СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 11 МИФ класс
20 марта 2024 г.

1. *(1 балл)* Решить неравенство $(x^2-1)(x+2) \le 2(x^2+x-2)$.

2. *(2 балл)* Вычислить $\lg\left(7-\log_2\log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)$.

3. *(3 балла)* Найдите значение выражения $3a^2+4ab-3b^2$, при $a=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ и $b=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

4. *(3 балла)* Найдите $\cos\left(2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

5. *(2 балла)* Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-3}=\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{7-x}$.

6. *(3 балла)* Решите уравнение $\dfrac{6^x-9^x}{4^x-9^x}=0,6$.

7. *(2 балла)* Найдите сумму всех натуральных чисел, каждое из которых кратно 11 и не превосходит по величине 1000.

8. *(3 балла)* В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM=BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB=1$, $BC=2$.

9. *(3 балла)* Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

10. *(2 балла)* Стороны правильного треугольника равны 1. Найдите значение выражения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

11. *(5 баллов)* Решить неравенство

$$\frac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1.$$

12. *(6 баллов)* Найдите все значения параметра a, при которых ровно два решения имеет система уравнений

$$\begin{cases} y^2-4y-x^2+4x=0, \\ y=ax+2a. \end{cases}$$

13. *(4 баллов)* Решите уравнение $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

14. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) *(2 балла)* Докажите, что $SA=SC$.

б) *(3 балла)* Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AB=30$, $SC=17$, $BC=24$.

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и AD, который пересекаются в точке I. Известно, что $AB:AC:BC=21:28:20$.

а) *(2 балла)* найдите отношение $AI:ID$.

б) *(4 балла)* найдите отношение площадей треугольников AFD и ABC.

Решение.

1. Решить неравенство $(x^2-1)(x+2) \le 2(x^2+x-2)$.

Перенесем слагаемые в левую часть и разложим на множители

$$(x-1)(x+1)(x+2)-2(x+2)(x-1) \le 0$$
$$(x-1)(x+2)(x+1-2) \le 0$$
$$(x-1)^2(x+2) \le 0$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, получаем, что $x \in (-\infty; -2] \cup \{1\}$.

2. Вычислить $\lg\left(7-\log_2\log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right)$.

$$\lg\left(7-\log_2\log_3\sqrt{\sqrt[4]{3}}\right) = \lg\left(7-\log_2\log_3 3^{1/8}\right) = \lg\left(7-\log_2\frac{1}{8}\right) = \lg\left(7-(-3)\right) = 1.$$

3. Найдите значение выражения $3a^2+4ab-3b^2$, при $a = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ и $b = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

Заметим, что $ab=1$, тогда $3a^2+4ab-3b^2 = 3a^2-3b^2+4 = 3(a-b)(a+b)+4$.

$$a-b = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{10}}{3}.$$
$$a+b = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{14}{3}.$$

Тогда $3(a-b)(a+b)+4 = 3\cdot\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\cdot\dfrac{14}{3}+4 = \dfrac{56\sqrt{10}+12}{3}$.

4. Найдите $\cos\left(2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Преобразуем

$$\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{7}} : \left(1+\frac{1}{7}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Критерии: *1 балл* – ответ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

5. Решить уравнение $\dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-3} = \dfrac{\sqrt{12-x-x^2}}{7-x}$.

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 12-x-x^2=0, \\ x\ne 3, x\ne 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3=7-x, \\ x\ne 3, x\ne 7, \\ 12-x-x^2>0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-4 \text{ или } x=3, \\ x\ne 3, x\ne 7, \end{cases} \\ \begin{cases} x=5, \\ x\ne 3, x\ne 7, \\ 12-x-x^2>0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы будет $x=-4$, а вторая система не имеет решений.

Критерии: *1 балл* – ответ $-4; 5$.

6. Решите уравнение $\dfrac{6^x-9^x}{4^x-9^x}=0,6.$

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 6^x-9^x=0,6\cdot(4^x-9^x), \\ 4^x-9^x\neq 0. \end{cases}$ Решим первое уравнение

$$6^x-9^x=0,6\cdot(4^x-9^x)$$
$$5\cdot 6^x-5\cdot 9^x=3\cdot 4^x-3\cdot 9^x$$
$$3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$$
$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x-5\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$$

Сделав замену $t=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, получаем уравнение $3t^2-5t+2=0$, корни которого $t_1=1, t_2=\dfrac{2}{3}$. Тогда $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=1$, откуда $x=0$; или $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\dfrac{2}{3}$, откуда $x=1$, Учитывая ограничения $4^x-9^x\neq 0$ получаем, что единственным корнем уравнения будет $x=1$.

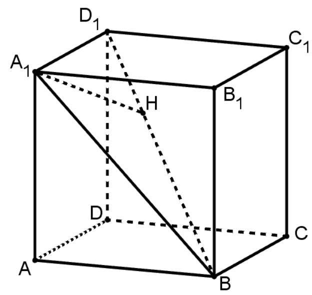
7. Найдите сумму всех натуральных чисел, каждое из которых кратно 11 и не превосходит по величине 1000.

Заметим, что первым числом, удовлетворяющим условию будет $a_1=11$, а последним $a_n=990$, при этом все числа образую арифметическую прогрессии со знаменателем $d=11$. Значит, $990=a_n=a_1+d(n-1)$, откуда $n=90$. Сумма первых 90 членов данной арифметической прогресии равна $S_{90}=\dfrac{a_1+a_{90}}{2}\cdot n=\dfrac{11+990}{2}\cdot 90=45045.$

8. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM=BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB=1$, $BC=2$.

Поскольку медиана MB, проведенная к стороне AC равна её половине, то треугольник ABC – прямоугольный ($\angle B=90^o$). Тогда $BM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, а высота $BK=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Значит, $\cos\angle BKM=\dfrac{BK}{BM}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}:\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{4}{5}.$

9. *(3 балла)* Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.



Рассмотрим $\Delta A_1D_1B: A_1D_1=15, A_1B=\sqrt{AB^2+AA_1^2}=20$, $D_1B=\sqrt{A_1B^2+B_1A_1^2}=25$. Расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1 будет высота A_1H треугольника ΔA_1D_1B. Поскольку треугольник ΔA_1D_1B – прямоугольный, то $A_1H=\dfrac{A_1D_1\cdot A_1B}{D_1B}=12.$

10. Стороны правильного треугольника равны 1. Найдите значение выражения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Воспользуемся определением скалярного произведения:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=$$
$$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})+|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}})+|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}})=$$
$$=1\cdot 1\cdot\cos 120^o+1\cdot 1\cdot\cos 120^o+1\cdot 1\cdot\cos 120^o=-1{,}5.$$

Критерии: *1 балл* – ответ 1,5.

11. Решить неравенство

$$\frac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1.$$

Преобразуем неравенство

$$\frac{54\cdot 3^x-125\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}-1<0$$

$$\frac{54\cdot 3^x-125\cdot 5^x-5\cdot 3^x+3\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<0$$

$$\frac{49\cdot 3^x-122\cdot 5^x}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<0 \qquad (*)$$

Поделив числитель и знаменатель на 5^x и сделав замену $\left(\frac{3}{5}\right)^x=t$, получим неравенство

$$\frac{49t-122}{5t-3}<0. \qquad (**)$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, получаем $t\in\left(\frac{3}{5};\frac{122}{49}\right)$. Откуда учитывая, что $\frac{3}{5}<1$, получаем окончательный ответ $x\in\left(\log_{\frac{3}{5}}\frac{122}{49};1\right)$.

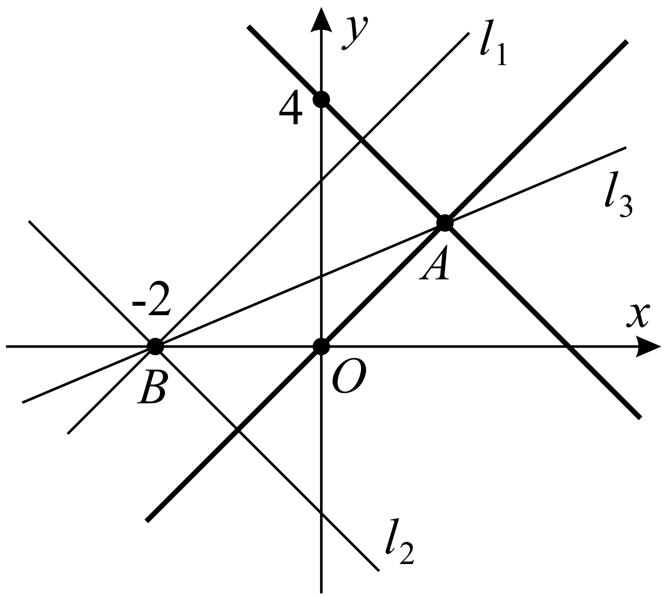
Критерии:

+1 балл – неравенство сведено к виду $(*)$, либо аналогичному;
+1 балла – неравенство сведено к рациональному неравенству $(**)$, либо аналогичному;
+1 балла – правильно решено верное рациональное неравенство;
+2 балла – верно выполнен обратный переход к неизвестной x.

12. Найдите все значения параметра a, при которых ровно два решения имеет система уравнений

$$\begin{cases} y^2-4y-x^2+4x=0,\\ y=ax+2a.\end{cases}$$

Первое уравнение легко преобразуется к виду $(y-x)(y+x)-4(y-x)=0$ или $(y-x)(y+x-4)=0$. Таким образом, решением первого уравнения является пара прямых $y=x$ и $y=-x+4$, которые пересекаются в точке $A(2,2)$ (рис. 2). Второе уравнение системы можно переписать в виде $y=a(x+2)$, оно задает прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $B(-2,0)$. Изменяя угловой коэффициент, мы получим три его значения, при которых прямая из второго уравнения системы пересекает решения первого уравнения в одной точке (на рисунке эти прямые обозначены через l_1, l_2 и l_3).



1-й случай: прямая l_1 параллельна прямой $y=x$, тогда $a=1$.

2-й случай: прямая l_2 параллельна прямой $y=-x+4$, тогда $a=-1$.

3-й случай: прямая l_3 проходит через точку A, тогда $2=a(2+2)$ или $a=1/2$.

При всех остальных значениях параметра a система уравнений будет иметь два решения. Значит, $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,\,1,\,\frac{1}{2}\right\}$.

Критерии:

+2 балла – верно решено первое уравнение системы;

+2 балла – верно решено второе уравнение системы;
+2 балла – обоснованно получен верный ответ.

13. Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sqrt{3}\cos x$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}\,; -2\pi\right]$.

Преобразуем уравнение

$$\cos^2 x = \sqrt{3}\cos x$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x = \sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Решением первого уравнения будет $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а второе уравнение не имеет решений т.к. $\sqrt{3} > 1$.

Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}\,; -2\pi\right]$. при помощи тригонометрической окружности. В указанный отрезок входят числа $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$.

Критерии:
+1 балл – уравнение сведено к тригонометрическому уравнению от аргумента x;
+2 балла – верно решено тригонометрическое уравнение;
+1 балла – проведён верный отбор корней.

14. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB.

а) *(2 балла)* Докажите, что $SA = SC$.

б) *(3 балла)* Найдите угол между плоскостями SAC и ABC, если $AB = 30$, $SC = 17$, $BC = 24$.

а) Поскольку треугольник $\triangle ABC$ прямоугольный, а O – середина гипотенузы, то $AO = BO = CO$. Тогда прямоугольные треугольники $\triangle SOA$, $\triangle SOB$, $\triangle SOC$ равны по двум катетам, откуда следует, что $SA = SC$.

б) Проведем перпендикуляр OH из точки O к прямой AC. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AC$, значит $\angle OHS$ – искомый. Поскольку $OH \perp AC$, $BC \perp AC$, O – середина AB, то OH – средняя линия треугольника ABC и $OH = \frac{1}{2}BC = 12$. По теореме Пифагора $SA^2 = SO^2 + AO^2$, откуда $SO = 8$. Тогда $\operatorname{tg}\angle OHS = \frac{SO}{OH} = \frac{8}{12}$, значит $\angle OHS = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Критерии:
+1 балл – доказано, что O – центр, описанной около ABC окружности или равносильное утверждение;
+2 балл – доказано утверждение пункта а) (не суммируется с предыдущим критерием);
+1 балла – обосновано, что угол $\angle OHS$ – искомый;
+2 баллов – верно найден искомый угол.

15. В треугольнике ABC проведены биссектрисы CF и AD, которые пересекаются в точке I. Известно, что $AB : AC : BC = 21 : 28 : 20$.

а) *(2 балла)* Найдите отношение $AI : ID$.

б) *(4 балла)* Найдите отношение площадей треугольников AFD и ABC.

а) Пусть $AB = 21x$, тогда $AC = 28x$, $BC = 20x$. По основному свойству биссектрисы $CD : BD = AC : AB = 28 : 21$, значит $CD = \frac{4}{7}BC = \frac{80x}{7}$. Поскольку CI – биссектриса треугольника ACD, то $AI : ID = AC : CD = \frac{28}{\frac{80}{7}} = \frac{49}{20}$.

б) Поскольку $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ два треугольника с общим основанием, то $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$. Так как AF – биссектриса, то $\frac{AF}{FB} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$. Значит, $\frac{S_{AFD}}{S_{ABD}} = \frac{AF}{AB} = \frac{28}{48} = \frac{7}{12}$. Тогда $\frac{S_{AFD}}{S_{ABC}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{12} = \frac{1}{4}$.

Критерии:
+1 балла – найдено отношение $BD : DC$;
+2 балла – получен верный ответ в пункте а) (не суммируется с предыдущим пунктом);
+2 балла – найдено отношение площадей треугольников BAD и ABC;
+4 балла – получен верный ответ в пункте б) (не суммируется с предыдущим пунктом).