Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 физико-математический
и математико-информационный класс
21 марта 2026г.
1 вариант

1. *(2 балла)* После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть от полученного уровня понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

2. *(2 балла)* Дана трапеция $ABCD$ основания которой BC и AD и равны 6 и 18 соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника $S_{BCO} = 2$. Найти площадь треугольника S_{COD}.

3. *(2 балла)* Плиточник должен уложить 175 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 10 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

4. *(2 балла)* В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найти радиус этой окружности, если периметр трапеции равен 54 см.

5. *(2 балла)* При каких значениях k парабола $y = (x-k)^2$ имеет с прямой $y = 2x - 3$ хотя бы одну общую точку? Постройте параболу при наименьшем из найденных значений k.

6. *(2 балла)* Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1 \leqslant \dfrac{x-1}{3}, \\ |x-16| \leqslant 15. \end{cases}$

7. *(3 балла)* Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромную тарелку с конфетами. Дети брали конфеты по кругу: первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т.д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 100 конфет больше, чем при первом обходе. Сколько детей сидело за столом?

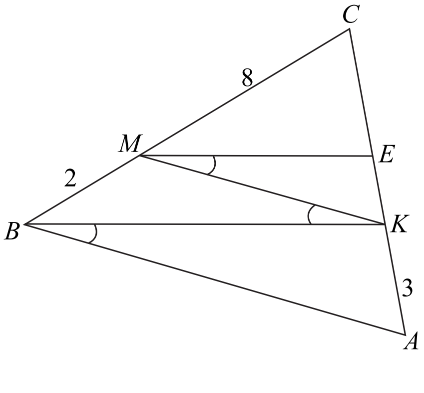
8. *(3 балла)* Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px - 16 = 0$. Найдите возможные значения p, если $x_1^2 + x_2^2 = 68$.

9. *(3 балла)* Оля записала на доске сумму нескольких натуральных чисел, которая оказалась равна 161. «Ого, а если все слагаемые перемножить, то тоже 161 получится!» — заметила наблюдательная Марина. Сколько слагаемых написала на доске Оля?

10. *(3 балла)* В квадрате $KLMN$ длина стороны равна 8. Точка B — середина MN, A лежит на стороне KN, причем $LA = AB$. Найдите AN.

11. *(4 баллов)* Решите уравнение

$$\frac{-2x^2+3-5x}{x+2} \cdot \sqrt{2-|x|} = 0.$$



12. *(5 баллов)* Найдите длину отрезка EK в треугольнике на рисунке.

13. *(5 баллов)* Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a^3b}}{a+b} - \frac{2b}{a-b}.$$

14. *(6 баллов)* Найдите количество трехзначных чисел, кратных 6, в записи которых есть цифра 7.

15. *(6 баллов)* Автомобиль выехал из A в B со скоростью 63 км/ч. А через некоторое время он снизил скорость на 9 км/ч. За первые 3 часа он проехал на 55 км меньше, чем за последние 4. На весь путь затратил 5 часов. Найти AB.

Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 физико-математический
и математико-информационный класс
21 марта 2026г.
2 вариант

Часть 1

1. *(2 балла)* Маша выполняла домашнее задание по алгебре и геометрии. После того, как она решила третью часть всех задач по геометрии, оказалось, что она выполнила уже четверть часть всего домашнего задания. На какую часть от оставшегося количества уменьшится количество домашнего задания, если Маша решит половину всех задач по алгебре?

2. *(2 балла)* Дана трапеция $ABCD$ основания которой BC и AD и равны 4 и 12 соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника $S_{BCO} = 4$. Найти площадь треугольника S_{AOB}.

3. *(2 балла)* Плиточник должен уложить 240 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 6 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 9 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

4. *(2 балла)* В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найти периметр трапеции, если радиус этой окружности равен 6 см.

5. *(2 балла)* При каких значениях k парабола $y = -(x-k)^2$ имеет с прямой $y = -2x - 5$ хотя бы одну общую точку? Постройте параболу при наименьшем из найденных значений k.

6. *(2 балла)* Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{4}, \\ |x-10| \leqslant 12. \end{cases}$

7. *(3 балла)* Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромную тарелку с конфетами. Дети брали конфеты по кругу: первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т.д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 121 конфету больше, чем при первом обходе. Сколько детей сидело за столом?

8. *(3 балла)* Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px - 18 = 0$. Найдите возможные значения p, если $x_1^2 + x_2^2 = 85$.

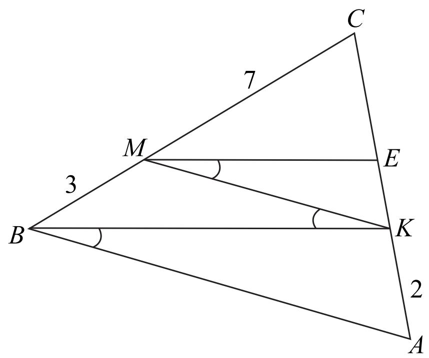
9. *(3 балла)* Учитель математики задал Пете сложную задачу: представить число 143 в виде суммы натуральных слагаемых так, чтобы и произведение всех этих слагаемых тоже было равно 143. Петя справился с этой задачей. Сколько слагаемых пришлось ему написать?

10. *(3 балла)* Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 16. Точка K — середина BC, M лежит на стороне CD, причем $KM = AM$. Найдите MD.

11. *(4 баллов)* Решите уравнение

$$\frac{4 + 7x - 2x^2}{x-3} \cdot \sqrt{3 - |x|} = 0.$$

12. *(5 баллов)* Найдите длину отрезка EK в треугольнике на рисунке.



13. *(5 баллов)* Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{c\sqrt{d}-d\sqrt{c}} - \frac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{c\sqrt{d}+d\sqrt{c}}\right) \cdot \frac{\sqrt{16c^3d}}{c+d} - \frac{8d}{c-d}.$$

14. *(6 баллов)* Найдите количество трехзначных чисел, кратных 6, в записи которых есть цифра 5.

15. *(6 баллов)* Автомобиль выехал из A в B со скоростью 70 км/ч. А через некоторое время он снизил скорость на 10 км/ч. За первые 3 часа он проехал на 55 км меньше, чем за последние 4. На весь путь затратил 5 часов. Найти AB.

Решения и критерии оценивания
Вариант №1

1. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть от полученного уровня понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

Решение. После первого действия уровень компота уменьшился на $\dfrac{1}{3}$ исходного уровня, значит объём съеденных персиков составляет $\dfrac{1}{3}$ банки. Это половина всех персиков, следовательно, все персики занимали $\dfrac{2}{3}$ банки. После этого осталось персиков на $\dfrac{1}{3}$ банки. Если съесть половину оставшихся персиков, уровень уменьшится ещё на $\dfrac{1}{6}$ от исходного уровня. Тогда новый уровень будет равен $\dfrac{2}{3}$ исходного тогда отношение уровней будет: $\frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$

2. Дана трапеция $ABCD$ основания которой BC и AD и равны 6 и 18 соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника $S_{BCO} = 2$. Найти площадь треугольника S_{COD}.

Решение. Треугольники BOC и AOD подобны с коэффициентом $k = BC/AD = 1/3$, поэтому $\frac{CO}{OA} = \frac{1}{3}$. Треугольники COD и BOC имеют общую высоту из вершины C, а значит их площади относятся как основания, откуда $\frac{S_{COD}}{S_{BOC}} = \frac{3}{1}$. Тогда $S_{COD} = 3 \cdot S_{BOC} = 6$.

Ответ: 6.

3. Плиточник должен уложить 175 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 10 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Решение. Пусть плиточник планирует укладывать x м^2 плитки в день. Тогда

$$\frac{175}{x} - \frac{175}{x+10} = 2.$$

Отсюда

$$\frac{1750}{x(x+10)} = 2, \qquad x(x+10) = 875, \qquad x^2 + 10x - 875 = 0$$

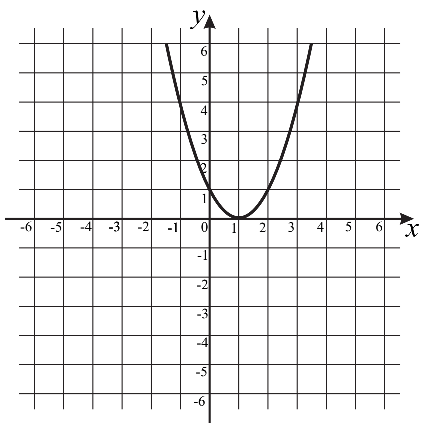
Корни: $x = 25$ и $x = -35$. Подходит только $x = 25$.

Ответ: 25.

4. *(2 балла)* В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найти радиус этой окружности, если периметр трапеции равен 54 см.

Решение. Пусть AB - меньшая боковая сторона трапеции. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, DA через M, N, L, K соответственно. Тогда $AM = AK = r$, $BM = BN = r$, $CN = CL = 3$, $DL = DK = 12$ как отрезки касательных проведенных к окружности из одной точки. Сумма всех этих отрезков будет равна периметру трапеции. Получаем уравнение: $4r + 3 + 3 + 12 + 12 = 54$. Отсюда $r = 6$.

Ответ: 6.



5. При каких значениях k парабола $y = (x-k)^2$ имеет с прямой $y = 2x - 3$ хотя бы одну общую точку? Постройте параболу при наименьшем из найденных значений k.

Решение. Общие точки прямой и параболы удовлетворяют уравнению $(x-k)^2 = 2x - 3$.

После раскрытия скобок:

$$x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет действительные решения, если его дискриминант неотрицательный: $D = 4(k+1)^2 - 4(k^2+3) = 8k - 8 = 8(k-1) \geqslant 0$. Значит, $k \geqslant 1$. Наименьшее значение: $k = 1$. Искомая парабола имеет уравнение $y = (x-1)^2$.

Ответ: $k \geqslant 1$; наименьшее значение $k = 1$.

6. Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1 \leqslant \dfrac{x-1}{3}, \\ |x-16| \leqslant 15. \end{cases}$

Решение. Решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 1 \leqslant \dfrac{x-1}{3}, \\ |x-16| \leqslant 15. \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 3x - 6 \leqslant 2x - 2, \\ 1 \leqslant x \leqslant 31. \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 4, \\ 1 \leqslant x \leqslant 31. \end{cases}$$

Решение системы неравенств: $1 \leqslant x \leqslant 4$. Откуда целые решения: $1, 2, 3, 4$.

Ответ: $1, 2, 3, 4$.

7. Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромную тарелку с конфетами. Дети брали конфеты по кругу: первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т.д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 100 конфет больше, чем при первом обходе. Сколько детей сидело за столом?

Решение. Пусть за столом сидело n детей. За первый круг взято $S_1 = 1 + 2 + \cdots + n$ конфет. За второй круг взято $S_2 = (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+n) = (1 + 2 + \cdots + n) + n \cdot n$ конфет. Разность $S_2 - S_1 = n \cdot n = 100$, откуда $n = 10$.

Ответ: 10.

8. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px - 16 = 0$. Найдите возможные значения p, если $x_1^2 + x_2^2 = 68$.

Решение. Поскольку $D = p^2 + 64 > 0$ при любом p, то данное уравнение имеет два различных корня при любых значениях параметра p. Тогда, по теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = -16$. Значит, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + 32 = 68$, откуда $p^2 = 36$, $p = \pm 6$.

Ответ: ± 6.

9. Оля записала на доске сумму нескольких натуральных чисел, которая оказалась равна 161. «Ого, а если все слагаемые перемножить, то тоже 161 получится!» — заметила наблюдательная Марина. Сколько слагаемых написала на доске Оля?

Решение. Разложение на простые множители: $161 = 7 \cdot 23$. Тогда числа 7 и 23 и m единиц дадут сумму $7 + 23 + m = 30 + m = 161 \Rightarrow m = 131$, и произведение $7 \cdot 23 \cdot 1^m = 161$. Всего $2 + 131 = 133$ слагаемых.

Ответ: 133.

10. В квадрате $KLMN$ длина стороны равна 8. Точка B — середина MN, A лежит на стороне KN, причем $LA = AB$. Найдите AN.

Решение. Обозначим за $KA = x$, тогда $AN = 8 - x$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔLKA и ΔANB. Запишем теорему Пифагора для этих треугольников соответственно:

$$LA^2 = x^2 + 8^2; \qquad AB^2 = 4^2 + (8-x)^2;$$

По условию $LA = AB$, тогда

$$x^2 + 8^2 = 4^2 + (8-x)^2 \Rightarrow 16x = 16 \Rightarrow x = 1$$

Тогда $AN = 8 - 1 = 7$.

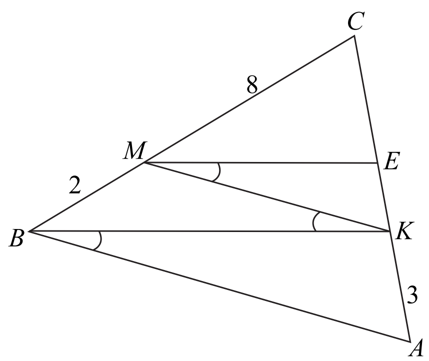
Ответ: $AN = 7$.

11. Решите уравнение
$$\frac{-2x^2+3-5x}{x+2}\cdot\sqrt{2-|x|}=0.$$
Решение. Область определения уравнения задается системой: $\begin{cases} x+2\neq 0,\\ 2-|x|\geqslant 0.\end{cases}$

На области определения уравнение равносильно совокупности:
$$\left[\begin{array}{l} -2x^2+3-5x=0,\\ 2-|x|=0.\end{array}\right.$$
Первое уравнение совокупности имеет корни $x_1=1/2$, $x_2=-3$, второй из которых не удовлетворяет последнему неравенству из ОДЗ. Второе уравнение имеет корни $x_1=-2$, $x_2=2$, первый из которых не удовлетворяет первому условию из ОДЗ. Значит,

Ответ: 1/2; 2.

12. Найдите длину отрезка EK в треугольнике на рисунке.



Решение. Так как $\angle EMK=\angle MKB$, то $ME||BK$, аналогично и $\angle KBA=\angle MKB$, то $BA||MK$. Отсюда $\angle CEM=\angle CKB$ и $\angle CKM=\angle CAB$. Тогда треугольники $\Delta MCK\sim\Delta BCA$ подобны по 2-ум углам. Тогда $\frac{CM}{CB}=\frac{CK}{CK+KA}\Rightarrow\frac{8}{10}=\frac{CK}{CK+3}\Rightarrow CK=12$. Рассмотрим ΔMCE и ΔBCK. Они также подобны по 2-ум углам. Тогда $\frac{CM}{CB}=\frac{CE}{CK}\Rightarrow\frac{8}{10}=\frac{CE}{12}\Rightarrow CE=\frac{48}{5}$. Тогда $EK=CK-CE=12-\frac{48}{5}=\frac{12}{5}$.

Ответ: $EK=\frac{12}{5}$.

13. Упростите выражение
$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^3b}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}.$$
Решение. Преобразуем выражение, учитывая, что
$a\sqrt{b}-b\sqrt{a}=\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, а $a\sqrt{b}+b\sqrt{a}=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.
$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^3b}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^3b}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=$$
$$=\frac{a-2\sqrt{ab}+b+a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}(a-b)}\cdot\frac{\sqrt{a^3b}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=$$
$$=\frac{2(a+b)}{\sqrt{ab}(a-b)}\cdot\frac{a\sqrt{ab}}{a+b}-\frac{2b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}-\frac{2b}{a-b}=2.$$
Ответ: 2.

14. Найдите количество трехзначных чисел, кратных 6, в записи которых есть цифра 7.

Решение. Число кратно 6, если оно кратно 2 и 3. Значит, последняя цифра чётная.

Случай 1. Число имеет вид $7ab$, где b — чётная цифра. Нужно, чтобы $7+a+b$ делилось на 3. Перебор по чётной цифре $b\in\{0,2,4,6,8\}$ даёт 17 чисел.

Случай 2. Число имеет вид $a7b$, где $a\neq 0$, b чётная. Нужно, чтобы $7+a+b$ делилось на 3. Таких чисел 15, но число 774 посчитано и в первом, и во втором случае, тогда 17+15-1=31.

Ответ: 31.

15. Автомобиль выехал из A в B со скоростью 63 км/ч. А через некоторое время он снизил скорость на 9 км/ч. За первые 3 часа он проехал на 55 км меньше, чем за последние 4. На весь путь затратил 5 часов. Найти AB.

Решение. 55 км. – это разница между расстояниями, пройденными за первый и за последние два часа движения, поэтому рассмотрим три случая:

1) Скорость снизилась в течении первого часа через t_1 час. Тогда $63t_1 + 54(1 - t_1) + 55 = 2 \cdot 54 \Rightarrow t_1 = -\dfrac{1}{9}$ – невозможно.

2) Скорость снизилась с первого по третий час. Тогда $63 \cdot 1 + 55 = 54 \cdot 2 \Rightarrow 118 > 108$ – невозможно.

3) Скорость снизилась после 3 часа через t_2 час. Тогда $63 + 55 = 63t_2 + 54 \cdot (2 - t_2) \Rightarrow t_2 = \dfrac{10}{9}$. Тогда найдем $S_{AB2} = \left(3 + \dfrac{10}{9}\right) \cdot 63 + \left(2 - \dfrac{10}{9}\right) \cdot 54 = 307$.

Ответ: $AB = 307$ км.

Вариант 1 ответы и критерии:

№	Ответ	Критерии
1.	$\frac{1}{4}$	2 балла за верный ответ
2.	6	2 балла за верный ответ
3.	25	2 балла за верный ответ
4.	6	2 балла за верный ответ
5.	$k \geqslant 1$	1 балл за верное $k \geqslant 1$; 1 балл за верный график
6.	$1, 2, 3, 4$	2 балла за верный ответ; 1 балл – если найдены все числа, кроме одного или ответ записан в виде промежутка
7.	10	3 балла за верный ответ
8.	± 6	3 балла за верный ответ; 1 балл – найдено только одно значение
9.	133	3 балла за верный ответ
10.	7	3 балла за верный ответ
11.	$\frac{1}{2}, 2$	+1 балл – за верно найденное ОДЗ; +1 балл – за верно найденные все четыре нуля
12.	$\frac{12}{5}$	+1 балл – за каждое обоснованное верное отношение отрезков.
13.	2	+1 балл – разложение знаменателей в скобке на множители; +1 балл – верное выполнение операции в скобках; +1 балл – за каждое верное сокращение при умножении;
14.	31	+2 балла – за каждый рассмотренный случай; +3 балла – за все верно и обоснованно найденные тройки цифр, из которых составляют нужны числа; +1 балл – за правильный частично обоснованный ответ
15.	307	по 2 балла – за обоснованное рассмотрение каждого случая.

Решения и критерии оценивания
Вариант №2

1. Маша выполняла домашнее задание по алгебре и геометрии. После того, как она решила третью часть всех задач по геометрии, оказалось, что она выполнила уже четверть часть всего домашнего задания. На какую часть от оставшегося количества уменьшится количество домашнего задания, если Маша решит половину всех задач по алгебре?
Решение. Пусть задач по алгебре x, по геометрии y. После решения $\frac{1}{3}y$ она выполнила $\frac{1}{4}(x+y)$, т.е. $\frac{1}{3}y = \frac{1}{4}(x+y)$. Отсюда $\frac{1}{3}y - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x$, $\frac{1}{12}y = \frac{1}{4}x$, $y = 3x$. Всего задач $4x$. После первого этапа осталось $4x - x = 3x$. Если решить половину задач по алгебре, т.е. $\frac{1}{2}x$, то останется $3x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x$. Уменьшение составило $\frac{1}{2}x$ от первоначального остатка $3x$, т.е. $\frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$.
Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

1. Дана трапеция $ABCD$ основания которой BC и AD и равны 4 и 12 соответственно. Диагонали пересекаются в точке O. Площадь треугольника $S_{BCO} = 4$. Найти площадь треугольника S_{AOB}.
Решение. Треугольники BOC и AOD подобны с коэффициентом $k = BC/AD = 1/3$, поэтому $\frac{CO}{OA} = \frac{1}{3}$. Треугольники AOB и BOC имеют одинаковую высоту из вершины B, а значит их площади будут относится как основания, откуда $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{3}{1}$. Тогда $S_{AOB} = 3 \cdot S_{BOC} = 12$.
Ответ: 12.

3. *(2 балла)* Плиточник должен уложить 240 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 6 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 9 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?
Решение. Пусть плиточник укладывает x м^2 в день. Тогда

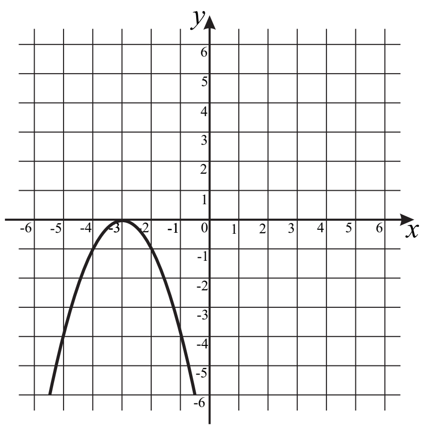
$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+6} = 9.$$

Отсюда

$$\frac{1440}{x(x+6)} = 9, \qquad x(x+6) = 160, \qquad x^2 + 6x - 160 = 0.$$

Корни: $x = 10$ и $x = -16$. Подходит только $x = 10$.
Ответ: 10.

4. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит большую боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найти периметр трапеции, если радиус этой окружности равен 6 см.
Решение. Пусть AB - меньшая боковая сторона трапеции. Обозначим точки касания окружности со сторонами AB, BC, CD, DA через M, N, L, K соответственно. Тогда $AM = AK = r = 6$, $BM = BN = r = 6$, $CN = CL = 4$, $DL = DK = 9$ как отрезки касательных проведенных к окружности из одной точки. Сумма всех этих отрезков будет равна периметру трапеции: $P = 4r + 4 + 4 + 9 + 9$. Отсюда $P = 50$.
Ответ: 50.



5. При каких значениях k парабола $y = -(x-k)^2$ имеет с прямой $y = -2x - 5$ хотя бы одну общую точку? Постройте параболу при наименьшем из найденных значений k.
Решение. Общие точки прямой и параболы удовлетворяют уравнению $-(x-k)^2 = -2x - 5$.

После раскрытия скобок:

$$x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 5 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет действительные решения, если его дискриминант неотрицательный: $D = 4(k+1)^2 - 4(k^2-5) = 8k + 24 = 8(k+3) \geqslant 0$. Значит, $k \geqslant -3$. Наименьшее значение:

$k=-3$. Тогда уравнение параболы имеет вид $y=-(x+3)^2$.
Ответ: $k \geqslant -3$; наименьшее значение $k=-3$.

6. Найдите все целые числа, удовлетворяющие системе $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{4}, \\ |x-10| \leqslant 12. \end{cases}$

Решение. Решаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{4}, \\ |x-10| \leqslant 12. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 4x-6 \leqslant 3x-6, \\ -2 \leqslant x \leqslant 22. \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0, \\ -2 \leqslant x \leqslant 22. \end{cases}$$

Найдем решение системы:

$$-2 \leqslant x \leqslant 0.$$

Целые решения: $-2,-1,0$.
Ответ: $-2,-1,0$.

7. Во время праздника детям, сидевшим за круглым столом, принесли огромную тарелку с конфетами. Дети брали конфеты по кругу: первый взял одну конфету, второй – две конфеты и т.д. Каждый следующий брал на одну конфету больше, чем предыдущий. На втором круге в сумме было взято на 121 конфету больше, чем при первом обходе. Сколько детей сидело за столом?
Решение. Пусть за столом сидело n детей. За первый круг взято $S_1=1+2+\dots+n$ конфет. За второй круг взято $S_2=(n+1)+(n+2)+\dots+(n+n)=(1+2+\dots+n)+n\cdot n$ конфет. Разность $S_2-S_1=n\cdot n=121$, откуда $n=11$.
Ответ:11

8. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px-18=0$. Найдите возможные значения p, если $x_1^2+x_2^2=85$.
Решение. Поскольку $D=p^2+72>0$ при любом p, то то данное уравнение имеет два различных корня при любых значениях параметра p. Тогда, по теореме Виета $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=-18$. Значит, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2+36=85$, откуда $p^2=49$, $p=\pm 7$.
Ответ: ± 7.

9. Учитель математики задал Пете сложную задачу: представить число 143 в виде суммы натуральных слагаемых так, чтобы и произведение всех этих слагаемых тоже было равно 143. Петя справился с этой задачей. Сколько слагаемых пришлось ему написать?
Решение. Разложение на простые множители: $143=11\cdot 13$. Тогда числа 11 и 13 и m единиц дадут сумму $11+13+m=24+m=143 \Rightarrow m=119$, и произведение $11\cdot 13\cdot 1^m=143$. Всего $2+119=121$ слагаемое.
Ответ: 121.

10. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 16. Точка K — середина BC, M лежит на стороне CD, причем $KM=AM$. Найдите MD.
Решение. Обозначим за $MD=x$, тогда $CM=16-x$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔMDA и ΔKCM. Запишем теорему Пифагора для этих треугольников соответственно:

$$AM^2=x^2+16^2; \qquad MK^2=8^2+(16-x)^2;$$

По условию $AM=MK$, тогда

$$x^2+16^2=8^2+(16-x)^2 \Rightarrow 32x=64 \Rightarrow x=2$$

Тогда $MD=2$.
Ответ: 2.

11. *(4 баллов)* Решите уравнение

$$\frac{-2x^2+4+7x}{x-3}\cdot\sqrt{3-|x|}=0.$$

Решение. Область определения уравнения задается системой: $\begin{cases} x-3\neq 0, \\ 3-|x|\geqslant 0. \end{cases}$

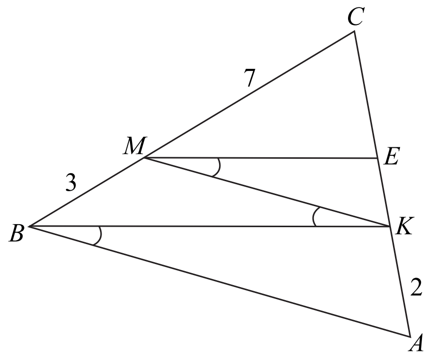
На области определения уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} -2x^2+4-7x=0, \\ 3-|x|=0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет корни $x_1=-1/2$, $x_2=4$, второй из которых не удовлетворяет второму неравенству из ОДЗ. Второе уравнение имеет корни $x_1=3$, $x_2=-3$, первый из которых не удовлетворяет первому условию из ОДЗ. Значит,

Ответ: $-1/2$; -3.

12. *(5 баллов)* Найдите длину отрезка EK в треугольнике на рисунке.



Решение. Так как $\angle EMK=\angle MKB$, то $ME||BK$, аналогично и $\angle KBA=\angle MKB$, то $BA||MK$. Отсюда $\angle CEM=\angle CKB$ и $\angle CKM=\angle CAB$. Тогда треугольники $\Delta MCK\sim\Delta BCA$ подобны по 2-ум углам. Тогда $\frac{CM}{CB}=\frac{CK}{CK+KA}\Rightarrow\frac{7}{10}=\frac{CK}{CK+2}\Rightarrow CK=\frac{14}{3}$. Рассмотрим ΔMCE и ΔBCK. Они также подобны по 2-ум углам. Тогда $\frac{CM}{CB}=\frac{CE}{CK}\Rightarrow\frac{7}{10}=\frac{CE}{\frac{14}{3}}\Rightarrow CE=\frac{49}{15}$. Тогда $EK=CK-CE=\frac{14}{3}-\frac{49}{15}=\frac{7}{5}$.

Ответ: $\frac{7}{5}$.

12. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{c\sqrt{d}-d\sqrt{c}}-\frac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{c\sqrt{d}+d\sqrt{c}}\right)\cdot\frac{\sqrt{16c^3d}}{c+d}-\frac{8d}{c-d}.$$

Решение. Решение. Преобразуем выражение, учитывая, что $c\sqrt{d}-d\sqrt{c}=\sqrt{cd}(\sqrt{c}-\sqrt{d})$, а $c\sqrt{d}+d\sqrt{c}=\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})$.

$$\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{c\sqrt{d}-d\sqrt{c}}-\frac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{c\sqrt{d}+d\sqrt{c}}\right)\cdot\frac{\sqrt{16c^3d}}{c+d}-\frac{8d}{c-d}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}-\sqrt{d})}-\frac{\sqrt{d}-\sqrt{c}}{\sqrt{cd}(\sqrt{c}+\sqrt{d})}\right)\cdot\frac{4c\sqrt{cd}}{c+d}-\frac{8d}{c-d}=$$

$$=\frac{c+2\sqrt{cd}+d+c-2\sqrt{cd}+d}{\sqrt{cd}(c-d)}\cdot\frac{4c\sqrt{cd}}{c+d}-\frac{8d}{c-d}=$$

$$=\frac{2(c+d)}{\sqrt{cd}(c-d)}\cdot\frac{4c\sqrt{cd}}{c+d}-\frac{8d}{c-d}=\frac{8c}{c-d}-\frac{8d}{c-d}=8.$$

Ответ: 8.

14. Найдите количество трехзначных чисел, кратных 6, в записи которых есть цифра 5.

Решение. Последняя цифра должна быть чётной.

Случай 1. Число имеет вид $5ab$, где b чётная. Нужно, чтобы $5+a+b$ делилось на 3. Перебор по чётной цифре $b\in\{0,2,4,6,8\}$ даёт 16 чисел.

Случай 2. Число имеет вид $a5b$, где $a\neq 0$, b чётная. Нужно, чтобы $a+5+b$ делилось на 3. Таких чисел 13. Пересечения нет, так как число с цифрой 5 и в сотнях, и в десятках имело бы вид $55b$, но ни одно из них не кратно 3, тогда 16+13=29.

Ответ: 29.

15. Автомобиль выехал из A в B со скоростью 70 км/ч. А через некоторое время он снизил скорость на 10 км/ч. За первые 3 часа он проехал на 55 км меньше, чем за последние 4. На весь путь затратил 5 часов. Найти AB.

Решение. 55 км. – это разница между расстоянием, пройденным за первый и за последние два часа движения, поэтому рассмотрим три случая:

1) Скорость снизилась в течении первого часа через t_1 час. Тогда $70t_1+60(1-t_1)+55 = 2\cdot 60 \Rightarrow t_1 = \dfrac{1}{2}$. Тогда найдем $S_{AB} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 70 + \left(5-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 60 = 305$.

2) Скорость снизилась с первого по третий час. Тогда $70\cdot 1+55 = 60\cdot 2 \Rightarrow 125 > 120$ – невозможно.

3) Скорость снизилась после 3 часа через t_2 час. Тогда $70+55 = 70t_2+60\cdot(2-t_2) \Rightarrow t_2 = \dfrac{1}{2}$. Тогда найдем $S_{AB} = \left(4-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 70 + \left(2-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 60 = 335$.

Ответ: 305 или 335 км.

Вариант 2 ответы и критерии:

№	Ответ	Критерии
1.	$\frac{1}{6}$	2 балла за верный ответ
2.	12	2 балла за верный ответ
3.	10	2 балла за верный ответ
4.	50	2 балла за верный ответ
5.	$k \geqslant -3$	1 балл за верное $k \geqslant -3$; 1 балл за верный график
6.	$-2, -1, 0$	2 балла за верный ответ; 1 балл – если найдены все числа, кроме одного или ответ записан в виде промежутка
7.	11	3 балла за верный ответ
8.	± 7	3 балла за верный ответ; 1 балл – найдено только одно значение
9	121	3 балла за верный ответ
10.	2	3 балла за верный ответ
11.	$-\frac{1}{2}, -3$	$+1$ балл – за верно найденное ОДЗ; $+1$ балл – за верно найденные все четыре нуля
12.	$\frac{7}{5}$	$+1$ балл – за каждое обоснованное верное отношение отрезков.
13.	8	$+1$ балл – разложение знаменателей в скобке на множители; $+1$ балл – верное выполнение операции в скобках; $+1$ балл – за каждое верное сокращение при умножении;
14.	29	$+2$ балла – за каждый рассмотренный случай; $+3$ балла – за все верно и обоснованно найденные тройки цифр, из которых составляют нужны числа; $+1$ балл – за правильный частично обоснованный ответ
15.	305 или 335	по 2 балла – за обоснованное рассмотрение каждого случая.