

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

1. (2 балла) Вычислить $4\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

2. (2 балла) Решить уравнение $2x^{\frac{4}{3}} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$.

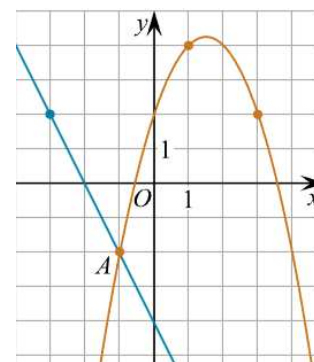
3. (2 балла) Упростить выражение $\frac{\sqrt[3]{b\sqrt{b}} + \sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{4b\sqrt{b}(1 + \sqrt[6]{b})}$ и вычислить его значение при $b = \frac{5}{64}$.

4. (2 балла) Вычислить $25^{\frac{1}{2} \log_5 12} + 7^{2 \log_7 2}$.

5. (2 балла) Вычислить $9 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

6. (2 балла) Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-3x-4} > 0,4^{-5}$.

7. (2 балла) На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x - 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



8. (2 балла) Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

9. (2 балла) В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ – начальный уровень воды, $a = 10^{-2}$ м/мин², и $b = -0,4$ м/мин постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

10. (2 балла) Найдите четырёхзначное число, большее 2000, но меньшее 3000, которое делится на 60 и сумма цифр которого равна 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

11. (6 баллов) Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.

12. (6 баллов) Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

13. (6 баллов) Решить неравенство $x + \frac{8x - 45}{(x - 7)} + \frac{x^2 + 15x - 132}{x^2 - 16x + 63} \leq 1$.

14. (6 баллов) Решить уравнение $2 \cdot 3^{-2x+2} = 3^{-x+1} + 1$.

15. (6 баллов) Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 11 СГ класс
24 марта 2025г.

1. Вычислить $4\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

Решение:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}} &= 4\sqrt{5\sqrt{16 \cdot 3}} + 3\sqrt{40\sqrt{4 \cdot 3}} - 2\sqrt{15\sqrt{9 \cdot 3}} = \\ &= 4\sqrt{20\sqrt{3}} + 3\sqrt{80\sqrt{3}} - 2\sqrt{45\sqrt{3}} = 8\sqrt{5\sqrt{3}} + 12\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = 14\sqrt[4]{75}. \end{aligned}$$

Ответ: $14\sqrt[4]{75}$.

2. Решить уравнение $2x^{\frac{4}{3}} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$.

Решение:

$$2x^{\frac{4}{3}} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} = 20.$$

Выполнив замену $t = x^{\frac{2}{3}}, t > 0$, получаем уравнение $2t^2 - 3t - 20 = 0$, положительным корнем которого будет $t = 4$, значит $x = 8$.

Ответ: 8.

3. Упростить выражение $\frac{\sqrt[3]{b\sqrt{b}} + \sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{4b\sqrt{b}(1 + \sqrt[6]{b})}$ и вычислить его значение при $b = \frac{5}{64}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt[3]{b\sqrt{b}} + \sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{4b\sqrt{b}(1 + \sqrt[6]{b})} = \frac{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{2}{3}}}{4b^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt[6]{b})} = \frac{b^{\frac{1}{2}}(1 + \sqrt[6]{b})}{4b^{\frac{3}{2}}(1 + \sqrt[6]{b})} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{4} \cdot \frac{64}{5} = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

4. Вычислить $25^{\frac{1}{2} \log_5 12} + 7^{2 \log_7 2}$.

Решение:

$$25^{\frac{1}{2} \log_5 12} + 7^{2 \log_7 2} = 5^{\log_5 12} + 7^{\log_7 4} = 12 + 4 = 16.$$

Ответ: 16.

5. Вычислить $9 \cos 2\alpha$, если $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Решение:

$$9 \cos 2\alpha = 9(2 \cos^2 \alpha - 1) = 9 \left(2 \cdot \frac{1}{9} - 1 \right) = 9 \cdot \left(-\frac{7}{9} \right) = -7.$$

Ответ: -7.

6. Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-3x-4} > 0,4^{-5}$.

Решение:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-3x-4} > 0,4^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{2x^2-3x-4} > \left(\frac{2}{5}\right)^{-5}.$$

Поскольку $0 < \frac{2}{5} < 1$, получаем неравенство $2x^2 - 3x - 4 < -5$. Решая методом интервалов, получаем

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

7. На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x - 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

Решение: По рисунку определяем: $g(-1) = -2$; $g(1) = 4$; $g(3) = 2$. Найдём коэффициенты a, b и c : $a = -1$, $b = 3$ и $c = 2$. Решая уравнение $-x^2 + 3x + 2 = -2x - 4$ находим абсциссу точки B : $x_B = 6$.

Ответ: 6.

8. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

Решение: В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы противоположных сторон равны. Сумма боковых сторон равна сумме оснований и равна 11. Маленькая боковая сторона равна 4 (она является высотой, т.к. трапеция прямоугольная), значит $r = \frac{4}{2} = 2$.

Ответ: 2.

9. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 4$ – начальный уровень воды, $a = 10^{-2}$ м/мин², и $b = -0,4$ м/мин постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение: Вода будет вытекать из бака, пока её начальный уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $0,01t^2 - 0,4t + 4 = 0$, получаем $t = 20$. Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Ответ: 20.

10. Найдите четырёхзначное число, большее 2000, но меньшее 3000, которое делится на 60 и сумма цифр которого равна 12. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Решение: Представим искомое число в виде $abcd$. Если число делится на 60, то оно также делится на 3 и на 20. Так как сумма цифр искомого числа равна 12, то оно делится на 3. Число делится на 20 тогда и только тогда, когда число оканчивается на ноль, а предпоследняя цифра четная. Так как число $abcd < 3000$, то $a = 2$; $d = 0$, а $b + c = 10$, c – четное. Подходят числа 2280, 2820, 2460 или 2640.

Ответ: 2280, 2820, 2460, 2640.

11. (6 баллов) Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.

Решение: Обозначим x км расстояние от A до C , v км/ч – скорость автомобиля. Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{v} - \frac{x}{90} = 0,5 \\ \frac{150}{v} - \frac{2x}{90} = 0,5. \end{cases}$$

Положительное решение системы уравнений $v = 60$, $x = 90$.

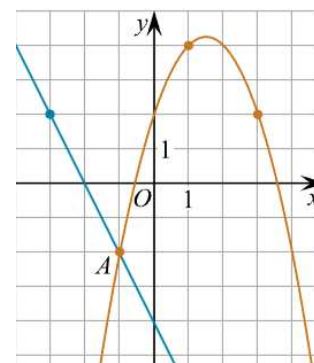
Ответ: Расстояние от A до C 90 км.

1 балл – верно составлено одно уравнение системы или верно подобран ответ;

2 балла – верно составлена модель (система или уравнение);

3 балла – получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.

12. (6 баллов) Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006



года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение:

Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял: 2002г. – 15000; 2003г. – 45000; 2004г. – 135000; 2005г. – 405000; 2006г. – 1215000.

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял: 2004г. – 50000; 2005г. – 250000; 2006г. – 1250000. Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35000 долларов больше.

Ответ: 35000.

1 балл – верно посчитан капитал для одной из компаний;

2 балла – получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.

13. (6 баллов) Решить неравенство $x + \frac{8x - 45}{(x - 7)} + \frac{x^2 + 15x - 132}{x^2 - 16x + 63} \leq 1$.

Решение: Решим неравенство методом интервалов

$$\begin{aligned} x + \frac{8x - 45}{(x - 7)} + \frac{31x - 195}{(x - 7)(x - 9)} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x - 7)(x - 9) + (x - 7)(8x - 30)}{(x - 7)(x - 9)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \frac{(x - 7)(x^2 - 9x + 8x - 30)}{(x - 7)(x - 9)} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 7)(x + 5)(x - 6)}{(x - 7)(x - 9)} \leq 0. \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [6; 7) \cup (7; 9)$.

4 балла – в ответе допущена ошибка включение/исключение граничных точек (1 шт.);

3 балла – в ответе допущена ошибка включение/исключение граничных точек (2 шт.);

1 балл – неравенство сведено к дроби, сравниваемой с 0, при решении любым методом допущена ошибка.

14. (6 баллов) Решить уравнение $2 \cdot 3^{-2x+2} = 3^{-x+1} + 1$.

Решение: Выполнив замену $t = 3^{-x}$, $t > 0$, получаем уравнение $18t^2 - 3t - 1 = 0$, положительное решение которого $t = \frac{1}{3}$, значит $x = 1$.

Ответ: 1.

4 балла – неверный ответ из-за вычислительной ошибки;

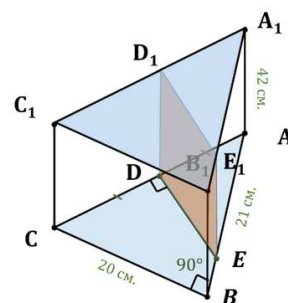
3 балла – уравнение сведено к квадратному, решено, но нет обратной замены;

1 балл – уравнение сведено к квадратному, но не решено.

15. (6 баллов) Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

Решение:

Для построения сечения воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости ($AC \perp DD_1$). Построим $DE \perp AC$. EE_1D_1D – сечение (прямоугольник). По теореме Пифагора $AC = 29$, тогда $AD = 14,5$. Треугольники ABC и ADE подобны по двум углам, тогда $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$, откуда $DE = \frac{290}{21}$; $S_{EE_1D_1D} = DE \cdot EE_1 = 580$. **Ответ:** 580 см².



5 баллов – вычислительная ошибка;

4 балла – верно построено сечение с обоснованием, применено подобие треугольников;

3 балла – применено подобие треугольников (или другим способом найдено DE);

2 балла – верно выполнен чертеж, определено что надо найти;

1 балла – при построении чертежа DE пересекает BC.