СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 11 МИФ класс
24 марта 2026 г.

1. *(1 балл)* Вычислить $16^{\frac{\log_5 7}{\log_5 4}} + \lg(\log_5 243 \cdot \log_3 25)$.

2. *(3 балла)* Решить неравенство $(3x^2 + 8x - 11)|7x - 14|\sqrt{9 - x^2} \leq 0$.

3. *(2 балла)* Упростить $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2(\pi - \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

4. *(3 балла)* Найдите сумму корней уравнения $(x^2 + 27)^2 - 5(x^2 + 27)(x^2 + 3) + 6(x^2 + 3)^2 = 0$, умноженную на 599.

5. *(2 балла)* Автомобиль проезжает расстояние от пункта A до пункта B за один час. Из пункта A выехал автомобиль, и одновременно из пункта B навстречу ему вышел пешеход. Встретив пешехода, автомобиль развернулся, довез его до пункта A, а затем снова поехал в пункт B и прибыл туда. На весь путь (от момента выезда из A до финального прибытия в B) автомобиль затратил 2 часа 20 минут. За сколько часов пешеход пройдет расстояние от A до B?

6. *(3 балла)* Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии, и их сумма составляет 42. Если прологарифмировать каждое из этих чисел по основанию 2, то полученные три значения будут являться последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма этих чисел будет равна 9. Найдите исходные числа.

7. *(3 балла)* Решите уравнение $\left(\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1\right)(\sin 2x + 3)\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

8. *(2 балла)* В треугольнике известны длины двух сторон 6 см и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма длин высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей высоты.

9. *(3 балла)* Найдите наибольшее значение выражения $15 + \dfrac{3}{9x^2 - 6x + 7}$.

10. *(3 балла)* Решить неравенство $16^{\frac{1}{8x}} - \sqrt[5]{(0{,}5)^{x-3{,}5}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0$.

11. *(4 балла)* Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B, если известно, что $\operatorname{tg}\angle ABC = 0,5$.

12. *(5 баллов)* Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислить её площадь:

$$x^2 + y^2 + 1 \leq 2(|x| + |y|)$$

13. *(5 баллов)* Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - (2b + 3)x + b^2 + 3b}{x^2 - 9} = 0$$

имеет единственный корень.

14. Точка P лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Точки B и C являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями AP и PD соответственно, угол APD прямой.

а) *(2 балла)* Доказать, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) *(3 балла)* Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке E и $PB : PC = 2 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AP, DP, EB и CE, равна 20.

15. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Боковое ребро пирамиды SB перпендикулярно к плоскости основания ABC, $SB = 8$, $AB = 4$, точка N – середина ребра SB.

а) *(2 балла)* Постройте сечение плоскостью α, проходящей через точки D и N и параллельно AC и докажите, что плоскость α делит ребро SC в отношении $1 : 2$, считая от вершины C.

б) *(4 балла)* Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 11 МИФ класс 24 марта 2026г.

1. Вычислить $16^{\frac{\log_5 7}{\log_5 4}} + \lg(\log_5 243 \cdot \log_3 25)$.
Решение.

$$16^{\frac{\log_5 7}{\log_5 4}} + \lg(\log_5 243 \cdot \log_3 25) = 16^{\log_4 7} + \lg(5\log_5 3 \cdot 2\log_3 5) = 7^{\log_4 16} + \lg(10) = 7^2 + 1 = 50.$$

Ответ: 50.

2. Решить неравенство $(3x^2 + 8x - 11)|7x - 14|\sqrt{9 - x^2} \le 0$.
Решение.
Заметим, что числа $x = \pm 3$ и $x = 2$ являются решениями данного неравенства. Тогда при $x \in (-3; 3) \setminus \{2\}$ выражение $|7x - 14|\sqrt{9 - x^2}$ принимает только положительные значения. Значит, остается решить неравенство $3x^2 + 8x - 11 \le 0$. Корнями квадратного трехчлена будут числа 1 и $-\frac{11}{3}$, тогда решением последнего неравенства будет отрезок $\left[-\frac{11}{3}; 1\right]$. Пересекая его с множеством $(-3; 3) \setminus \{2\}$ и объединяя со множеством $\{\pm 3, 2\}$ получаем

Ответ: $\left[-\frac{11}{3}; 1\right] \cup \{\pm 3, 2\}$.

3. Упростить $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2(\pi - \alpha)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.
Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2(\pi - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot (\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)}{(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

4. Найдите сумму корней уравнения $(x^2 + 27)^2 - 5(x^2 + 27)(x^2 + 3) + 6(x^2 + 3)^2 = 0$, умноженную на 599.
Решение.
представим второе слагаемое левой части в виде суммы $2(x^2 + 27)(x^2 + 3)$ и $3(x^2 + 27)(x^2 + 3)$. Тогда сгруппировав слагаемые разложим левую часть уравнения на множители

$$\begin{aligned}
&(x^2 + 27)^2 - 2(x^2 + 27)(x^2 + 3) - 3(x^2 + 27)(x^2 + 3) + 6(x^2 + 3)^2 = \\
&\quad (x^2 + 27)(x^2 + 27 - 2((x^2 + 3)) - 3(x^2 + 3)((x^2 + 27) - 2(x^2 + 3)) = \\
&\quad\quad (x^2 + 27 - 2((x^2 + 3))((x^2 + 27) - 3(x^2 + 3)) = (21 - x^2)(18 - 2x^2).
\end{aligned}$$

Получаем, что корнями данного уравнения будут числа $x = \pm\sqrt{21}$ и $x = \pm 3$. Их сумма равна нулю. Значит, и сумма корней, умноженная на 599, равна нулю.

Ответ: 0.

5. Автомобиль проезжает расстояние от пункта A до пункта B за один час. Из пункта A выехал автомобиль, и одновременно из пункта B навстречу ему вышел пешеход. Встретив пешехода, автомобиль развернулся, довез его до пункта A, а затем снова поехал в пункт B и прибыл туда. На весь путь (от момента выезда из A до финального прибытия в B) автомобиль затратил 2 часа 20 минут. За сколько часов пешеход пройдет расстояние от A до B?
Решение.
Автомобиль выполняет маршрут $A \to$ место встречи $\to A \to B$ за 2 часа 20 минут, а маршрут $A \to B$ за 1 час, значит на маршрут $A \to$ место встречи $\to A$ он потратит 1 час 20 минут, т.е. из пункта A до места встречи он доберется за 40 минут, что составляет $2/3$ часа. Значит, расстояние до место встречи с пешеходом составляет $2/3$ пути от пункта A до пункта B. Таким образом пешеход за 40 минут прошел $1/3$ пути, а весь путь преодолеет за $3 \cdot 40 = 120$ минут, т.е. за 2 часа.

Ответ: 2 часа.

6. Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии, и их сумма составляет 42. Если прологарифмировать каждое из этих чисел по основанию 2, то полученные три значения будут являться последовательными членами арифметической прогрессии. Сумма этих чисел будет равна 9. Найдите исходные числа.

Решение.
Пусть числа b_1, b_2, b_3 образуют геом. прогрессию, тогда $b_2^2 = b_1 \cdot b_3 (1)$ и $b_1 + b_2 + b_3 = 42 (2)$. Числа $\log_2 b_1, \log_2 b_2, \log_2 b_3$ образуют арифметическую прогрессию, тогда $\log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 = 9$ (3). Из (3) получаем, что $\log_2(b_1 b_2 b_3) = 9$, тогда $b_1 b_2 b_3 = b_2^9 = 512$. Используя (1), получаем $b_2^3 = 512$, откуда $b_2 = 8$. Из (2) и (1) получаем, что $b_1 + b_3 = 34$, а $b_1 \cdot b_3 = 64$. Этим условиям удовлетворяют числа 2 и 32. Откуда
Ответ: 2, 8 и 32.

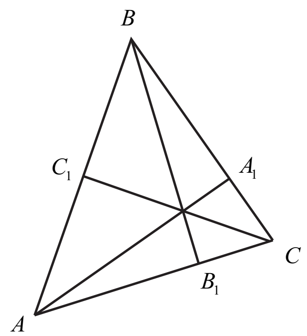
7. Решите уравнение $\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right)(\sin 2x + 3) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Решение.
Уравнение при условии $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{ll} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0 & (1) \\ \sin 2x + 3 = 0 & (2) \\ \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0. & (3) \end{array}\right.$$

Решением уравнения (1) будут $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; второе уравнение решений не имеет, т.к. $|\sin 2x| \leq 1$; решением третьего уравнения будут $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$. С учетом ограничений $x \neq \frac{2\pi}{3} + \pi m, n \in Z$, получаем
Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

8. В треугольнике известны длины двух сторон 6 см и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма длин высот, опущенных на данные стороны, равна длине третьей высоты.



Решение. Пусть сторона $AB = 6$, $BC = 3$. Тогда $AB \cdot CC_1 = BC \cdot AA_1$, откуда $AA_1 = 2CC_1$. По условию $AA_1 + CC_1 = 2BB_1$, тогда $3CC_1 = 2BB_1$. Наконец, $AC \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$, откуда $AC = \frac{CC_1 \cdot AB}{BB_1} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$.

Ответ: 4.

9. Найдите наибольшее значение выражения $15 + \frac{3}{9x^2 - 6x + 7}$.

Решение.
Преобразуем данное выражение, выделив полный квадрат в знаменателе дроби

$$15 + \frac{3}{9x^2 - 6x + 7} = 15 + \frac{3}{9x^2 - 6x + 1 + 6} = 15 + \frac{3}{(3x-1)^2 + 6}.$$

Теперь, $(3x-1)^2 \geq 0$, тогда $(3x-1)^2 + 6 \geq 6$, а $\frac{3}{(3x-1)^2+6} \leq \frac{3}{6}$. Значит, $15 + \frac{3}{9x^2-6x+7} \leq 15{,}5$. Данное значение достигается, при $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: 15,5.

10. Решить неравенство $16^{\frac{1}{8x}} - \sqrt[5]{(0{,}5)^{x-3{,}5}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0$.

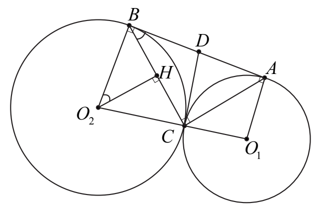
Решение.

$$16^{\frac{1}{8x}} - \sqrt[5]{(0{,}5)^{x-3{,}5}} \cdot 4^{\frac{1}{x}} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{4}{8x}} \leq 2^{\frac{3{,}5-x}{5}} \cdot 2^{\frac{2}{x}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2x}} \leq 2^{\frac{3{,}5-x}{5} + \frac{2}{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{3{,}5-x}{5} + \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{3{,}5-x}{5} - \frac{2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x - 15}{10x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+3)(x-5)}{10x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем
Ответ: $(-\infty; -1{,}5] \cup (0; 5]$.

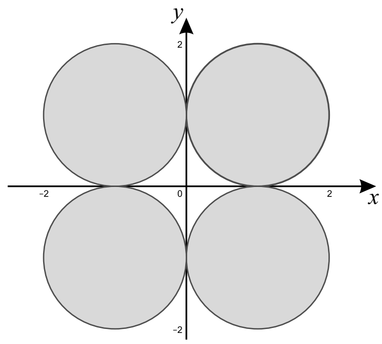
11. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке C. Прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно. Найдите угол AO_2B, если известно, что $\operatorname{tg}\angle ABC = 0{,}5$.



Решение.
1) Проведем общую касательную к двум окружностям через точку C. Пусть она пересекает AB в точке D, тогда $DC = DA$ и $DC = DB$ как отрезки касательных проведенные из одной точки. Значит, $\triangle ABC$ – прямоугольный с прямым углом C.
2) Угол между касательной BA и хордой BC равен половине дуги $\smile{BC}$. Треугольник $\triangle CBO_2$ – равнобедренный, O_2H – высота и медиана, тогда $\angle BO_2H = \frac{1}{2}\angle BO_2C = \frac{1}{2}\smile{BC} = \angle ABC$.
3) Если $BC = 2x$, то $AC = x$, а $AB = x\sqrt{5}$; $BH = x$, $CO_2 = 2x$ и $BO_2 = x\sqrt{5}$. Таким образом $\triangle ABO_2$ – прямоугольный и равнобедренный, следовательно $\angle AO_2B = 45°$.
Ответ: $45°$.

12. Изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенством, и вычислить её площадь:

$$x^2 + y^2 + 1 \leq 2(|x| + |y|).$$



Решение. Построим график уравнения, ограничивающий данную фигуру. Для этого воспользуемся свойством модуля $x^2 = |x|^2$ и выделим полный квадраты с переменными x и y:

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 + 1 = 2(|x| + |y|)\\&|x|^2 - 2|x| + 1 + |y|^2 - 2|y| + 1 = 1\\&(|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 1.\end{aligned}$$

График полученного уравнения, получается из графика окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ последовательными применениями симметрии относительно осей координат и изображен на рисунке. Тогда фигура, указанная в условии это часть плоскости, ограниченная этими окружностями, вмести с ними. Её площадь $S = 4\pi$.
Ответ: 4π.

13. Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - (2b+3)x + b^2 + 3b}{x^2 - 9} = 0$$

имеет единственный корень.
Решение. Данное уравнение равносильно системе

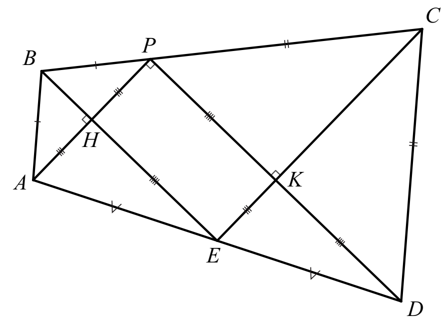
$$\begin{cases} x^2 - (2b+3)x + b^2 + 3b = 0 \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет два корня $x_1 = b$ и $x_2 = b + 3$. Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если:
1) $x_1 = x_2$, при этом они не равны корням знаменателя $x = \pm 3$, но $b \neq b + 3$ для любых b.
2) один из корней числителя совпадает с корнем знаменателя, а другой нет:
• если $x_1 = 3$, то $x_2 = 6$ – подходит, $b = 3$;
• если $x_1 = -3$, то $x_2 = 0$ – подходит, $b = -3$;
• если $x_2 = 3$, то $x_1 = 0$ – подходит, $b = 0$;
• если $x_2 = -3$, то $x_1 = -6$ – подходит, $b = -6$.
Ответ: $-6, \pm 3, 0$.

14. Точка P лежит на стороне BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Точки B и C являются вершинами равнобедренных треугольников с основаниями AP и PD соответственно, угол APD прямой.

а) *(2 балла)* Доказать, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) *(3 балла)* Пусть эти биссектрисы пересекаются в точке E и $PB : PC = 2 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника, стороны которого лежат на прямых AP, DP, EB и CE, равна 20.



Решение. а) BH – биссектриса равнобедренного треугольника ABP, значит $BH \perp AP$. Учитывая, что $AP \perp PD$, получаем $BH || PD$. Тогда по теореме Фалеса BH пересекает AD в точке E_1, которая делит AD пополам. Аналогично биссектриса CK пересекается AD в точке E_2, которая делит AD пополам. Значит точки E_1 и E_2 совпадают.

б) Треугольники BHP и PKC подобны под двум углам, тогда $BH = \frac{2}{5}PK$, а $CK = \frac{5}{2}PH$. Площадь прямоугольника $HPKE$ равна $PK \cdot PH = 20$, тогда

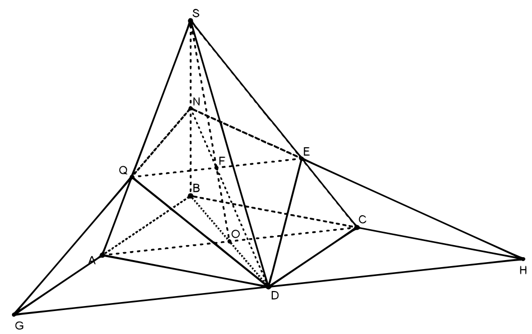
$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{HPKE} + S_{ABP} + S_{PCD} + S_{AHE} + S_{EKD} = \\ &= S_{HPKE} + 2S_{BHP} + 2S_{PKC} + 2S_{AHE} = \\ &= 20 + BH \cdot HP + KC \cdot PK + AH \cdot HE = \\ &= 20 + \tfrac{2}{5}PK \cdot HP + \tfrac{5}{2}PH \cdot PK + HP \cdot HE = \\ &= 20 + \tfrac{2}{5} \cdot 20 + \tfrac{5}{2} \cdot 20 + 20 = 98. \end{aligned}$$

Ответ: 98.

15. Основанием пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Боковое ребро пирамиды SB перпендикулярно к плоскости основания ABC, $SB = 8$, $AB = 4$, точка N – середина ребра SB.

а) *(2 балла)* Постройте сечение плоскостью α, проходящей через точки D и N и параллельно AC и докажите, что плоскость α делит ребро SC в отношении $1 : 2$, считая от вершины C.

б) *(4 балла)* Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.



Решение. а) Проведем через точку D прямую, параллельно AC, пусть она пересекает прямые AB и BC в точках G и H соответственно. Тогда GH – след плоскости α на основании (ABC). Прямая NH пересекает SC в точке E, прямая NG пересекает SA в точке Q, $NQDE$ – искомое сечение. Заметим, что AC - средняя линия треугольника BGH, тогда SC и HN – медианы треугольника SBH. Их точка пересечения E – делит SC в отношении $SE : EC = 2 : 1$.

б) Проекцией прямой ND на плоскость ABC будет прямая BD, тогда по теореме от трех перпендикулярах прямая ND будет перпендикулярна прямой AC, а значит и прямой QE. Диагонали квадрата $ABCD$ равны $4\sqrt{2}$. По теореме Пифагора $ND = 4\sqrt{3}$. Из подобия треугольников SQE и SAC следует, что $QE = \frac{2}{3}AC = \frac{8\sqrt{2}}{3}$. Тогда $S_{NQDE} = \frac{1}{2}QE \cdot ND = \frac{16\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt{6}}{3}$.

Критерии:

1. *1 балл* за верный ответ.
2. *3 балла* за верный ответ, -*1 балл* за отрезок, -*2 балла* отрезок и изолированная точка.
3. *2 балла* за верный ответ.
4. *3 балла* за верный ответ.
5. *2 балла* за верный ответ.
6. *3 балла* за верный ответ.
7. *3 балла* за верный ответ.
8. *2 балла* за верный ответ.
9. *3 балла* за верный ответ.
10. *3 балла* за верный ответ.
11. *+1 балл* – доказано, что треугольник ABC прямоугольный;
+1 балл – балл использовано свойства угла между касательной и хордой;
+1 балл – доказано, что $\angle BO_2C = \frac{1}{2}\angle ABC$;
+1 балл – доказано, что треугольник ABC равнобедренный.

12. *1 балл* – верно выделены полные квадраты;
+1 балл – за каждую окружность.

13. *+1 балл* – уравнение сведено к системе и верно найдены корни уравнения;
+1 балла – за каждое верно найденное значение b.

14.а) *+1 балл* – доказано, что $BH||PD$ или $KC||AP$;
+1 балл – доказано, что BH по теореме Фалеса (или через подобие) делит AD пополам, аналогично доказано, что C делит AD пополам и точки совпадают;
б) *+1 балл* – доказано, что треугольники BPH и PKC подобны и верно найден коэффициент подобия;
+1 балл – верно вычислена площадь четырехугольника $ABCD$.

15.а) *+1 балл* – верно построено сечение;
+1 балл – доказано, что плоскость α делит ребро SC в отношении 1:2 считая от вершины C;
а) *+1 балла* – доказано, что диагонали в сечении взаимно перпендикулярны;
+1 балла – доказано подобие треугольников SQE, ASC;
1 балл – верно вычислил длины диагоналей сечения QE и ND;
1 балл – верно найдена площадь.