1 вариант
Ответы

1	32
2	$\frac{4}{9}$
3	144°; 82°
4	400
5	5
6	99
7	2; -6
8	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
9	3
10	33°
11	нет решений
12	0 и 2
13	4
14	118
15	5

Решения

1. *(2 балла)* Упростите: $\dfrac{4^{2n+3}\cdot 2^{2n-1}}{(-8)^{2n}}$.

Решение.

$$\frac{4^{2n+3}\cdot 2^{2n-1}}{(-8)^{2n}}=\frac{2^{4n+6+2n-1}}{2^{6n}}=2^5=32$$

Ответ: 32.

2. *(2 балла)* Вычислите: $\left(\dfrac{97^3+83^3}{180}-97\cdot 83\right):(35^2-28^2)$.

Решение.

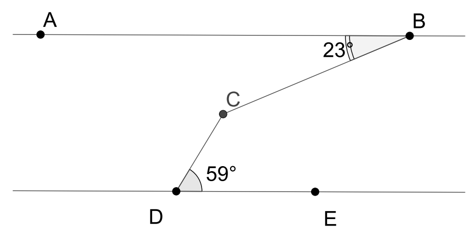
$$\left(\frac{97^3+83^3}{180}-97\cdot 83\right):(35^2-28^2)=\left(\frac{(97+83)(97^2-97\cdot 83+83^2)}{180}-97\cdot 83\right):(35^2-28^2)=$$

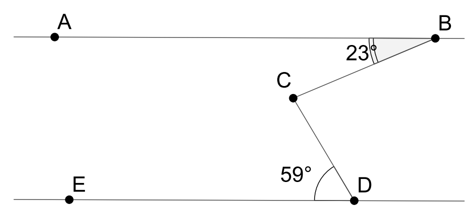
$$=(97^2-2\cdot 97\cdot 83+83^2):(35^2-28^2)=\frac{(97-83)^2}{(35-28)(35+28)}=$$

$$\frac{14^2}{7\cdot 63}=\frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$.

3. *(2 балла)* Прямые AB и DE параллельны. Точка C лежит между этими прямыми так, что $\angle ABC=23°$ и $\angle CDE=59°$. Найдите угол BCD.





Решение.

Возможны два случая расположения указанных точек как на рисунках. Продолжим прямую DC до пересечения с прямой AB. Обозначим точку пересечения через M. Тогда искомый $\angle BCD$ в обоих случаях является внешним углом к $\triangle BCM$.

В первом случае $\angle BCD=\angle CBA+\angle BMC$. Заметим, что $\angle CDE$ и $\angle BMC$ являются односторонними при параллельных прямых AB и DE, и секущей DM. Значит, $\angle BMC=180°-\angle CDE=180°-59°=121°$. Тогда $\angle BCD=23°+121°=144°$.

Во втором случае $\angle BCD = \angle BMC + \angle ABC$. Здесь $\angle CDE$ и $\angle BMC$ являются накрестлежащими при параллельных прямых AB и DE, и секущей DM. Получаем, что $\angle BMC = \angle CDE = 59^\circ$ и $\angle BCD = 23^\circ + 59^\circ = 82^\circ$.

Ответ: 144° и 82°.

4. *(2 балла)* По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90км/ч и 30км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

Решение.

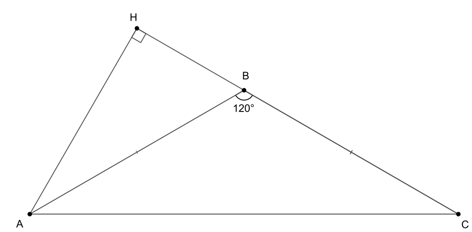
Скорость сближения поездов 90-30=60 км/ч = 1000 м/мин. Это означает, что пассажирский поезд сместится относительно товарного на 1000 метров за одну минуту. При этом пассажирский поезд проедет расстояние равное сумме длин поездов. Учитывая, что длина товарного поезда равна 600 метрам, получаем, что длина пассажирского поезда равна 1000-600 = 400 метров.

Ответ: 400.

5. *(2 балла)* В равнобедренном треугольнике один из углов равен 120°, а основание равно 10 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

Решение.

Заметим, что в тупоугольном равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне лежит вне треугольника. Обозначим данный треугольник ABC, указанную высоту через AH (см рисунок). Тогда $\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Получаем, что $\triangle AHC$ – прямоугольный с углом 30°. Значит, $AH = AC : 2 = 10 : 2 = 5$ см.



Ответ: 5.

6. *(2 балла)* Найти наименьшее натуральное число, большее 4, остатки от деления которого и на 5, и на 19 равны 4.

Решение.

Остаток от деления искомого натурального, большего 4, числа на 5 равен 4. Значит, число представимо в виде $5k+4$, где k – натуральное число. С другой стороны искомое число при делении на 19 дает остаток 4. Значит, число представимо и в виде $19n+4$, где n – натуральное число. Числа 19 и 5 не имеют общих делителей, кроме 1. Получаем, что наименьшее число с указанными условиями равно $5 \cdot 19 + 4 = 99$.

Задачу можно решать перебором.

Ответ: 99.

7. *(2 балла)* На координатной прямой выбраны точки A, B, C с координатами: $A(x+1)$, $B(x-3), C(2x+3)$. Найдите значения x, при которых $AB = AC$.

Решение.

$AB = |(x-3)-(x+1)| = 4$, $AC = |(2x+3)-(x+1)| = |x+2|$. Получаем уравнение $|x+2| = 4$. Решая уравнение, получаем $x = 2$ или $x = -6$

Ответ: $2; -6$.

8. *(2 балла)* Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -\dfrac{1}{2}x + 11$ и проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y = 2x - 5$ и $y = -x + 4$.

Решение.

Уравнение прямой имеет вид $y = kx+b$. У параллельных прямых угловые коэффициенты равны. Это означает, что $k = -\dfrac{1}{2}$.

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = 2x - 5$ и $y = -x + 4$. Для этого приравняем правые части: $2x - 5 = -x + 4$, получим $x = 3$ и $y = 2 \cdot 3 - 5 = 1$.

Подставим координаты найденной точки в искомое уравнение: $1 = -\dfrac{1}{2} \cdot 3 + b$. Находим $b = \dfrac{5}{2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

9. *(2 балла)* Найдите значения параметра a, при которых уравнения $3a + 9ax + 13 = 5x$ и $\dfrac{5-x}{3} - \dfrac{7x+11}{4} = 1$ будут иметь одинаковые корни.

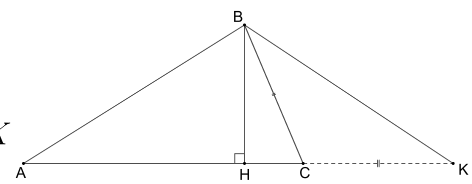
Решение.

Сначала решим уравнение $\dfrac{5-x}{3} - \dfrac{7x+11}{4} = 1 \Leftrightarrow 20 - 4x - 21x - 33 = 12 \Leftrightarrow x = -1$. По условию, $x = -1$ должно быть единственным корнем уравнения $3a + 9ax + 13 = 5x$. Подставим: $3a + 9a(-1) + 13 = 5(-1)$. Решая его, получаем $a = 3$.

Ответ: 3.

10. *(2 балла)* В треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что $\angle ABC = 81°$ и $AH = BC + CH$. Найдите $\angle BAC$.

Решение.



Отложим на прямой AC, за точку C, отрезок $CK = BC$. Тогда $\triangle BCK$ – равнобедренный и $\angle CBK = \angle BKC = \alpha$.

По условию, $AH = BC + CH = KC + CH = KH$. Тогда в $\triangle ABK$ отрезок BH является медианой и высотой. Значит, $\triangle ABK$ – тоже равнобедренный и $\angle BAC = \angle BKC = \alpha$. Рассмотрим в $\triangle ABK$ сумму углов: $3\alpha + 81° = 180°$. Значит, $\alpha = \angle BAC = 33°$

Ответ: $33°$

11. *(5 баллов)* Решите уравнение: $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3x+2}}} = \dfrac{(2x+2)(3x+4)}{6x+5}$.

Решение.

Преобразуем левую часть: $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3x+2}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{3x+3}{3x+2}}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{3x+2}{3x+3}} = \dfrac{1}{\dfrac{6x+5}{3x+3}} = \dfrac{3x+3}{6x+5}$.

Заметим, что знаменатели не могут обращаться в ноль. Значит, получим ОДЗ: $3x + 2 \neq 0$, $3x + 3 \neq 0, 6x + 5 \neq 0$.

Вернемся к уравнению. Теперь оно примет вид $\dfrac{3x+3}{6x+5} = \dfrac{(2x+2)(3x+4)}{6x+5}$. Переносим в одну часть и выносим общий множитель. $\dfrac{3x+3}{6x+5} - \dfrac{(2x+2)(3x+4)}{6x+5} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{6x+5}(3 - 2(3x+4)) = 0$. Дробь обращается в ноль, если числитель равен нулю, т.е при $x = -1$ и $x = -\dfrac{5}{6}$. Но эти значения не входят в ОДЗ. Таким образом, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

12. *(5 баллов)* Найдите значения параметра a, при которых графики функций $y = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - x^2}$ и $y = a$ не имеют общих точек.

Решение.

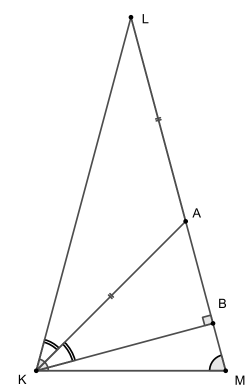
Рассмотрим выражение $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{1-x^2}=\dfrac{x^2(x-1)-(x-1)}{1-x^2}=\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{1-x^2}=-x+1$. Таким образом, мы должны рассмотреть функцию $y=-x+1$ при условии $x\neq 1, x\neq -1$.

Найдем значения параметра a, при которых графики функций $y=-x+1$ при $x\neq 1, x\neq -1$ и $y=a$ не имеют общих точек. Абсциссы всех возможных точек пересечения графиков данных функций удовлетворяют равенству $-x+1=a \Leftrightarrow x=1-a$. Так как в точках с абсциссами $x\neq 1, x\neq -1$ график функции $y=\dfrac{x^3-x^2-x+1}{1-x^2}$ не существует , то при $1-a=1$ и $1-a=-1$ нет точек пересечения. Тогда графики не имеют общих точек при $a=0$ и $a=2$.

Ответ: 0; 2

13. *(6 баллов)* В треугольнике KLM стороны KL и LM равны, $\angle KML=75^\circ$. На стороне LM взяли точки A и B так, что точка A лежит между точками L и B, $AK=LA$ и $\angle LKA=\angle BKA$. Найдите длину отрезка AB, если $AK=8$.

Решение.



По условию треугольник KLM – равнобедренный. Значит, $\angle KML=\angle MKL=75^\circ$ и $\angle KLM=180^\circ-75^\circ-75^\circ=30^\circ$.

Так как $AK=LA$, то $\triangle AKL$ - равнобедренный и $\angle KLA=\angle LKA=30^\circ$. Известно, что $\angle LKA=\angle BKA$. Отсюда найдем $\angle BKM=\angle MKL-\angle LKA-\angle BKA=75^\circ-30^\circ-30^\circ=15^\circ$.

Теперь рассмотрим $\triangle BKM$, в нем $\angle KBM=180^\circ-75^\circ-15^\circ=90^\circ$. Это означает, что и $\angle ABK=90^\circ$.

Получили прямоугольный треугольник ABK с углом 30° и гипотенузой $AK=8$. Тогда катет $AB=AK:2=8:2=4$.

Ответ: 4.

14. *(7 баллов)* Для соревнований нужно разбить всех учеников седьмых классов школы на команды. Известно, что если сделать 19 команд по 6-7 школьников, то менее четверти команд будут состоять из 7 человек. Если же сделать 22 команды по 5-6 школьников, то более трети команд будут состоять из 6 человек. Сколько человек учится в параллели седьмых классов?

Решение.

1. Команд с 7 участниками не более 4, так как четверть от 19 меньше 5. Это означает, что всего человек во всех командах не более, чем $19\cdot 6+4=118$.

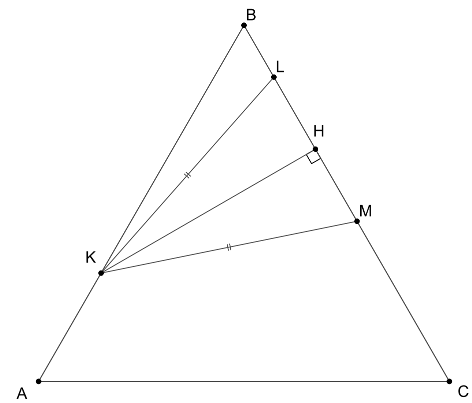
2. Треть от 22 больше 7. Следовательно, не менее 8 команд имеют в составе по 6 человек. Это означает, что всего человек не менее $8+22\cdot 5=118$.

3. Единственное число, удовлетворяющее условиям "не менее 118" и "не более 118" это число 118.

Ответ: 118.

15. *(7 баллов)* Дан равносторонний треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точки L и M (L лежит на отрезке BM) так, что $KL = KM$, $BL = 2$, $AK = 3$. Найдите CM.

Решение.



Построим $KH \perp LM, H \in LM$. Так как $KL = KM$, то есть $\triangle KLM$ – равнобедренный, то H – середина LM. Заметим, что треугольник ABC – равносторонний. Следовательно, $\angle ABC = 60°$ и в прямоугольном треугольнике KBH угол $BKH = 30°$. Получаем, что $KB = 2BH$.

Обозначим длину отрезка LH через x. Тогда $BH = 2 + x$, $BK = 2(2 + x)$, $AB = 3 + 2(2 + x)$. С другой стороны $BC = 2 + 2x + MC$. Стороны AB и BC равны, т.е. $AB = 3 + 2(2 + x) = 2 + 2x + MC = BC$. Получаем $3 + 4 + 2x = 2 + 2x + MC$, $MC = 5$

Ответ: 5.

Критерии оценивания

1. *2 балла.*
2. *2 балла.*
3. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
4. *2 балла.*
5. *2 балла.*
6. *2 балла.*
7. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
8. *2 балла.* За каждый коэффициент по 1 баллу.
9. *2 балла.*
10. *2 балла.*
11. *5 баллов.*
2 балла – верное преобразование дроби;
1 балл – верно найденное ОДЗ;
1 балл – верно найденные корни уравнения ;
1 балл – получение верного ответа.
12. *5 баллов.*
1 балл – верное сокращение дроби;
2 балла – за каждое верно найденное значение параметра;
Если учтено ОДЗ, но значение параметра не найдено или найдено неверно – *1 балл.*
13. *6 баллов.*
1 балл – за каждый верно найденный угол (с обоснованием) из $\angle KLA, \angle LKA, \angle BKM, \angle KBA$.
2 балла – применено свойство прямоугольного треугольника с углом 30° и верно найден ответ.
14. *7 баллов.*
3 балла – за каждую верную оценку с одной стороны;
1 балл – верный ответ с проверкой.
15. *7 баллов.*
2 балла – дополнительное построение, ведущее к решению;
1 балл – применено свойство прямоугольного треугольника с углом 30°
1 балл – за выражение для каждой стороны (AB, BC) через LH;
1 балл – верно составленное уравнение с MC;
1 балл – верно найденный ответ.
за рассмотрение частного случая при совпадении точек L и M – *1 балл*

2 вариант
Ответы

1	9
2	3
3	155°; 61°
4	300
5	$\frac{17}{2}$
6	125
7	1; -7
8	$y=-\frac{1}{3}x+2$
9	-2
10	32°
11	нет решений
12	-3 и 1
13	2
14	118
15	10

Решения

1. *(2 балла)* Упростите: $\dfrac{9^{2n+2}\cdot 3^{2n-2}}{(-27)^{2n}}$.

Решение.

$$\frac{9^{2n+2}\cdot 3^{2n-2}}{(-27)^{2n}}=\frac{3^{4n+4+2n-2}}{3^{6n}}=3^2=9$$

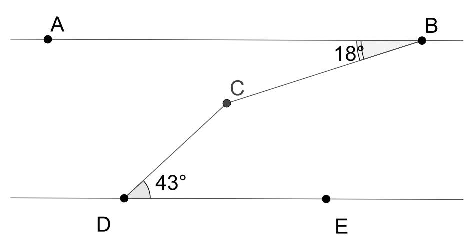
Ответ: 9.

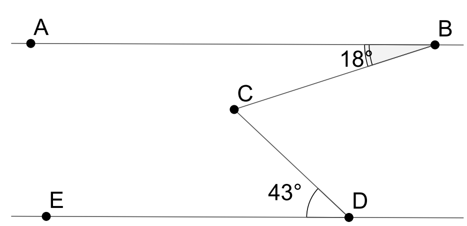
2. *(2 балла)* Вычислите: $\left(\dfrac{84^3+66^3}{150}-84\cdot 66\right):(12^2-6^2)$.

Решение.

$$\left(\frac{84^3+66^3}{150}-84\cdot 66\right):(12^2-6^2)$$
$$=\left(\frac{(84+66)(84^2-84\cdot 66+66^2)}{150}-84\cdot 66\right):(12^2-6^2)=$$
$$=(84^2-2\cdot 84\cdot 66+66^2):(12^2-6^2)=\frac{(84-66)^2}{(12-6)(12+6)}=\frac{18^2}{6\cdot 18}$$
$$=3$$

Ответ: 3.





3. *(2 балла)* Прямые AB и DE параллельны. Точка C лежит между этими прямыми так, что $\angle ABC=18^\circ$ и $\angle CDE=43^\circ$. Найдите угол BCD.

Решение.

Возможны два случая расположения указанных точек как на рисунках. Продолжим прямую DC до пересечения с прямой AB. Обозначим точку пересечения через M. Тогда искомый $\angle BCD$ в обоих случаях является внешним углом к $\triangle BCM$.

В первом случае $\angle BCD=\angle CBA+\angle BMC$. Заметим, что $\angle CDE$ и $\angle BMC$ являются односторонними при параллельных прямых AB и DE, и секущей DM. Значит, $\angle BMC=180^\circ-\angle CDE=180^\circ-43^\circ=137^\circ$. Тогда $\angle BCD=18^\circ+137^\circ=155^\circ$.

Во втором случае $\angle BCD = \angle BMC + \angle ABC$. Здесь $\angle CDE$ и $\angle BMC$ являются накрестлежащими при параллельных прямых AB и DE, и секущей DM. Получаем, что $\angle BMC = \angle CDE = 43^\circ$ и $\angle BCD = 18^\circ + 43^\circ = 61^\circ$.

Ответ: 155° и 61°.

4. *(2 балла)* По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 80км/ч и 50км/ч. Длина товарного поезда равна 1200 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 минутам. Ответ дайте в метрах.

Решение.

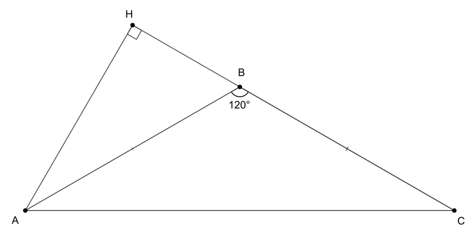
Скорость сближения поездов 80-50=30 км/ч = 500 м/мин. Это означает, что пассажирский поезд сместится относительно товарного на 500 метров за одну минуту, а за 3 минуты на 1500 метров. При этом пассажирский поезд проедет расстояние равное сумме длин поездов. Учитывая, что длина товарного поезда равна 1200 метрам, получаем, что длина пассажирского поезда равна 1500-1200 = 300 метров.

Ответ: 300.

5. *(2 балла)* В равнобедренном треугольнике один из углов равен 120°, а основание равно 17 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

Решение.

Заметим, что в тупоугольном равнобедренном треугольнике высота, проведенная к боковой стороне лежит вне треугольника. Обозначим данный треугольник ABC, указанную высоту через AH (см рисунок). Тогда $\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Получаем, что $\triangle AHC$ – прямоугольный с углом 30°. Значит, $AH = AC : 2 = 17 : 2 = 8,5$ см.



Ответ: 8,5.

6. *(2 балла)* Найти наименьшее натуральное число, большее 6, остатки от деления которого и на 7, и на 17 равны 6.

Решение.

Остаток от деления искомого натурального, большего 6, числа на 7 равен 6. Значит, число представимо в виде $7k+6$, где k – натуральное число. С другой стороны искомое число при делении на 17 дает остаток 6. Значит, число представимо и в виде $17n+6$, где n – натуральное число. Числа 17 и 7 не имеют общих делителей, кроме 1. Получаем, что наименьшее число с указанными условиями равно $7 \cdot 17 + 6 = 125$.

Задачу можно решать перебором.

Ответ: 125.

7. *(2 балла)* На координатной прямой выбраны точки A, B, C с координатами: $A(x+2)$, $B(x-2), C(2x+5)$. Найдите значения x, при которых $AB = AC$.

Решение.

$AB = |(x-2)-(x+2)| = 4$, $AC = |(2x+5)-(x+2)| = |x+3|$. Получаем уравнение $|x+3| = 4$. Решаем уравнение, получаем $x = 1$ или $x = -7$

Ответ: $1; -7$.

8. *(2 балла)* Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -\dfrac{1}{3}x - 21$ и проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями $y = -2x + 4$ и $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Решение.

Уравнение прямой имеет вид $y = kx+b$. У параллельных прямых угловые коэффициенты равны. Это означает, что $k = -\dfrac{1}{3}$.

Найдем координаты точки пересечения прямых $y = -2x+4$ и $y = \dfrac{1}{2}x+1$. Для этого прираваняем правые части: $-2x + 4 = \dfrac{1}{2}x + 1$, получим $x = \dfrac{6}{5}$ и $y = -2 \cdot \dfrac{6}{5} + 4 = \dfrac{8}{5}$.

Подставим координаты найденной точки в искомое уравнение: $\dfrac{8}{5} = -\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{5}+b$. Находим $b = \dfrac{10}{5} = 2$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}x + 2$

9. *(2 балла)* Найдите значения параметра a, при которых уравнения $5ax - 7a + 3 = 7x$ и $\dfrac{x+7}{4} - \dfrac{7x-1}{6} = 1$ будут иметь одинаковые корни.

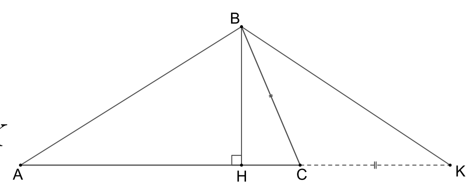
Решение.

Сначала решим уравнение $\dfrac{x+7}{4} - \dfrac{7x-1}{6} = 1 \Leftrightarrow 6x + 42 - 28x + 4 = 24 \Leftrightarrow x = -1$. По условию, $x = 1$ должно быть единственным корнем уравнения $5ax - 7a + 3 = 7x$. Подставим: $5a - 7a + 3 = 7$. Решая его, получаем $a = -2$.

Ответ: -2.

10. *(2 балла)* В треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что $\angle ABC = 84^\circ$ и $AH = BC + CH$. Найдите $\angle BAC$.

Решение.



Отложим на прямой AC, за точку C, отрезок $CK = BC$. Тогда $\triangle BCK$ – равнобедренный и $\angle CBK = \angle BKC = \alpha$.

По условию, $AH = BC + CH = KC + CH = KH$. Тогда в $\triangle ABK$ отрезок BH является медианой и высотой. Значит, $\triangle ABK$ – тоже равнобедренный и $\angle BAC = \angle BKC = \alpha$. Рассмотрим в $\triangle ABK$ сумму углов: $3\alpha + 84^\circ = 180^\circ$. Значит, $\alpha = \angle BAC = 32^\circ$

Ответ: 32°

11. *(5 баллов)* Решите уравнение: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3x-4}}} = \dfrac{(2x-2)(3x-2)}{6x-7}$.

Решение.

Преобразуем левую часть: $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3x-4}}} = \dfrac{(2x-2)(3x-2)}{6x-7} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3x-3}{3x=4}}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{3x-4}{3x-3}} = \dfrac{1}{\dfrac{6x-7}{3x-3}} = \dfrac{3x-3}{6x-7}$.

Заметим, что знаменатели не могут обращаться в ноль. Значит, получим ОДЗ: $3x - 4 \neq 0$, $3x - 3 \neq 0, 6x - 7 \neq 0$.

Вернемся к уравнению. Теперь оно примет вид $\dfrac{3x-3}{6x-7} = \dfrac{(2x-2)(3x-2)}{6x-7}$. Переносим в одну часть и выносим общий множитель. $\dfrac{3x-3}{6x-7} - \dfrac{(2x-2)(3x-2)}{6x-7} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{6x-7}(3-2(3x-2)) = 0$. Дробь обращается в ноль, если числитель равен нулю, т.е при $x = 1$ и $x = \dfrac{7}{6}$. Но ти значения не входят в ОДЗ. Таким образом, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

12. *(5 баллов)* Найдите значения параметра a, при которых графики функций $y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{1 - x^2}$ и $y = a$ не имеют общих точек.

Решение.

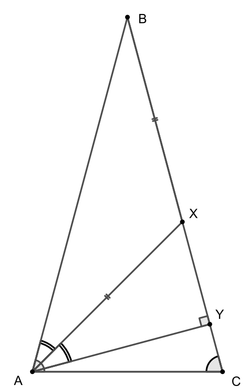
Рассмотрим выражение $\dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{1 - x^2} = \dfrac{x^2(2x+1) - (2x+1)}{1 - x^2} = \dfrac{(2x+1)(x^2-1)}{1 - x^2} = -2x - 1$. Таким образом, мы должны рассмотреть функцию $y = -2x - 1$ при условии $x \neq 1, x \neq -1$.

Найдем значения параметра a, при которых графики функций $y = -2x - 1$ при $x \neq 1, x \neq -1$ и $y = a$ не имеют общих точек. Абсциссы всех возможных точек пересечения графиков данных функций удовлетворяют равенству $-2x - 1 = a \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 - a}{2}$. Так как в точках с абсциссами $x \neq 1, x \neq -1$ график функции $y = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - x^2}$ не существует , то при $\dfrac{-1-a}{2} = 1$ и $\dfrac{-1-a}{2} = -1$ нет точек пересечения. Тогда графики не имеют общих точек при $a = -3$ и $a = 1$.

Ответ: $-3; 1$.

13. *(6 баллов)* В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, $\angle ACB = 75°$. На стороне BC взяли точки X и Y так, что точка X лежит между точками B и Y, AX = BX и $\angle BAX = \angle YAX$. Найдите длину отрезка XY, если $AX = 4$.

Решение.



По условию треугольник ABC – равнобедренный. Значит, $\angle ACB = \angle CAB = 75°$ и $\angle ABC = 180° - 75° - 75° = 30°$.

Так как $XA = BX$, то $\triangle XAB$ - равнобедренный и $\angle ABX = \angle BAX = 30°$. Известно, что $\angle BAX = \angle YAX$. Отсюда найдем $\angle YAC = \angle CAB - \angle BAX - \angle YAX = 75° - 30° - 30° = 15°$.

Теперь рассмотрим $\triangle YAC$, в нем $\angle AYC = 180° - 75° - 15° = 90°$. Это означает, что и $\angle XYA = 90°$.

Получили прямоугольный треугольник XYA с углом $30°$ и гипотенузой $AX = 4$. Тогда катет $XY = AX : 2 = 4 : 2 = 2$.

Ответ: 2.

14. *(7 баллов)* Для соревнований нужно разбить всех учеников седьмых классов школы на команды. Известно, что если сделать 19 команд по 6-7 школьников, то менее четверти команд будут состоять из 7 человек. Если же сделать 22 команды по 5-6 школьников, то более трети команд будут состоять из 6 человек. Сколько человек учится в параллели седьмых классов?

Решение.

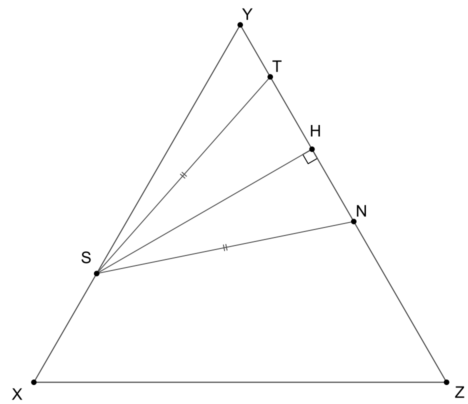
1. Команд с 7 участниками не более 4, так как четверть от 19 меньше 5. Это означает, что всего человек во всех командах не более, чем $19 \cdot 6 + 4 = 118$.

2. Треть от 22 больше 7. Следовательно, не менее 8 команд имеют в составе по 6 человек. Это означает, что всего человек не менее $8 + 22 \cdot 5 = 118$.

3. Единственное число, удовлетворяющее условиям "не менее 118"и "не более 118 это число 118.

Ответ: 118.

15. *(7 баллов)* Дан равносторонний треугольник XYZ. На стороне XY отмечена точка S, на стороне YZ — точки T и N (T лежит на отрезке YN) так, что $ST = SN$, $YT = 4$, $XS = 6$. Найдите ZN.



Решение.

Построим $SH \perp LM, H \in TN$. Так как $ST = SN$, то есть $\triangle STN$ – равнобедренный, то H – середина ЕТ. Заметим, что треугольник XYZ – равносторонний. Следовательно, $\angle XYZ = 60°$ и в прямоугольном треугольнике SYH угол $YSH = 30°$. Получаем, что $SY = 2YH$.

Обозначим длину отрезка TH через x. Тогда $YH = 4+x$, $YS = 2(4+x)$, $XY = 6+2(4+x)$. С другой стороны $YZ = 4+2x+NZ$. Стороны XY и YZ равны, т.е. $XY = 6+2(4+x) = 4+2x+ZN = YZ$. Получаем $6+8+2x = 4+2x+ZN$, $ZN = 10$

Ответ: 10.

Критерии оценивания

1. *2 балла.*
2. *2 балла.*
3. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
4. *2 балла.*
5. *2 балла.*
6. *2 балла.*
7. *2 балла.* За каждый верный ответ по 1 баллу.
8. *2 балла.* За каждый коэффициент по 1 баллу.
9. *2 балла.*
10. *2 балла.*
11. *5 баллов.*
2 балла – верное преобразование дроби;
1 балл – верно найденное ОДЗ;
1 балл – верно найденные корни уравнения ;
1 балл – получение верного ответа.
12. *5 баллов.*
1 балл – верное сокращение дроби;
2 балла – за каждое верно найденное значение параметра;
Если учтено ОДЗ, но значение параметра не найдено или найдено неверно – *1 балл.*
13. *6 баллов.*
1 балл – за каждый верно найденный угол (с обоснованием) из $\angle ABX, \angle BAX, \angle YAC, \angle AYX$.
2 балла – применено свойство прямоугольного треугольника с углом 30° и верно найден ответ.
14. *7 баллов.*
3 балла – за каждую верную оценку с одной стороны;
1 балл – верный ответ с примером.
15. *7 баллов.*
2 балла – дополнительное построение, ведущее к решению;
1 балл – применено свойство прямоугольного треугольника с углом 30°
1 балл – за выражение для каждой стороны (XY, YZ) через TH;
1 балл – верно составленное уравнение с ZN;
1 балл – верно найденный ответ.
за рассмотрение частного случая при совпадении точек T и N – *1 балл*