СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 11 СГ класс 20 марта 2024г.

Часть 1

1. *(2 балла)* Вычислить $81^{-0,75}+\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

Решение

$$81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(5^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(2^{-5}\right)^{-\frac{3}{5}}=$$

$$=3^{-3}+5-2^3=\frac{1}{27}+5-8=-2\frac{26}{27}.$$

Ответ: $-2\dfrac{26}{27}$.

2. *(2 балла)* Решить уравнение $3\dfrac{3}{7}:\left(\dfrac{2}{7}x\right)=3\dfrac{1}{3}:\dfrac{5}{9}$.

Решение Уравнение определено при $x\neq 0$. Получаем $\dfrac{24}{7}\cdot\dfrac{7}{2x}=\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{9}{5}$, тогда $\dfrac{24}{2x}=6$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

3. *(3 балла)* Записать в виде степени числа a выражение $\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$, где $a>0$.

Решение

$$\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}=\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^{-1}a^{-0,5}}}=\sqrt{a^2\sqrt[3]{a^{-1,5}}}=\sqrt{a^{1,5}}=a^{0,75}.$$

Ответ: $a^{0,75}$.

4. *(2 балла)* Вычислить $\dfrac{\log_3 27-\log_3 8}{\log_3\dfrac{9}{4}}$.

Решение

$$\frac{\log_3 27-\log_3 8}{\log_3\dfrac{9}{4}}=\frac{\log_3 3^3-\log_3 2^3}{\log_3 3^2-\log_3 2^2}=\frac{3-3\log_3 2}{2-2\log_3 2}=1,5\,.$$

Ответ: 1,5.

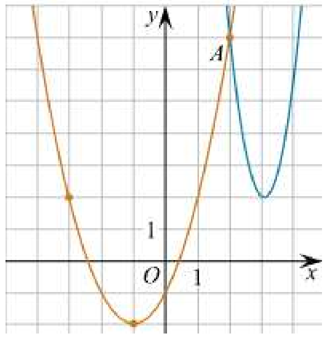
5. *(3 балла)* Вычислить $24\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0,2$.

Решение

$$24\cos 2\alpha=24(1-2\sin^2\alpha)=24\cdot 0,92=22,08.$$

Ответ: 22,08.

6. *(3 балла)* Решить неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+4} \leq \frac{25}{4}$.



Решение

Поскольку $0 < \frac{2}{5} < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $x^2 - 5x + 4 \geq -2$. Решая методом интервалов, получаем

Ответ: $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Критерии: *1 балл* – за ответ $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

7. *(3 балла)* На рисунке изображены графики функций $f(x) = 4x^2 - 25x + 41$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.

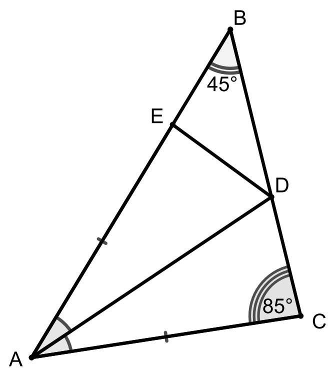
Решение

По рисунку видно, что график $f(x)$ изображен синим цветом, а график $g(x)$ коричневым. Точки $(-3; 2), (-1; -2), (2; 7)$ принадлежат графику $g(x)$, их координаты удовлетворяют уравнению функции $g(x)$. Подставим их и получим значения $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$. Найдем точки пересечения графиков, решая уравнение $4x^2 - 25x + 41 = x^2 + 2x - 1$. Получим абсциссы точек пересечения $x_1 = 2$ (это точка A), $x_2 = 7$ (это точка B). Откуда $f(7) = 62$.

Ответ: 62.

Критерии: *1 балл*, если в ответе указана абсцисса точки B.

8. *(3 балла)* В треугольнике ABC угол B равен $45°$, угол C равен $85°$, AD – биссектриса, E – такая точка на AB, что $AE = AC$. Найдите угол BDE. Ответ дайте в градусах.



Решение

Из треугольника ABC: $\angle BAC = 180° - 85° - 45° = 50°$. Поскольку AD – биссектриса, то $\angle BAD = \angle DAC = 25°$. Треугольники ΔABD и ΔADC по двум сторонам и углу между ними. Тогда $\angle AED = \angle ACD = 85°$,

$\angle BED = 180° - 85° = 95°$. Значит, $\angle BDE = 180° - 95° - 45° = 40°$.

Ответ: $40°$.

9. *(2 балла)* По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \dfrac{\varepsilon}{R + r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в Омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \dfrac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в Омах) .

Решение

Решим неравенство $I \leq 0,2 I_{\text{кз}}$, при $r = 1$. Получаем $\dfrac{\varepsilon}{R + 1} \leq 0,2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{1}$. Откуда $R \geq 4$.

Ответ: 4.

10. *(2 балла)* Если в некоторой десятичной дроби перенести запятую вправо на одну цифру, то она увеличится на $44,46$ Найти эту дробь .

Решение Пусть x – первоначальная дробь, тогда при переносе запятой вправо на одну цифру, она станет равной $10x$. Составим и решим уравнение $10x - x = 44,46$. Значит $x = 4,94$.

Ответ: $4,94$.

Часть 2

В заданиях 11–15 привести полные решения.

11. *(5 баллов)* Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение

Пусть масса $I-$го раствора составляет x кг, масса $II-$го раствора составляет y кг. При смешивании этих растворов и добавлении 10 кг воды получим $III-$й раствор.

	Масса	Концентрация %	Масса кислоты
$I-$й раствор	x	30%	$0{,}3x$
$II-$й раствор	y	60%	$0{,}6y$
вода	10		0
$III-$й раствор	$x+y+10$	36%	$0{,}3x+0{,}6y$

При смешивании этих растворов и добавлении 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты получим $IV-$й раствор.

	Масса	Концентрация %	Масса вещества
$I-$й раствор	x	30%	$0{,}3x$
$II-$й раствор	y	60%	$0{,}6y$
$III-$й раствор	10	50%	5
$IV-$й раствор	$x+y+10$	36%	$0{,}3x+0{,}6y+5$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}36(x+y+10)=0{,}3x+0{,}6y, \\ 0{,}41(x+y+10)=0{,}3x+0{,}6y+5; \end{cases}$$

решением которой будет пара чисел $(60; 30)$.

Ответ: 60 килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси.

Критерии:

3 балла – задача решена верно, но в решении допущена вычислительная ошибка;

2 балла – верно составлена система;

1 балл – верно составлено одно уравнение.

12. *(4 балла)* Упростить выражение $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{4a}}\right)$.

Решение

$$\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{\frac{a}{4}}-\frac{1}{\sqrt{4a}}\right)=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2-(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}+4\sqrt{a}\right)\frac{a-1}{\sqrt{4a}}=$$

$$=\left(\frac{4\sqrt{a}}{a-1}+4\sqrt{a}\right)\frac{a-1}{2\sqrt{a}}=2a.$$

Ответ: $2a$.

Критерии:

2 балла – задача решена верно, но в решении допущена вычислительная ошибка;

1 балл – показано умение производить действия с дробями.

13. *(5 баллов)* Решить неравенство $x^3+2x^2-\dfrac{24x^2-x+3}{x-3}\le 1$.

Решение

Представим дробь в виде разности $x^3+2x^2-\dfrac{24x^2}{x-3}+1\ \le 1$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству $x^3+2x^2-\dfrac{24x^2}{x-3}\le 0$.

Приводя к общему знаменателю и раскладывая на множители, получаем $\dfrac{x^2(x-6)(x+5)}{x-3}\le 0$. Решая полученное неравенство методом интервалов получаем

Ответ: $(-\infty;5]\cup\{0\}\cup(3;6]$.

Критерии:

4 балла – в ответе допущена ошибка включение/исключение граничных точек или нет изолированной точки (1 шт.);

3 балла – в ответе допущена ошибка включение/исключение граничных точек или нет изолированной точки (2 шт.);

2 балла – допущена ошибка при определении знаков в методе интервалов;

1 балл – неравенство сведено к дроби, сравниваемой с 0, при решении любым методом допущена ошибка.

14. *(5 баллов)* Решить уравнение $4^x+10^x-2\cdot 25^x=0$.

Решение

$$4^x+10^x-2\cdot 25^x=0,$$
$$2^{2x}+2^x\cdot 5^x-2\cdot 5^{2x}=0.$$

Разделим обе части уравнения на 5^{2x} $(5^{2x}>0)$: $\dfrac{2^{2x}}{5^{2x}}+\dfrac{2^x}{5^x}-2=0$.

Сделаем замену $t=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x, t>0$. Получим уравнение $t^2+t+2=0$, корни которого $t_1=1, t_2=-0,5<0$ (посторонний корень). Сделав обратную замену, получаем $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x=1$, откуда $x=0$.

Ответ: 0.

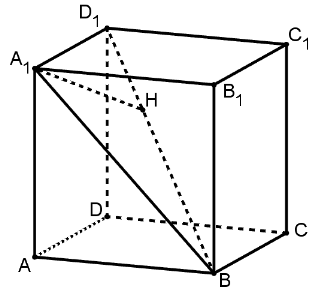
Критерии:

4 балла – задача решена верно, но в решении допущена вычислительная ошибка;

3 балла – уравнение сведено к квадратному, решено, но нет обратной замены;

1 балл – уравнение сведено к квадратному, но не решено.

15. *(6 баллов)* Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.



Решение

Рассмотрим $\Delta A_1D_1B: A_1D_1=15, A_1B=\sqrt{AB^2+AA_1^2}=20$, $D_1B=\sqrt{A_1B^2+B_1A_1^2}=25$. Расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 будет высота A_1H треугольника ΔA_1D_1B. Поскольку треугольник ΔA_1D_1B – прямоугольный, то $A_1H=\dfrac{A_1D_1\cdot A_1B}{D_1B}=12$.

Ответ: 12.

Критерии:

5 баллов – задача решена верно, но в решении допущена вычислительная ошибка;

3 балла – найдены все длины сторон треугольника, но не найдена высота;

1 балл – чертёж + обоснование искомой длины.