СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Вступительный тест по математике
для поступающих в 8 химико-биологический класс
19 марта 2026г.
1 вариант

1. *(2 балла)* Вычислите $3{,}785^2 - 2{,}785 \cdot 4{,}785 + 20{,}25$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение $6\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - 0{,}2(2x+3) = 3(x-2)$.

3. *(2 балла)* У Пети есть 27 одинаковых маленьких кубиков. Он сложил из всех этих кубиков один большой куб ($3\times3\times3$). Затем он покрасил все грани получившегося большого куба в красный цвет. После этого он разобрал куб обратно на маленькие кубики. Сколько маленьких кубиков оказались не покрашенными совсем?

4. *(2 балла)* У Маши и Даши сегодня день рождения. Маша заметила, что $\frac{1}{17}$ возраста Даши составляет $\frac{1}{13}$ её собственного возраста. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 70. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

5. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{11^2+12^2+13^2+14^2+15^2}{285}$.

6. *(3 балла)* Известно, что в треугольнике один угол на 25° больше другого, а также есть два угла, сумма которых составляет 125°. Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

7. *(3 балла)* Какое наименьшее количество раз нужно записать число 2026 подряд, чтобы получившееся число делилось на 18?

8. *(3 балла)* Прямая AB проходит через точки $A(-2;6)$ и $B(5;-1)$, а прямая CD — через точки $C(-6;-4)$ и $D(3;5)$. Найдите уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD.

9. *(3 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} |x-2y| = 5, \\ x+2y = 7. \end{cases}$

10. *(3 балла)* Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1. Найдите длину гипотенузы этого треугольника, если один из его острых углов равен 15°.

11. *(5 баллов)* Упростить выражение

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} - \frac{x^3+8}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+6x}{x^2+2x}.$$

12. *(5 баллов)* Тасе нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно две соседние цифры, отличающиеся на 1. Например, ей нравится число 238, но не нравятся числа 314 или 543. Сколько трёхзначных чисел нравятся Тасе?

13. *(5 баллов)* В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

1		6
2		

14. *(5 баллов)* Бабушка варит компот из сухофруктов. Для этого она смешивает два вида сухофруктов: курагу массой 300 грамм, которая содержит 30% сахара; чернослив, который содержит 10% сахара. После смешивания бабушка добавляет в компот 100 грамм чистого сахара. Полученный компот содержит 40% сахара. Сколько граммов чернослива было добавлено?

15. *(5 баллов)* В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K, причем $BK = DK = AD$. На отрезке CK отметили такую точку M, что $AK = CM$. Докажите, что $DM = BC$.

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Вступительный тест по математике для поступающих в 8 химико-биологический класс 19 марта 2026г. 2 вариант

1. *(2 балла)* Вычислите $4{,}328^2 - 5{,}328 \cdot 3{,}328 - 20{,}26$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение: $10\left(\frac{2}{5}y - 2\right) - 0{,}6(2y+1) = 3(y-6)$.

3. *(2 балла)* У Вити есть 27 одинаковых маленьких кубиков. Он сложил из всех этих кубиков один большой куб ($3\times3\times3$). Затем он покрасил все грани получившегося большого куба в красный цвет. После этого он разобрал куб обратно на маленькие кубики. Сколько маленьких кубиков оказались имеют хотя бы одну окрашенную грань?

4. *(2 балла)* У Глеба и Данила вчера был день рождения. Глеб заметил, что $\frac{1}{12}$ его возраста равна $\frac{1}{19}$ возраста Данила. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 80. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

5. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$.

6. *(3 балла)* Известно, что в треугольнике один угол на 26° меньше другого, а также есть два угла, сумма которых составляет 126°. Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

7. *(3 балла)* Какое наименьшее количество раз нужно записать число 2020 подряд, чтобы получившееся число делилось на 45?

8. *(3 балла)* Прямая AB проходит через точки $A(4;-3)$ и $B(-4;5)$, а прямая CD — через точки $C(2;7)$ и $D(-6;-1)$. Найдите уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD.

9. *(3 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} |2x-y| = 3, \\ 2x+y = 9. \end{cases}$

10. *(3 балла)* Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите длину высоты этого треугольника, проведённой к гипотенузе, если один из его острых углов равен 15°.

11. *(5 баллов)* Упростить выражение

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} - \frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{-x^2+x+2}{3-x}.$$

12. *(5 баллов)* Соне нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно две соседние цифры, отличающиеся на 2. Например, ей нравится число 314, но не нравятся числа 103 или 975. Сколько трёхзначных чисел нравятся Соне?

13. *(5 баллов)* В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

2		7
1		

14. *(5 баллов)* В детском кафе готовят витаминный коктейль для этого смешивают два вида сока: апельсиновый сок массой 200 грамм, который содержит 20% витамина C и грейпфрутовый сок, котоырй содержит 10% витамина C, после чего разбавляют сок 50 граммами чистой воды. Полученный коктейль содержит 15% витамина C. Сколько грейпфрутового сока было добавлено?

15. *(5 баллов)* В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, причем $BM = DM = BC$. На отрезке AM отметили такую точку K, что $AK = CM$. Докажите, что $BK = AD$.

Решение.
Вариант 1.

1. *(2 балла)* Вычислите $3{,}785^2 - 2{,}785 \cdot 4{,}785 + 20{,}25$.

Решение.
Заметим, что $2{,}785 = 3{,}785 - 1$ и $4{,}785 = 3{,}785 + 1$. Тогда

$$3{,}785^2 - (3{,}785 - 1)(3{,}785 + 1) + 20{,}25 = 3{,}785^2 - (3{,}785^2 - 1) + 20{,}25 = 1 + 20{,}25 = 21{,}25.$$

Ответ: $21{,}25$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение $6\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - 0{,}2(2x + 3) = 3(x - 2)$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$6 \cdot \tfrac{2}{3}x - 6 \cdot 1 - 0{,}2 \cdot 2x - 0{,}2 \cdot 3 = 3x - 6.$$
$$4x - 6 - 0{,}4x - 0{,}6 = 3x - 6.$$
$$3{,}6x - 3x = -6 + 6{,}6.$$
$$0{,}6x = 0{,}6.$$

Откуда $x = 1$.
Ответ: 1.

3. *(2 балла)* У Пети есть 27 одинаковых маленьких кубиков. Он сложил из всех этих кубиков один большой куб ($3 \times 3 \times 3$). Затем он покрасил все грани получившегося большого куба в красный цвет. После этого он разобрал куб обратно на маленькие кубики. Сколько маленьких кубиков оказались не покрашенными совсем?

Решение. Большой куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 маленьких кубиков. При покраске граней большого куба краска попадает только на те маленькие кубики, которые образуют его поверхность. Кубик, который находится в самом центре большой фигуры, не имеет ни одной грани, выходящей на поверхность. В кубе $3 \times 3 \times 3$ это единственный кубик, не прилегающий ни к одной из граней. Таким образом, непокрашенным остался только один, самый внутренний кубик.
Ответ: 1.

4. *(2 балла)* У Маши и Даши сегодня день рождения. Маша заметила, что $\frac{1}{17}$ возраста Даши составляет $\frac{1}{13}$ её собственного возраста. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 70. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

Решение. Пусть возраст Маши равен M лет, а возраст Даши — D лет. Из условия задачи составим уравнение:

$$\frac{1}{17}D = \frac{1}{13}M.$$

Отсюда $13D = 17M$, или $D = \frac{17}{13}M$. Так как возраст — число целое (предполагаем, что речь о полных годах), M должно быть кратно 13. Пусть $M = 13k$, где k — натуральное число. Тогда $D = \frac{17}{13} \cdot 13k = 17k$. Сумма их возрастов:

$$S = M + D = 13k + 17k = 30k.$$

По условию $40 < S < 70$, то есть $40 < 30k < 70$. Единственное целое значение k, удовлетворяющее неравенству, это $k = 2$. Тогда $M = 13 \cdot 2 = 26$ лет, $D = 17 \cdot 2 = 34$ года. Разница в возрасте: $|D - M| = |34 - 26| = 8$ лет.
Ответ: 8.

5. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2}{285}$

Решение.

$$\frac{11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2}{285} = \frac{(13-2)^2 + (13-1)^2 + 13^2 + (13+1)^2 + (13+2)^2}{285} =$$
$$= \frac{5 \cdot 13^2 + 4 + 1 + 1 + 4}{285} = \frac{855}{285} = 3.$$

Ответ: 3.

6. *(3 балла)* Известно, что в треугольнике один угол на 25° больше другого, а также есть два угла, сумма которых составляет 125°. Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

Решение.

Сумма углов треугольника равна 180°. Пусть углы треугольника равны a, b, c и пусть $a + b = 125^\circ$, тогда возможны тру случая:

1) если $a - b = 25^\circ$, то $a = 75^\circ$, $b = 55^\circ$, $C = 55^\circ$ и ответ 75°;

2) если $c = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ и $a - c = 25^\circ$,то $a = 80^\circ$, а $b = 45^\circ$ и ответ 80°;

2) если $c = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$ и $c - a = 25^\circ$,то $a = 30^\circ$, а $b = 95^\circ$ и ответ 95°.

Ответ: 75°, 80° или 95°.

7. *(3 балла)* Какое наименьшее количество раз нужно записать число 2026 подряд, чтобы получившееся число делилось на 18?

Решение. Число делится на 18, если оно делится на 2 (чётное) и на 9 (сумма цифр кратна 9). Число 2026 чётное, значит, любое число, составленное из его повторений, также будет чётным. Остаётся проверить признак делимости на 9. Сумма цифр числа 2026: $2 + 0 + 2 + 6 = 10$. Если мы запишем число n раз подряд, сумма его цифр будет равна $n \cdot 10$. Чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы $10n$ делилось на 9. Так как 10 не делится на 9, то n должно быть кратно 9. Наименьшее такое натуральное n равно 9.

Ответ: 9.

8. *(3 балла)* Прямая AB проходит через точки $A(-2; 6)$ и $B(5; -1)$, а прямая CD — через точки $C(-6; -4)$ и $D(3; 5)$. Найдите уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD.

Решение. Пусть уравнение прямой AB: $y = ax + b$. Тогда $6 = -2a + b$ и $-1 = 5a + b$, откуда $a = -1$, $b = 4$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = -x + 4$. Пусть уравнение прямой CD: $y = cx + d$. Тогда $-4 = -6c + d$ и $5 = 3c + d$, откуда $c = 1$, $d = 2$. Уравнение прямой CD имеет вид $y = x + 2$. Найдём точку пересечения, приравняв правые части: $-x + 4 = x + 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Тогда $y = 1 + 2 = 3$. Общая точка $O(1; 3)$. Прямая, параллельная оси Ox (оси абсцисс), имеет вид $y = \mathrm{const}$. Так как она проходит через точку $(1; 3)$, её уравнение: $y = 3$.

Ответ: $y = 3$.

9. *(3 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} |x - 2y| = 5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения следует, что $x - 2y = 5$ или $x - 2y = -5$. Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $2x = 12 \Rightarrow x = 6$. Тогда из второго уравнения $6 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 0,5$. Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} x - 2y = -5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Тогда из второго уравнения $1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$. Таким образом, система имеет два решения: $(6; 0,5)$ и $(1; 3)$.

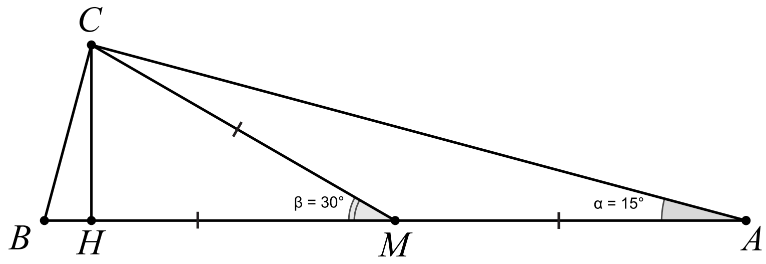
Ответ: $(6; 0,5); (1; 3)$.

10. *(3 балла)* Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1. Найдите длину гипотенузы этого треугольника, если один из его острых углов равен 15°.

Решение.

Проведем в треугольнике медиану CM к гипотенузе AB (см. рисунок). Тогда по свойстве медианы, треугольник ACM – равнобедренный, и $\angle CMB = \angle MAC + \angle MCA = 30^\circ$. Тогда из прямоугольного

треугольника CHM: $CM = 2CH = 2$, а $AB = 2CM = 4$.
Ответ: 4.



11. *(5 баллов)* Упростить выражение

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} - \frac{x^3+8}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+6x}{x^2+2x}.$$

Решение.

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} - \frac{x^3+8}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+6x}{x^2+2x} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)^2} + \frac{x(x^2+6)}{x(x+2)} =$$
$$= \frac{x-2}{x+2} - \frac{x^2-2x+4}{x+2} + \frac{x^2+6}{x+2} = \frac{x-2-x^2+2x-4+x^2+6}{x+2} = \frac{3x}{x+2}.$$

Ответ: $\dfrac{3x}{x+2}$.

12. *(5 баллов)* Тасе нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно две соседние цифры, отличающиеся на 1. Например, ей нравится число 238, но не нравятся числа 314 или 543. Сколько трёхзначных чисел нравятся Тасе?
Решение.
Пусть Тасе нравится число $\overline{abc}$, где a, b, c – цифры. Существует всего 18 пар цифр, различающихся на 1: $01, 10, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 56, 65, 67, 76, 78, 87, 89, 98$. Одна из этих пар должна быть в числе. Есть две возможности:
1) Пара цифр с разницей 1 стоит на местах ab.
Цифра 0 на первом месте стоять не может, поэтому вариант $\overline{ab} = 01$ не встретится. Для пар $\overline{ab} = 10$ и $\overline{ab} = 89$ существует по 9 вариантов третьей цифры c (все цифры кроме 1 и 8 соответственно). Для остальных подходящих пар $\overline{ab}$ количество вариантов выбора третьей цифры c будет по 8 (все цифры кроме $b+1$ и $b-1$). Итого для первой пары – $2\cdot 9 + 15\cdot 8 = 138$.
2) Пара цифр с разницей 1 стоит на местах $\overline{bc}$.
Сразу отметим, что первая цифра a не может быть нулем. Для вариантов $\overline{bc} = 10$ и 12 количество вариантов выбора первой цифры будет равно 8 (не 0 и не 2). Для $\overline{bc} = 01$ вариантов – 8 (не 0 и не 1). Для $\overline{bc} = 98$ вариантов – 8 (не 0 и не 8). Для всех остальных комбинаций способов будет по 7 (не 0, не $b-1$ и не $b+1$). Итого для второй пары – $4\cdot 8 + 14\cdot 7 = 130$.
Таким образом всего Тасе нравятся $138 + 130 = 268$ чисел. **Ответ:** 268.

13. *(5 баллов)* В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

1		6
2		

Решение. Пусть указанные суммы равны S. Сложив суммы чисел во втором столбце и по диагоналям и вычтя отсюда суммы чисел первой и третьей строк, мы получим S. С другой стороны, это число равно утроенному числу, стоящему в центральной клетке. На одной из диагоналей стоят числа 2 и 6, поэтому в центральной клетке стоит 4, а S = 12. Теперь все числа в таблице легко восстанавливаются. **Ответ:**

1	5	6
9	4	-1
2	3	7

14. *(5 баллов)* Бабушка варит компот из сухофруктов. Для этого она смешивает два вида сухофруктов: курагу массой 300 грамм, которая содержит 30% сахара; чернослив, который содержит 10% сахара. После смешивания бабушка добавляет в компот 100 грамм чистого сахара. Полученный компот содержит 40% сахара. Сколько граммов чернослива было добавлено?

Решение.

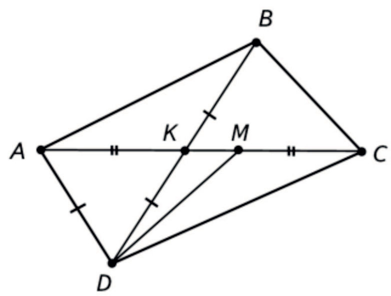
Пусть масса чернослива равна x грамм. Найдём массу сахара в каждом компоненте:

- В кураге: $300 \cdot 0{,}3 = 90$ гр.
- В черносливе: $x \cdot 0{,}1 = 0{,}1x$ гр.
- Чистый сахар: 100 гр.
- компот: $0{,}4(400 + x)$ гр.

Составим уравнение $90 + 0{,}1x + 100 = 0{,}4(400 + x)$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем, что $x = \frac{30}{0{,}3} = 100$ грамм.

Ответ: 100 грамм.

15. *(5 баллов)* В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K, причем $BK = DK = AD$. На отрезке CK отметили такую точку M, что $AK = CM$. Докажите, что $DM = BC$.



Решение.

Заметим, что треугольник AKD равнобедренный. Углы при его основании равны, $\angle DAK = \angle AKD$. Углы $\angle BKC$ и $\angle AKD$ вертикальные, $\angle BKC = \angle AKD = \angle DAK$. Рассмотрим треугольники AMD и KCB: $BK = AD$, $AM = AK + KM = MC + KM = KC$, $\angle AKD = \angle BKC$. По признаку равенства треугольников $\triangle AMD = \triangle KCB$, следовательно, $BC = DM$.

Критерии (1 вариант)

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ, если выписаны сами возрасты (или один возраст), то 1 балл.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 1 балл за каждый верный вариант ответа.
7. 3 балла за верный ответ.
8. 3 балла за верный ответ.
9. 3 балла за верный ответ, 1 балл за один из верных вариантов.
10. 3 балла за верный ответ.
11. *+1 балла* – за каждую верно сокращенную дробь;

+1 балла – верное приведение к общему знаменателю;

+1 балла – получен верный ответ.

12. *+2 балла* – нахождение количества чисел, отличающихся 1й и 2й цифрой на 1 (их 138);

+2 балла – нахождение количества чисел , отличающихся 2й и 3й цифрой на 1 (их 130);

+1 балл – общее количество.

13. *+2 балла* – за верный ответ;

+3 балла – за обоснование единственности.

14. *+3 балла* – верно составлено уравнение;

+2 балла – верно решено уравнение.

15. *+1 балла* – обосновано равенство $\angle MAD$ и $\angle BKC$;

+1 балла – обосновано равенство AM и CK;

+2 балла – обосновано равенство $\triangle AMD$ и $\triangle BKC$;

+1 балла – обосновано равенство BC и DM.

Вариант 2.

1. *(2 балла)* Вычислите $4{,}328^2 - 5{,}328 \cdot 3{,}328 - 20{,}26$.

Решение.

Заметим, что $3{,}328 = 4{,}328^2 - 1$ и $5{,}328 = 4{,}328^2 + 1$. Тогда

$$4{,}328^2 - 5{,}328 \cdot 3{,}328 - 20{,}26 = 4{,}328^2 - (4{,}328^2 - 1) - 20{,}26 = 1 - 20{,}26 = -19{,}26.$$

Ответ: $-19{,}26$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение: $10\left(\frac{2}{5}y - 2\right) - 0{,}6(2y+1) = 3(y-6)$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$10 \cdot \tfrac{2}{5}y - 10 \cdot 2 - 0{,}6 \cdot 2y - 0{,}6 \cdot 1 = 3y - 18.$$
$$4y - 6 - 0{,}4y - 0{,}6 = 3y - 18.$$
$$3{,}6y - 3y = -18 + 6{,}6.$$
$$0{,}6y = -11{,}4.$$

Откуда $y = -13$.

Ответ: -13.

3. *(2 балла)* У Вити есть 27 одинаковых маленьких кубиков. Он сложил из всех этих кубиков один большой куб ($3 \times 3 \times 3$). Затем он покрасил все грани получившегося большого куба в красный цвет. После этого он разобрал куб обратно на маленькие кубики. Сколько маленьких кубиков оказались имеют хотя бы одну окрашенную грань?

Решение. Большой куб размером $3 \times 3 \times 3$ состоит из 27 маленьких кубиков. При покраске граней большого куба краска попадает только на те маленькие кубики, которые образуют его поверхность. Кубик, который находится в самом центре большой фигуры, не имеет ни одной грани, выходящей на поверхность. В кубе $3 \times 3 \times 3$ это единственный кубик, не прилегающий ни к одной из граней. Таким образом, непокрашенным остался только один, самый внутренний кубик.

Ответ: 26.

4. *(2 балла)* У Глеба и Данила вчера был день рождения. Глеб заметил, что $\frac{1}{12}$ его возраста равна $\frac{1}{19}$ возраста Данила. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 80. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

Решение. Пусть возраст Маши равен G лет, а возраст Даши — D лет. Из условия задачи составим уравнение:

$$\frac{1}{19}D = \frac{1}{12}G.$$

Отсюда $12D = 19G$, или $D = \frac{19}{12}G$. Так как возраст — число целое (предполагаем, что речь о полных годах), M должно быть кратно 13. Пусть $G = 12k$, где k — натуральное число. Тогда $D = \frac{19}{12} \cdot 12k = 19k$. Сумма их возрастов:

$$S = G + D = 12k + 19k = 31k.$$

По условию $40 < S < 70$, то есть $40 < 31k < 80$. Единственное целое значение k, удовлетворяющее неравенству, это $k = 2$. Тогда $G = 12 \cdot 2 = 24$ года, $D = 19 \cdot 2 = 38$ лет. Разница в возрасте: $|D - G| = |38 - 24| = 14$ лет.

Ответ: 14.

5. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$.

Решение.

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = \frac{(12-2)^2 + (12-1)^2 + 12^2 + (12+1)^2 + (12+2)^2}{365} =$$
$$= \frac{5 \cdot 12^2 + 4 + 1 + 1 + 4}{365} = \frac{730}{365} = 2.$$

Ответ: 2.

6. *(3 балла)* Известно, что в треугольнике один угол на 26° меньше другого, а также есть два угла, сумма которых составляет 126°. Каким может быть самый большой угол этого треугольника?
Решение.
Сумма углов треугольника равна 180°. Пусть углы треугольника равны a, b, c и пусть $a + b = 126^\circ$, тогда возможны тру случая:
1) если $a - b = 26^\circ$, то $a = 76^\circ$, $b = 50^\circ$, $c = 54^\circ$ и ответ 76°;
2) если $c = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$ и $a - c = 26^\circ$,то $a = 80^\circ$, а $b = 46^\circ$ и ответ 80°;
2) если $c = 180^\circ - 125^\circ = 54^\circ$ и $c - a = 25^\circ$,то $a = 28^\circ$, а $b = 98^\circ$ и ответ 98°.
Ответ: 76°, 80° или 98°.

7. *(3 балла)* Какое наименьшее количество раз нужно записать число 2020 подряд, чтобы получившееся число делилось на 45?
Решение. Число делится на 45, если оно делится на 5 (оканчивается на 0 или 5) и на 9 (сумма цифр кратна 9). Число 2020 делится на 5, значит, любое число, составленное из его повторений, также будет делиться. Остаётся проверить признак делимости на 9. Сумма цифр числа 2020: $2+0+2+0 = 4$. Если мы запишем число n раз подряд, сумма его цифр будет равна $n \cdot 4$. Чтобы число делилось на 9, нужно, чтобы $4n$ делилось на 9. Так как 4 не делится на 9, то n должно быть кратно 9. Наименьшее такое натуральное n равно 9.
Ответ: 9.

8. *(3 балла)* Прямая AB проходит через точки $A(4; -3)$ и $B(-4; 5)$, а прямая CD — через точки $C(2; 7)$ и $D(-6; -1)$. Найдите уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD.
Решение. Пусть уравнение прямой AB: $y = ax + b$. Тогда $-3 = 4a + b$ и $5 = -4a + b$, откуда $a = -1$, $b = 1$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = -x + 1$. Пусть уравнение прямой CD: $y = cx + d$. Тогда $7 = 2c + d$ и $-1 = -6c + d$, откуда $c = 1$, $d = 5$. Уравнение прямой CD имеет вид $y = x + 5$. Найдём точку пересечения, приравняв правые части: $-x + 1 = x + 5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$. Тогда $y = -2 + 5 = 3$. Общая точка $O(-2; 3)$. Прямая, параллельная оси Ox (оси абсцисс), имеет вид $y = \text{const}$. Так как она проходит через точку $(-2; 3)$, её уравнение: $y = 3$.
Ответ: $y = 3$.

9. *(3 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} |2x - y| = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$
Решение. Из первого уравнения следует, что $2x - y = 3$ или $2x - y = -3$. Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

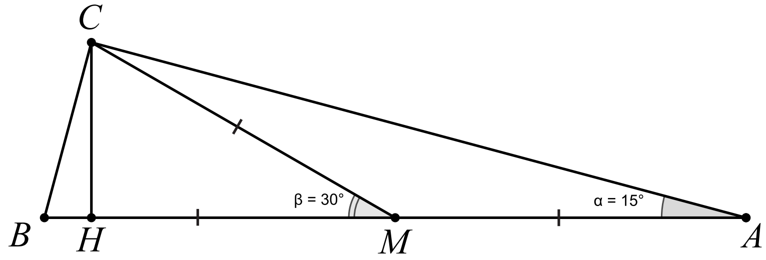
Сложим уравнения: $4x = 12 \Rightarrow x = 3$. Тогда из второго уравнения $6 + y = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow y = 3$. Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $4x = 6 \Rightarrow x = 1{,}5$. Тогда из второго уравнения $3 + y = 9 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow y = 6$. Таким образом, система имеет два решения: $(6; 0,5)$ и $(1; 3)$.
Ответ: $(3; 3); (1{,}5; 6)$.

10. *(3 балла)* Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите длину высоты этого треугольника, проведённой к гипотенузе, если один из его острых углов равен 15°.
Решение.
Проведем в треугольнике медиану CM к гипотенузе AB (см. рисунок). Тогда по свойстве медианы, треугольник ACM – равнобедренный, и $\angle CMB = \angle MAC + \angle MCA = 30^\circ$. Тогда из прямоугольного

треугольника CHM: $CM = 2CH$, а $AB = 2CM = 4CH = 6$. Откуда $CH = 1{,}5$.
Ответ: 1,5.



11. *(5 баллов)* Упростить выражение

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} - \frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{-x^2+x+2}{3-x}.$$

Решение.

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9} - \frac{x^2+3x+9}{x^3-27} + \frac{-x^2+x+2}{3-x} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)} - \frac{x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)} + \frac{x^2-x-2}{x-3} =$$
$$= \frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x-3} + \frac{x^2-x-2}{x-3} = \frac{x+3-1+x^2-x-2}{x-3} = \frac{x^2}{x-3}.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{x-3}$.

12. *(5 баллов)* Соне нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно две соседние цифры, отличающиеся на 2. Например, ей нравится число 314, но не нравятся числа 103 или 975. Сколько трёхзначных чисел нравятся Соне?
Решение. Пусть Соне нравится число $\overline{abc}$, где a, b, c – цифры. Существует всего 16 пар цифр, различающихся на 2: $02, 20, 13, 31, 24, 42, 35, 53, 46, 64, 57, 75, 68, 86, 79, 97$. Одна из этих пар должна быть в числе. Есть две возможности:
1) Пара цифр с разницей 2 стоит на местах $\overline{ab}$.
Цифра 0 на первом месте стоять не может, поэтому вариант $\overline{ab} = 02$ не встретится. Для пар $\overline{ab} =$ 20, 31, 68 и 79 существует по 9 вариантов третьей цифры c (все цифры кроме $b+2$ или $b-2$ соответственно). Для остальных подходящих пар $\overline{ab}$ количество вариантов выбора третьей цифры c будет по 8 (все цифры кроме $b+1$ и $b-1$). Итого для первой пары – $4 \cdot 9 + 11 \cdot 8 = 124$.
2) Пара цифр с разницей 2 стоит на местах $\overline{bc}$.
Сразу отметим, что первая цифра a не может быть нулем. Для вариантов $\overline{bc} = 02$, 20, 13, 24, 86 и 97 количество вариантов выбора первой цифры будет равно 8. Для всех остальных комбинаций способов будет по 7 (не 0, не $b-2$ и не $b+2$). Итого для второй пары – $6 \cdot 8 + 10 \cdot 7 = 118$.
Таким образом всего Тасе нравятся $124 + 118 = 242$ числа. **Ответ:** 242.

13. *(5 баллов)* В трёх клетках таблицы 3×3 стоят числа (см. рисунок). Требуется заполнить числами остальные клетки так, чтобы во всех строках, столбцах и главных диагоналях суммы чисел оказались равными. Докажите, что это можно сделать единственным способом, и заполните таблицу.

2		7
1		

Решение. Пусть указанные суммы равны S. Сложив суммы чисел во втором столбце и по диагоналям и вычтя отсюда суммы чисел первой и третьей строк, мы получим S. С другой стороны, это число равно утроенному числу, стоящему в центральной клетке. На одной из диагоналей стоят

числа 1 и 7, поэтому в центральной клетке стоит 4, а S = 12. Теперь все числа в таблице легко восстанавливаются.
Ответ:

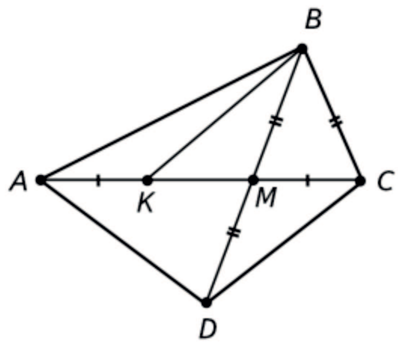
2	3	7
9	4	-1
1	5	6

14. *(5 баллов)* В детском кафе готовят витаминный коктейль для этого смешивают два вида сока: апельсиновый сок массой 200 грамм, который содержит 20% витамина С и грейпфрутовый сок, который содержит 10% витамина С, после чего разбавляют сок 50 граммами чистой воды. Полученный коктейль содержит 15% витамина С. Сколько грейпфрутового сока было добавлено?
Решение.
Пусть масса грейпфрутового сока равна x грамм. Найдём массу витамина С в каждом компоненте:

- В апельсиновом соке: $200 \cdot 0{,}2 = 40$ гр.
- В грейпфрутовом соке: $x \cdot 0{,}1 = 0{,}1x$ гр.
- Чистая вода: 0 гр.
- Витаминный коктейль: $0{,}15(250 + x)$ гр.

Составим уравнение $40 + 0{,}1x + 0 = 0{,}15(250 + x)$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем, что $x = \frac{2{,}5}{0{,}05} = 50$ грамм.
Ответ: 50 грамм.

15. *(5 баллов)* В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M, причем $BM = DM = BC$. На отрезке AM отметили такую точку K, что $AK = CM$. Докажите, что $BK = AD$.



Решение.
Заметим, что треугольник BCM равнобедренный. Углы при его основании равны, $\angle BCM = \angle BMC$. Углы $\angle BMC$ и $\angle AMD$ вертикальные, $\angle BMC = \angle AMD = \angle BCM$. Рассмотрим треугольники CBK и MDA: $BC = MD, CK = CM + MK = AK + MK = AM, \angle BCK = \angle AMD$. По признаку равенства треугольников $\triangle CBK = \triangle MDA$, следовательно, $BK = AD$.

Критерии (2 вариант)

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ, если выписаны сами возрасты (или один возраст), то 1 балл.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 3 балла за верный ответ, 1 балл за один из верных вариантов.
7. 3 балла за верный ответ.
8. 3 балла за верный ответ.
9. 3 балла за верный ответ, 1 балл за один из верных вариантов.
10. 3 балла за верный ответ.
11. *+1 балла* – за каждую верно сокращенную дробь;
+1 балла – верное приведение к общему знаменателю;
+1 балла – получен верный ответ.
12. *+2 балла* – нахождение количества чисел, отличающихся 1й и 2й цифрой на 2 (их 124);
+2 балла – нахождение количества чисел , отличающихся 2й и 3й цифрой на 2 (их 11);
+1 балл – общее количество.
13. *+2 балла* – за верный ответ;
+3 балла – за обоснование единственности.
14. *+3 балла* – верно составлено уравнение;
+2 балла – верно решено уравнение.
15. *+1 балла* – обосновано равенство $\angle AMD$ и $\angle BCK$;
+1 балла – обосновано равенство AM и CK;
+2 балла – обосновано равенство $\triangle AMD$ и $\triangle BKC$.
+1 балла – обосновано равенство BK и DA.