

Вступительный экзамен по математике для поступающих в 8 фм, ми класс

19 марта 2026г.

1 вариант

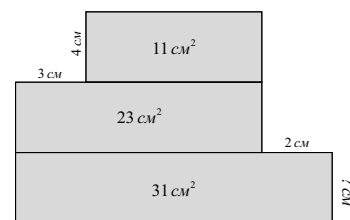
1. (2 балла) Вычислите значение выражения $3,785^2 - 2,785 \cdot 4,785 + 20,25$.

2. (2 балла) На сломанном калькуляторе работает лишь одна операция \oplus . Известно, что

$$a \oplus b = \frac{a^2 + 2b}{b - a},$$

например: $2 \oplus 3 = 10$, а $0 \oplus 2 = 2$. Найдите $(x - 1) \oplus x$.

3. (2 балла) Найдите неизвестную сторону



4. (2 балла) Решите уравнение $6\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - 0,2(2x + 3) = 3(x - 2)$.

5. (2 балла) У Маши и Даши сегодня день рождения. Маша заметила, что $\frac{1}{17}$ возраста Даши составляет $\frac{1}{13}$ ее собственного возраста. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 70. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

6. (3 балла) Известно, что в треугольнике один угол на 25° больше другого, а также есть два угла сумма которых составляет 125° . Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

7. (3 балла) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |x - 2y| = 5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

8. (3 балла) В 8В классе учатся мальчики и девочки, физики и лирики, блондины и брюнеты. Известно, что все блондины – девочки, а все лирики – блондины. Брюнетов в классе 12, физиков – 16, а девочек физиков – 5. Сколько брюнеток среди девочек в классе?

9. (3 балла) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу равна 1. Найдите длину гипотенузы этого треугольника, если один из его острых углов равен 15° .

10. (3 балла) Прямая AB проходит через точки $A(-2; 6)$ и $B(5; -1)$, а прямая CD – через точки $C(-6; -4)$ и $D(3; 5)$.

а) постройте прямые AB и CD ; б) найдите их точку пересечения;

в) составьте уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через общую точку прямых AB и CD .

11. (5 баллов) Упростите выражение
$$\frac{(x - 2)^2}{x^2 - 4} - \frac{x^3 + 8}{x^2 + 4x + 4} + \frac{x^3 + 6x}{x^2 + 2x}.$$

12. (5 баллов) Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Но вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня второй курьер вышел на 9 минут раньше обычного, а первый вышел вовремя. На сколько минут раньше произойдет их встреча? Каждый из курьеров идет каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

13. (5 баллов) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K , причем $BK = DK = AD$. На отрезке CK отметили такую точку M , что $AK = CM$. Докажите, что $DM = BC$.

14. (5 баллов) а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению
$$\frac{(4x - 4x^2 - 1)(x + y + 1)(x^2 + y^2)}{(2xy - 6x - y + 3)} = 0.$$

б) Найдите все значения a , при которых есть единственная точка пересечения прямой $y = a$ и найденного множества.

15. (5 баллов) Тасе нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно 2 соседние цифры, отличающиеся на 1. Например, ей нравится число 238, но не нравятся числа 314 или 543. Сколько трехзначных чисел нравятся Тасе?

Вступительный экзамен по математике для поступающих в 8 фм, ми класс

19 марта 2026г.

2 вариант

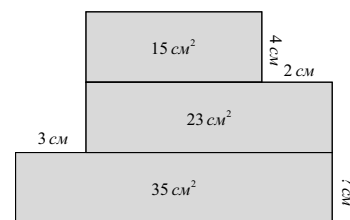
1. (2 балла) Вычислите значение выражения $4,328^2 - 5,328 \cdot 3,328 - 20,26$.

2. (2 балла) На сломанном калькуляторе работает лишь одна операция \odot . Известно, что

$$a \odot b = \frac{-4a - b^2}{a - b},$$

например: $2 \odot 3 = 17$, а $0 \odot 2 = 2$. Найдите $x \odot (x - 2)$.

3. (2 балла) Найдите неизвестную сторону



4. (2 балла) Решите уравнение $10\left(\frac{2}{5}y - 2\right) - 0,6(2y + 1) = 3(y - 6)$.

5. (2 балла) У Глеба и Данила вчера был день рождения. Глеб заметил, что $\frac{1}{12}$ его возраста равна $\frac{1}{19}$ возраста Данила. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 80. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

6. (3 балла) Известно, что в треугольнике один угол на 26° меньше другого, а также есть два угла сумма которых составляет 126° . Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

7. (3 балла) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |2x - y| = 3, \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

8. (3 балла) В 8В классе учатся мальчики и девочки, физики и лирики, блондины и брюнеты. Известно, что все лирики – девочки, а все блондины – лирики. Физиков в классе 17, брюнетов – 20, а девочек блондинок – 2. Сколько лириков среди девочек в классе?

9. (3 балла) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите длину высоты этого треугольника, проведенной к гипотенузе, если один из его острых углов равен 15° .

10. (3 балла) Прямая AB проходит через точки $A(4; -3)$ и $B(-4; 5)$, а прямая CD – через точки $C(2; 7)$ и $D(-6; -1)$.

а) постройте прямые AB и CD ; б) найдите их точку пересечения;

в) составьте уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD .

11. (5 баллов) Упростите выражение
$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} - \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} + \frac{-x^2 + x + 2}{3 - x}.$$

12. (5 баллов) Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня первый курьер вышел на 9 минут позже, а второй вовремя. На сколько минут позже произойдет их встреча? Каждый из курьеров идет каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

13. (5 баллов) В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M , причем $BM = DM = BC$. На отрезке AM отметили такую точку K , что $AK = CM$. Докажите, что $BK = AD$.

14. (5 баллов) а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению
$$\frac{(6y - 9y^2 - 1)(x + y - 1)(x^2 + y^2)}{(3xy - x + 9y - 3)} = 0.$$

б) Найдите все значения a , при которых есть единственная точка пересечения прямой $y = a$ и найденного множества.

15. (5 баллов) Соне нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно 2 соседние цифры, отличающиеся на 2. Например, ей нравится число 314, но не нравятся числа 103 или 975. Сколько трехзначных чисел нравятся Соне?

Решение. Вариант 1.

1. Вычислите $3,785^2 - 2,785 \cdot 4,785 + 20,25$.

Решение. Заметим, что $2,785 = 3,785 - 1$ и $4,785 = 3,785 + 1$. Тогда

$$3,785^2 - (3,785 - 1)(3,785 + 1) + 20,25 = 3,785^2 - (3,785^2 - 1) + 20,25 = 1 + 20,25 = 21,25.$$

Ответ: 21,25.

2. На сломанном калькуляторе работает лишь одна операция \oplus . Известно, что

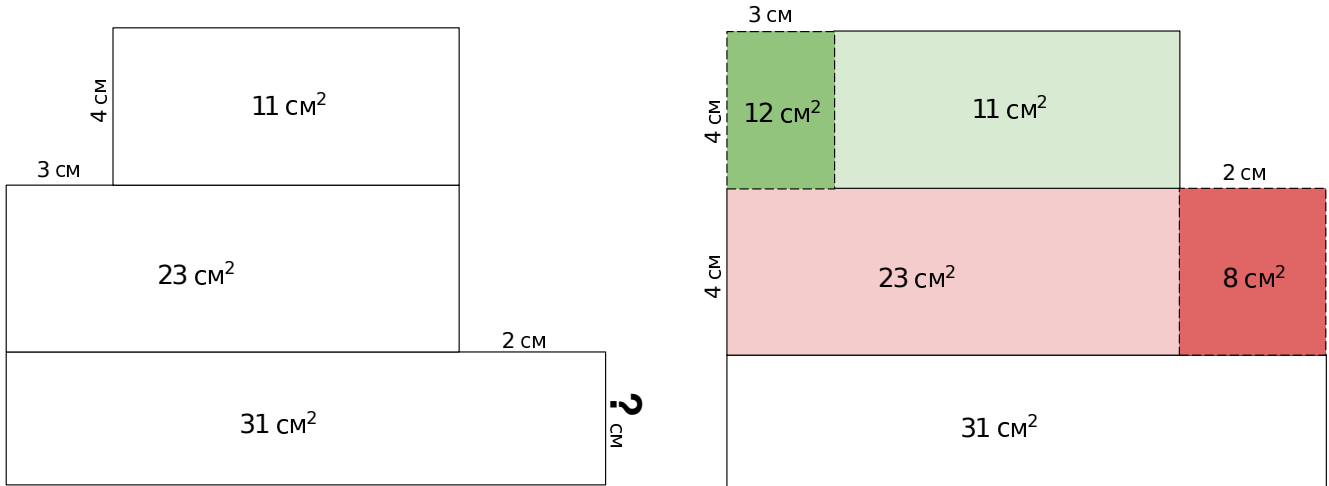
$$a \oplus b = \frac{a^2 + 2b}{b - a},$$

например: $2 \oplus 3 = 10$, а $0 \oplus 2 = 2$. Найдите $(x - 1) \oplus x$.

Решение. $(x - 1) \oplus x = \frac{(x-1)^2 + 2x}{x - (x-1)} = \frac{x^2 + 1}{1} = x^2 + 1$.

Ответ: $x^2 + 1$.

3. Найдите неизвестную сторону



Решение.

Рассмотрим верхний этаж конструкции, дополним прямоугольником 3 см на 4 см, см. рис. Площадь добавленного прямоугольника равна 12 кв.см., тогда площадь составленной вместе верхней части $11 + 12 = 23$ кв.см. Площадь и длина среднего и верхнего этажей совпадают, значит, совпадает и ширина. Ширина среднего этажа равна 4 см.

Дополним средний уровень справа прямоугольником 2 см на 4 см, см. рис. Площадь добавленной части равна 8 кв.см., значит площадь всего среднего этажа $23 + 8 = 31$ кв.см. Площадь и длина среднего и нижнего уровней совпадают, значит, у них одинаковая ширина. Ширина нижнего этажа – 4 см.

Ответ: 4.

4. Решите уравнение $6\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - 0,2(2x + 3) = 3(x - 2)$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot 1 - 0,2 \cdot 2x - 0,2 \cdot 3 &= 3x - 6. \\ 4x - 6 - 0,4x - 0,6 &= 3x - 6. \\ 3,6x - 3x &= -6 + 6,6. \\ 0,6x &= 0,6. \end{aligned}$$

Откуда $x = 1$.

Ответ: 1.

5. У Маши и Даши сегодня день рождения. Маша заметила, что $\frac{1}{17}$ возраста Даши составляет $\frac{1}{13}$ ее собственного возраста. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 70. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

Решение. Пусть возраст Маши равен M лет, а возраст Даши — D лет. Из условия задачи составим уравнение:

$$\frac{1}{17}D = \frac{1}{13}M.$$

Отсюда $13D = 17M$, или $D = \frac{17}{13}M$. Так как возраст — число целое (предполагаем, что речь о полных годах), M должно быть кратно 13. Пусть $M = 13k$, где k — натуральное число. Тогда $D = \frac{17}{13} \cdot 13k = 17k$. Сумма их возрастов:

$$S = M + D = 13k + 17k = 30k.$$

По условию $40 < S < 70$, то есть $40 < 30k < 70$. Единственное целое значение k , удовлетворяющее неравенству, это $k = 2$. Тогда $M = 13 \cdot 2 = 26$ лет, $D = 17 \cdot 2 = 34$ года. Разница в возрасте: $|D - M| = |34 - 26| = 8$ лет.

Ответ: 8.

6. Известно, что в треугольнике один угол на 25° больше другого, а также есть два угла сумма которых составляет 125° . Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

Решение. Пусть углы треугольника равны a, b, c и $b = a + 25^\circ$. Сумма углов треугольника $a + b + c = 180^\circ$.

1 случай. $a + b = 125^\circ$, тогда третий угол $c = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. $2a + 25^\circ = 125^\circ$, $a = 50^\circ$, $b = 75^\circ$.

2 случай. $a + c = 125^\circ$, тогда $b = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. $a = 55^\circ - 25^\circ = 30^\circ$, $c = 180^\circ - 30^\circ - 55^\circ = 95^\circ$.

3 случай. $b + c = 125^\circ$, тогда $a = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$. $b = 55^\circ + 25^\circ = 80^\circ$, $c = 180^\circ - 55^\circ - 80^\circ = 45^\circ$.

Ответ: 75° или 80° или 95° .

7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |x - 2y| = 5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $x - 2y = 5$ или $x - 2y = -5$. Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $2x = 12 \Rightarrow x = 6$. Тогда из второго уравнения $6 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 0,5$. Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} x - 2y = -5, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Тогда из второго уравнения $1 + 2y = 7 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$. Таким образом, система имеет два решения: $(6; 0,5)$ и $(1; 3)$.

Ответ: $(6; 0,5); (1; 3)$.

8. В 8В классе учатся мальчики и девочки, физики и лирики, блондины и брюнеты. Известно, что все блондины — девочки, а все лирики — блондины. Брюнетов в классе 12, физиков — 16, а девочек физиков — 5. Сколько брюнеток среди девочек в классе?

Решение. Заметим, что среди мальчиков нет блондинов, а значит, и нет лириков. Таким образом все мальчики — физики. Физиков всего 16 и 5 среди них — девочки, следовательно,

мальчиков всего $16 - 5 = 11$. Мальчики все brunеты, значит, девочек brunеток в точности $12 - 11 = 1$.

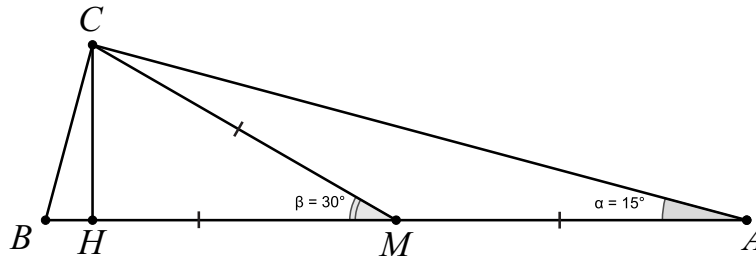
Ответ: 1.

9. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1. Найдите длину гипотенузы этого треугольника, если один из его острых углов равен 15° .

Решение.

Проведем в треугольнике медиану CM к гипотенузе AB (см. рисунок). Тогда по свойству медианы, треугольник ACM – равнобедренный, и $\angle CMB = \angle MAC + \angle MCA = 30^\circ$. Тогда из прямоугольного треугольника CHM : $CM = 2CH = 2$, а $AB = 2CM = 4$.

Ответ: 4.



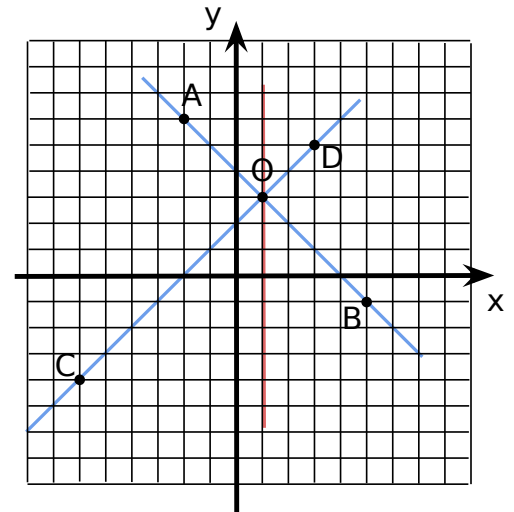
10. Прямая AB проходит через точки $A(-2; 6)$ и $B(5; -1)$, а прямая CD – через точки $C(-6; -4)$ и $D(3; 5)$.

а) постройте прямые AB и CD ;

б) найдите их точку пересечения;

в) составьте уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через общую точку прямых AB и CD .

Решение. Пусть уравнение прямой AB : $y = ax + b$. Тогда $6 = -2a + b$ и $-1 = 5a + b$, откуда $a = -1$, $b = 4$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = -x + 4$. Пусть уравнение прямой CD : $y = cx + d$. Тогда $-4 = -6c + d$ и $5 = 3c + d$, откуда $c = 1$, $d = 2$. Уравнение прямой CD имеет вид $y = x + 2$. Найдём точку пересечения, приравняв правые части: $-x + 4 = x + 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Тогда $y = 1 + 2 = 3$. Общая точка $O(1; 3)$. Прямая, параллельная оси Oy (оси ординат), имеет вид $x = \text{const}$. Так как она проходит через точку $(1; 3)$, её уравнение: $x = 1$.



Ответ: точка $O(1; 3)$, прямая $x = 1$.

11. Упростить выражение

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} - \frac{x^3+8}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+6x}{x^2+2x}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} - \frac{x^3+8}{x^2+4x+4} + \frac{x^3+6x}{x^2+2x} &= \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)^2} + \frac{x(x^2+6)}{x(x+2)} = \\ &= \frac{x-2}{x+2} - \frac{x^2-2x+4}{x+2} + \frac{x^2+6}{x+2} = \frac{x-2-x^2+2x-4+x^2+6}{x+2} = \frac{3x}{x+2} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3x}{x+2}$.

12. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Но вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня второй курьер вышел на 9 минут раньше обычного, а первый вышел вовремя. На сколько минут раньше произойдет их встреча? Каждый из курьеров идет каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

Решение. Способ 1. Первый день. Вчера первый курьер вышел на 6 минут раньше, в то время как встреча произошла всего на 2 минуты раньше. Следовательно, первый курьер шел "лишние" 4 минуты. Пройденное им "лишнее" расстояние S – это ровно столько, сколько не дошел до места обычной встречи второй курьер. То есть S – расстояние, которое второй преодолевает за 2 минуты. Поскольку скорость обратно пропорциональна времени, получаем, что скорость передвижения первого курьера в два раза ниже скорости второго. Второй день. Второй курьер вышел на 9 минут раньше. Если встреча произойдет на x минут раньше обычного времени, то второй курьер прошел "лишнее" расстояние T за дополнительные $9 - x$ минут. В то время как первый курьер не дошел до места обычной встречи расстояние T , ровно за x минут. Времена должны соотноситься обратно пропорционально скоростям: $\frac{x}{9-x} = 2$ или $x = 2(9 - x)$, откуда $x = 6$ минут.

Способ 2. Обозначим скорость первого курьера v_1 , а второго – v_2 . Пусть их обычное время до встречи – t . Тогда весь путь, который проделывают оба курьера составляет $t(v_1 + v_2)$. Первый день. Для первого курьера время равно $t + 6 - 2 = t + 4$, таким образом он пройдет всего $(t + 4) \cdot v_1$. В то время как второй курьер шел $t - 2$ минуты и прошел $(t - 2) \cdot v_2$. Всего курьеры преодолели тот же путь, что и обычно значит верно равенство

$$(t + 4) \cdot v_1 + (t - 2) \cdot v_2 = t(v_1 + v_2),$$

$$t(v_1 + v_2) + 4v_1 - 2v_2 = t(v_1 + v_2).$$

После сокращения одинаковых слагаемых останется $4v_1 = 2v_2$ или $v_2 = 2v_1$.

Второй день. Пусть встреча произойдет на m минут раньше обычного времени. Для первого курьера время движения $t - m$, он пройдет расстояние $(t - m) \cdot v_1$. Второй курьер шел $t + 9 - m$ минут и прошел $(t + 9 - m) \cdot v_2$. Суммарно они до встречи преодолели

$$(t - m) \cdot v_1 + (t + 9 - m) \cdot v_2 = t(v_1 + v_2),$$

$$t(v_1 + v_2) - m(v_1 + v_2) + 9v_2 = t(v_1 + v_2),$$

$$9v_2 = m(v_1 + v_2).$$

Подставим соотношение скоростей $v_2 = 2v_1$, тогда $9 \cdot 2v_1 = m(v_1 + 2v_1)$ или $18v_1 = 3m \cdot v_1$. Откуда $3m = 18$ и $m = 6$.

Ответ: 6 минут.

13. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке K , причем $BK = DK = AD$. На отрезке CK отметили такую точку M , что $AK = CM$. Докажите, что $DM = BC$.

Решение. Заметим, что треугольник AKD равнобедренный. Углы при его основании равны, $\angle DAK = \angle AKD$.

Углы $\angle BKC$ и $\angle AKD$ вертикальные, $\angle BKC = \angle AKD = \angle DAK$.

Рассмотрим треугольники AMD и KCB :

$BK = AD$, $AM = AK + KM = MC + KM = KC$, $\angle AKD = \angle BKC$. По признаку равенства

треугольников $\triangle AMD = \triangle KCB$, следовательно, $BC = DM$.

14. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{(4x - 4x^2 - 1)(x + y + 1)(x^2 + y^2)}{(2xy - 6x - y + 3)} = 0.$$

б) Найдите все значения a , при которых есть единственная точка пересечения прямой $y = a$ и найденного множества.

Решение. а) Преобразуем выражение слева

$$\begin{aligned} & \frac{(4x - 4x^2 - 1)(x + y + 1)(x^2 + y^2)}{(2xy - 6x - y + 3)} = \\ & = -\frac{(4x^2 - 4x + 1)(x + y + 1)(x^2 + y^2)}{2x(y - 3) - (y - 3)} = \\ & = -\frac{(2x - 1)^2(x + y + 1)(x^2 + y^2)}{(2x - 1)(y - 3)} = 0. \end{aligned}$$

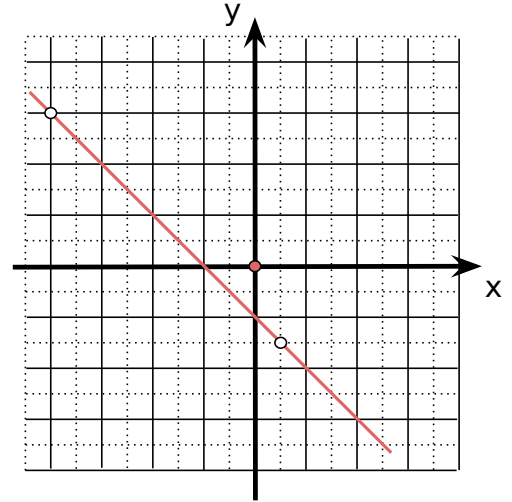
Дробь равна нулю в случае, когда числитель равен 0, а знаменатель 0 не равен. Следовательно, $2x - 1 = 0$ или $x + y + 1 = 0$ или $x^2 + y^2 = 0$, при $x \neq \frac{1}{2}$ и $y \neq 3$.

1) $2x - 1 = 0$ не может выполняться, так как множитель $2x - 1$ стоит в знаменателе.

2) $x + y + 1 = 0$ задает прямую $y = -x - 1$. При этом есть две выколотые точки – x не может быть равен $\frac{1}{2}$ и y не равен 3.

3) условие $x^2 + y^2 = 0$ справедливо для точки $O(0; 0)$.

Итоговый график представлен на рисунке.



б) Точка пересечения прямой $y = a$ и полученного графика уравнения будет единственной при $a \neq -\frac{3}{2}$, $a \neq 0$ и $a \neq 3$.

Ответ: $a \neq -\frac{3}{2}$, $a \neq 0$, $a \neq 3$.

15. Тасе нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно 2 соседние цифры, отличающиеся на 1. Например, ей нравится число 238, но не нравятся числа 314 или 543. Сколько трехзначных чисел нравятся Тасе?

Решение. Пусть Тасе нравится число \overline{abc} , где a, b, c – цифры. Существует всего 18 пар цифр, различающихся на 1:

01, 10, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 45, 54, 56, 65, 67, 76, 78, 87, 89, 98. Одна из этих пар должна быть в числе. Есть две возможности:

1) Пара цифр с разницей 1 стоит на местах ab .

Цифра 0 на первом месте стоять не может, поэтому вариант $\overline{ab} = 01$ не встретится. Для пар $\overline{ab} = 10$ и $\overline{ab} = 89$ существует по 9 вариантов третьей цифры c (все цифры кроме 1 и 8 соответственно). Для остальных подходящих пар \overline{ab} количество вариантов выбора третьей цифры c будет по 8 (все цифры кроме $b+1$ и $b-1$). Итого для первой пары – $2 \cdot 9 + 15 \cdot 8 = 138$.

2) Пара цифр с разницей 1 стоит на местах \overline{bc} .

Сразу отметим, что первая цифра a не может быть нулем. Для вариантов $\overline{bc} = 10$ и 12 количество вариантов выбора первой цифры будет равно 8 (не 0 и не 2). Для $\overline{bc} = 01$ вариантов – 8 (не 0 и не 1). Для $\overline{bc} = 98$ вариантов – 8 (не 0 и не 8). Для всех остальных комбинаций способов будет по 7 (не 0, не $b-1$ и не $b+1$). Итого для второй пары – $4 \cdot 8 + 14 \cdot 7 = 130$.

Таким образом всего Тасе нравятся $138 + 130 = 268$ чисел.

Ответ: 268.

Решение. Вариант 2.

1. Вычислите значение выражения $4,328^2 - 5,328 \cdot 3,328 - 20,26$.

Решение. Заметим, что $5,328 = 4,328 + 1$ и $3,328 = 4,328 - 1$. Тогда

$$4,328^2 - (4,328 + 1)(4,328 - 1) - 20,26 = 4,328^2 - (4,328^2 - 1) - 20,26 = 1 - 20,26 = -19,26.$$

Ответ: $-19,26$.

2. На сломанном калькуляторе работает лишь одна операция \odot . Известно, что

$$a \odot b = \frac{-4a - b^2}{a - b},$$

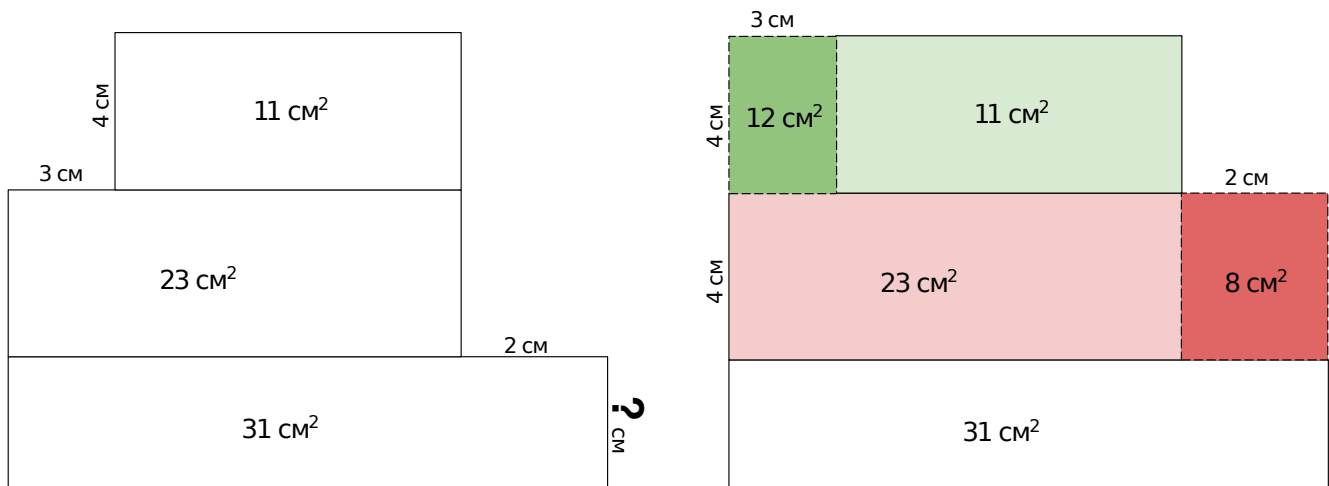
например: $2 \odot 3 = 17$, а $0 \odot 2 = 2$. Найдите $x \odot (x - 2)$.

Решение.

$$x \odot (x - 2) = \frac{-4x - (x-2)^2}{x - (x-2)} = \frac{-x^2 - 4}{2} = -\frac{1}{2}x^2 - 2.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}x^2 - 2$.

3. Найдите неизвестную сторону



Решение. Рассмотрим верхний этаж конструкции, дополним прямоугольником 2 см на 4 см, см. рис. Площадь добавленного прямоугольника равна 8 кв.см., тогда площадь составленной вместе верхней части $15 + 8 = 23$ кв.см. Площадь и длина среднего и верхнего этажей совпадают, значит, совпадает и ширина. Ширина среднего этажа равна 4 см.

Дополним средний уровень слева прямоугольником 3 см на 4 см, см. рис. Площадь добавленной части равна 12 кв.см., значит площадь всего среднего этажа $23 + 12 = 35$ кв.см. Площадь и длина среднего и нижнего уровней совпадают, значит, у них одинаковая ширина. Ширина нижнего этажа – 4 см.

Ответ: 4.

4. Решите уравнение $10\left(\frac{2}{5}y - 2\right) - 0,6(2y + 1) = 3(y - 6)$.

Решение. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \frac{2}{5}y - 10 \cdot 2 - 0,6 \cdot 2y - 0,6 \cdot 1 &= 3y - 18. \\ 4y - 20 - 1,2y - 0,6 &= 3y - 18. \\ 2,8y - 3y &= -18 + 20,6. \\ -0,2y &= 2,6. \end{aligned}$$

Откуда $y = -13$.

Ответ: -13 .

5. У Глеба и Данила вчера был день рождения. Глеб заметил, что $\frac{1}{12}$ его возраста равна $\frac{1}{19}$ возраста Данила. При этом сумма их возрастов больше 40, но меньше 80. Сколько лет составляет их разница в возрасте?

Решение. Пусть возраст Глеба равен G лет, а возраст Данила — D лет. Из условия задачи составим уравнение:

$$\frac{1}{19}D = \frac{1}{12}G.$$

Отсюда $12D = 19G$, или $D = \frac{19}{12}G$. Так как возраст — число целое (предполагаем, что речь о полных годах), G должно быть кратно 12. Пусть $G = 12k$, где k — натуральное число. Тогда $D = \frac{19}{12} \cdot 12k = 19k$. Сумма их возрастов:

$$S = G + D = 12k + 19k = 31k.$$

По условию $40 < S < 70$, то есть $40 < 31k < 80$. Единственное целое значение k , удовлетворяющее неравенству, это $k = 2$. Тогда $G = 12 \cdot 2 = 24$ года, $D = 19 \cdot 2 = 38$ лет. Разница в возрасте: $|D - G| = |38 - 24| = 14$ лет.

Ответ: 14.

6. Известно, что в треугольнике один угол на 26° меньше другого, а также есть два угла сумма которых составляет 126° . Каким может быть самый большой угол этого треугольника?

Решение. Пусть углы треугольника равны a, b, c и $b = a + 26^\circ$. Сумма углов треугольника $a + b + c = 180^\circ$.

1 случай. $a + b = 126^\circ$, тогда третий угол $c = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$. $2a + 26^\circ = 126^\circ$, $a = 50^\circ$, $b = 76^\circ$.

2 случай. $a + c = 126^\circ$, тогда $b = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$. $a = 54^\circ - 26^\circ = 28^\circ$, $c = 180^\circ - 28^\circ - 54^\circ = 98^\circ$.

3 случай. $b + c = 126^\circ$, тогда $a = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$. $b = 54^\circ + 26^\circ = 80^\circ$, $c = 180^\circ - 54^\circ - 80^\circ = 46^\circ$.

Ответ: 76° или 80° или 98° .

7. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} |2x - y| = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $2x - y = 3$ или $2x - y = -3$. Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $4x = 12 \Rightarrow x = 3$. Тогда из второго уравнения $6 + y = 9 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow y = 3$. Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 2x + y = 9. \end{cases}$$

Сложим уравнения: $4x = 6 \Rightarrow x = 1,5$. Тогда из второго уравнения $3 + y = 9 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow y = 6$. Таким образом, система имеет два решения: $(6; 3)$ и $(1,5; 6)$.

Ответ: $(3; 3); (1,5; 6)$.

8. В 8В классе учатся мальчики и девочки, физики и лирики, блондины и брюнеты. Известно, что все лирики — девочки, а все блондины — лирики. Физиков в классе 17, брюнетов — 20, а девочек блондинок — 2. Сколько лириков среди девочек в классе?

Решение. Заметим, что среди мальчиков нет лириков и нет блондинов. Все физики — брюнеты и все мальчики — физики. Брюнетов всего 20 и 17 среди них физики, следовательно,

лириков брюнетов всего $20 - 17 = 3$. Трое лириков брюнетов – девочки, а всего лириков девочек тогда $2 + 3 = 5$.

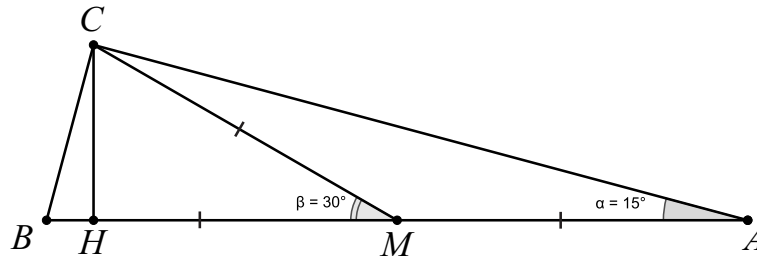
Ответ: 5.

9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите длину высоты этого треугольника, проведённой к гипотенузе, если один из его острых углов равен 15° .

Решение.

Проведем в треугольнике медиану CM к гипотенузе AB (см. рисунок). Тогда по свойству медианы, треугольник ACM – равнобедренный, и $\angle CMB = \angle MAC + \angle MCA = 30^\circ$. Тогда из прямоугольного треугольника CHM : $CM = 2CH$, а $AB = 2CM = 4CH = 6$. Откуда $CH = 1,5$.

Ответ: 1,5.



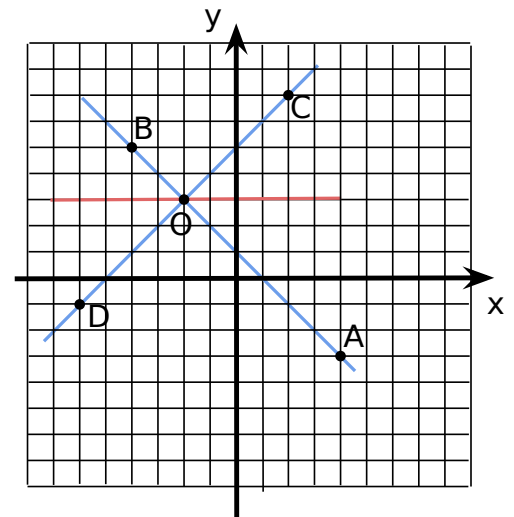
10. Прямая AB проходит через точки $A(4; -3)$ и $B(-4; 5)$, а прямая CD – через точки $C(2; 7)$ и $D(-6; -1)$.

а) постройте прямые AB и CD ;

б) найдите их точку пересечения;

в) составьте уравнение прямой, параллельной оси Ox и проходящей через общую точку прямых AB и CD .

Решение. Пусть уравнение прямой AB : $y = ax + b$. Тогда $-3 = 4a + b$ и $5 = -4a + b$, откуда $a = -1$, $b = 1$. Уравнение прямой AB имеет вид $y = -x + 1$. Пусть уравнение прямой CD : $y = cx + d$. Тогда $7 = 2c + d$ и $-1 = -6c + d$, откуда $c = 1$, $d = 5$. Уравнение прямой CD имеет вид $y = x + 5$. Найдём точку пересечения, приравняв правые части: $-x + 1 = x + 5 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$. Тогда $y = -2 + 5 = 3$. Общая точка $O(-2; 3)$. Прямая, параллельная оси Ox (оси абсцисс), имеет вид $y = \text{const}$. Так как она проходит через точку $(-2; 3)$, её уравнение: $y = 3$.



Ответ: точка $O(-2; 3)$, прямая $y = 3$.

11. Упростить выражение

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} - \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} + \frac{-x^2 + x + 2}{3 - x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} - \frac{x^2 + 3x + 9}{x^3 - 27} + \frac{-x^2 + x + 2}{3 - x} &= \frac{(x + 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{x^2 + 3x + 9}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)} + \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \\ &= \frac{x + 3}{x - 3} - \frac{1}{x - 3} + \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{x + 3 - 1 + x^2 - x - 2}{x - 3} = \frac{x^2}{x - 3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x^2}{x - 3}$.

12. Два курьера каждое утро одновременно в одно и то же время выходят из двух пунктов навстречу друг другу для обмена корреспонденцией. Вчера первый вышел на 6 минут раньше, а второй вовремя; их встреча произошла на 2 минуты раньше обычного. Сегодня первый курьер вышел на 9 минут позже, а второй вовремя. На сколько минут позже произойдет их встреча? Каждый из курьеров идет каждый день на встречу с одной и той же скоростью, скорости курьеров могут отличаться.

Решение. Способ 1. Первый день. Вчера первый курьер вышел на 6 минут раньше, в то время как встреча произошла всего на 2 минуты раньше. Следовательно, первый курьер шел "лишние" 4 минуты. Пройденное им "лишнее" расстояние S – это ровно столько, сколько не дошел до места обычной встречи второй курьер. То есть S – расстояние, которое второй преодолевает за 2 минуты. Поскольку скорость обратно пропорциональна времени, получаем, что скорость передвижения первого курьера в два раза ниже скорости второго. Второй день. Второй курьер вышел на 9 минут позже. Если встреча произойдет на x минут позже обычного времени, то второй курьер не дошел до обычного места встречи расстояние T за $9 - x$ минут. В то время как первый курьер прошел "лишнее" расстояние T , ровно за x минут. Времена должны соотноситься обратно пропорционально скоростям: $\frac{9-x}{x} = 2$ или $2x = 9 - x$, откуда $x = 3$ минуты.

Способ 2. Обозначим скорость первого курьера v_1 , а второго – v_2 . Пусть их обычное время до встречи – t . Тогда весь путь, который проделывают оба курьера составляет $t(v_1 + v_2)$. Первый день. Для первого курьера время равно $t + 6 - 2 = t + 4$, таким образом он пройдет всего $(t + 4) \cdot v_1$. В то время как второй курьер шел $t - 2$ минуты и прошел $(t - 2) \cdot v_2$. Всего курьеры преодолели тот же путь, что и обычно значит верно равенство

$$(t + 4) \cdot v_1 + (t - 2) \cdot v_2 = t(v_1 + v_2),$$

$$t(v_1 + v_2) + 4v_1 - 2v_2 = t(v_1 + v_2).$$

После сокращения одинаковых слагаемых останется $4v_1 = 2v_2$ или $v_2 = 2v_1$.

Второй день. Пусть встреча произойдет на m минут позже обычного времени. Для первого курьера время движения $t - 9 + m$, он пройдет расстояние $(t - 9 + m) \cdot v_1$. Второй курьер шел $t + m$ минут и прошел $(t + m) \cdot v_2$. Суммарно они до встречи преодолели

$$(t - 9 + m) \cdot v_1 + (t + m) \cdot v_2 = t(v_1 + v_2),$$

$$t(v_1 + v_2) + m(v_1 + v_2) - 9v_1 = t(v_1 + v_2),$$

$$9v_1 = m(v_1 + v_2).$$

Подставим соотношение скоростей $v_2 = 2v_1$, тогда $9v_1 = m(v_1 + 2v_1)$ или $9v_1 = 3m \cdot v_1$. Откуда $3m = 9$ и $m = 3$.

Ответ: 3 минуты.

13. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке M , причем $BM = DM = BC$. На отрезке AM отметили такую точку K , что $AK = CM$. Докажите, что $BK = AD$.

Решение. Заметим, что треугольник BCM равнобедренный. Углы при его основании равны, $\angle BCM = \angle BMC$.

Углы $\angle BMC$ и $\angle AMD$ вертикальные, $\angle BMC = \angle AMD = \angle BCM$.

Рассмотрим треугольники CBK и MDA :

$BC = MD$, $CK = CM + MK = AK + MK = AM$, $\angle BCK = \angle AMD$. По признаку равенства треугольников $\triangle CBK = \triangle MDA$, следовательно, $BK = AD$.

14. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{(6y - 9y^2 - 1)(x + y - 1)(x^2 + y^2)}{(3xy - x + 9y - 3)} = 0.$$

б) Найдите все значения a , при которых есть единственная точка пересечения прямой $y = a$ и найденного множества.

Решение. а) Преобразуем выражение слева

$$\begin{aligned} & \frac{(6y - 9y^2 - 1)(x + y - 1)(x^2 + y^2)}{(3xy - x + 9y - 3)} = \\ & = -\frac{(9y^2 - 6x + 1)(x + y - 1)(x^2 + y^2)}{x(3y - 1) + 3(3y - 1)} = \\ & = -\frac{(3y - 1)^2(x + y - 1)(x^2 + y^2)}{(x + 3)(3y - 1)} = 0. \end{aligned}$$

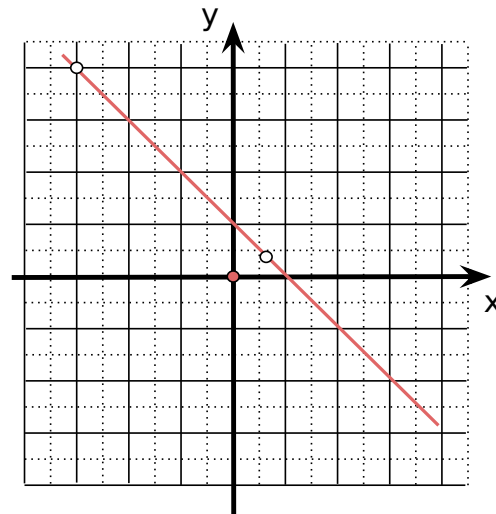
Дробь равна нулю в случае, когда числитель равен 0, а знаменатель 0 не равен. Следовательно, $3y - 1 = 0$ или $x + y - 1 = 0$ или $x^2 + y^2 = 0$, при $y \neq \frac{1}{3}$ и $x \neq -3$.

1) $3y - 1 = 0$ не может выполняться, так как множитель $3y - 1$ стоит в знаменателе.

2) $x + y - 1 = 0$ задает прямую $y = -x + 1$. При этом есть две выколотые точки – y не может быть равен $\frac{1}{3}$ и x не равен -3 .

3) условие $x^2 + y^2 = 0$ справедливо для точки $O(0; 0)$.

Итоговый график представлен на рисунке.



б) Точка пересечения прямой $y = a$ и полученного графика уравнения будет единственной при $a \neq \frac{1}{3}$, $a \neq 0$ и $a \neq 4$.

Ответ: $a \neq \frac{1}{3}$, $a \neq 0$, $a \neq 4$.

15. Соне нравится математика, а особенно натуральные числа, в которых есть ровно 2 соседние цифры, отличающиеся на 2. Например, ей нравится число 314, но не нравятся числа 103 или 975. Сколько трехзначных чисел нравятся Соне?

Решение. Пусть Соне нравится число \overline{abc} , где a, b, c – цифры. Существует всего 16 пар цифр, различающихся на 2:

02, 20, 13, 31, 24, 42, 35, 53, 46, 64, 57, 75, 68, 86, 79, 97. Одна из этих пар должна быть в числе. Есть две возможности:

1) Пара цифр с разницей 2 стоит на местах \overline{ab} .

Цифра 0 на первом месте стоять не может, поэтому вариант $\overline{ab} = 02$ не встретится. Для пар $\overline{ab} = 20, 31, 68$ и 79 существует по 9 вариантов третьей цифры c (все цифры кроме $b + 2$ или $b - 2$ соответственно). Для остальных подходящих пар \overline{ab} количество вариантов выбора третьей цифры c будет по 8 (все цифры кроме $b + 2$ и $b - 2$). Итого для первой пары – $4 \cdot 9 + 11 \cdot 8 = 124$.

2) Пара цифр с разницей 2 стоит на местах \overline{bc} .

Сразу отметим, что первая цифра a не может быть нулем. Для вариантов $\overline{bc} = 02, 20, 13, 24, 86$ и 97 количество вариантов выбора первой цифры будет равно 8. Для всех остальных комбинаций способов будет по 7 (не 0, не $b - 2$ и не $b + 2$). Итого для второй пары – $6 \cdot 8 + 10 \cdot 7 = 118$.

Таким образом всего Тасе нравятся $124 + 118 = 242$ числа.

Ответ: 242.

Критерии:

1. 2 балла за верный ответ.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ.
5. 2 балла за верный ответ. В ответ внесен возраст/возрасты персонажей – 1 балл.
6. 3 балла за верный ответ. По 1 баллу за каждый из верных вариантов.
7. 3 балла за верный ответ. Нахождение одной пары ответов или двух значений только одной из переменных – 1 балл. Найдены все верные значения переменных, но не распределены по парам/указаны вперемешку – 2 балла.
8. 3 балла за верный ответ.
9. 3 балла за верный ответ.
10. За каждый верно выполненный пункт задания по 1 баллу.
11. *по 1 баллу* – разложение каждой дроби и сокращение ее на общий множитель;
2 балла – дальнейшее упрощение выражения после преобразования дробей;
1 балл – верное приведение к общему знаменателю всех дробей, с приведением подобных, но без дальнейшего сокращения множителей;
-1 балл – арифметическая ошибка, при верном упрощении.
12. *по 1 баллу* – за составление уравнения движения для 1 или 2 дня;
или
2 балла – полученное рассуждением соотношение скоростей курьеров;
-1 балл – арифметическая ошибка в решении;
3 балла – дальнейшее решение задачи до правильного ответа.
13. *1 балл* – правдоподобный рисунок;
1 балл – равнобедренный треугольник, использование свойства р/б треугольника;
3 балла – равенство нужной пары треугольников с указанием признака равенства.
14. *1 балл* – разложение знаменателя на множители;
1 балл – нахождение отдельной точки (0; 0);
2 балла – построение нужной прямой с двумя "дырками";
1 балл – построение нужной прямой без "дырок";
1 балл – верное определение параметра по получившемуся рисунку.
15. *2 балла* – нахождение верного количества чисел, если нужная пара стоит на 1-2 местах числа;
2 балла – нахождение верного количества чисел, если нужная пара стоит на 2-3 местах числа;
1 балл – верно найденный ответ;
-1 балл – арифметическая ошибка.