольнике ALB медиана KL является высотой, откуда $KL \perp AB$. Аналогично KL – высота треугольника SKC, значит $KL \perp SC$. Получаем, что $KL \perp SC$ и $KL \perp AB$, ч.т.д.

б) Плоскость α перпендикулярна прямой KL и $AB \perp KL$, значит $\alpha || AB$. Аналогично $\alpha || SC$. В грани SBC проведем $PR || SC$, а в грани ABC – $PT || AB$. Через точку T в грани ASC проведем $TQ || SC$. Полученное сечение $PQRT$ – параллелограмм. Поскольку в правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны, то $AB \perp SC$, а значит, $PR \perp PT$. Таким образом, $PQRT$ – прямоугольник. $\triangle BPR$ – равносторонний, $BP = PR = 2$, $\triangle SQR$ – равносторонний, $QR = SR = 6$. $S_{PQRT} = PR \cdot PT = 2 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

Критерии:

1. *1 балл* за верный ответ.
2. *2 балла* за верный ответ, *1 балл*, если ответ содержит $-\frac{1}{8}$.
3. *2 балла* за верный ответ.
4. *1 балл* за каждый верный корень уравнения.
5. *1 балл* за каждый верно полученный интервал, -1 *балл*, если в ответ включена точка 7.
6. *3 балла* за верный ответ.
7. *3 балла* за верный ответ; *2 балла*, если ответ отличается от верного включением точки -2; *1 балл*, за $p = 2$.
8. *3 балла* за верный ответ;

1 балл за один верный ответ.

9. *3 балла* за верный ответ.
10. *3 балла* за верный ответ.
11. *+1 балл* – верно найдена ОДЗ;

+1 балл – за каждое верно решенное уравнение;

+2 балла – верно найдена сумма корней уравнения.

12. *1 балл* – за верно найденную ОДЗ;

+3 балл – верно решено неравенство с заменой;

+2 балла – верно выполнена обратная замена.

13. *+2 балл* – найдены значения параметра, при которых числитель имеет два различных корня;

+2 балла – верно найден итоговый ответ;

-1 *балл* – за арифметическую ошибку.

14. *+2 балл* – верное доказательство пункта а);

+3 балла – верный ответ в пункте б); если пункт а) не доказан, то *-1 балл*.

15. *+2 балл* – верное доказательство пункта а);

+4 балла – верный ответ в пункте б); если пункт а) не доказан, то *-1 балл*;

2 балла – верный ответ в пункте б) без обоснования вида сечения.