СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Вступительный тест по математике
для поступающих в 8 химико-биологический класс
19 марта 2025г.
1 вариант

1. *(2 балла)* Вычислите $\left(-6\frac{7}{8}+1{,}375-5\frac{1}{2}\cdot 0{,}73\right):(-1{,}73)$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение: $\dfrac{5(x+1)}{8}+\dfrac{2(x-1)}{11}-\dfrac{x-3}{2}=9$.

3. *(2 балла)* Отрезок, длина которого равна 10, разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 8. Найдите длину среднего отрезка.

4. *(2 балла)* В первой корзине находится в 2 раза меньше шаров, чем во второй. Среди шаров в первой корзине 25% черных и 75% белых, а во второй урне белых и черных шаров по 50%. Сколько белых шаров в первой корзине, если в обеих корзинах вместе находится 10 черных шаров?

5. *(2 балла)* В треугольнике один из внутренних углов равен 30°, а второй угол больше третьего в 2 раза. Найдите меньший из неизвестных углов.

6. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{2^{21}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

7. *(2 балла)* Марина написала на доске шестизначное число меньше полумиллиона, которое делится на 36, а Тамара стерла у него первую и последнюю цифру и получила число 2025. Какое число записала Марина?

8. *(2 балла)* Прямая l проходит через точки $A(1,2)$ и $B(2,4)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой l.

9. *(2 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=\frac{3}{8}\\ \frac{1}{9}x-\frac{2}{9}y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

10. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C один из острых углов равен 40°. Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A?

11. *(5 баллов)* Упростить выражение $\left(\dfrac{d^3-8}{d^2-4}-\dfrac{6d}{d+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{d+2}\right)^2$.

12. *(6 баллов)* Решите уравнение $\dfrac{x^4-625}{25-x^2}=-(8x+9)$.

13. *(7 баллов)* При каких целых a уравнение $(2a+3)x=4a+9$ имеет целые решения?

14. *(5 баллов)* Имеется два сплава золота и серебра. Масса первого сплава 2 кг, масса второго сплава m кг. Содержание золота в первом сплаве 70%, содержание серебра во втором сплаве 60%. После того, как эти сплавы переплавили вместе, в новом сплаве содержание серебра составило 48%. Найдите m.

15. *(7 баллов)* На стороне PR треугольника PQR отмечена точка T так, что $QT=PR$. Медиана PM треугольника PQR пересекает отрезок QT в точке K. Так получилось, что $TK=TR$. Найдите длину PQ, если $PM+KM=2024$.

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Вступительный тест по математике для поступающих в 8 химико-биологический класс 19 марта 2025г. 2 вариант

1. *(2 балла)* Вычислите $\left(1\frac{18}{25} - 9{,}12 - 7{,}4 \cdot \left(-6\frac{1}{3}\right)\right) : 5\frac{1}{3}$.

2. *(2 балла)* Решите уравнение: $\dfrac{3(x-2)}{2} + \dfrac{x+6}{6} - \dfrac{2(x-9)}{9} = 13$.

3. *(2 балла)* Отрезок, длина которого равна 15, разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 12. Найдите длину среднего отрезка.

4. *(2 балла)* В классе мальчиков в 2 раза меньше, чем девочек. Экзамен успешно сдали 60% мальчиков и 90% девочек. Сколько человек учится в классе, если всего экзамен успешно сдали 24 человека?

5. *(2 балла)* В треугольнике сумма двух равных внутренних углов больше третьего на 10°. Найдите больший угол.

6. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{4^7 \cdot 2^{10}}{3 \cdot 2^{15} \cdot 16^2 - 5 \cdot 2^2 \cdot 2^{20}}$.

7. *(2 балла)* Марина написала на доске шестизначное число большее полумиллиона, которое делится на 36, а Тамара стерла у него первую и последнюю цифру и получила число 2025. Какое число записала Марина?

8. *(2 балла)* Прямая l проходит через точки $A(1;2)$ и $B(2;4)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A, перпендикулярно прямой l.

9. *(2 балла)*Решить систему уравнений $\begin{cases} -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{12}x - \frac{2}{12}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$

10. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B один из острых углов равен 70°. Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A?

11. *(5 баллов)* Упростить выражение $\left(c - \dfrac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \dfrac{c}{(c-2)^2} + \dfrac{2}{2-c}$.

12. *(6 баллов)* Решите уравнение $\dfrac{x^4 - 256}{16 - x^2} = 2(7x + 16{,}5)$.

13. *(7 баллов)* При каких целых a уравнение $(2a+1)x = 6a + 6$ имеет целые решения?

14. *(5 баллов)* Имеется два сплава золота и серебра. Масса первого сплава 3 кг, масса второго сплава m кг. Содержание золота в первом сплаве 40%, содержание серебра во втором сплаве 20%. После того, как эти сплавы переплавили вместе, в новом сплаве содержание серебра составило 32%. Найдите m.

15. *(7 баллов)* На стороне PS треугольника PQS отмечена точка E так, что $QE = PS$. Медиана PL треугольника PQS пересекает отрезок QE в точке K. Так получилось, что $EK = ES$. Найдите $KL + PL$, если $PQ = 2025$.

Решение.
Вариант 1.
Часть 1.

1. *(2 балла)* Вычислите $\left(-6\frac{7}{8}+1{,}375-5\frac{1}{2}\cdot 0{,}73\right):(-1{,}73)$.

Решение.

$$\left(-6\frac{7}{8}+1{,}375-5\frac{1}{2}\cdot 0{,}73\right):(-1{,}73)=\left(-5\frac{1}{2}-5\frac{1}{2}\cdot 0{,}73\right):(-1{,}73)=-5\frac{1}{2}\cdot 1{,}73:(-1{,}73)=5\frac{1}{2}.$$

Ответ: 5,5 .

2. *(2 балла)* Решите уравнение $\dfrac{5(x+1)}{8}+\dfrac{2(x-1)}{11}-\dfrac{x-3}{2}=9$.

Решение. Домножим обе части уравнения на 88: $55(x+1)+16(x-1)-44(x-3)=792$. Приводя подобные, получаем $27x=621$, откуда $x=23$.

Ответ: 23.

3. *(2 балла)* Отрезок, длина которого равна 10, разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 8. Найдите длину среднего отрезка.

Решение. Пусть длины отрезков равны a, b и c, тогда $a+b+c=10$, а $\dfrac{a}{2}+b+\dfrac{c}{2}=8$. Домножив второе равенство на 2 и вычитая из него первое получаем, что $b=16-10=6$.

Ответ: 6.

4. *(2 балла)* В первой корзине находится в 2 раза меньше шаров, чем во второй. Среди шаров в первой корзине 25% черных и 75% белых, а во второй урне белых и черных шаров по 50%. Сколько белых шаров в первой корзине, если в обеих корзинах вместе находится 10 черных шаров?

Решение. Пусть в первой корзине x шаров, тогда во второй $2x$ шаров. Посчитаем количество черных шаров в корзинах: в первой – $0{,}25x$; во второй – $0{,}5\cdot 2x$. Тогда всего черных шаров: $1,25x=10$, откуда $x=8$. Белых шаров в первой корзине $0{,}75\cdot 8=6$ штук.

Ответ: 6.

5. *(2 балла)* В треугольнике один из внутренних углов равен 30°, а второй угол больше третьего в 2 раза. Найдите меньший из неизвестных углов.

Решение. Пусть один из неизвестных углов равен x, тогда второй из неизвестных углов равен $2x$. Сумма углов треугольника равна $x+2x+30^\circ=180^\circ$, откуда $x=50^\circ$.

Ответ: 50°.

6. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{2^{21}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

Решение.

$$\frac{2^{21}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}=\frac{2^{21}\cdot 3^9+5\cdot 2^{20}\cdot 3^9}{3^9\cdot 2^{19}+3^{10}\cdot 2^{20}}=\frac{2^{20}\cdot 3^9\cdot(2+5)}{3^9\cdot 2^{19}\cdot(1+6)}=2.$$

Ответ: 2.

7. *(2 балла)* Марина написала на доске шестизначное число меньше полумиллиона, которое делится на 36, а Тамара стерла у него первую и последнюю цифру и получила число 2025. Какое число записала Марина?

Решение. Для того чтобы число делилось на 36, оно должно делиться на 4 и 9. Тогда число, составленное из двух последних цифр, должно делиться на 4. Возможные варианты 52 или 56. Так как 2025 делится на 9, то сумму первой и последней цифр должна делиться на 9. Если последняя цифра – 2, то первая должна быть равна 7, а если последняя цифра – 6, то первая должна быть 3. Итак, возможные варианты: 720252 или 320256. Поскольку число меньше полумиллиона, то

Ответ: 320256.

8. *(2 балла)* Прямая l проходит через точки $A(1,2)$ и $B(2,4)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой l.

Решение. Пусть уравнение прямой l: $y = kx + b$. Тогда $2 = k + m$ и $4 = 2k + m$, откуда $k = 2$, $m = 0$. Уравнение прямой l имеет вид $y = 2x$. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой l имеет вид $y = -\frac{1}{2}x + d$. Поскольку искомая прямая проходит через точку B, получаем $4 = -1 + d$, откуда $d = 5$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

9. *(2 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{8} \\ \frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

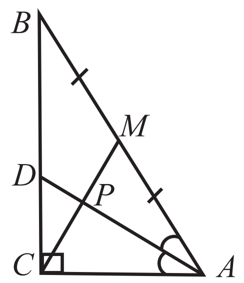
Решение. Домножим первое уравнение на 8, а второе на 18, получим систему $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$

Сложив полученные уравнения, получаем $4x = 6$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Вычитая данные уравнения, получаем $8y = 0$, откуда $y = 0$.

Ответ: $(\frac{3}{2}, 0)$.

10. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C один из острых углов равен $40°$. Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A?

Решение. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC, M – середина гипотенузы AB, тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, получаем: $CM = MA = MB$, треугольник CMA – равнобедренный. Обозначим через P точку пересечения медианы CM и биссектрисы угла A. Возможны два случая. Первый случай: $\angle CAB = 40°$. Тогда $\angle MCA = 40° = \angle CAB$, $\angle CAD = 20°$, откуда искомый $\angle MPA = 40° + 20° = 60°$. Второй случай: $\angle CBA = 40°$. Тогда $\angle MCA = 50° = \angle CAB$, $\angle CAD = 25°$, откуда искомый $\angle MPA = 50° + 25° = 75°$.



Ответ: $60°$ или $75°$.

11. *(5 баллов)* Упростить выражение $\left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d+2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d+2}\right)^2$.

Решение.

$$\left(\frac{d^3 - 8}{d^2 - 4} - \frac{6d}{d+2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d+2}\right)^2 = \left(\frac{(d-2)(d^2+2d+4)}{(d-2)(d+2)} - \frac{6d}{d+2}\right) : \left(\frac{d+2-4}{d+2}\right)^2 =$$

$$= \frac{d^2 + 2d + 4 - 6d}{d+2} \cdot \frac{(d+2)^2}{(d-2)^2} = \frac{(d-2)^2}{d+2} \cdot \frac{(d+2)^2}{(d-2)^2} = d + 2.$$

Ответ: $d + 2$.

12. *(6 баллов)* Решите уравнение $\frac{x^4 - 625}{25 - x^2} = -(8x + 9)$.

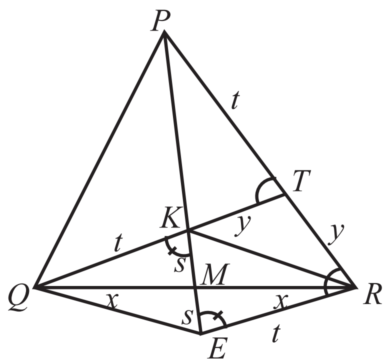
Решение. Разложим числитель первой дроби на множители и сократим дробь на $25 - x^2$. Получаем уравнение $-(25 + x^2) = -(8x + 9)$. Домножим обе части уравнения на -1, перенесем все слагаемые в левую часть равенства и приведем подобные: $x^2 - 8x + 16 = 0$, откуда $(x - 4)^2 = 0$ и $x = 4$. Подстановкой убеждаемся, что данное значение удовлетворяет условию существования дроби в

исходном уравнении.
Ответ: 4.

13. *(7 баллов)* При каких целых a уравнение $(2a+3)x = 4a+9$ имеет целые решения?
Решение. Поскольку ни при каких целых a выражение $2a+3 \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $2a+3$: $x = \dfrac{4a+9}{2a+3}$. Выделим целую часть в получившейся дроби $\dfrac{4a+9}{2a+3} = 2 + \dfrac{3}{2a+3}$. Получаем, что уравнение будет иметь целые решения, если $2a+3$ будет делить 3. Значит возможны следующие случаи: $2a+3 = 1$, откуда $a = -1$; $2a+3 = -1$, откуда $a = -2$; $2a+3 = 3$, откуда $a = 0$; $2a+3 = -3$, откуда $a = -3$.
Ответ: $-3, -2, -1, 0$.

14. *(5 баллов)* Имеется два сплава золота и серебра. Масса первого сплава 2 кг, масса второго сплава m кг. Содержание золота в первом сплаве 70%, содержание серебра во втором сплаве 60%. После того, как эти сплавы переплавили вместе, в новом сплаве содержание серебра составило 48%. Найдите m.
Решение. Масса золота в первом сплаве составляет $0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4$ кг, масса золота во втором сплаве $0{,}4m$, масса золота в новом сплаве $0{,}52(m+2)$. Получаем уравнение $1{,}4 + 0{,}4m = 0{,}52(m+2)$, откуда $0{,}12m = 0{,}36$ и $m = 3$.
Ответ: 3 кг.

15. *(7 баллов)* На стороне PR треугольника PQR отмечена точка T так, что $QT = PR$. Медиана PM треугольника PQR пересекает отрезок QT в точке K. Так получилось, что $TK = TR$. Найдите длину PQ, если $PM + KM = 2024$.
Решение. По условию введем обозначения для равных длин отрезков: $QM = MR = x$, $TK = TR = y$. Так как $QT = PR$, получаем, что $QK = QT - TK = PR - RT = PT$, их длину обозначим через t. На луче PM за точку M отложим $ME = MK$. Пусть $ME = MK = s$. Заметим, что $QM = MR = x$, $ME = MK = s$, $\angle QMK = \angle RME$, тогда $\triangle QMK = \triangle RME$, откуда $QK = ER = t$, $\angle QKM = \angle MER$. Из последнего равенства следует параллельность прямых QK и ER, из чего получаем, что $\angle QTP = \angle ERT$. Теперь найдем ещё два равных треугольника PER и QPT по двум сторонам и углу между ними: $\angle QTP = \angle ERT$, $TP = ER = t$, $QT = PR = t + y$. Из равенства этих треугольников получаем $QP = PE = PM + ME = PM + KM = 2024$.



Ответ: 2024.

Критерии:
1. 2 балла за верный ответ, 1 балл за ответ, который отличается знаком от верного.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 2 балла за верный ответ.
7. 2 балла за верный ответ, 1 балл за ответ 720252.
8. 1 балл за каждый верный параметр линейной функции.
9. 1 балл за каждое верно найденное значение переменной.
10. по 1 баллу за каждый верный ответ.
11. *+2 балла* – верно выполнена операция в первой скобке;
+2 балла – верно выполнена операция во второй скобке;
+1 балла – верно выполнена операция деления.
12. *+2 балла* – разность квадратов и сократили дробь;
+2 балла – выделен полный квадрат;
+2 балл – найден корень уравнения;
-1 балл – если нет проверки или не учтено условие $25 - x^2 \neq 0$.
13. *+1 балл* – обоснование, что $2a + 3 \neq 0$;
+2 балл – идея выделить целую часть;
+1 балл – за каждое обоснованно найденное значение параметра.
14. *+3 балла* – верно составлено уравнение;
+2 балла – верно решено уравнение.
15. *+2 балла* – верное дополнительное построение;
+2 балла – обосновано равенство треугольников;
+1 балла – доказана параллельность прямых;
+2 балла – обосновано равенство треугольников PER и QPT;

Вариант 2.
Часть 1.

1. *(2 балла)* Вычислите $\left(1\frac{18}{25}-9{,}12-7{,}4\cdot\left(-6\frac{1}{3}\right)\right):5\frac{1}{3}$.

Решение.

$$\left(1\frac{18}{25}-9{,}12-7{,}4\cdot\left(-6\frac{1}{3}\right)\right):5\frac{1}{3}=\left(-7{,}4\cdot\left(-6\frac{1}{3}\right)\right):5\frac{1}{3}=-7{,}4\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right):5\frac{1}{3}=7{,}4$$

Ответ: 7,4.

2. *(2 балла)* Решите уравнение: $\dfrac{3(x-2)}{2}+\dfrac{x+6}{6}-\dfrac{2(x-9)}{9}=13$.

Решение. Домножим обе части уравнения на 18: $27(x-2)+3(x+6)-4(x-9)=234$. Приводя подобные, получаем $26x=234$, откуда $x=9$.

Ответ: 9.

3. *(2 балла)* Отрезок, длина которого равна 15, разделили на три неравные части. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 12. Найдите длину среднего отрезка.

Решение. Пусть длины отрезков равны a, b и c, тогда $a+b+c=15$, а $\dfrac{a}{2}+b+\dfrac{c}{2}=12$. Домножив второе равенство на 2 и вычитая из него первое получаем, что $b=24-15=9$.

Ответ: 9.

4. *(2 балла)* В классе мальчиков в 2 раза меньше, чем девочек. Экзамен успешно сдали 60% мальчиков и 90% девочек. Сколько человек учится в классе, если всего экзамен успешно сдали 24 человека?

Решение. Пусть в классе учится x мальчиков, тогда девочек в классе – $2x$. Успешно сдали экзамен среди мальчиков $0{,}6x$, а среди девочек $0{,}9\cdot 2x=1{,}8x$. Получаем уравнение $0{,}6x+1{,}8x=24$, откуда $x=10$. В классе учится $3x=30$ человек.

Ответ: 30.

5. *(3 балла)* В треугольнике сумма двух равных внутренних углов больше третьего на $10°$. Найдите больший угол.

Решение. Пусть третий угол равен x, тогда сумма первых двух равна $x+10°$. Сумма всех углов треугольника равна $x+x+10°=180°$, откуда $x=85°$. Значит, каждый из оставшихся двух равных углов, будет меньше данного угла.

Ответ: $x=85°$.

6. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{4^7\cdot 2^{10}}{3\cdot 2^{15}\cdot 16^2-5\cdot 2^2\cdot 2^{20}}$.

Решение.

$$\frac{4^7\cdot 2^{10}}{3\cdot 2^{15}\cdot 16^2-5\cdot 2^2\cdot 2^{20}}=\frac{2^{24}}{3\cdot 2^{15}\cdot 2^8-5\cdot 2^2\cdot 2^{20}}=\frac{2^{24}}{3\cdot 2^{23}-5\cdot 2^{22}}=\frac{2^{24}}{2^{22}\,(6-5)}=4.$$

Ответ: 4.

7. *(2 балла)* Марина написала на доске шестизначное число большее полумиллиона, которое делится на 36, а Тамара стерла у него первую и последнюю цифру и получила число 2025. Какое число записала Марина?

Решение. Для того чтобы число делилось на 36, оно должно делиться на 4 и 9. Тогда число, составленное из двух последних цифр, должно делиться на 4. Возможные варианты 52 или 56. Так как 2025 делится на 9, то сумму первой и последней цифр должна делиться на 9. Если последняя цифра – 2, то первая должна быть равна 7, а если последняя цифра – 6, то первая должна быть 3. Итак, возможные варианты: 720252 или 320256. Поскольку число больше полумиллиона, то

Ответ: 720252.

8. *(2 балла)* Прямая l проходит через точки $A(1;2)$ и $B(2;4)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A, перпендикулярно прямой l.

Решение. Пусть уравнение прямой l: $y = kx + b$. Тогда $2 = k + m$ и $4 = 2k + m$, откуда $k = 2$, $m = 0$. Уравнение прямой l имеет вид $y = 2x$. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой l имеет вид $y = -\frac{1}{2}x + d$. Поскольку искомая прямая проходит через точку A, получаем $2 = -\frac{1}{2} + d$, откуда $d = \frac{5}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

9. *(2 балла)* Решить систему уравнений $\begin{cases} -\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{12}x - \frac{2}{12}y = \frac{3}{5}. \end{cases}$

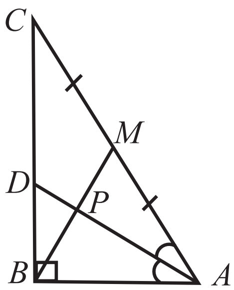
Решение. Домножим первое уравнение на 30, а второе на 60, получим систему $\begin{cases} -5x - 10y = 24 \\ 5x - 10y = 36. \end{cases}$

Сложив полученные уравнения, получаем $-20y = 50$, откуда $y = -\frac{5}{2}$. Вычитая данные уравнения, получаем $-10x = -12$, откуда $x = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{6}{5}, -\frac{5}{2}\right)$.

10. *(2 балла)* В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B один из острых углов равен $70°$. Чему может быть равна величина острого угла между медианой, проведенной из вершины прямого угла этого треугольника, и биссектрисой угла A?

Решение.Пусть AD – биссектриса треугольника ABC, M – середина гипотенузы AC, тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе, получаем: $BM = MA = MC$, треугольник BMA – равнобедренный. Обозначим через P точку пересечения медианы BM и биссектрисы угла A. Возможны два случая. Первый случай: $\angle CAB = 70°$. Тогда $\angle MBA = 70° = \angle CAB$, $\angle BAD = 35°$, откуда $\angle MPA = 70° + 35° = 105°$, а искомый угол, смежный с найденным, равен $75°$. Второй случай: $\angle BCA = 70°$. Тогда $\angle MBA = 20° = \angle CAB$, $\angle BAD = 10°$, откуда искомый $\angle MPA = 20° + 10° = 30°$.



Ответ: $30°$ или $75°$.

11. *(5 балла)* Упростить выражение $\left(c - \dfrac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \dfrac{c}{(c-2)^2} + \dfrac{2}{2-c}$.

Решение.

$$\left(c - \frac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} = \left(c - \frac{(c+2)(c^2-2c+4)}{c(c+2)}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} =$$
$$\frac{2c-4}{c} \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c} = \frac{2}{c-2} + \frac{2}{2-c} = 0.$$

Ответ: 0.

12. *(6 баллов)* Решите уравнение $\dfrac{x^4-256}{16-x^2} = 2(7x + 16{,}5)$.

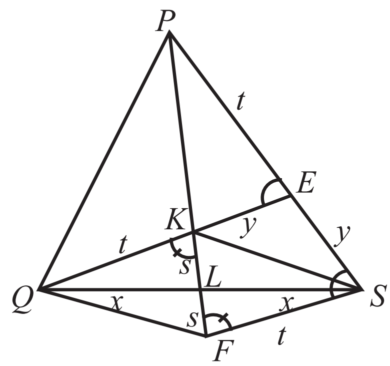
Решение. Разложим числитель первой дроби на множители и сократим дробь на $16 - x^2$. Получаем

уравнение $-(16 + x^2) = 14x + 33$. Перенесем все слагаемые в правую часть равенства и приведем подобные: $x^2 + 14x + 49 = 0$, откуда $(x + 7)^2 = 0$ и $x = -7$. Подстановкой убеждаемся, что данное значение удовлетворяет условию существования дроби в исходном уравнении.
Ответ: -7.

13. *(7 баллов)* При каких целых a уравнение $(2a + 1)x = 6a + 6$ имеет целые решения?
Решение. Поскольку ни при каких целых a выражение $2a+1 \neq 0$, то разделим обе части уравнения на $2a + 1$: $x = \dfrac{6a + 6}{2a + 1}$. Выделим целую часть в получившейся дроби $\dfrac{6a + 6}{2a + 1} = 3 + \dfrac{3}{2a + 1}$. Получаем, что уравнение будет иметь целые решения, если $2a+1$ будет делить 3. Значит возможны следующие случаи: $2a + 1 = 1$, откуда $a = 0$; $2a + 1 = -1$, откуда $a = -1$; $2a + 1 = 3$, откуда $a = 1$; $2a + 1 = -3$, откуда $a = -2$.
Ответ: $-2, -1, 0, 1$.

14. *(5 баллов)* Имеется два сплава золота и серебра. Масса первого сплава 3 кг, масса второго сплава m кг. Содержание золота в первом сплаве 40%, содержание серебра во втором сплаве 20%. После того, как эти сплавы переплавили вместе, в новом сплаве содержание серебра составило 32%. Найдите m.
Решение. Масса золота в первом сплаве составляет $0{,}4 \cdot 3 = 1{,}2$ кг, масса золота во втором сплаве $0{,}8m$, масса золота в новом сплаве $0{,}68(m+3)$. Получаем уравнение $1{,}2+0{,}8m = 0{,}68(m+3)$, откуда $0{,}12m = 0{,}84$ и $m = 4$.
Ответ: 4 кг.

15. *(7 баллов)* На стороне PS треугольника PQS отмечена точка E так, что $QE = PS$. Медиана PL треугольника PQS пересекает отрезок QE в точке K. Так получилось, что $EK = ES$. Найдите $KL + PL$, если $PQ = 2025$.
Решение. По условию введем обозначения для равных длин отрезков: $QE = ER = x$, $EK = ES = y$. Так как $QE = PS$, получаем, что $QK = QE - EK = PS - ES = PE$, их длину обозначим через t. На луче PL за точку L отложим $LF = LK$. Пусть $LF = LK = s$. Заметим, что $QE = ER = x$, $LF = LK = s$, $\angle QLK = \angle SLF$, тогда $\triangle QLK = \triangle SLF$, откуда $QK = FS = t$, $\angle QKF = \angle KFS$. Из последнего равенства следует параллельность прямых QK и FS, из чего получаем, что $\angle QEP = \angle FSP$. Теперь найдем ещё два равных треугольника PEQ и FSP по двум сторонам и углу между ними: $\angle QEP = \angle FSP$, $EP = FS = t$, $QE = PS = t+y$. Из равенства этих треугольников получаем $QP = PF = PL + LF = PL + LK = 2025$.
Ответ: 2025.



Критерии:

1. 2 балла за верный ответ, 1 балл за ответ, который отличается знаком от верного.
2. 2 балла за верный ответ.
3. 2 балла за верный ответ.
4. 2 балла за верный ответ.
5. 2 балла за верный ответ.
6. 2 балла за верный ответ.
7. 2 балла за верный ответ, 1 балл за ответ 320256.
8. 1 балл за каждый верный параметр линейной функции.
9. 1 балл за каждое верно найденное значение переменной.
10. по 1 баллу за каждый верный ответ.
11. *+2 балла* – верно выполнена операция в первой скобке;

+2 балла – верно выполнена операция умножения;

+1 балла – верно выполнена операция сложения.

12. *+2 балла* – разность квадратов и сократили дробь;

+2 балла – выделен полный квадрат;

+2 балл – найден корень уравнения;

-1 балл – если нет проверки или не учтено условие $16 - x^2 \neq 0$.

13. *+1 балл* – обоснование, что $2a + 1 \neq 0$;

+2 балл – идея выделить целую часть;

+1 балл – за каждое обоснованно найденное значение параметра.

14. *+3 балла* – верно составлено уравнение;

+2 балла – верно решено уравнение.

15. *+2 балла* – верное дополнительное построение;

+2 балла – обосновано равенство треугольников;

+1 балла – доказана параллельность прямых;

+2 балла – обосновано равенство треугольников PEQ и FSP.