Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
24 марта 2026г.
1 вариант

1. *(2 балла)* На предприятии доля сотрудников с высшим образованием составляла 80%. После того как на работу было принято 30 новых специалистов с высшим образованием эта доля увеличилась до 85%. Сколько сотрудников теперь работает на предприятии?

2. *(2 балла)* Упростите выражение $\dfrac{9a+6\sqrt{a}+4}{27a\sqrt{a}-8} : \dfrac{-6\sqrt{a}-4}{4-9a}$.

3. *(2 балла)* Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

4. *(3 балла)* Решите неравенство $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^3} \leq 0$.

5. *(3 балла)* Найдите наименьшее четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

6. *(3 балла)* Решите уравнение $4(x^2-x)^2 = 2+7x^2-7x$.

7. *(3 балла)* Вычислите $(7 \cdot 2^{3n+2} - 8^{n+1}) \cdot (15 \cdot 7^{n+1} - 7^{n+2}) : 56^{n+1}$.

8. *(3 балла)* Упростите $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$.

9. *(3 балла)* Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle ADB = 43^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$, $\angle CAD = 22^\circ$. В ответ укажите величину наибольшего угла.

10. *(3 балла)* В равнобедренном треугольнике MNK с основанием MK, равным 10 см, $MN = NK = 20$ см. На стороне NK лежит точка A так, что $AK : AN = 1 : 3$. Найдите AM.

11. *(5 баллов)* Смешав 11-процентный и 72-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 31-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 51-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 11-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. *(5 баллов)* Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+3, \ x \geqslant 0 \\ |x+2|, \ x < 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

13. *(6 баллов)* Найдите сумму всех значений параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2+(a-1)x+(-2a^2+7a-6)}{x+1} = 0$$

имеет единственное решение.

14. *(7 баллов)* Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{7}$ и 3, а $AB = 4\sqrt{2}$.

Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
24 марта 2026г.
2 вариант

1. *(2 балла)* Доля брака в партии изделий составляла 9%. На стадии контроля качества удалось выявить и изъять из партии 40 бракованных изделий. Сколько изделий осталось в партии, если доля брака в ней составляет теперь 2,5%?

2. *(2 балла)* Упростите выражение $\dfrac{4a-6\sqrt{a}+9}{8a\sqrt{a}+27} : \dfrac{-2\sqrt{a}+3}{18-8a}$.

3. *(2 балла)* Решите систему уравнений $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-xy+y^2=13. \end{cases}$

4. *(3 балла)* Решите неравенство $\dfrac{(x-x^2)(3x^2+15x)}{(2x-7)^3} \geq 0$.

5. *(3 балла)* Найдите наибольшее четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

6. *(3 балла)* Решите уравнение $(x^2-6x)^2+2(x-3)^2=81$.

7. *(3 балла)* Вычислите $(45 \cdot 27^n + 13 \cdot 3^{3n+2}) \cdot (7 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2}) : 54^{n+1}$.

8. *(3 балла)* Упростите $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$.

9. *(3 балла)* Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle CBD = 48^\circ$, $\angle ACD = 34^\circ$, $\angle BDC = 64^\circ$. В ответ укажите величину наименьшего угла.

10. *(3 балла)* В равнобедренном треугольнике ABC: $AB = BC = 40$ см, $AC = 20$ см. На стороне BC отмечена точка H так, что $BH : HC = 3 : 1$. Найдите AH.

11. *(5 баллов)* Смешав 41-процентный и 63-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 49-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 54-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 41-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. *(5 баллов)* Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2+2x+2, \ x \leqslant 0 \\ |x-3|, \ x > 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

13. *(6 баллов)* Найдите сумму всех значений параметра a, при которых уравнение

$$\frac{x^2-(a+1)x+(-2a^2+5a-2)}{x-3} = 0$$

имеет единственное решение.

14. *(7 баллов)* Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{5}$ и 2, а $AB = 3\sqrt{2}$.

Решения и критерии оценивания
Вариант №1

1. На предприятии доля сотрудников с высшим образованием составляла 80%. После того как на работу было принято 30 новых специалистов с высшим образованием эта доля увеличилась до 85%. Сколько сотрудников теперь работает на предприятии?

Решение. Пусть изначально было x чел., тогда с высшим образованием было $0{,}8x$ чел. После того как на работу было принято 30 новых специалистов всего стало $(x+30)$ чел., а с высшим образованием – $(0{,}8x+30)$ чел. Получаем уравнение $0{,}85(x+30) = 0{,}8x+30$, откуда $x = 90$. Значит теперь на предприятии работает $90+30 = 120$.

Ответ: 120.

2. Упростите выражение $\dfrac{9a+6\sqrt{a}+4}{27a\sqrt{a}-8} : \dfrac{-6\sqrt{a}-4}{4-9a}$.

Решение. Пусть $\sqrt{a} = t$, тогда $a = t^2$. Теперь преобразуем получившееся выражение

$$\frac{9t^2+6t+4}{27t^3-8} : \frac{-6t-4}{4-9t^2} = \frac{9t^2+6t+4}{(3t-2)(9t^2+6t+4)} : \frac{-2(3t+2)}{(2-3t)(2+3t)} = \frac{1}{3t-2}\cdot\frac{2-3t}{-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Ответ: 0,5.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

Решение. Выразим $y = 3-x$ и подставим во второе уравнение

$$x^2+x(3-x)+(3-x)^2 = 13 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+3x-x^2+9-6x+x^2 = 13 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-3x-4=0,$$

откуда $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Тогда $y_1 = -1$, $y_2 = 4$.

Ответ: $(4;-1)$, $(-1;4)$

4. Решите неравенство $\dfrac{(2x^2+4x)(3x-x^2)}{(2x+5)^3} \leq 0$.

Решение.

$$\frac{2x^2(x+2)(3-x)}{(x+2{,}5)^3} \leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2(x+2)(x-3)}{(x+2{,}5)^3} \geq 0$$

Используем метод интервалов: $(-2,5;-2]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$.

Ответ: $(-2,5;-2]\cup\{0\}\cup[3;+\infty)$.

5. Найдите наименьшее четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

Решение. Число делится на 45, если оно делится на 5 и на 9. Последняя цифра должна быть 0 (чётная). Сумма цифр должна делиться на 9. Подходят числа: 4680, 4860, 6480, 6840, 8460, 8640. Наименьшее — 4680.

Ответ: 4680.

6. Решите уравнение $4(x^2-x)^2 = 2+7x^2-7x$.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть равенства и выполним замену $t = x^2-x$

$$4(x^2-x)^2-7(x^2-x)-2=0$$

$$4t^2-7t-2=0.$$

Корни полученного уравнения $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{4}$. Выполнив обратную замену получаем: $x^2-x=2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1$ или $x^2-x=-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_3=\frac{1}{2}$.

Ответ: $-1; 0,5; 2$

7. Вычислите $(7\cdot 2^{3n+2}-8^{n+1})\cdot(15\cdot 7^{n+1}-7^{n+2}):56^{n+1}$.
Решение.

$$(7\cdot 2^{3n+2}-8^{n+1})\cdot(15\cdot 7^{n+1}-7^{n+2}):56^{n+1}=$$
$$=(7\cdot 2^{3n+2}-2^{3n+3})\cdot 7^{n+1}\cdot 8:(7^{n+1}\cdot 8^{n+1})=$$
$$=2^{3n+2}\cdot(7-2)\cdot 8:2^{3n+3}=5\cdot 8:2=20.$$

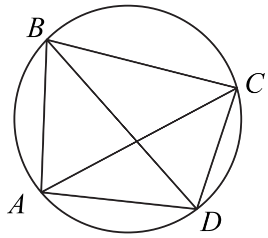
Ответ: 20.

8. Упростите $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$.
Решение.

$$\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}=$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}-\frac{1}{|\sqrt{6}-\sqrt{5}|}=$$
$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{6}+\sqrt{5})=0.$$

Ответ: 0.

9. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle ADB=43^\circ$, $\angle ACD=37^\circ$, $\angle CAD=22^\circ$. В ответ укажите величину наибольшего угла.



Решение. По свойству вписанных углов
$\angle DBC=\angle DAC=22^\circ$, $\angle ABD=\angle ACD=37^\circ$, $\angle ACB=\angle ADB=43^\circ$.
Дуга $BC=360^\circ-(74^\circ+44^\circ+86^\circ)=156^\circ$, тогда $\angle BAC=\angle BDC=78^\circ$.
Углы четырёхугольника $\angle A=78^\circ+22^\circ=100^\circ$, $\angle D=43^\circ+78^\circ=121^\circ$, $\angle C=43^\circ+37^\circ=80^\circ$, $\angle B=360^\circ-(100^\circ+121^\circ+80^\circ)=59^\circ$. Наибольший угол равен 121°.
Ответ: 121.

10. В равнобедренном треугольнике MNK с основанием MK, равным 10 см, $MN=NK=20$ см. На стороне NK лежит точка A так, что $AK:AN=1:3$. Найдите AM.
Решение. $AK=x$, $AN=3x$, $x+3x=20$, $x=5$. $AK:MK=MK:MN=1:2$, углы K и NMK равны, следовательно $\triangle MNK\sim\triangle KMA$. Тогда $\triangle AMK$ равнобедренный с основанием AK, значит $AM=MK=10$ см.
Ответ: 10.

11. Смешав 11-процентный и 72-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 31-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 51-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 11-процентного раствора использовали для получения смеси?
Решение. Пусть m_1 — масса 11% раствора, m_2 — масса 72% раствора.

$$\begin{cases}0,11m_1+0,72m_2=0,31(m_1+m_2+10)\\ 0,11m_1+0,72m_2+5=0,51(m_1+m_2+10)\end{cases}$$

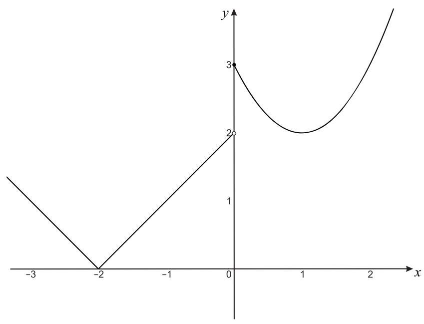
$$\begin{cases}0,41m_2-0,2m_1=3,1\\ 0,21m_2-0,4m_1=0,1\end{cases}$$

$$\begin{cases}41m_2-20m_1=310\\ 21m_2-40m_1=10\end{cases}$$

Решая систему, получаем $m_1 = 5$, $m_2 = 10$.
Ответ: 5

12. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, \; x \geqslant 0 \\ |x+2|, \; x < 0. \end{cases}$$



Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.
1) При $x \geqslant 0$ графиком будет парабола с вершиной $(1;2)$, проходящей через точку $(0;3)$.
2) При $x < 0$ графиком будет график функции $y = |x+2|$ с выколотой точкой $(0;2)$.

Прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки при $m \in (0;2] \cup (3;+\infty)$.
Ответ: $m \in (0;2] \cup (3;+\infty)$

13. Найдите сумму всех значений параметра a, при которых уравнение

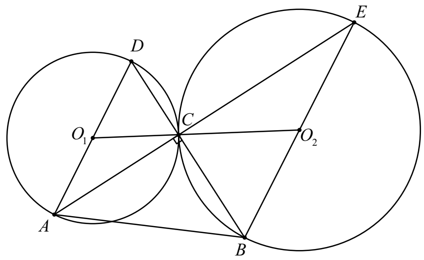
$$\frac{x^2 + (a-1)x + (-2a^2 + 7a - 6)}{x+1} = 0$$

имеет единственное решение.
Решение. Дискриминант числителя: $D = (3a-5)^2$. Корни: $x_1 = a - 2$, $x_2 = -2a + 3$. Уравнение имеет единственное решение, если

- один из корней числителя равен -1: $a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1$; $-2a + 3 = -1 \Rightarrow a = 2$;
- дискриминант равен 0: $3a - 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}$, при этом корень не равен -1.

Сумма: $1 + 2 + \frac{5}{3} = 4\frac{2}{3}$.
Ответ: $4\frac{2}{3}$.

14. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.



а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{7}$ и 3, а $AB = 4\sqrt{2}$.

Решение.
а) $\triangle ACD$ и $\triangle BCE$ прямоугольные, значит AD и BE — диаметры. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей, тогда $\angle O_1CD = \angle O_2CB$ (как вертикальные). Треугольники O_1CD и BCO_2 равнобедренные, поэтому $\angle O_1DC = \angle O_1CD = \angle O_2CB = \angle O_2BC$, следовательно $AD \parallel BE$.
б) Из подобия $\triangle O_1CD \sim \triangle BCO_2$: $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CD = \sqrt{7}x$, $BC = 3x$.

Из подобия $\triangle O_1AC \sim \triangle CEO_2$: $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow AC = \sqrt{7}y$, $CE = 3y$.

По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 32 = 7y^2 + 9x^2 \\ AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow (2\sqrt{7})^2 = 7y^2 + 7x^2 \Rightarrow 28 = 7y^2 + 7x^2 \end{cases}$$

Вычитая уравнения: $4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 2$, тогда $y^2 = 2$. $AC = \sqrt{14}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{14} \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{7}$.
Ответ: $3\sqrt{7}$.

Решения и критерии оценивания
Вариант №2

1. Доля брака в партии изделий составляла 9%. На стадии контроля качества удалось выявить и изъять из партии 40 бракованных изделий. Сколько изделий осталось в партии, если доля брака в ней составляет теперь 2,5%?

Решение. Пусть изначально в партии было x изделий, тогда после изъятия осталось $x-40$ изделий. До изъятия бракованных изделий было $0{,}09x$, а после изъятия осталось $0{,}025(x-40)$. Получаем уравнение $0,025(x-40) = 0,09x - 40$, откуда $x = 600$. Значит, изделий в партии осталось $600 - 40 = 560$.

Ответ: 560.

2. Упростите выражение $\dfrac{4a - 6\sqrt{a} + 9}{8a\sqrt{a} + 27} : \dfrac{-2\sqrt{a} + 3}{18 - 8a}$.

Решение. Пусть $\sqrt{a} = t$, тогда $a = t^2$. Теперь преобразуем получившееся выражение

$$\frac{4t^2 - 6t + 9}{8t^3 + 27} : \frac{-2t + 3}{18 - 8t^2} = \frac{4t^2 - 6t + 9}{(2t+3)(4t^2 - 6t + 9)} \cdot \frac{2(3-2t)(3+2t)}{3-2t} = 2.$$

Ответ: 2.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = 13. \end{cases}$

Решение. Выразим $x = 4 + y$ и подставим во второе уравнение

$$(4+y)^2 - (4+y)y + y^2 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 16 + 8y + y^2 - 4y - y^2 + y^2 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 4y + 3 = 0,$$

откуда $y_1 = -3$, $y_2 = -1$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Ответ: $(1; -3)$, $(3; -1)$.

4. Решите неравенство $\dfrac{(x - x^2)(3x^2 + 15x)}{(2x-7)^3} \geq 0$.

Решение.

$$\frac{3x^2(1-x)(x+5)}{8(x-3{,}5)^3} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2(x-1)(x+5)}{(x-3{,}5)^3} \leq 0$$

Используем метод интервалов: $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [1; 3,5)$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup \{0\} \cup [1; 3,5)$.

5. Найдите наибольшее четырёхзначное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны.

Решение. Последняя цифра должна быть 0. Сумма цифр должна делиться на 9. Подходят числа: 4680, 4860, 6480, 6840, 8460, 8640. Наибольшее — 8640.

Ответ: 8640.

6. Решите уравнение $(x^2 - 6x)^2 + 2(x-3)^2 = 81$.

Решение. Перенесём все слагаемые в левую часть равенства и выполним замену $t = x^2 - 6x$

$$(x^2 - 6x)^2 + 2(x^2 - 6x + 9) - 81 = 0$$

$$t^2 + 2t - 63 = 0.$$

Корни полученного уравнения $t_1 = -9$, $t_2 = 7$. Выполнив обратную замену получаем:
$x^2 - 6x = -9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ или $x^2 - 6x = 7 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x_2 = 7, x_3 = -1$.

Ответ: $-1; 3; 7$.

7. Вычислите $(45\cdot 27^n+13\cdot 3^{3n+2})\cdot(7\cdot 2^{n+1}-2^{n+2}):54^{n+1}$.

Решение.

$$(45\cdot 27^n+13\cdot 3^{3n+2})\cdot(7\cdot 2^{n+1}-2^{n+2}):54^{n+1}=$$
$$=(45\cdot 3^{3n}+13\cdot 3^{3n+2})\cdot 2^{n+1}\cdot 5:(27^{n+1}\cdot 2^{n+1})=$$
$$=3^{3n+2}\cdot(5+13)\cdot 5:3^{3n+3}=18\cdot 5:3=30.$$

Ответ: 30.

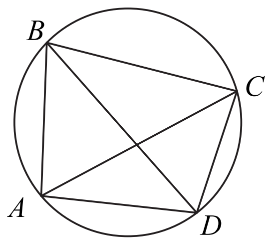
8. Упростите $\sqrt{7}-\sqrt{2}-\dfrac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}$.

Решение.

$$\sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{9+2\sqrt{14}}}=$$
$$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}-\frac{5}{|\sqrt{7}+\sqrt{2}|}=$$
$$=\sqrt{7}-\sqrt{2}-(\sqrt{7}-\sqrt{2})=0.$$

Ответ: 0.

9. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если
$\angle CBD=48^\circ$, $\angle ACD=34^\circ$, $\angle BDC=64^\circ$. В ответ укажите величину наименьшего угла.



Решение.
$\angle BAC=\angle BDC=64^\circ$, $\angle DAC=\angle DBC=48^\circ$, $\angle ABD=\angle ACD=34^\circ$.
Дуга $BA=360^\circ-(68^\circ+96^\circ+128^\circ)=68^\circ$, тогда $\angle ACB=\angle ADB=34^\circ$.
Углы четырёхугольника: $\angle B=34^\circ+48^\circ=82^\circ$, $\angle C=34^\circ+34^\circ=68^\circ$, $\angle D=34^\circ+64^\circ=98^\circ$, $\angle A=360^\circ-(82^\circ+68^\circ+98^\circ)=112^\circ$. Наименьший угол равен 68°.

Ответ: 68.

10. В равнобедренном треугольнике ABC: $AB=BC=40$ см, $AC=20$ см. На стороне BC отмечена точка H так, что $BH:HC=3:1$. Найдите AH.

Решение. $HC=x$, $BH=3x$, $x+3x=40$, $x=10$. $HC:AC=AC:AB=1:2$, углы HCA и BAC равны, следовательно $\triangle HCA\sim\triangle ABC$. Тогда $\triangle HCA$ равнобедренный с основанием HC, значит $AH=AC=20$ см.

Ответ: 20.

11. Смешав 41-процентный и 63-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 49-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 54-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 41-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение. Пусть m_1 — масса 41% раствора, m_2 — масса 63% раствора.

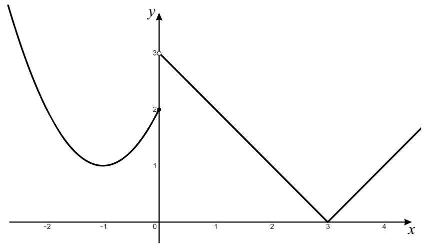
$$\begin{cases}0,41m_1+0,63m_2=0,49(m_1+m_2+10)\\0,41m_1+0,63m_2+5=0,54(m_1+m_2+10)\end{cases}$$

$$\begin{cases}0,14m_2-0,08m_1=4,9\\0,09m_2-0,13m_1=0,4\end{cases}$$

$$\begin{cases}7m_2-4m_1=245\\9m_2-13m_1=40\end{cases}$$

Решая систему, получаем $m_1 = 35$, $m_2 = 55$.
Ответ: 35.

12. Постройте график функции



$$y = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \ x \leqslant 0 \\ |x-3|, \ x > 0. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.
1) При $x \leqslant 0$ графиком будет парабола с вершиной $(-1; 1)$, проходящей через точку $(0; 2)$.
2) При $x > 0$ графиком будет график функции $y = |x - 3|$ с выколотой точкой $(0; 3)$.
Прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки при $m \in (0; 1) \cup [3; +\infty)$.
Ответ: $m \in (0; 1) \cup [3; +\infty)$.

13. Найдите сумму всех значений параметра a, при которых уравнение

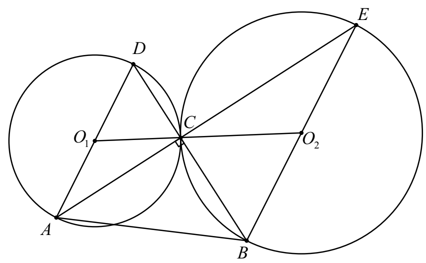
$$\frac{x^2 - (a+1)x + (-2a^2 + 5a - 2)}{x - 3} = 0$$

имеет единственное решение.
Решение. Дискриминант числителя: $D = 9(a-1)^2$. Корни: $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 2 - a$. Уравнение имеет единственное решение, если:

- один из корней числителя равен 3: $2a - 1 = 3 \Rightarrow a = 2$; $2 - a = 3 \Rightarrow a = -1$;
- дискриминант равен 0: $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$, при этом корень не равен 3.

Сумма: $2 + (-1) + 1 = 2$.
Ответ: 2.

14. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.



а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{5}$ и 2, а $AB = 3\sqrt{2}$.

Решение.
а) $\triangle ACD$ и $\triangle BCE$ прямоугольные, значит AD и BE — диаметры. Пусть O_1, O_2 — центры окружностей, тогда $\angle O_1CD = \angle O_2CB$ (как вертикальные). Треугольники O_1CD и BCO_2 равнобедренные, поэтому $\angle O_1DC = \angle O_1CD = \angle O_2CB = \angle O_2BC$, следовательно $AD \parallel BE$.
б) Из подобия $\triangle O_1CD \sim \triangle BCO_2$: $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CD = 2x$, $BC = \sqrt{5}x$.
Из подобия $\triangle O_1AC \sim \triangle CEO_2$: $\frac{O_1C}{O_2C} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow AC = 2y$, $CE = \sqrt{5}y$.
По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow 18 = 4y^2 + 5x^2 \\ AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow (2 \cdot 2)^2 = 4y^2 + 4x^2 \Rightarrow 16 = 4y^2 + 4x^2 \end{cases}$$

Вычитая уравнения: $2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 2$, тогда $y^2 = 2$. $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{10}$, $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$.
Ответ: $2\sqrt{5}$.

Критерии оценивания

1. *2 балла* за верный ответ.

2. *2 балла* за верный ответ.

3. *2 балла* за верный ответ; *1 балл* – в ответе указана одна пара ответов или перечислены возможные значения переменных без соблюдения порядка.

4. *3 балла* за верный ответ; *2 балла* – верный ответ без изолированной точки (точка 0); *1 балл* – указаны верные промежутки с неверными границами.

5. *3 балла* за верный ответ; *1 балл* – в ответе указано число, удовлетворяющее условиям, но не являющееся наибольшим/наименьшим.

6. *3 балла* за верный ответ; *2 балла* – верно найдены два значения переменной; *1 балл* – в ответе указаны верные значения для замены или одно верное значение переменной.

7. *3 балла* за верный ответ.

8. *3 балла* за верный ответ; *1 балл* – преобразования проведены без учета знака модуля.

9. *3 балла* за верный ответ; *2 балла* – указаны все углы четырехугольника; *1 балл* – указан другой угол четырехугольника $ABCD$.

10. *3 балла* за верный ответ

11. *5 баллов* – обоснованно получен верный ответ;

4 балла – приведены верные шаги решения, получен ответ с допущенной арифметической ошибкой или в ответе указана масса другого раствора;

3 балла – составлена верная система уравнений, но допущена ошибка при ее решении;

1 балл – составлена верная модель задачи и не обоснованно получен верный ответ.

12. *5 баллов* – верно построен график с выколотыми точками, верно указаны значения параметра;

4 балла – верно построен график с выколотыми точками, верно указаны промежутки с неправильными границами;

3 балла – верно построен график с выколотыми точками, верно указан один из промежутков значений параметра или указаны все параметры без обоснований; построен график, отличающийся от верного отсутствием выколотых точек и для данного графика верно и обоснованно найдены значения параметра;

2 балла – верно построен график с выколотыми точками, не указаны или указаны неверные значения для параметра или значения параметра отличаются границами.

1 балл – построен график, отличающийся от верного отсутствием выколотых точек в других случаях – *0 баллов*.

13. *6 баллов* – обоснованно получен верный ответ;

+1 балл – найдено одно значение a;

+2 балла – верно составлена математическая модель решения задачи;

+1 балл – проверены значения переменной, когда $D = 0$;

+1 балл – за каждое значение параметра, при котором корень уравнения обращает знаменатель в 0.

14. *7 баллов* – обоснованно получен верный ответ;

-1 балл – при верном решении получен неверный ответ из-за арифметической ошибки;

+1 балл – за каждое применение подобия треугольников, продвигающее в решении задачи;

+1 балл – составлена система уравнений с применением теоремы Пифагора;

+3 балла – верное решение пункта а).