

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма	Проверил

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в 10 физмат, матинф и физтех классы (2025)

Вариант 1

Часть 1

К задачам 1–11 приведите только ответ (впишите его после слова «Ответ»).

Решение этих задач в чистовик записывать не нужно.

1. (2 балла) Решите неравенство $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x}$.

Ответ: _____

2. (2 балла) Длину одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника увеличили на 40%. На сколько процентов нужно теперь уменьшить длину второго катета, чтобы длина гипотенузы осталась первоначальной?

Ответ: _____

3. (2 балла) Найдите x , если известно, что существует такое y , что $x = 7 + \sqrt{y(10-y) - 25}$.

Ответ: _____

4. (2 балла) Длины сторон параллелограмма — натуральные числа. Одна из его сторон имеет длину 1, а одна из его диагоналей — длину 7. Найдите периметр параллелограмма.

Ответ: _____

5. (2 балла) В правильном треугольнике PQR со стороной 1 точки P_1 и R_1 — середины сторон QR и QP соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{RR_1}$.

Ответ: _____

6. (2 балла) Сколько целых чисел содержит множество решений неравенства

$$\sqrt{72-x-x^2} + \sqrt{x+7} \geq 0?$$

Ответ: _____

7. (2 балла) Величины углов треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 5. Найдите наибольший угол этого треугольника.

Ответ: _____

8. (2 балла) Известно, что $n^2 = 6k$ (n и k — натуральные числа). Найдите остаток от деления $n^2 + 7$ на 9.

Ответ: _____

9. (3 балла) Высота CH проведена из вершины C прямого угла треугольника ABC . Угол CAB равен 30° , а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CAH , равен $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH .

Ответ: _____

10. (3 балла) Дана функция $f(x) = (a^2 - 4)x^2 + 3x - 1$. При каких значениях a числа $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$ образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: _____

11. (3 балла) Каждый корень уравнения $x^2 - bx + 2025 = 0$ — натуральное число, меньшее 100. Найдите b , если оно также меньше 100 (в ответе необходимо указать все возможные варианты).

Ответ: _____

Часть 2

Для задач 12–15 запишите в чистовике полные решения.

12. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(3-x)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-2x-3}$. Напишите подробное объяснение, почему получился именно такой график.

13. (6 баллов) Юля продиктовала Андрею номер своего паспорта, но последние две цифры он не расслышал и поэтому нарисовал вместо них сердечки, получилось 12349601♥♥. Однако Юля окончила УрФУ и была очень умной, а поэтому сказала, что номер является точным квадратом, а число, полученное после извлечения из этого номера квадратного корня, делится на 6. Восстановите последние две цифры номера (приведите полное решение; в ответе запишите только эти две цифры).

14. (7 баллов) В треугольнике PQR известны две стороны и угол между ними: $QP = 5$, $QR = 8$, $\widehat{Q} = 60^\circ$. Из вершины Q проведены биссектриса QB ($B \in PR$) и высота QH . Найдите длину отрезка BH .

15. (7 баллов) Даны две системы неравенств:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 4, \\ 2x - y \leq a \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 4, \\ 2x - y \geq a \end{cases} \quad (2).$$

Обозначим площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют первой системе, через S_1 (если первая система не имеет решений, положим $S_1 = 0$); аналогично поступим и со второй системой, определив число S_2 . Найдите значение параметра a , при котором $S_1 = S_2$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Сумма	Проверил

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в 10 физмат, матинф и физтех классы (2025)

Вариант 2

Часть 1

К задачам 1–11 приведите только ответ (впишите его после слова «Ответ»).

Решение этих задач в чистовик записывать не нужно.

1. (2 балла) Решите неравенство $\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{3x}$.

Ответ: _____

2. (2 балла) Длину одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника уменьшили на 80%. На сколько процентов нужно теперь увеличить длину второго катета, чтобы длина гипотенузы осталась первоначальной?

Ответ: _____

3. (2 балла) Найдите b , если известно, что существует такое a , что $b = \sqrt{a(6-a)} - 9 - 12$.

Ответ: _____

4. (2 балла) Длины сторон параллелограмма — натуральные числа. Одна из его диагоналей имеет длину 1, а одна из его сторон — длину 5. Найдите периметр параллелограмма.

Ответ: _____

5. (2 балла) В правильном треугольнике ABC со стороной 2 точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

Ответ: _____

6. (2 балла) Сколько целых чисел содержит множество решений неравенства

$$\sqrt{42-x-x^2} \geq -\sqrt{5-x}?$$

Ответ: _____

7. (2 балла) Величины углов треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4. Найдите наибольший угол этого треугольника.

Ответ: _____

8. (2 балла) Известно, что $k^2 = 21n$ (k и n — натуральные числа). Найдите остаток от деления $k^2 + 5$ на 9.

Ответ: _____

9. (3 балла) Высота CH проведена из вершины C прямого угла треугольника ABC . Угол CAB равен 60° , а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CAH , равен $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH .

Ответ: _____

10. (3 балла) Дана функция $f(x) = (9 - b^2)x^2 + 5x - 2$. При каких значениях b числа $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$ образуют арифметическую прогрессию?

Ответ: _____

11. (3 балла) Каждый корень уравнения $x^2 - bx + 400 = 0$ — натуральное число, меньшее 40. Найдите b , если оно меньше 41 (в ответе необходимо указать все возможные варианты).

Ответ: _____

Часть 2

Для задач 12–15 запишите в чистовике полные решения.

12. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(5 - x)\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x^2 - 7x + 10}$. Напишите подробное объяснение, почему получился именно такой график.

13. (6 баллов) Александр Сергеевич продиктовал Наталье Николаевне свой номер в мессенджере, но последние две цифры она не расслышала и поэтому нарисовала вместо них сердечки, получилось 12366475♥♥. Однако Александр Сергеевич окончил лицей и хорошо знал математику, а поэтому сказал, что номер является точным квадратом, а число, полученное после извлечения из этого номера квадратного корня, делится на 6. Восстановите последние две цифры номера (приведите полное решение; в ответе запишите только эти две цифры).

14. (7 баллов) В треугольнике RST известны две стороны и угол между ними: $SR = 3, ST = 5, \widehat{S} = 120^\circ$. Из вершины S проведены биссектриса SK ($K \in RT$) и высота SH . Найдите длину отрезка KH .

15. (7 баллов) Даны две системы неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 \leq 9, \\ 3x - y \leq b \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 \leq 9, \\ 3x - y \geq b \end{cases} \quad (2).$$

Обозначим площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют первой системе, через S_1 (если первая система не имеет решений, положим $S_1 = 0$); аналогично поступим и со второй системой, определив число S_2 . Найдите значение параметра b , при котором $S_1 = S_2$.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ (РЕШЕНИЯ)
для поступающих в 10 физмат, матинф и физтех классы (2025)

Вариант 1

1. (2 балла) Решите неравенство $\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x}$.

Решение. Перенесем всё в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{x+1}{2x(x-1)} \leq 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим

ответ: $(-\infty, -1] \cup (0, 1)$.

Примечание. За «перепутывание» круглых и квадратных скобок, если в остальном ответ верный, — 1 балл.

2. (2 балла) Длину одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника увеличили на 40%. На сколько процентов нужно теперь уменьшить длину второго катета, чтобы длина гипотенузы осталась первоначальной?

Решение. Пусть x — длина каждого из катетов до изменений, а k — коэффициент, на который требуется умножить длину второго катета. Из условия и теоремы Пифагора $(1,4x)^2 + (kx)^2 = 2x^2$, откуда $k^2 = 2 - 1,4^2 = 0,04$; $k = 0,2$.

Ответ: на 80%.

3. (2 балла) Найдите x , если известно, что существует такое y , что $x = 7 + \sqrt{y(10-y) - 25}$.

Решение. После несложных преобразований получим, что подкоренное выражение равно $-y^2 + 10y - 25 = -(y-5)^2$. Оно является неотрицательным только при $y = 5$. Таким образом, если существует y , указанное в условии, то оно равно 5; тогда $x = 7$.

Ответ: 7.

4. (2 балла) Длины сторон параллелограмма — натуральные числа. Одна из его сторон имеет длину 1, а одна из его диагоналей — длину 7. Найдите периметр параллелограмма.

Решение. Пусть x — длина стороны параллелограмма, смежной с данной. Из неравенства треугольника следует, что $7-1 < x < 7+1$, то есть $x = 7$. Тогда периметр параллелограмма равен $(1+7) \cdot 2 = 16$.

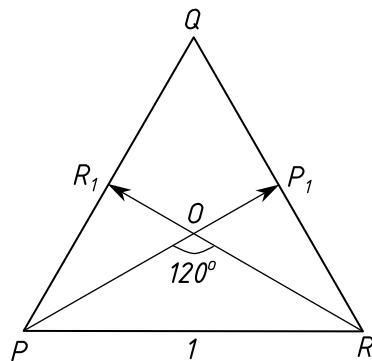
Ответ: 16.

5. (2 балла) В правильном треугольнике PQR со стороной 1 точки P_1 и R_1 — середины сторон QR и QP соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{RR_1}$.

Решение. Длина каждого из этих векторов равна длине медианы правильного треугольника со стороной 1, то есть $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Если $\{O\} = PP_1 \cap RR_1$, то из $\triangle POR$ легко получим, что $\widehat{POR} = 120^\circ$; угол же между данными векторами — вертикальный с углом POR и поэтому также равен 120° . Таким образом,

$$\overrightarrow{PP_1} \cdot \overrightarrow{RR_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 120^\circ = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}.$$

Ответ: $-\frac{3}{8}$.



6. (2 балла) Сколько целых чисел содержит множество решений неравенства

$$\sqrt{72-x-x^2} + \sqrt{x+7} \geq 0?$$

Решение. Сумма арифметических квадратных корней всегда неотрицательна, поэтому множество решений неравенства совпадает с его ОДЗ, которое задается условиями $72-x-x^2 \geq 0$, $x+7 \geq 0$. Решив эту систему неравенств, получим $x \in [-7, 8]$. Это множество содержит 16 целых чисел.

Ответ: 16.

7. (2 балла) Величины углов треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 5. Найдите наибольший угол этого треугольника.

Решение. Пусть x — величина наименьшего угла. Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то, используя формулу суммы первых трех членов геометрической прогрессии, получим $\frac{x(5^3 - 1)}{5 - 1} = 180$, то есть $31x = 180$, откуда $x = \frac{180}{31}$. Тогда градусная мера наибольшего угла равна $\frac{180}{31} \cdot 5^2 = \frac{4500}{31} = 145\frac{5}{31}$.

Ответ: $145\frac{5}{31}^\circ$.

8. (2 балла) Известно, что $n^2 = 6k$ (n и k — натуральные числа). Найдите остаток от деления $n^2 + 7$ на 9.

Решение. Поскольку n^2 делится на 3, в разложении числа n на простые множители имеется множитель 3, поэтому n^2 делится на 9. Следовательно, остаток от деления $n^2 + 7$ на 9 равен 7.

Ответ: 7.

9. (3 балла) Высота CH проведена из вершины C прямого угла треугольника ABC . Угол CAB равен 30° , а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CAH , равен $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH .

Решение. Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен половине его гипотенузы, поэтому $AC = 12\sqrt{3}$. Тогда $CB = AC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 12$, а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH , равен половине его гипотенузы CB , то есть 6.

Ответ: 6.

10. (3 балла) Дана функция $f(x) = (a^2 - 4)x^2 + 3x - 1$. При каких значениях a числа $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, ... образуют арифметическую прогрессию?

Решение. Если эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью d , то

$$d = f(3) - f(2) = f(2) - f(1),$$

то есть

$$(9(a^2 - 4) + 8) - (4(a^2 - 4) + 5) = (4(a^2 - 4) + 5) - ((a^2 - 4) + 2),$$

откуда $a^2 - 4 = 0$, $a \in \{-2, 2\}$. Проверим найденные значения: при них $f(n) = 3n - 1 = 2 + 3(n - 1)$ и эта последовательность действительно является арифметической прогрессией с первым членом 2 и разностью 3.

Ответ: $\{-2, 2\}$.

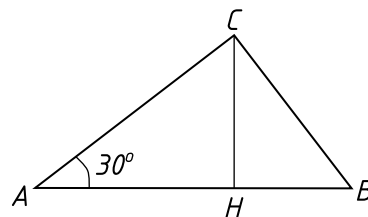
Примечание. За потерю одного значения a выставляется 1 балл.

11. (3 балла) Каждый корень уравнения $x^2 - bx + 2025 = 0$ — натуральное число, меньшее 100. Найдите b , если оно также меньше 100 (в ответе необходимо указать все возможные варианты).

Решение. Разложим 2025 на множители: $2025 = 1 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Произведение корней по теореме Виета равно 2025, а их сумма равна b . Понятно, что если один из корней равен 1, то второй больше 100. Следовательно, в разложении каждого корня имеются множители, отличные от 1. Рассмотрим три возможных случая.

Пусть один из корней содержит в качестве простых множителей все четыре тройки, тогда он не может содержать пятерок, так как иначе он был бы больше 100. В этом случае корнями являются 81 и 25, а $b = 106$ — такой случай невозможен.

Пусть в одном из корней три тройки. Тогда в нем не может быть пятерок, поскольку $3^3 \cdot 5 > 100$. В этом случае получаем корни 27 и 75, а $b = 102$, что тоже противоречит условию.



Пусть теперь в обоих корнях по две тройки. Тогда ни в одном из них не может быть двух пятерок, потому что $3^2 \cdot 5^2 > 100$. Таким образом, у нас остался единственный возможный случай: в обоих корнях по две тройки и по одной пятёрке, тогда корни 45 и 45, а $b = 90$.

Ответ: 90.

12. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(3-x)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-2x-3}$. Напишите подробное объяснение, почему получился именно такой график.

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{(3-x)\sqrt{x^2+2x+1}}{x^2-2x-3} = \frac{(3-x)\sqrt{(x+1)^2}}{(x-3)(x+1)} = -\frac{(x-3) \cdot |x+1|}{(x-3)(x+1)}.$$

Получившееся выражение не определено при $x \in \{-1, 3\}$ (соответствующие точки на графике будут выколотыми); при остальных значениях x сократим дробь (по-разному в зависимости от знака подмодульного выражения $x+1$), получим

$$y = \begin{cases} \text{не определено, } x \in \{-1, 3\}; \\ 1, & x \in (-\infty, -1); \\ -1, & x \in (-1, 3) \cup (3, +\infty). \end{cases}$$

Соответствующий график изображен на рисунке.

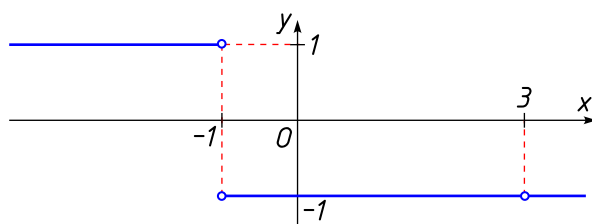


График построен верно, приведено полное решение	5
График построен верно, но в решении не содержатся преобразования, объясняющие его построение, либо эти преобразования приведены не полностью	3
При извлечении корня из полного квадрата потерян знак модуля либо сокращение выражения с модулем выполнено неверно; без учета этой ошибки график построен верно или знак модуля не потерян, сокращение выражения с модулем выполнено верно, но не учтена выколотая точка	2
Построен график — прямая $y = -1$	1

13. (6 баллов) Юля продиктовала Андрею номер своего паспорта, но последние две цифры он не расслышал и поэтому нарисовал вместо них сердечки, получилось 12349601♥♥. Однако Юля окончила УрФУ и была очень умной, а поэтому сказала, что номер является точным квадратом, а число, полученное после извлечения из этого номера квадратного корня, делится на 6. Восстановите последние две цифры номера (приведите полное решение; в ответе запишите только эти две цифры).

Решение. Если число делится на 6, то его квадрат делится на 36, то есть на 4 и на 9. Делимость числа на 9 означает, что сумма его цифр делится на 9. Поскольку сумма известных цифр номера равна 26, сумма последних двух цифр (она, очевидно, не больше 18) может равняться лишь 1 или 10. Далее, делимость числа на 4 означает, что две его последние цифры образуют число, делящееся на 4. Перебирая варианты 00, 04, 08, ... и проверяя в каждом из них сумму цифр, находим, что подходит вариант 28. Другой вариант можно получить, прибавив к 28 число 36; получим 64.

Итак, «кандидатами» на последние две цифры у нас являются 28 и 64. Вспоминая, однако, таблицу умножения, мы понимаем, что точный квадрат не может оканчиваться цифрой 8.

Ответ: 64.

Доказана делимость на 9	+1
Доказана делимость на 4	+1
Верно отобраны варианты, обеспечивающие делимость на 36	+2
Обоснованно исключены варианты, содержащие невозможную последнюю цифру	+1
Приведен верный ответ (без «лишних» вариантов)	+1

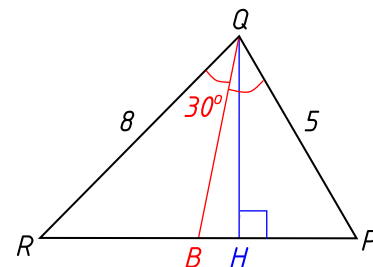
14. (7 баллов) В треугольнике PQR известны две стороны и угол между ними: $QP = 5$, $QR = 8$, $\widehat{Q} = 60^\circ$. Из вершины Q проведены биссектриса QB ($B \in PR$) и высота QH . Найдите длину отрезка BH .

Решение. По теореме косинусов имеем:

$$PR^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49, \text{ то есть } PR = 7.$$

Найдем площадь данного треугольника: $S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.

Теперь легко найти высоту: $QH = \frac{2S}{PR} = \frac{20\sqrt{3}}{7}$. Из теоремы Пифагора тогда $HP = \sqrt{25 - \frac{400 \cdot 3}{49}} = \frac{5}{7}$.



Далее воспользуемся свойством биссектрисы: $\frac{BP}{7 - BP} = \frac{5}{8}$, откуда $BP = \frac{35}{13}$. Следовательно, $BH = \frac{35}{13} - \frac{5}{7} = \frac{180}{91} = 1\frac{89}{91}$.

Если вы знаете формулу длины биссектрисы, задачу можно решить чуть быстрее:

$$QB = \frac{1}{5+8} \sqrt{5 \cdot 8 \cdot (5+8+7)(5+8-7)} = \frac{40\sqrt{3}}{13};$$

$$BH = \sqrt{QB^2 - QH^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 40^2}{169} - \frac{3 \cdot 20^2}{49}} = \frac{180}{13 \cdot 7}.$$

Ответ: $1\frac{89}{91}$.

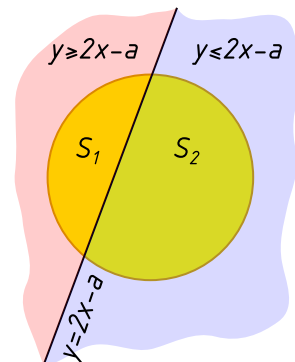
Приведено полное обоснованное решение	7
Ход решения полностью верен; получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	5
Верно найдены хотя бы две геометрические величины (длина отрезка или площадь треугольника), до конца задача не решена	3
Верно найдена только одна геометрическая величина	1

15. (7 баллов) Даны две системы неравенств:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 4, \\ 2x - y \leq a \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 4, \\ 2x - y \geq a \end{cases} \quad (2).$$

Обозначим площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют первой системе, через S_1 (если первая система не имеет решений, положим $S_1 = 0$); аналогично поступим и со второй системой, определив число S_2 . Найдите значение параметра a , при котором $S_1 = S_2$.

Решение. Первое неравенство каждой системы задает круг радиуса 2 с центром в точке $(-1, 3)$, а второе неравенство каждой системы — полуплоскость, границей которой является прямая $y = 2x - a$. При этом первой системе соответствует верхняя (левая) полуплоскость, а второй системе — правая (нижняя), как показано на рисунке.



Если прямая является секущей для окружности (границы круга), то S_1 — это площадь левой (на рисунке) части круга, а S_2 — площадь его правой части; в случае, когда прямая является касательной к окружности или не пересекается с ней, одна из величин $S_{1,2}$ равна 0, а вторая равна площади всего круга. Понятно, что $S_1 = S_2$ тогда и только тогда, когда прямая разбивает круг на две равные части, то есть проходит через центр круга. Подставляя координаты центра круга — точку $(-1, 3)$ — в уравнение прямой $y = 2x - a$, получим $3 = 2 \cdot (-1) - a$, откуда $a = -5$.

Ответ: $a = -5$.

Верно построен (или описан) круг, задаваемый первым неравенством каждой системы	+1
Верно построены (или описаны) полуплоскости, задаваемые вторыми неравенствами каждой системы	+2
Построены или описаны случаи, когда прямая не пересекается с окружностью или является касательной	+1
В решении содержится утверждение (или рисунок) о том, что $S_1 = S_2$ тогда и только тогда, когда прямая проходит через центр круга	+2
В ответе приведено верное значение параметра	+1

Вариант 2

1. (2 балла) Решите неравенство $\frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{3x}$.

Решение. Перенесем всё в левую часть и приведем к общему знаменателю: $\frac{2x+2}{3x(x-2)} \geq 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получим

ответ: $[-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

Примечание. За «перепутывание» круглых и квадратных скобок, если в остальном ответ верный, — 1 балл.

2. (2 балла) Длину одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника уменьшили на 80%. На сколько процентов нужно теперь увеличить длину второго катета, чтобы длина гипотенузы осталась первоначальной?

Решение. Пусть x — длина каждого из катетов до изменений, а k — коэффициент, на который требуется умножить длину второго катета. Из условия и теоремы Пифагора $(0, 2x)^2 + (kx)^2 = 2x^2$, откуда $k^2 = 2 - 0,2^2 = 1,96$; $k = 1,4$.

Ответ: на 40%.

3. (2 балла) Найдите b , если известно, что существует такое a , что $b = \sqrt{a(6-a)} - 9 - 12$.

Решение. После несложных преобразований получим, что подкоренное выражение равно $-a^2 + 6a - 9 = -(a-3)^2$. Оно является неотрицательным только при $a = 3$. Таким образом, если существует a , указанное в условии, то оно равно 3; тогда $b = -12$.

Ответ: -12 .

4. (2 балла) Длины сторон параллелограмма — натуральные числа. Одна из его диагоналей имеет длину 1, а одна из его сторон — длину 5. Найдите периметр параллелограмма.

Решение. Пусть x — длина стороны параллелограмма, смежной с данной. Из неравенства треугольника следует, что $5-1 < x < 5+1$, то есть $x = 5$. Тогда периметр параллелограмма равен $(5+5) \cdot 2 = 20$.

Ответ: 20.

5. (2 балла) В правильном треугольнике ABC со стороной 2 точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

Решение. Длина каждого из этих векторов равна длине медианы правильного треугольника со стороной 2, то есть $\sqrt{3}$. Если $\{O\} = B_1B \cap C_1C$, то из $\triangle BOC$ легко получим, что $\widehat{BOC} = 120^\circ$ — это и

есть угол между данными векторами. Таким образом,

$$\overrightarrow{B_1B} \cdot \overrightarrow{C_1C} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 120^\circ = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

6. (2 балла) Сколько целых чисел содержит множество решений неравенства

$$\sqrt{42 - x - x^2} \geq -\sqrt{5 - x}?$$

Решение. По определению квадратного корня его значение — неотрицательное число, поэтому множество решений неравенства совпадает с его ОДЗ, которое задается условиями $42 - x - x^2 \geq 0$, $5 - x \geq 0$. Решив эту систему неравенств, получим $x \in [-7, 5]$. Это множество содержит 13 целых чисел.

Ответ: 13.

7. (2 балла) Величины углов треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 4. Найдите наибольший угол этого треугольника.

Решение. Пусть x — величина наименьшего угла. Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , то, используя формулу суммы первых трех членов геометрической прогрессии, получим $\frac{x(4^3 - 1)}{4 - 1} = 180$, то есть $21x = 180$, откуда $x = \frac{60}{7}$. Тогда градусная мера наибольшего угла равна $\frac{60}{7} \cdot 4^2 = \frac{960}{7} = 137\frac{1}{7}$.

Ответ: $137\frac{1}{7}^\circ$.

8. (2 балла) Известно, что $k^2 = 21n$ (k и n — натуральные числа). Найдите остаток от деления $k^2 + 5$ на 9.

Решение. Поскольку k^2 делится на 3, в разложении числа k на простые множители имеется множитель 3, поэтому k^2 делится на 9. Следовательно, остаток от деления $k^2 + 5$ на 9 равен 5.

Ответ: 5.

9. (3 балла) Высота CH проведена из вершины C прямого угла треугольника ABC . Угол CAB равен 60° , а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CAH , равен $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH .

Решение. Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, равен половине его гипотенузы, поэтому $AC = 16\sqrt{3}$. Тогда $CB = AC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 48$, а радиус окружности, описанной вокруг треугольника CBH , равен половине его гипотенузы CB , то есть 24.

Ответ: 24.

10. (3 балла) Дана функция $f(x) = (9 - b^2)x^2 + 5x - 2$. При каких значениях b числа $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, ... образуют арифметическую прогрессию?

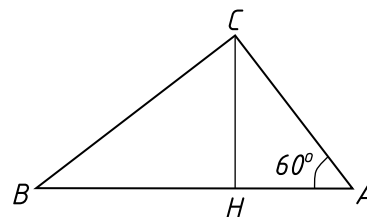
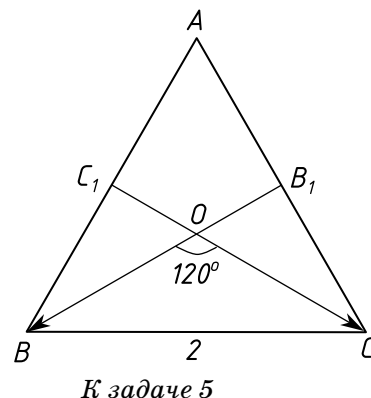
Решение. Если эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью d , то

$$d = f(3) - f(2) = f(2) - f(1),$$

то есть

$$(9(9 - b^2) + 13) - (4(9 - b^2) + 8) = (4(9 - b^2) + 8) - ((9 - b^2) + 3),$$

откуда $9 - b^2 = 0$, $b \in \{-3, 3\}$. Проверим найденные значения: при них $f(n) = 5n - 2 = 3 + 5(n - 1)$ и эта последовательность действительно является арифметической прогрессией с первым членом 3 и разностью 5.



Ответ: $\{-3, 3\}$.

Примечание. За потерю одного значения b выставляется 1 балл.

11. (3 балла) Каждый корень уравнения $x^2 - bx + 400 = 0$ — натуральное число, меньшее 40. Найдите b , если оно меньше 41 (в ответе необходимо указать все возможные варианты).

Решение. Разложим 400 на множители: $400 = 1 \cdot 2^4 \cdot 5^2$. Произведение корней по теореме Виета равно 400, а их сумма равна b . Понятно, что если один из корней равен 1, то второй больше 40. Следовательно, в разложении каждого корня имеются множители, отличные от 1. Рассмотрим три возможных случая.

Пусть один из корней содержит в качестве простых множителей все четыре двойки, тогда он не может содержать пятерок, так как иначе он был бы больше 40. В этом случае корнями являются 16 и 25, а $b = 41$ — такой случай невозможен.

Пусть в одном из корней три двойки. Тогда в нем не может быть пятерок, поскольку $2^3 \cdot 5 = 40$. В этом случае получаем корни 8 и 50, а $b = 58$, что тоже противоречит условию.

Пусть теперь в обоих корнях по две двойки. Тогда ни в одном из них не может быть двух пятерок, потому что $2^2 \cdot 5^2 > 40$. Таким образом, у нас остался единственный возможный случай: в обоих корнях по две двойки и по одной пятерке, тогда корни 20 и 20, а $b = 40$.

Ответ: 40.

12. (5 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(5-x)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-7x+10}$. Напишите подробное объяснение, почему получился именно такой график.

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{(5-x)\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-7x+10} = \frac{(5-x)\sqrt{(x-2)^2}}{(x-5)(x-2)} = -\frac{(x-5) \cdot |x-2|}{(x-5)(x-2)}.$$

Получившееся выражение не определено при $x \in \{2, 5\}$ (соответствующие точки на графике будут выколотыми); при остальных значениях x сократим дробь (по-разному в зависимости от знака подмодульного выражения $x-2$), получим

$$y = \begin{cases} \text{не определено, } x \in \{2, 5\}; \\ 1, & x \in (-\infty, 2); \\ -1, & x \in (2, 5) \cup (5, +\infty). \end{cases}$$

Соответствующий график изображен на рисунке.

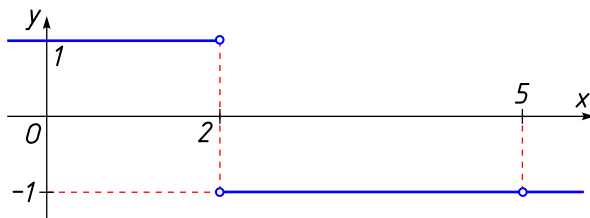


График построен верно, приведено полное решение	5
График построен верно, но в решении не содержатся преобразования, объясняющие его построение, либо эти преобразования приведены не полностью	3
При извлечении корня из полного квадрата потерян знак модуля либо сокращение выражения с модулем выполнено неверно; без учета этой ошибки график построен верно или знак модуля не потерян, сокращение выражения с модулем выполнено верно, но не учтена выколотая точка	2
Построен график — прямая $y = -1$	1

13. (6 баллов) Александр Сергеевич продиктовал Наталье Николаевне свой номер в мессенджере, но последние две цифры она не расслышала и поэтому нарисовала вместо них сердечки, получилось 12366475♥♥. Однако Александр Сергеевич окончил лицей и хорошо знал математику, а поэтому сказал, что номер является точным квадратом, а число, полученное после извлечения из этого номера квадратного корня, делится на 6. Восстановите последние две цифры номера (приведите полное решение; в ответе запишите только эти две цифры).

Решение. Если число делится на 6, то его квадрат делится на 36, то есть на 4 и на 9. Делимость числа на 9 означает, что сумма его цифр делится на 9. Поскольку сумма известных цифр номера равна 34, сумма последних двух цифр (она, очевидно, не больше 18) может равняться лишь 2 или 11. Далее, делимость числа на 4 означает, что две его последние цифры образуют число, делящееся на 4. Перебирая варианты 00, 04, 08, ... и проверяя в каждом из них сумму цифр, находим, что подходит вариант 20. Другие варианты можно получить, прибавив к 20 число 36 или 72; получим 56 или 92.

Итак, «кандидатами» на последние две цифры у нас являются 20, 56 и 92. Вспоминая, однако, таблицу умножения, мы понимаем, что точный квадрат не может оканчиваться цифрой 2 или одним нулём.

Ответ: 56.

Доказана делимость на 9	+1
Доказана делимость на 4	+1
Верно отобраны варианты, обеспечивающие делимость на 36	+2
Обоснованно исключены варианты, содержащие невозможную последнюю цифру	+1
Приведен верный ответ (без «лишних» вариантов)	+1

14. (7 баллов) В треугольнике RST известны две стороны и угол между ними: $SR = 3$, $ST = 5$, $\widehat{S} = 120^\circ$. Из вершины S проведены биссектриса SK ($K \in RT$) и высота SH . Найдите длину отрезка KH .

Решение. По теореме косинусов имеем:

$$TR^2 = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49, \text{ то есть } TR = 7.$$

Найдем площадь данного треугольника:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Теперь легко найти высоту: } SH = \frac{2S}{TR} = \frac{15\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{Из теоремы Пифагора тогда } HR = \sqrt{9 - \frac{225 \cdot 3}{196}} = \frac{33}{14}.$$

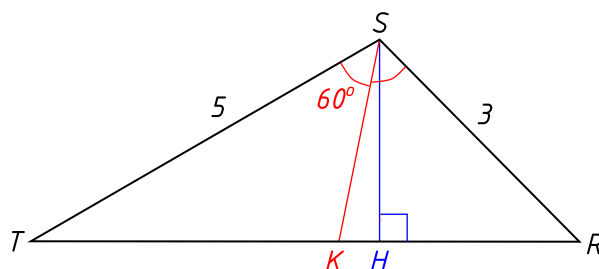
$$\text{Далее воспользуемся свойством биссектрисы: } \frac{RK}{7 - RK} = \frac{3}{5}, \text{ откуда } RK = \frac{21}{8}. \text{ Следовательно, } KH = RK - HR = \frac{21}{8} - \frac{33}{14} = \frac{15}{56}.$$

Если вы знаете формулу длины биссектрисы, задачу можно решить чуть быстрее:

$$SK = \frac{1}{5+3} \sqrt{5 \cdot 3 \cdot (5+3+7)(5+3-7)} = \frac{15}{8};$$

$$KH = \sqrt{SK^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{225}{64} - \frac{225 \cdot 3}{196}} = \frac{15}{56}.$$

Ответ: $\frac{15}{56}$.



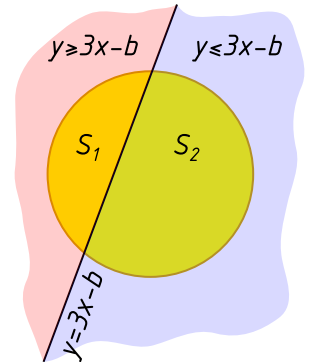
Приведено полное обоснованное решение	7
Ход решения полностью верен; получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	5
Верно найдены хотя бы две геометрические величины (длина отрезка или площадь треугольника), до конца задача не решена	3
Верно найдена только одна геометрическая величина	1

15. (7 баллов) Даны две системы неравенств:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 \leq 9, \\ 3x - y \leq b \end{cases} \quad (1) \quad \text{и} \quad \begin{cases} (x-1)^2 + (y+4)^2 \leq 9, \\ 3x - y \geq b \end{cases} \quad (2).$$

Обозначим площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют первой системе, через S_1 (если первая система не имеет решений, положим $S_1 = 0$); аналогично поступим и со второй системой, определив число S_2 . Найдите значение параметра b , при котором $S_1 = S_2$.

Решение. Первое неравенство каждой системы задает круг радиуса 3 с центром в точке $(1, -4)$, а второе неравенство каждой системы — полуплоскость, границей которой является прямая $y = 3x - b$. При этом первой системе соответствует верхняя (левая) полуплоскость, а второй системе — правая (нижняя), как показано на рисунке.



Если прямая является секущей для окружности (границы круга), то S_1 — это площадь левой (на рисунке) части круга, а S_2 — площадь его правой части; в случае, когда прямая является касательной к окружности или не пересекается с ней, одна из величин $S_{1,2}$ равна 0, а вторая равна площади всего круга. Понятно, что $S_1 = S_2$ тогда и только тогда, когда прямая разбивает круг на две равные части, то есть проходит через центр круга. Подставляя координаты центра круга — точку $(1, -4)$ — в уравнение прямой $y = 3x - b$, получим $-4 = 3 \cdot 1 - b$, откуда $b = 7$.

Ответ: $b = 7$.

Верно построен (или описан) круг, задаваемый первым неравенством каждой системы	+1
Верно построены (или описаны) полуплоскости, задаваемые вторыми неравенствами каждой системы	+2
Построены или описаны случаи, когда прямая не пересекается с окружностью или является касательной	+1
В решении содержится утверждение (или рисунок) о том, что $S_1 = S_2$ тогда и только тогда, когда прямая проходит через центр круга	+2
В ответе приведено верное значение параметра	+1