

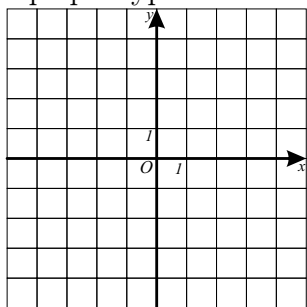
**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Вступительный тест по математике
для поступающих в 8 физико-математический
и математико-информационный класс
19 марта 2025г.
1 вариант**

1. (2 балла) Сизиф обязан каждый день втаскивать большой камень на вершину горы. В первый день он потратил на подъём в гору и спуск 5 часов суммарно. Каждый следующий день он поднимался в 2 раза медленнее, чем в предыдущий, а спускался в 2 раза быстрее. Сколько времени (в часах) он потратил на подъём и спуск суммарно в третий день, если во второй день ему понадобилось 7 часов?

2. (2 балла) Вычислите $\frac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}}$.

3. (2 балла) При каком значении параметра a график уравнения $(a - 2)x + (2a - 6)y + 8 = 0$ параллелен оси Ox ? Найдите необходимое значение a и постройте на данной координатной плоскости график уравнения при этом a .



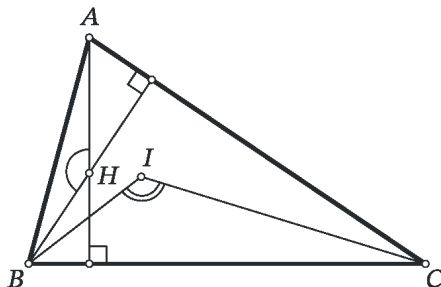
4. (2 балла) Вычислите $(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73) : (-1,73)$.

5. (2 балла) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

6. (2 балла) Произведение двух натуральных чисел на 15 больше их наибольшего общего делителя. Чему может быть равно большее из этих чисел?

7. (2 балла) Учитель выписал на доске пример $(x-10) \cdot (x^2 - 21x + \dots) = (x-20) \cdot (x^2 - 11x + \dots)$, где вместо многоточий должны быть записаны какие-то числа. Найдите, какие числа нужно записать в пример вместо многоточий, чтобы получилось равенство, верное при любом значении x .

8. (2 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 110^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C , – в точке I , причём $\angle BIC = 105^\circ$. Найдите величину угла ABC .



9. (2 балла) Максим придумал натуральное число n такое, что $n^3 - 22$ без остатка делится на $n - 1$ и записал его на листочке. Когда уборщица делала уборку в классе, она этот листочек выбросила. Найдите все возможные числа n , которые мог придумать Максим.

10. (2 балла) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C один из острых углов равен 40° . Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A ?

11. (6 баллов) Упростить выражение $\left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d + 2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d + 2}\right)^2$.

12. (6 баллов) Юра и Боря живут в небоскрёбе, на каждом этаже которого находится по 6 квартир. Номер этажа Юры равен номеру квартиры Бори, а сумма номеров их квартир равна 144. В какой квартире живёт Юра?

13. (6 баллов) Треугольник ABC образован при пересечении прямых $y = x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 3$, $y = -x - 5$. Найдите все целые значения a , при которых точка $P(a, 1)$ лежит внутри треугольника ABC (т.е. P принадлежит области, ограниченной прямыми, и не совпадает ни с одной из вершин, а также не принадлежит сторонам).

14. (6 баллов) Одноклассники Аня и Ваня делали выпускные фотоальбомы. Альбом обоих содержит не менее 50 и не более 100 фотографий. В выпускном альбоме Ани фотографий с одноклассниками оказалось на 25% меньше, чем у Вани. Зато у Вани фотографий с одноклассниками оказалось на 25% меньше, чем у Ани. Сколько всего фотографий в выпускном альбоме Вани, если известно, что их количество составляет 55% от общего числа всех фотографий в альбомах Ани и Вани? На каждой фотографии в альбоме присутствует либо одноклассник, либо одноклассница.

15. (6 баллов) На стороне PR треугольника PQR отмечена точка T так, что $QT = PR$. Медиана PM треугольника PQR пересекает отрезок QT в точке K . Так получилось, что $TK = TR$. Найдите длину PQ , если $PM + KM = 2024$.

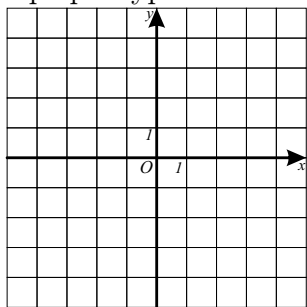
**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 физико-математический
и математико-информационный класс
19 марта 2025г.
2 вариант**

1. (2 балла) Сизиф обязан каждый день втаскивать большой камень на вершину горы. В первый день он потратил на подъём в гору и спуск суммарно 8 часов. Каждый следующий день он поднимался в 2 раза медленнее, чем в предыдущий, а спускался в 2 раза быстрее. Сколько времени (в часах) он потратил на подъём и спуск в третий день, если во второй день ему понадобилось суммарно 10 часов?

2. (2 балла) Вычислите $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

3. (2 балла) При каком значении параметра a график уравнения $(3a - 1)x + (a - 1)y - 6 = 0$ параллелен оси Oy ? Найдите необходимое значение a и постройте на данной координатной плоскости график уравнения при этом a .



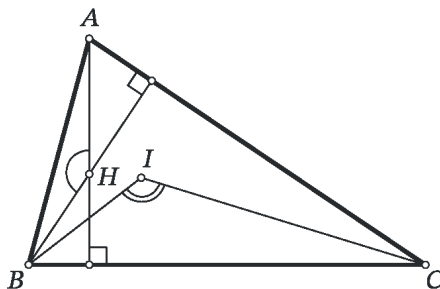
4. (2 балла) Вычислите $(1\frac{18}{25} - 9,12 - 7,4 \cdot (-6\frac{1}{3})) : 5\frac{1}{3}$.

5. (2 балла) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{12}x - \frac{2}{12}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

6. (2 балла) Произведение двух натуральных чисел на 33 больше их наибольшего общего делителя. Чему может быть равно большее из этих чисел?

7. (2 балла) Учитель выписал на доске пример $(x - 3) \cdot (x^2 - 32x + \dots) = (x - 15) \cdot (x^2 - 20x + \dots)$, где вместо многоточий должны быть записаны какие-то числа. Найдите, какие числа нужно записать в пример вместо многоточий, чтобы получилось равенство, верное при любом значении x .

8. (2 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 130^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C , – в точке I , причём $\angle BIC = 120^\circ$. Найдите величину угла ABC .



9. (2 балла) Даша придумала натуральное число n такое, что $n^3 - 11$ без остатка делится на $n - 1$ и записала его на листочке. Когда уборщица делала уборку в классе, она этот листочек выбросила. Найдите все возможные числа n , которые могла придумать Даша.

10. (2 балла) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B один из острых углов равен 70° . Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A ?

11. (6 баллов) Упростить выражение $\left(c - \frac{c^3 + 8}{2c + c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c - 2)^2} + \frac{2}{2 - c}$.

12. (6 баллов) Юра и Боря живут в небоскрёбе, на каждом этаже которого находится по 10 квартир. Номер этажа Юры равен номеру квартиры Бори, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живёт Юра?

13. (6 баллов) Треугольник ABC образован при пересечении прямых $y = -x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 4$, $y = x - 4$. Найдите все целые значения a , при которых точка $P(a, 2)$ лежит внутри треугольника ABC (т.е. P принадлежит области, ограниченной прямыми, и не совпадает ни с одной из вершин, а также не принадлежит сторонам).

14. (6 баллов) Одноклассники Серёжа и Саша делали выпускные фотоальбомы. Альбом каждого содержит не менее 55 и не более 120 фотографий. В выпускном альбоме Саши фотографий с одноклассниками оказалось на 40% меньше, чем у Серёжи. Зато у Серёжи фотографий с одноклассниками оказалось на 40% меньше, чем у Саши. Сколько всего фотографий в выпускном альбоме Серёжи, если известно, что их количество составляет 60% от общего числа всех фотографий в альбомах Саши и Серёжи? На каждой фотографии в альбоме присутствует либо одноклассник, либо одноклассница.

15. (6 баллов) На стороне PS треугольника PQS отмечена точка E так, что $QE = PS$. Медиана PL треугольника PQS пересекает отрезок QE в точке K . Так получилось, что $EK = ES$. Найдите $KL + PL$, если $PQ = 2025$.

Решение.
Вариант 1.

1. (2 балла) Сизиф обязан каждый день втаскивать большой камень на вершину горы. В первый день он потратил на подъём в гору и спуск 5 часов суммарно. Каждый следующий день он поднимался в 2 раза медленнее, чем в предыдущий, а спускался в 2 раза быстрее. Сколько времени (в часах) он потратил на подъём и спуск суммарно в третий день, если во второй день ему понадобилось 7 часов?

Решение. Пусть в первый день Сизиф потратил на подъём t_1 часов, а на спуск – t_2 часов, тогда $t_1 + t_2 = 5$ и $2 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot t_2 = 7$. Домножая первое уравнение на 2 и вычитая из него третье, получим $\frac{3}{2} \cdot t_2 = 3$, откуда $t_2 = 2$, значит, $t_1 = 3$ и искомое время в третий день составит $4 \cdot t_1 + \frac{1}{4} \cdot t_2 = 12 + \frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ часа.

Ответ: $12\frac{1}{2}$.

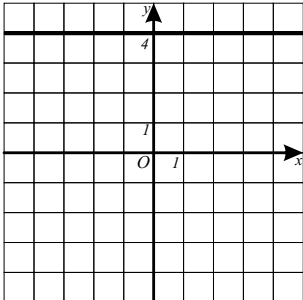
2. (2 балла) Вычислите $\frac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}}$.

Решение. Выполним действия над степенями: $\frac{2^{n+2} \cdot 21^{n+3}}{6^{n+1} \cdot 7^{n+2}} = \frac{2^{n+2} \cdot 3^{n+3} \cdot 7^{n+3}}{2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 7^{n+2}} = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126$.

Ответ: 126.

3. (2 балла) При каком значении параметра a график уравнения $(a - 2)x + (2a - 6)y + 8 = 0$ параллелен оси Ox ? Найдите необходимое значение a и постройте на данной координатной плоскости график уравнения при этом a .

Решение. Прямая, параллельная оси Ox , задается уравнением вида $y = b$, значит, в данном уравнении необходимо, чтобы коэффициент при x был равен нулю, т.е. $a - 2 = 0$, откуда $a = 2$ и после подстановки этого значения параметра в исходное уравнение получим $y = 4$. Прямая, заданная этим уравнением, построена на рисунке ниже.



Ответ: $a = 2$.

4. (2 балла) Вычислите $(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73) : (-1,73)$.

Решение.

$$\left(-6\frac{7}{8} + 1,375 - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73\right) : (-1,73) = \left(-5\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} \cdot 0,73\right) : (-1,73) = -5\frac{1}{2} \cdot 1,73 : (-1,73) = 5\frac{1}{2}.$$

Ответ: 5,5.

5. (2 балла) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Решение. Домножая первое уравнение системы на 4, а второе на -9 , получим систему
$$\begin{cases} x - 2y = \frac{3}{2} \\ x - 2y = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

где нет решений, поскольку левые части уравнений одинаковые, а правые различные.

Ответ: решений нет.

6. (2 балла) Произведение двух натуральных чисел на 15 больше их наибольшего общего делителя. Чему может быть равно большее из этих чисел?

Решение. Обозначим данные числа через a и b (будем считать, что $a \leq b$ для определенности), а их наибольший общий делитель через d , тогда $ab = 15 + d$. Поскольку a и b делятся на d и d делится на d , то и 15 должно делиться на d , поэтому d принимает одно из значений: 1, 3, 5, 15. При $d = 1$: $ab = 16$, значит, наибольшее из чисел могло быть 16 (при $b = 16$, $a = 1$). Варианты 8 и 4 невозможны, так как в этих случаях $d \neq 1$. При $d = 3$: $ab = 18$, значит, наибольшее из чисел могло быть 6 (при $b = 6$, $a = 3$). Варианты 18 и 9 невозможны, так как в этих случаях $d \neq 3$. При $d = 5$: $ab = 20$, что невозможно, так как ab должно делиться на 25. При $d = 15$: $ab = 30$, что невозможно, так как ab должно делиться на 225.

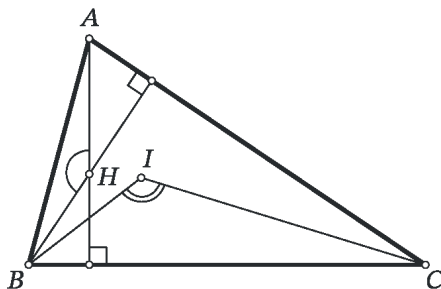
Ответ: 6 или 16.

7. (2 балла) Учитель выписал на доске пример $(x-10) \cdot (x^2-21x+\dots) = (x-20) \cdot (x^2-11x+\dots)$, где вместо многоточий должны быть записаны какие-то числа. Найдите, какие числа нужно записать в пример вместо многоточий, чтобы получилось равенство, верное при любом значении x .

Решение. Пусть вместо многоточий записаны числа a и b : $(x-10) \cdot (x^2-21x+a) = (x-20) \cdot (x^2-11x+b)$, тогда, раскрывая скобки слева и справа, получим $x^3-31x^2+ax+210x-10a = x^3-31x^2+bx+220x-20b$. Перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем x за скобку: $x(a-b-10)+20b-10a=0$. то равенство должно быть верно при любом x , что возможно только в случае, когда $a-b-10=0$ и $20b-10a=0$. Тогда $a=2b$, $b=10$ и $a=20$.

Ответ: 20 и 10.

8. (2 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 110^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C , – в точке I , причём $\angle BIC = 105^\circ$. Найдите величину угла ABC .



Решение. Так как $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ (сумма углов четырехугольника, где есть два прямых угла и угол, вертикальный с $\angle AHB$, равна 360°) и $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$, находим $\angle ACB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ и $\angle BAC = 2 \cdot (105^\circ - 90^\circ) = 30^\circ$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$.

Ответ: 80° .

9. (2 балла) Максим придумал натуральное число n такое, что n^3-22 без остатка делится на $n-1$ и записал его на листочке. Когда уборщица делала уборку в классе, она этот листочек выбросила. Найдите все возможные числа n , которые мог придумать Максим.

Решение. Заметим, что $n^3-22 = n^3-1-21$, где $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ и n^3-1 делится на $n-1$, значит, 21 должно делиться на $n-1$ при задуманных натуральных n . Тогда возможны варианты:

$$n-1=1, \text{ т.е. } n=2,$$

$$n-1=3, \text{ т.е. } n=4,$$

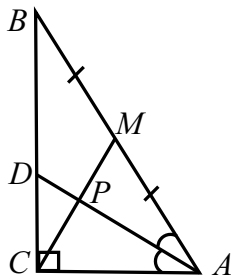
$$n-1=7, \text{ т.е. } n=8,$$

$$n-1=21, \text{ т.е. } n=22.$$

Ответ: 2, 4, 8, 22.

10. (2 балла) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C один из острых углов равен 40° . Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A ?

Решение. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC , M – середина гипотенузы AB , тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, получаем: $CM = MA = MB$, треугольник CMA – равнобедренный. Обозначим через P точку пересечения медианы CM и биссектрисы угла A . Возможны два случая. Первый случай: $\angle CAB = 40^\circ$. Тогда $\angle MCA = 40^\circ = \angle CAB$, $\angle CAD = 20^\circ$, откуда искомый $\angle MPA = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Второй случай: $\angle CBA = 40^\circ$. Тогда $\angle MCA = 50^\circ = \angle CAB$, $\angle CAD = 25^\circ$, откуда искомый $\angle MPA = 50^\circ + 25^\circ = 75^\circ$.



Ответ: 60° или 75° .

11. (6 баллов) Упростить выражение $\left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d + 2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d + 2}\right)^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d + 2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d + 2}\right)^2 &= \left(\frac{(d - 2)(d^2 + 2d + 4)}{(d - 2)(d + 2)} - \frac{6d}{d + 2}\right) : \left(\frac{d + 2 - 4}{d + 2}\right)^2 = \\ &= \frac{d^2 + 2d + 4 - 6d}{d + 2} \cdot \frac{(d + 2)^2}{(d - 2)^2} = \frac{(d - 2)^2}{d + 2} \cdot \frac{(d + 2)^2}{(d - 2)^2} = d + 2. \end{aligned}$$

Ответ: $d + 2$.

12. (6 баллов) Юра и Боря живут в небоскрёбе, на каждом этаже которого находится по 6 квартир. Номер этажа Юры равен номеру квартиры Бори, а сумма номеров их квартир равна 144. В какой квартире живёт Юра?

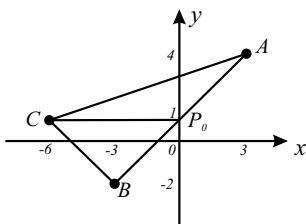
Решение. Пусть Боря живёт на этаже с номером k , тогда номер его квартиры может быть записан как $6(k - 1) + r$ для некоторого натурального r от 1 до 6 включительно. Номер этажа Юры поэтому равен $6(k - 1) + r$, значит, номер его квартиры можно записать как $6(6(k - 1) + r - 1) + p$ для некоторого натурального p от 1 до 6 включительно. По условию $144 = 6(k - 1) + r + 6(6(k - 1) + r - 1) + p = 42(k - 1) + 7r + p - 6$. В силу ограничений на r и p получаем, что $7r + p - 6$ не может быть меньше 2 (при $r = p = 1$) и больше 42 (при $r = p = 6$), тогда $k - 1 = 3$ и $7r + p - 6 = 18$, как частное и остаток от деления 144 на 42. Тогда $k = 4$, а поскольку $7r + p = 24$, то в силу ограничений на r и p единственное возможное r равно 3 и $p = 3$ как частное и остаток от деления 24 на 7. Номер квартиры Юры равен $6(18 + 2) + 3 = 123$.

Ответ: 123.

13. (6 баллов) Треугольник ABC образован при пересечении прямых $y = x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 3$, $y = -x - 5$. Найдите все целые значения a , при которых точка $P(a, 1)$ лежит внутри треугольника ABC (т.е. P принадлежит области, ограниченной прямыми, и не совпадает ни с одной из вершин, а также не принадлежит сторонам).

Решение. Найдём координаты вершин треугольника ABC , решив три системы. Координаты $A(3, 4)$ из системы $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = \frac{1}{3}x + 3, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = x + 1, \\ x + 1 = \frac{1}{3}x + 3, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = x + 1, \\ \frac{2}{3}x = 2. \end{cases}$ Координаты $B(-3, -2)$ из системы $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x - 5, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = x + 1, \\ x + 1 = -x - 5, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = x + 1, \\ 2x = -6. \end{cases}$ Координаты $C(-6, 1)$ из системы $\begin{cases} y = -x - 5, \\ y = \frac{1}{3}x + 3, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = -x - 5, \\ -x - 5 = \frac{1}{3}x + 3, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = -x - 5, \\ \frac{4}{3}x = -8. \end{cases}$ Построим данный треугольник на координатной плоскости и найдём точку пересечения P_0 стороны AB и оси ординат. Её координаты

$P_0(0, 1)$, а вершина C имеет координаты $C(-6, 1)$, значит все точки отрезка CP_0 , абсциссы которых целые числа, за исключением его концов, нам подходят, тогда a может принимать значения $-5, -4, -3, -2, -1$.



Ответ: $-5, -4, -3, -2, -1$.

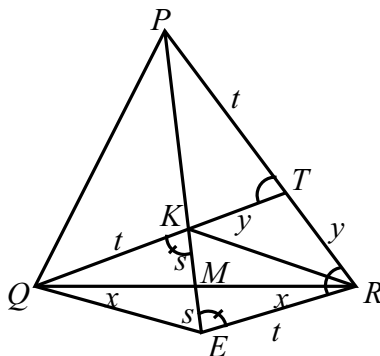
14. (6 баллов) Одноклассники Аня и Ваня делали выпускные фотоальбомы. Альбом обоих содержит не менее 50 и не более 100 фотографий. В выпускном альбоме Ани фотографий с одноклассниками оказалось на 25% меньше, чем у Вани. Зато у Вани фотографий с одноклассниками оказалось на 25% меньше, чем у Ани. Сколько всего фотографий в выпускном альбоме Вани, если известно, что их количество составляет 55% от общего числа всех фотографий в альбомах Ани и Вани? На каждой фотографии в альбоме присутствует либо одноклассник, либо одноклассница.

Решение. Пусть у Вани в альбоме x фотографий с одноклассниками, тогда у Ани их $\frac{3}{4}x$. Пусть у Ани y фотографий с одноклассниками, тогда у Вани их $\frac{3}{4}y$. По условию $x + \frac{3}{4}y = 0,55(\frac{7}{4}x + \frac{7}{4}y)$, откуда $4x + 3y = 0,55(7x + 7y)$, а после раскрытия скобок $0,15x = 0,85y$, домножив на 100 и разделив обе части равенства на 5, получим $3x = 17y$. Учитывая, что x, y – целые числа, заключаем: x делится на 17 и на 4, значит, делится на 68, т.е. $x = 68t$ для некоторого целого t , $y = 12t$. Тогда у Вани в альбоме $77t$ фотографий, а у Ани $63t$ фотографий. С учетом ограничения на количество фотографий в альбомах получаем, что у Вани ровно 77 фотографий.

Ответ: 77.

15. (6 баллов) На стороне PR треугольника PQR отмечена точка T так, что $QT = PR$. Медиана PM треугольника PQR пересекает отрезок QT в точке K . Так получилось, что $TK = TR$. Найдите длину PQ , если $PM + KM = 2024$.

Решение. По условию введем обозначения для равных длин отрезков: $QM = MR = x$, $TK = TR = y$. Так как $QT = PR$, получаем, что $QK = QT - TK = PR - RT = PT$, их длину обозначим через t . На луче PM за точку M отложим $ME = MK$. Пусть $ME = MK = s$. Заметим, что $QM = MR = x$, $ME = MK = s$, $\angle QMK = \angle RME$, тогда $\triangle QMK = \triangle RME$, откуда $QK = ER = t$, $\angle QKM = \angle MER$. Из последнего равенства следует параллельность прямых QK и ER , из чего получаем, что $\angle QTP = \angle ERT$. Теперь найдем ещё два равных треугольника PER и QPT по двум сторонам и углу между ними: $\angle QTP = \angle ERT$, $TP = ER = t$, $QT = PR = t + y$. Из равенства этих треугольников получаем $QP = PE = PM + ME = PM + KM = 2024$.



Ответ: 2024.

Критерии:

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла – правильный ответ и построен график, 1 балл - правильный ответ ИЛИ построен верный график.
4. 2 балла за верный ответ, 1 балл – ответ отличается от верного знаком.
5. 2 балла за верный ответ.
6. по 1 баллу за каждый верный ответ.
7. 2 балла за верный ответ.
8. 2 балла за верный ответ.
9. 2 балла – верный ответ, 1 балл – указаны только одно, два или три верных значения n .
10. по 1 баллу за каждый верный ответ.
11. 1 балл – верно сокращена первая дробь;
2 балла – верно выполнена операция в первой скобке;
1 балл – верно выполнена операция во второй скобке;
2 балла – верно выполнена операция деления;
-1 балл – выполнены все действия, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.
12. 2 балла – составлена верная математическая модель;
2 балла – с помощью верного рассуждения обоснованно найден этаж Бори;
1 балл – с помощью верного рассуждения обоснованно найден номер этажа Юры;
1 балл – есть верный ответ с проверкой выполнения всех условий задачи;
-1 балл – арифметическая ошибка;
13. 1 балл – указан верный ответ;
3 балла – верно построен треугольник на координатной плоскости, по рисунку выписан верный ответ;
2 балла – обосновано, что одна из вершин треугольника лежит на прямой $y = 1$;
5 баллов – аналитически доказано, что $a > -6$ и $a < 0$, верного ответа нет;
-1 балл – арифметическая ошибка.
14. 1 балл – указан верный ответ, возможно, без примера;
2 балла – верный ответ, сопровождающийся примером распределения количества фотографий;
2 балла – составлена верная математическая модель;
2 балла – доказано, что общее количество фотографий в альбоме Вани делится на 77 ИЛИ количество фотографий с одноклассниками делится на 68;
2 балла – доказано, что количество фотографий в альбоме Ани делится на 63 ИЛИ количество фотографий с одноклассниками делится на 12;
-1 балл – не проверено, что при найденном количестве фотографий в альбоме Вани количество фотографий у Ани будет в нужном диапазоне.
15. 2 балла – верное дополнительное построение (откладывание MK);
1 балл – обосновано равенство треугольников QMK и RME ;
1 балл – доказана параллельность прямых QK и ER ;
2 балла – обосновано равенство треугольников PER и QPT .

Вариант 2.

1. (2 балла) Сизиф обязан каждый день втаскивать большой камень на вершину горы. В первый день он потратил на подъём в гору и спуск суммарно 8 часов. Каждый следующий день он поднимался в 2 раза медленнее, чем в предыдущий, а спускался в 2 раза быстрее. Сколько времени (в часах) он потратил на подъём и спуск в третий день, если во второй день ему понадобилось суммарно 10 часов?

Решение. Пусть в первый день Сизиф потратил на подъём t_1 часов, а на спуск — t_2 часов, тогда $t_1 + t_2 = 8$ и $2 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot t_2 = 10$. Домножая первое уравнение на 2 и вычитая из него третье, получим $\frac{3}{2} \cdot t_2 = 6$, откуда $t_2 = 4$, значит, $t_1 = 4$ и искомое время в третий день составит $4 \cdot t_1 + \frac{1}{4} \cdot t_2 = 16 + 1 = 17$ часов.

Ответ: 17.

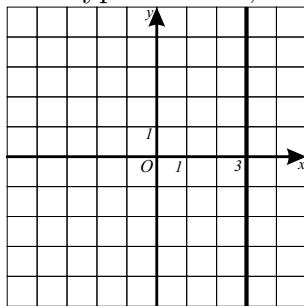
2. (2 балла) Вычислите $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}}$.

Решение. Выполним действия над степенями: $\frac{18^{n+3}}{3^{2n+5} \cdot 2^{n-2}} = \frac{2^{n+3} \cdot 3^{2n+6}}{2^{n-2} \cdot 3^{2n+5}} = 2^5 \cdot 3 = 96$.

Ответ: 96.

3. (2 балла) При каком значении параметра a график уравнения $(3a - 1)x + (a - 1)y - 6 = 0$ параллелен оси Oy ? Найдите необходимое значение a и постройте на данной координатной плоскости график уравнения при этом a .

Решение. Прямая, параллельная оси Oy , задается уравнением вида $x = b$, значит, в данном уравнении необходимо, чтобы коэффициент при y был равен нулю, т.е. $a - 1 = 0$, откуда $a = 1$ и после подстановки этого значения параметра в исходное уравнение получим $x = 3$. Прямая, заданная этим уравнением, построена на рисунке ниже.



Ответ: $a = 1$.

4. (2 балла) Вычислите $(1\frac{18}{25} - 9,12 - 7,4 \cdot (-6\frac{1}{3})) : 5\frac{1}{3}$.

Решение.

$$\left(1\frac{18}{25} - 9,12 - 7,4 \cdot \left(-6\frac{1}{3}\right)\right) : 5\frac{1}{3} = \left(-7,4 \cdot \left(-6\frac{1}{3}\right)\right) : 5\frac{1}{3} = -7,4 \cdot \left(-5\frac{1}{3}\right) : 5\frac{1}{3} = 7,4$$

Ответ: 7,4.

5. (2 балла) Решить систему уравнений
$$\begin{cases} -\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{5} \\ \frac{1}{12}x - \frac{2}{12}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Решение. Домножая первое уравнение системы на -6 , а второе на 12, получим систему
$$\begin{cases} x - 2y = \frac{-12}{5} \\ x - 2y = \frac{36}{7} \end{cases},$$

где нет решений, поскольку левые части уравнений одинаковые, а правые различные.

Ответ: решений нет.

6. (2 балла) Произведение двух натуральных чисел на 33 больше их наибольшего общего делителя. Чему может быть равно большее из этих чисел?

Решение. Обозначим данные числа через a и b (будем считать, что $a \leq b$ для определенности), а их наибольший общий делитель через d , тогда $ab = 33 + d$. Поскольку a и b делятся на d и d делится

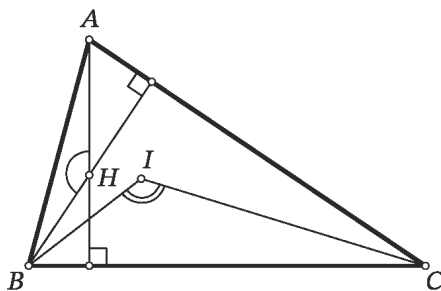
на d , то и 33 должно делиться на d , поэтому d принимает одно из значений: 1, 3, 11, 33. При $d = 1$: $ab = 34$, значит, наибольшее из чисел могло быть 34 (при $a = 1$, $b = 34$) или 17 (при $a = 2$, $b = 17$). При $d = 3$: $ab = 36$, значит, наибольшее из чисел могло быть 12 (при $b = 12$, $a = 3$). Варианты 36, 9 и 6 невозможны, так как в этих случаях $d \neq 3$. При $d = 11$: $ab = 44$, что невозможно, так как ab должно делиться на 121. При $d = 33$: $ab = 66$, что невозможно, так как ab должно делиться на 33^2 .
Ответ: 12, 17 или 34.

7. (2 балла) Учитель выписал на доске пример $(x-3) \cdot (x^2-32x+\dots) = (x-15) \cdot (x^2-20x+\dots)$, где вместо многоточий должны быть записаны какие-то числа. Найдите, какие числа нужно записать в пример вместо многоточий, чтобы получилось равенство, верное при любом значении x .

Решение. Пусть вместо многоточий записаны числа a и b : $(x-3) \cdot (x^2-32x+a) = (x-15) \cdot (x^2-20x+b)$, тогда, раскрывая скобки слева и справа, получим $x^3-35x^2+ax+96x-3a = x^3-35x^2+bx+300x-15b$. Перенесем все слагаемые в левую часть и вынесем x за скобку: $x(a-b-204) + 15b-3a = 0$. то равенство должно быть верно при любом x , что возможно только в случае, когда $a-b-204 = 0$ и $15b-3a = 0$. Тогда $a = 5b$, $b = 51$ и $a = 255$.

Ответ: 255 и 51.

8. (2 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведённые из вершин A и B , пересекаются в точке H , причём $\angle AHB = 130^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C , – в точке I , причём $\angle BIC = 120^\circ$. Найдите величину угла ABC .



Решение. Так как $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ (сумма углов четырехугольника, где есть два прямых угла и угол, вертикальный с $\angle AHB$, равна 360°) и $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$, находим $\angle ACB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ и $\angle BAC = 2 \cdot (120^\circ - 90^\circ) = 60^\circ$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

Ответ: 70° .

9. (2 балла) Даша придумала натуральное число n такое, что $n^3 - 11$ без остатка делится на $n - 1$ и записала его на листочке. Когда уборщица делала уборку в классе, она этот листочек выбросила. Найдите все возможные числа n , которые могла придумать Даша.

Решение. Заметим, что $n^3 - 11 = n^3 - 1 - 10$, где $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ и $n^3 - 1$ делится на $n - 1$, значит, 10 должно делиться на $n - 1$ при задуманных натуральных n . Тогда возможны варианты:

$$n - 1 = 1, \text{ т.е. } n = 2,$$

$$n - 1 = 2, \text{ т.е. } n = 3,$$

$$n - 1 = 5, \text{ т.е. } n = 6,$$

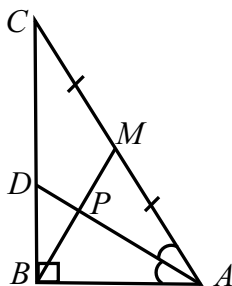
$$n - 1 = 10, \text{ т.е. } n = 11.$$

Ответ: 2, 3, 6, 11.

10. (2 балла) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B один из острых углов равен 70° . Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A ?

Решение. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC , M – середина гипотенузы AC , тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, получаем: $BM = MA = MC$, треугольник BMA – равнобедренный. Обозначим через P точку пересечения медианы BM и биссектрисы угла A . Возможны два случая. Первый случай: $\angle CAB = 70^\circ$. Тогда

$\angle MBA = 70^\circ = \angle CAB$, $\angle BAD = 35^\circ$, откуда $\angle MPA = 70^\circ + 35^\circ = 105^\circ$, а искомый угол, смежный с найденным, равен 75° . Второй случай: $\angle BCA = 70^\circ$. Тогда $\angle MBA = 20^\circ = \angle CAB$, $\angle BAD = 10^\circ$, откуда искомый $\angle MPA = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.



Ответ: 30° или 75° .

11. (6 баллов) Упростить выражение $\left(c - \frac{c^3 + 8}{2c + c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(c - \frac{c^3 + 8}{2c + c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} &= \left(c - \frac{(c+2)(c^2 - 2c + 4)}{c(c+2)}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} = \\ &= \frac{2c-4}{c} \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} = \frac{2}{c-2} + \frac{2}{2-c} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

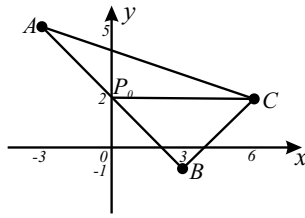
12. (6 баллов) Юра и Боря живут в небоскрёбе, на каждом этаже которого находится по 10 квартир. Номер этажа Юры равен номеру квартиры Бори, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живёт Юра?

Решение. Пусть Боря живёт на этаже с номером k , тогда номер его квартиры может быть записан как $10(k-1) + r$ для некоторого натурального r от 1 до 10 включительно. Номер этажа Юры поэтому равен $10(k-1) + r$, значит, номер его квартиры можно записать как $10(10(k-1) + r - 1) + p$ для некоторого натурального p от 1 до 10 включительно. По условию $239 = 10(k-1) + r + 10(10(k-1) + r - 1) + p = 110(k-1) + 11r + p - 10$. В силу ограничений на r и p получаем, что $11r + p - 10$ не может быть меньше 2 (при $r = p = 1$) и больше 110 (при $r = p = 10$), тогда $k - 1 = 2$ и $11r + p - 10 = 19$, как частное и остаток от деления 239 на 110. Тогда $k = 3$, а поскольку $11r + p = 29$, то в силу ограничений на r и p единственное возможное r равно 2 и $p = 7$ как частное и остаток от деления 29 на 11. Номер квартиры Юры равен $10(20 + 1) + 7 = 217$.

Ответ: 217.

13. (6 баллов) Треугольник ABC образован при пересечении прямых $y = -x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 4$, $y = x - 4$. Найдите все целые значения a , при которых точка $P(a, 2)$ лежит внутри треугольника ABC (т.е. P принадлежит области, ограниченной прямыми, и не совпадает ни с одной из вершин, а также не принадлежит сторонам).

Решение. Найдём координаты вершин треугольника ABC , решив три системы. Координаты $A(-3, 5)$ из системы $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = -\frac{1}{3}x + 4, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = -x + 2, \\ -x + 2 = -\frac{1}{3}x + 4, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = -x + 2, \\ \frac{2}{3}x = -2. \end{cases}$ Координаты $B(3, -1)$ из системы $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = x - 4, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = -x + 2, \\ -x + 2 = x - 4, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = -x + 2, \\ 2x = 6. \end{cases}$ Координаты $C(6, 2)$ из системы $\begin{cases} y = x - 4, \\ y = -\frac{1}{3}x + 4, \end{cases}$ где $\begin{cases} y = x - 4, \\ x - 4 = -\frac{1}{3}x + 4, \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} y = x - 4, \\ \frac{4}{3}x = 8. \end{cases}$ Построим данный треугольник на координатной плоскости и найдём точку пересечения P_0 стороны AB и оси ординат. Её координаты $P_0(0, 2)$, а вершина C имеет координаты $C(6, 2)$, значит все точки отрезка CP_0 , абсциссы которых целые числа, за исключением его концов, нам подходят, тогда a может принимать значения 5, 4, 3, 2, 1.



Ответ: 5, 4, 3, 2, 1.

14. (6 баллов) Одноклассники Серёжа и Саша делали выпускные фотоальбомы. Альбом каждого содержит не менее 55 и не более 120 фотографий. В выпускном альбоме Саши фотографий с одноклассниками оказалось на 40% меньше, чем у Серёжи. Зато у Серёжи фотографий с одноклассниками оказалось на 40% меньше, чем у Саши. Сколько всего фотографий в выпускном альбоме Серёжи, если известно, что их количество составляет 60% от общего числа всех фотографий в альбомах Саши и Серёжи? На каждой фотографии в альбоме присутствует либо одноклассник, либо одноклассница.

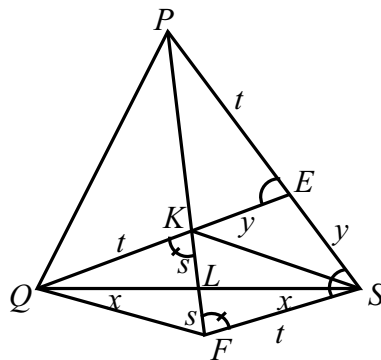
Решение. Пусть у Серёжи в альбоме x фотографий с одноклассниками, тогда у Саши их $0,6x$. Пусть у Саши y фотографий с одноклассниками, тогда у Серёжи их $0,6y$. По условию $x + 0,6y = 0,6(1,6x + 1,6y)$, откуда $5x + 3y = 0,6(8x + 8y)$, а после раскрытия скобок $0,2x = 1,8y$, домножив на 10 и разделив обе части равенства на 2, получим $x = 9y$. Учитывая, что x, y – целые числа, заключаем: x делится на 9 и на 5, значит, делится на 45, т.е. $x = 45t$ для некоторого целого t , $y = 5t$. Тогда у Серёжи в альбоме $48t$ фотографий, а у Саши $32t$ фотографий. С учетом ограничения на количество фотографий в альбомах получаем, что у Серёжи ровно 96 фотографий.

Ответ: 96.

15. (6 баллов) На стороне PS треугольника PQS отмечена точка E так, что $QE = PS$. Медиана PL треугольника PQS пересекает отрезок QE в точке K . Так получилось, что $EK = ES$. Найдите $KL + PL$, если $PQ = 2025$.

Решение. По условию введем обозначения для равных длин отрезков: $QL = LS = x$, $EK = ES = y$. Так как $QE = PS$, получаем, что $QK = QE - EK = PS - ES = PE$, их длину обозначим через t . На луче PL за точку L отложим $LF = LK$. Пусть $LF = LK = s$. Заметим, что $QL = LS = x$, $LF = LK = s$, $\angle QLK = \angle SLF$, тогда $\triangle QLK = \triangle SLF$, откуда $QK = FS = t$, $\angle QKF = \angle KFS$. Из последнего равенства следует параллельность прямых QK и FS , из чего получаем, что $\angle QEP = \angle FSP$. Теперь найдем ещё два равных треугольника PEQ и FSP по двум сторонам и углу между ними: $\angle QEP = \angle FSP$, $EP = FS = t$, $QE = PS = t + y$. Из равенства этих треугольников получаем $QP = PF = PL + LF = PL + LK = 2025$.

Ответ: 2025.



Критерии:

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла – правильный ответ и построен график, 1 балл - правильный ответ ИЛИ построен верный график.
4. 2 балла за верный ответ, 1 балл – ответ отличается от верного знаком.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 1 балл за наличие одного или двух верных чисел при неверном ответе.
7. 2 балла за верный ответ.
8. 2 балла за верный ответ.
9. 2 балла – верный ответ, 1 балл – указаны только одно, два или три верных значения n .
10. по 1 баллу за каждый верный ответ.
11. 1 балл – верно сокращена первая дробь;
2 балла – верно выполнена операция в первой скобке;
2 балла – верно выполнена операция умножения;
1 балл – верно выполнена операция сложения;
-1 балл – выполнены все действия, получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.
12. 2 балла – составлена верная математическая модель;
2 балла – с помощью верного рассуждения обоснованно найден этаж Бори;
1 балл – с помощью верного рассуждения обоснованно найден номер этажа Юры;
1 балл – есть верный ответ с проверкой выполнения всех условий задачи;
-1 балл – арифметическая ошибка;
13. 1 балл – указан верный ответ;
3 балла – верно построен треугольник на координатной плоскости, по рисунку выписан верный ответ;
2 балла – обосновано, что одна из вершин треугольника лежит на прямой $y = 2$;
5 баллов – аналитически доказано, что $a > 0$ и $a < 6$, верного ответа нет;
-1 балл – арифметическая ошибка.
14. 1 балл – указан верный ответ, возможно, без примера;
2 балла – верный ответ, сопровождающийся примером распределения количества фотографий;
2 балла – составлена верная математическая модель;
2 балла – доказано, что общее количество фотографий в альбоме Серёжи делится на 48 ИЛИ количество фотографий с одноклассниками делится на 45;
2 балла – доказано, что количество фотографий в альбоме Саши делится на 32 ИЛИ количество фотографий с одноклассниками делится на 5;
-1 балл – не проверено, что при найденном количестве фотографий в альбоме Серёжи количество фотографий у Саши будет в нужном диапазоне.
15. 2 балла – верное дополнительное построение (откладывание LK);
1 балл – обосновано равенство треугольников QLK и LFS ;
1 балл – доказана параллельность прямых QK и FS ;
2 балла – обосновано равенство треугольников PEQ и PFS .