

Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
24 марта 2025г.
1 вариант

Часть 1

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{78^2 - 65^2}{(78 + 65)^2 - 2 \cdot 78 \cdot 130}$.
2. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{(5a^{12})^2 - (2a^4)^6}{(a^3)^8 + 2 \cdot (a^6)^4} - 243 \cdot a^{15} \cdot a^{13} : (3a^7)^4$, при $a = 11$.
3. (2 балла) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{49 - x^2}}$.
4. (3 балла) Цена первого товара поднялась сначала на 35%, а потом ещё на 20% и стала равной 3240 рублей. Цена второго товара поднялась на 25% и стала равной первоначальной цене первого товара. Какова первоначальная цена второго товара?
5. (3 балла) Найдите значения выражения $\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1)$, при $a = 2,7$.
6. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + 5x - 7) \cdot (2x^2 + 10x - 11) + 1 = 0$.
7. (3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} y + 5 = \sqrt{x^2 - 8x + 16} \\ 2x - y = 7. \end{cases}$
8. (3 балла) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 6 и 11, а боковые стороны равны 3 и 4.
9. (3 балла) В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Через точку M проходит прямая, параллельная AC и пересекающая AB в точке K . Найдите длину KM , если AB и AC соответственно равны 6 и 10.
10. (3 балла) Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + q = 0$ равна 2249. Найдите корни уравнения.

Часть 2

11. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
12. (5 баллов) Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , соответственно равны 2 и 8. Найдите сумму катетов AC и BC .
13. (6 баллов) Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на 35 дней позже, а если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на 25 дней раньше. Сколько рабочих выполняло работу первоначально и за сколько дней они завершили работу?
14. (7 баллов) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a + 2)x + 2a\sqrt{x} + 1 = 0$$

имеет единственный корень.

Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
24 марта 2025г.
2 вариант

Часть 1

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{85^2 - 68^2}{(85 + 68)^2 - 2 \cdot 68 \cdot 170}$.
2. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{(3a^9)^4 - (6a^{18})^2}{(a^6)^6 + 4 \cdot (a^{12})^3} + 625 \cdot a^{11} \cdot a^{16} : (5a^9)^3$, при $a = 7$.
3. (2 балла) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2 + 8x + 7}}$.
4. (3 балла) Цена некоторого товара поднялась на 25%, а потом ещё на 30%. Другой товар поднялся в цене на 30% и стал по цене равным первому товару. Какова первоначальная цена первого товара, если второй до повышения цены стоил 1250 рублей?
5. (3 балла) Найдите значения выражения $\left(\frac{3}{\sqrt{a+3} - \sqrt{a}} - \frac{a - 3\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{a+3}}$ при $a = 1,1$.
6. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + 7x - 1) \cdot (2x^2 + 14x + 1) + 1 = 0$.
7. (3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} y - 3 = \sqrt{x^2 - 12x + 36} \\ 3x - y = -1. \end{cases}$
8. (3 балла) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 2 и 7, а боковые стороны равны 4 и 3.
9. (3 балла) В треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Через точку M проходит прямая, параллельная BC и пересекающая AB в точке K . Найдите длину KM , если AB и BC соответственно равны 10 и 15.
10. (3 балла) Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2x + q = 0$ равна 10084. Найдите корни уравнения.

Часть 2

11. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
12. (5 баллов) Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , соответственно равны 4 и 9. Найдите сумму катетов AC и BC .
13. (6 баллов) Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на 45 дней позже, а если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на 35 дней раньше. Сколько рабочих выполняло работу первоначально и за сколько дней они завершили работу?
14. (7 баллов) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 2)x + 2a\sqrt{x} - 1 = 0$$

имеет единственный корень.

Решения и критерии оценивания
Вариант №1

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{78^2 - 65^2}{(78 + 65)^2 - 2 \cdot 78 \cdot 130}$.

Решение. Упростим выражение, используя формулы сокращенного умножения:

$$\frac{78^2 - 65^2}{(78 + 65)^2 - 2 \cdot 78 \cdot 130} = \frac{(78 - 65)(78 + 65)}{78^2 + 2 \cdot 78 \cdot 65 + 65^2 - 4 \cdot 78 \cdot 65} = \frac{(78 - 65)(78 + 65)}{(78 - 65)^2} = \frac{78 + 65}{78 - 65} = 11.$$

Ответ: 11.

2. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{(5a^{12})^2 - (2a^4)^6}{(a^3)^8 + 2 \cdot (a^6)^4} - 243 \cdot a^{15} \cdot a^{13} : (3a^7)^4$, при $a = 11$.

Решение. Используя свойства степени, упростим выражение

$$\frac{(5a^{12})^2 - (2a^4)^6}{(a^3)^8 + 2 \cdot (a^6)^4} - 243 \cdot a^{15} \cdot a^{13} : (3a^7)^4 = \frac{25a^{24} - 64a^{24}}{a^{24} + 2a^{24}} - \frac{243a^{28}}{81a^{28}} = -\frac{39}{3} - 3 = -16.$$

Ответ: -16.

3. (2 балла) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{49 - x^2}}$.

Решение.

Областью определения функции будет множество решений неравенства

$$\frac{x^2 + 6x + 5}{49 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x + 5)}{(x - 7)(x + 7)} \leq 0.$$

Откуда, методом интервалов, получаем $x \in (-7; -5] \cup [-1; 7)$.

Ответ: $(-7; -5] \cup [-1; 7)$.

4. (3 балла) Цена первого товара поднялась сначала на 35%, а потом ещё на 20% и стала равной 3240 рублей. Цена второго товара поднялась на 25% и стала равной первоначальной цене первого товара. Какова первоначальная цена второго товара? Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть изначальная цена первого товара равна a , тогда после первого подорожания она стала равна $1,35a$, а после второго $1,35 \cdot 1,2a = 1,62a = 3240$. Откуда, $a = 2000$ рублей. Пусть первоначальная цена второго товара b , тогда после подорожания она стала равна $1,25b = 2000$, откуда $b = 1600$ рублей.

Ответ: 1600.

5. (3 балла) Найдите значения выражения $\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1)$, при $a = 2,7$.

Решение. Упростим выражение, пользуясь свойствами квадратных корней

$$\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1) = \frac{((\sqrt{a})^3 - 1)(\sqrt{a} + 1)}{a - 2\sqrt{a} + 1 + 3\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)}{a + \sqrt{a} + 1} = a - 1.$$

Подставляя $a = 2,7$ получаем

Ответ: 1,7.

6. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + 5x - 7) \cdot (2x^2 + 10x - 11) + 1 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 + 5x - 7 = t$, тогда $2x^2 + 10x - 11 = 2t + 3$. Получаем уравнение $t(2t + 3) + 1 = 0$, откуда получаем уравнение $2t^2 + 3t + 1 = 0$. Его корнями будут $t_1 = -1$, $t_2 = -1/2$. Выполняя

обратную подстановку, получаем $x^2 + 5x - 7 = -1$ или $x^2 + 5x - 7 = -1/2$. Корнями первого уравнения будут $x_1 = 1$, $x_2 = -6$, а второго $x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{51}}{2}$.

Ответ: $1, -6, \frac{-5 \pm \sqrt{51}}{2}$.

7. (3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} y + 5 = \sqrt{x^2 - 8x + 16} \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y + 5 = \sqrt{x^2 - 8x + 16} \\ 2x - y = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 5 = |x - 4| \\ y = 2x - 7. \end{cases}$$

Подставив выражение для y из второго уравнения в первое, получаем $2x - 2 = |x - 4|$. При $x \geq 4$ получаем уравнение $2x - 2 = x - 4$, откуда $x = -2$ — не удовлетворяет условию $x \geq 4$; при $x < 4$ получаем уравнение $2x - 2 = 4 - x$, откуда $x = 2$ — удовлетворяет условию $x < 4$. Подставив в выражение для y , получаем $y = 2 \cdot 2 - 7 = -3$.

Ответ: $(2; -3)$.

8. (3 балла) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 6 и 11, а боковые стороны равны 3 и 4.

Решение. Разобьем трапецию на параллелограмм и треугольник. Стороны треугольника 3, 4 и 5, следовательно, он является прямоугольным. Его высота $\frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$. Тогда площадь трапеции $\frac{6 + 11}{2} \cdot 2,4 = 20,4$
Ответ: 20,4.

9. (3 балла) В треугольнике ABC проведена биссектриса AM . Через точку M проходит прямая, параллельная AC и пересекающая AB в точке K . Найдите длину KM , если AB и AC соответственно равны 6 и 10.

Решение.

Так как AM биссектриса, то используя основное свойство биссектрисы, получаем $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{3}{8}$. Прямая KM отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник, так как она параллельна AC . Из подобия треугольников BKM и ABC , получаем $\frac{KM}{AC} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow KM = \frac{AC \cdot BM}{BC} = \frac{10 \cdot 3}{8} = \frac{15}{4} = 3,75$.

Ответ: 3,75.

10. (3 балла) Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + q = 0$ равна 2249. Найдите корни уравнения.

Решение. Преобразуем сумму квадратов корней уравнения $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Используя теорему Виета $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = q$; получаем $9 - 2q = 2249$, откуда $q = -1120$. Получаем уравнение $x^2 - 3x - 1120 = 0$, корни которого $x_1 = -32$, $x_2 = 35$.

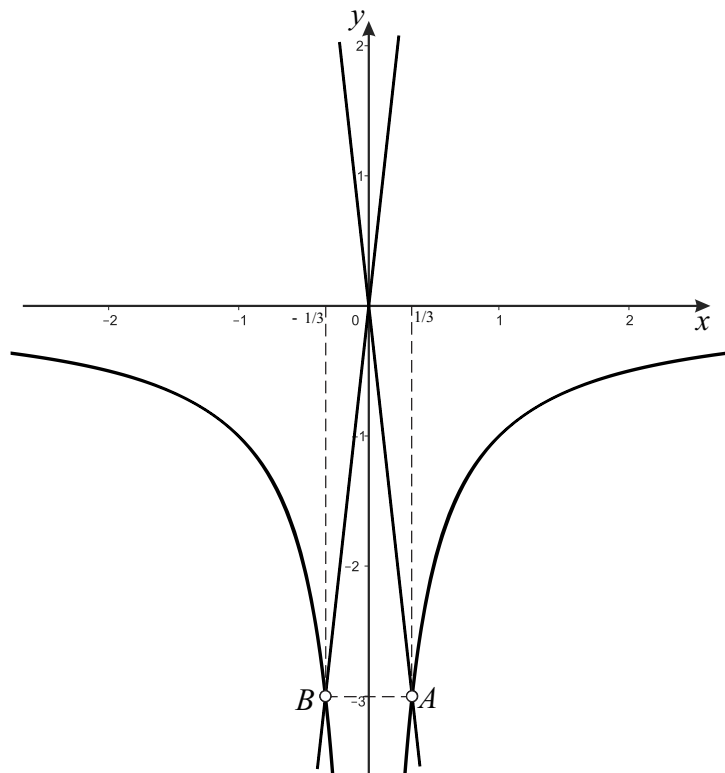
Ответ: $-32; 35$.

11. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

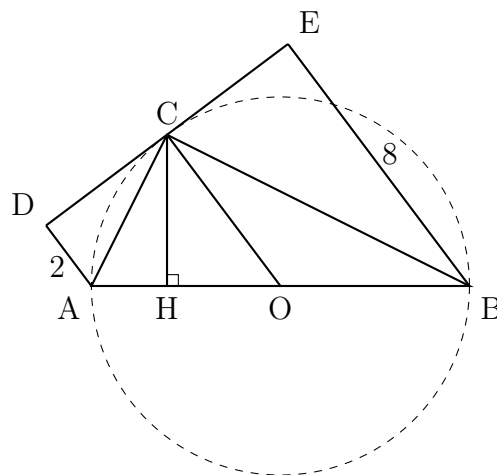
Преобразуем данную функцию

$$y = \frac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2} = \frac{3|x| - 1}{|x| - 3|x|^2} = \frac{3|x| - 1}{|x|(1 - 3|x|)} = -\frac{1}{|x|}, \text{ где } |x| \neq \frac{1}{3}.$$



Построим гиперболу $y = \frac{1}{x}$ и отразим её часть, расположенную выше оси абсцисс в нижнюю полуплоскость. При этом необходимо выколоть из графика точки $A(\frac{1}{3}; -3)$ и $B(-\frac{1}{3}; -3)$. Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком общих точек, если данная прямая пройдет через точку A , точку B , либо совпадает с осью Ox . Это будет при значениях параметра $k = -9$, $k = 9$ и $k = 0$ соответственно.

Ответ: $\pm 9, 0$.



12. (5 баллов) Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , соответственно равны 2 и 8. Найдите сумму катетов AC и BC .

Решение.

Проведем высоту CH . По свойствам высоты в прямоугольном треугольнике получаем, что $\triangle ACH \sim \triangle CBH$. Угол $\angle DCA$ равен углу $\angle CBA$, как угол между касательной и хордой и вписанный угол. Тогда получаем, что $\angle DCA = \angle ACH$, откуда следует равенство треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle ACH$. Значит $AH = AD = 2$. Аналогично $HB = BE = 8$. Используя соотношения в прямоугольном треугольнике находим, что $AC = \sqrt{AH \cdot AB} = 2\sqrt{5}$, а $BC = \sqrt{BH \cdot AB} = 4\sqrt{5}$. Тогда $AC + BC = 6\sqrt{5}$.

Ответ: $6\sqrt{5}$.

13. (6 баллов) Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на 35 дней позже, а если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на 25 дней раньше. Сколько рабочих выполняло работу первоначально и за сколько дней они завершили работу?

Решение. Пусть первоначально было x работников завода и они выполнили задание за y дней. Тогда, приняв производительность одного рабочего за 1, получим, что они выполняли задание xy . Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то задание будет измеряться как $(x - 15)(y + 35)$. Если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет измеряться как $(x + 25)(y - 25)$. Так как задание выполняется одинаковое, то приравняем эти уравнения и составим систему

$$\begin{cases} xy = (x - 15)(y + 35) \\ xy = (x + 25)(y - 25) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x - 15y = 15 \cdot 35 \\ -25x + 25y = 25 \cdot 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3y = 21 \cdot 5 \\ -3x + 3y = 15 \cdot 5 \end{cases}$$

Складывая два уравнения системы, получаем $4x = 7 \cdot 15 + 15 \cdot 5$, откуда $x = 45$. Подставляя в первое уравнение системы, находим $y = 70$. Тогда первоначально 45 рабочих выполняло работу, завершив её за 70 дней.

Ответ: 45 рабочих, 70 дней.

14. (7 баллов) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a + 2)x + 2a\sqrt{x} + 1 = 0$$

имеет единственный корень.

Решение.

Выполнив замену переменной $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$, свведём уравнение к квадратному $(a + 2)t^2 + 2at + 1 = 0$. Уравнение будет иметь один корень, если коэффициент перед t^2 равен 0 и этот корень положителен или уравнение имеет один положительный корень.

1 случай: $a + 2 = 0$, $a = -2$. Уравнение примет вид: $-4t + 1 = 0$, откуда $t = \frac{1}{4}$ – подходит.

2 случай: корни существуют, значит $D \geq 0$ $D = 4a^2 - 4a - 8 \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Если $a = -1$ или $a = 2$, то уравнение имеет единственный корень. При $a = -1$, $t = 1$ – удовлетворяет условию; при $a = 2$, $t = -0,5$ – не удовлетворяет условию.

Если $a \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$, то корни должны быть разных знаков. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{a + 2}$. Чтобы корни были разных знаков, произведение должно быть отрицательным:

$\frac{1}{a + 2} < 0$, значит $a < -2$. Окончательно, получаем $a \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

Решения и критерии оценивания
Вариант №2

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{85^2 - 68^2}{(85 + 68)^2 - 2 \cdot 68 \cdot 170}$.

Решение. Упростим выражение, используя формулы сокращенного умножения:

$$\frac{85^2 - 68^2}{(85 + 68)^2 - 2 \cdot 68 \cdot 170} = \frac{(85 - 68)(85 + 68)}{85^2 + 2 \cdot 85 \cdot 68 + 68^2 - 4 \cdot 85 \cdot 68} = \frac{(85 - 68)(85 + 68)}{(85 - 68)^2} = \frac{85 + 68}{85 - 68} = 9.$$

Ответ: 9.

2. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{(3a^9)^4 - (6a^{18})^2}{(a^6)^6 + 4 \cdot (a^{12})^3} + 625 \cdot a^{11} \cdot a^{16} : (5a^9)^3$, при $a = 7$.

Решение. Используя свойства степени, упростим выражение

$$\frac{(3a^9)^4 - (6a^{18})^2}{(a^6)^6 + 4 \cdot (a^{12})^3} + 625 \cdot a^{11} \cdot a^{16} : (5a^9)^3 = \frac{81a^{36} - 36a^{36}}{a^{36} + 4a^{36}} + \frac{625a^{27}}{125a^{27}} = \frac{45}{5} + 5 = 14.$$

Ответ: 14.

3. (2 балла) Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{9 - x^2}{x^2 + 8x + 7}}$.

Решение.

Областью определения функции будет множество решений неравенства

$$\frac{9 - x^2}{x^2 + 8x + 7} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 1)(x + 7)} \leq 0.$$

Откуда, методом интервалов, получаем $x \in (-7; -3] \cup (-1; 3]$.

Ответ: $(-7; -3] \cup (-1; 3]$.

4. (3 балла) Цена некоторого товара поднялась на 25%, а потом ещё на 30%. Другой товар поднялся в цене на 30% и стал по цене равным первому товару. Какова первоначальная цена первого товара, если второй до повышения цены стоил 1250 рублей?

Решение. Первоначальная цена второго товара 1250 рублей, тогда после повышения он стал стоить $1250 \cdot 1,3 = 1625$ рублей. Пусть изначальная цена первого товара равна a , тогда после первого подорожания она стала равна $1,25a$, а после второго $1,25 \cdot 1,3a = 1,625a = 1625$. Откуда, $a = 1000$ рублей.

Ответ: 1000.

5. (3 балла) Найдите значения выражения $\left(\frac{3}{\sqrt{a+3} - \sqrt{a}} - \frac{a - 3\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{a+3}}$ при $a = 1,1$.

Решение. Упростим выражение, пользуясь свойствами квадратных корней

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{\sqrt{a+3} - \sqrt{a}} - \frac{a - 3\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 3} \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{a+3}} &= \left(\frac{3(\sqrt{a+3} + \sqrt{a})}{a + 3 - a} - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 3)}{\sqrt{a} - 3} \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{a+3}} = \\ &= \left(\sqrt{a+3} + \sqrt{a} - \sqrt{a} \right) \cdot \frac{5}{\sqrt{a+3}} = 5. \end{aligned}$$

Ответ: 5.

6. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + 7x - 1) \cdot (2x^2 + 14x + 1) + 1 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 + 7x - 1 = t$, тогда $2x^2 + 14x + 1 = 2t + 3$. Получаем уравнение $t(2t + 3) + 1 = 0$, откуда получаем уравнение $2t^2 + 3t + 1 = 0$. Его корнями будут $t_1 = -1$, $t_2 = -1/2$. Выполняя обратную подстановку, получаем $x^2 + 7x - 1 = -1$ или $x^2 + 7x - 1 = -1/2$. Корнями первого уравнения будут $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, а второго $x_{3,4} = \frac{-7 \pm \sqrt{51}}{2}$.

Ответ: $0, -7, \frac{-7 \pm \sqrt{51}}{2}$.

7. (3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} y - 3 = \sqrt{x^2 - 12x + 36} \\ 3x - y = -1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} y - 3 = \sqrt{x^2 - 12x + 36} \\ 3x - y = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3 = |x - 6| \\ y = 3x + 1. \end{cases}$$

Подставив выражение для y из второго уравнения в первое, получаем $3x - 2 = |x - 6|$. При $x \geq 6$ получаем уравнение $3x - 2 = x - 6$, откуда $x = -2$ — не удовлетворяет условию $x \geq 6$; при $x < 6$ получаем уравнение $3x - 2 = 6 - x$, откуда $x = 2$ — удовлетворяет условию $x < 6$. Подставив в выражение для y , получаем $y = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.

Ответ: $(2; 7)$.

8. (3 балла) Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 2 и 7, а боковые стороны равны 4 и 3.

Решение. Разобьем трапецию на параллелограмм и треугольник. Стороны треугольника 3, 4 и 5, следовательно, он является прямоугольным. Его высота $\frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$. Тогда площадь трапеции $\frac{2 + 7}{2} \cdot 2,4 = 10,8$.
Ответ: 10,8.

9. (3 балла) В треугольнике ABC проведена биссектриса BM . Через точку M проходит прямая, параллельная BC и пересекающая AB в точке K . Найдите длину KM , если AB и BC соответственно равны 10 и 15.

Решение.

Так как BM биссектриса, то используя основное свойство биссектрисы, получаем $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$. Прямая KM отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник, так как она параллельна BC . Из подобия треугольников AKM и ABC , получаем $\frac{KM}{BC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow KM = \frac{BC \cdot AM}{AC} = \frac{15 \cdot 2}{5} = \frac{30}{5} = 6$.

Ответ: 6.

10. (3 балла) Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2x + q = 0$ равна 10084. Найдите корни уравнения.

Решение. Преобразуем сумму квадратов корней уравнения $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Используя теорему Виета $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = q$; получаем $4 - 2q = 10084$, откуда $q = -5040$. Получаем уравнение $x^2 - 2x - 5040 = 0$, корни которого $x_1 = -70$, $x_2 = 72$.

Ответ: $-70; 72$.

11. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

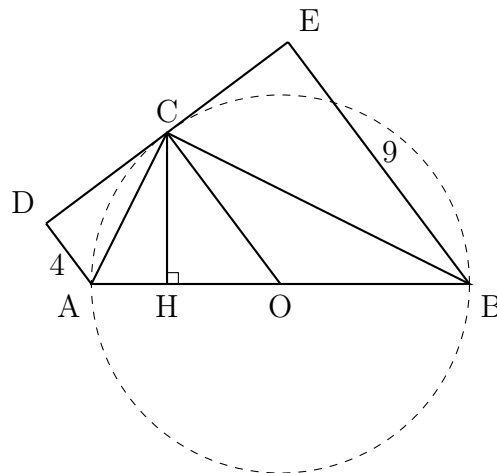
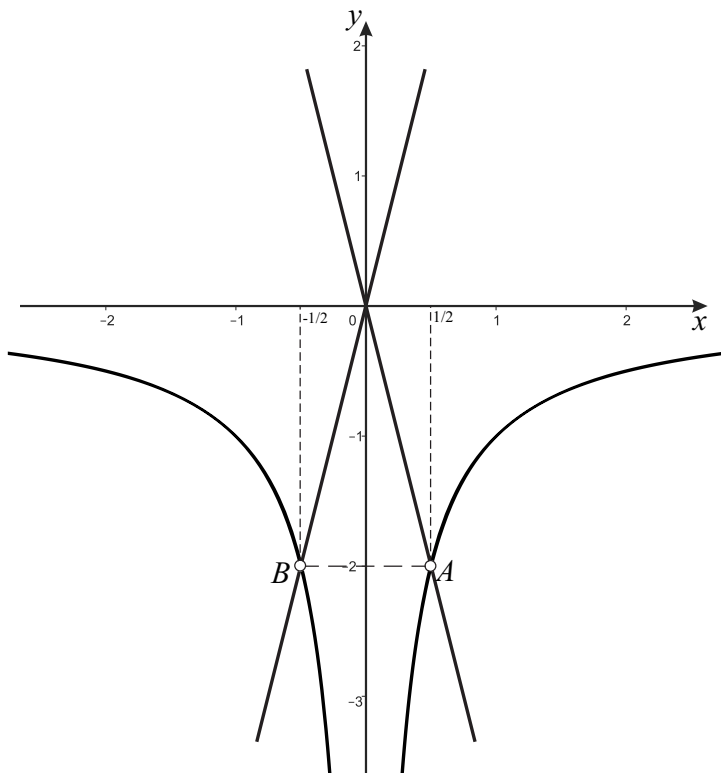
Решение.

Преобразуем данную функцию

$$y = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2} = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2|x|^2} = \frac{2|x| - 1}{|x|(1 - 2|x|)} = -\frac{1}{|x|}, \text{ где } |x| \neq \frac{1}{2}.$$

Построим гиперболу $y = \frac{1}{x}$ и отразим её часть, расположенную выше оси абсцисс в нижнюю полуплоскость. При этом необходимо выколоть из графика точки $A(\frac{1}{2}; -2)$ и $B(-\frac{1}{2}; -2)$. Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенным графиком общих точек, если данная прямая пройдет через точку A , точку B , либо совпадает с осью Ox . Это будет при значениях параметра $k = -4$, $k = 4$ и $k = 0$ соответственно.

Ответ: $\pm 4, 0$.



12. (5 баллов) Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C , соответственно равны 4 и 9. Найдите сумму катетов AC и BC .

Решение.

Проведем высоту CH . По свойствам высоты в прямоугольном треугольнике получаем, что $\triangle ACH \sim \triangle CBH$. Угол $\angle DCA$ равен углу $\angle CBA$, как угол между касательной и хордой и вписанный угол. Тогда получаем, что $\angle DCA = \angle ACH$, откуда следует равенство треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle ACH$. Значит $AH = AD = 4$. Аналогично $HB = BE = 9$. Используя соотношения в прямоугольном треугольнике находим, что $AC = \sqrt{AH \cdot AB} = 2\sqrt{13}$, а $BC = \sqrt{BH \cdot AB} = 3\sqrt{13}$. Тогда $AC + BC = 5\sqrt{13}$.

Ответ: $5\sqrt{13}$.

13. (6 баллов) Работники завода выполняли некоторую работу. Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то работа будет закончена на 45 дней позже, а если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет выполнено на 35 дней раньше. Сколько рабочих выполняло работу первоначально и за сколько дней они завершили работу?

Решение. Пусть первоначально было x работников завода и они выполнили задание за y дней. Тогда, приняв производительность одного рабочего за 1, получим, что они выполняли задание xy . Если число рабочих уменьшить на 15 человек, то задание будет измеряться как $(x - 15)(y + 45)$. Если число рабочих увеличить на 25 человек, то задание будет измеряться как $(x + 25)(y - 35)$. Так как задание выполняется одинаковое, то приравняем эти уравнения и составим систему

$$\begin{cases} xy = (x - 15)(y + 45) \\ xy = (x + 25)(y - 35) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 45x - 15y = 15 \cdot 45 \\ -35x + 25y = 25 \cdot 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x - 5y = 5 \cdot 45 \\ -7x + 5y = 5 \cdot 35 \end{cases}$$

Складывая два уравнения системы, получаем $8x = 5 \cdot 45 + 5 \cdot 35$, откуда $x = 50$. Подставляя в первое уравнение системы, находим $y = 105$. Тогда первоначально 50 рабочих выполняло работу, завершив её за 105 дней.

Ответ: 50 рабочих, 105 дней.

14. (7 баллов) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 2)x + 2a\sqrt{x} - 1 = 0$$

имеет единственный корень.

Решение.

Выполнив замену переменной $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$, свведём уравнение к квадратному $(a - 2)t^2 + 2at - 1 = 0$. Уравнение будет иметь один корень, если коэффициент перед t^2 равен 0 и этот корень положителен или уравнение имеет один положительный корень.

1 случай: $a - 2 = 0$, $a = 2$. Уравнение примет вид: $4t - 1 = 0$, откуда $t = \frac{1}{4}$ – подходит.

2 случай: корни существуют, значит $D \geq 0$ $D = 4a^2 + 4a - 8 \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Если $a = -2$ или $a = 1$, то уравнение имеет единственный корень. При $a = -2$, $t = -0,5$ – не удовлетворяет условию; при $a = 1$, $t = 1$ – удовлетворяет условию.

Если $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, то корни должны быть разных знаков. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a - 2}$. Чтобы корни были разных знаков, произведение должно быть отрицательным:

$-\frac{1}{a - 2} < 0$, значит $a > 2$. Окончательно, получаем $a \in \{1\} \cup [2; \infty]$.

Ответ: $a \in \{1\} \cup [2; \infty]$.

Критерии оценивания

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ;
1 балл – в ответе неверно включены границы промежутков или указаны промежутки другого знака.
4. 3 балла за верный ответ.
5. 3 балла за верный ответ;
2 балла – в ответе указано конечное буквенное выражение.
6. 3 балла за верный ответ.
2 балла – верно найдены два значения переменной;
1 балл – в ответе указаны верные значения для замены или одно верное значение переменной.
7. 3 балла за верный ответ;
2 балла – в ответе указаны два решения, одно из которых не удовлетворяет условию;
1 балл – в ответ записано только одно решение, не удовлетворяющее условию.
8. 3 балла за верный ответ;
1 балл – указан ответ, отличающийся в два раза от верного (ошибка при нахождении площади трапеции).
9. 3 балла за верный ответ.
10. 3 балла – за верный ответ;
2 балла – верно найден один корень или найденные корни отличаются знаками;
1 балл – в ответ указано верно найденное значение q .
11. 5 баллов – верно построен график с выколотыми точками, верно указаны значения параметра;
4 балла – верно построен график с выколотыми точками, верно указаны два значения параметра или указаны все параметры без обоснований ;
3 балла – верно построен график с выколотыми точками, не указаны или указаны неверные значения для параметра или построен график без выколотых точек и верно указано значение параметра;
2 балла – построен график, отличающийся от верного отсутствием выколотых точек;
1 балл – верно указано кусочное задание функции, но график не построен или построен неверно; в других случаях – 0 баллов.
12. 5 баллов – обоснованно получен верный ответ;
4 балла – приведены верные шаги решения, получен ответ с допущенной арифметической ошибкой;
2 балла – верно найдены проекции катетов на гипотенузу или радиус окружности ;
1 балл – верно найдена длина гипотенузы;
в других случаях – 0 баллов.
13. 6 баллов – обоснованно получен верный ответ;
5 баллов – приведены верные шаги решения, получен ответ с допущенной арифметической ошибкой или приведен ответ только на один вопрос;
3 балла – составлена верная система уравнений, но допущена ошибка при ее решении;
1 балл – составлена верная модель задачи и не обоснованно получен верный ответ.
14. 7 баллов – обоснованно получен верный ответ;
+1 балл – найдено одно значение a ;
+2 балла – верно составлена математическая модель решения задачи;
+1 балл – верно найдены значения a , когда $D \geq 0$;
+1 балл – проверены значения переменной, когда $D = 0$;
+1 балл – верно найдены значения a , для корней разных знаков.