

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Сумма

**Вступительный экзамен по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс
23 апреля 2023г.
1 вариант**

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. (3 балла) Определим операцию # (решетка) следующим образом: $a \# b = a - b + a \cdot b$. Например, $12 \# 7 = 12 - 7 + 12 \cdot 7 = 89$. Определите x , при котором равенство $7 \# x = 2023$ будет верным.

Ответ: _____

2. (3 балла) Произведение двух целых нечетных чисел равно 451. Найдите все возможные значения суммы этих чисел. **Ответ:** _____

3. (3 балла) Решите уравнение $x = \sqrt{10 - 3x}$. **Ответ:** _____

4. (3 балла) Вычислите $\sqrt{25 - 4\sqrt{21}} + \sqrt{70 - 14\sqrt{21}}$. **Ответ:** _____

5. (3 балла) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите площадь этого треугольника, если угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, равен 30° .

Ответ: _____

6. (3 балла) Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $\frac{18}{2a^2 + 1}$.

Ответ: _____

7. (3 балла) Один из корней уравнения $5x^2 + px + c = 0$ равен 2, а второй корень совпадает с корнем уравнения $2x - 3 = p$. Найдите значение p и c . **Ответ:** _____

8. (3 балла) Около окружности описана равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 и 24. Найдите радиус окружности и площадь трапеции. **Ответ:** _____

9. (3 балла) Найдите значение выражения при $a = 1 - \sqrt{2}$

$$\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^3+1}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-a+1} \right) : \left(\frac{a}{a+1} \right).$$

Ответ: _____

10. (3 балла) После смешения двух растворов, один из которых содержал 48г, а другой 20г безводного йодистого калия, получили 200г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго. **Ответ:** _____

Часть 2

В заданиях 11–14 привести полные решения.

11. (5 баллов) а) Постройте фигуру, заданную неравенством $|x - 3| + 2|y| \leq 7$.

б) Найдите её площадь.

12. (5 баллов) Найдите значения параметра a , при которых система неравенств имеет единственное решение

$$\begin{cases} |x + 2| \leq a, \\ |x + 3a| \leq 4. \end{cases}$$

13. (5 баллов) Было 8 грузиков массами 1, 2, . . . , 8 г. Один из них потерялся, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть весы с лампочкой, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы грузиков одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какой именно грузик потерялся?

14. (5 баллов) Основание треугольника равно a , а высота, опущенная на основание, равна h . В треугольник вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника, а две вершины на боковых сторонах. Найдите отношение площади квадрата к площади треугольника.

**СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Сумма

**Вступительный тест по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс
23 апреля 2023г.
2 вариант**

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. (3 балла) Определим операцию # (решетка) следующим образом: $a \# b = a \cdot b - b + a$. Например, $11 \# 8 = 11 \cdot 8 - 8 + 11 = 91$. Определите x , при котором равенство $13 \# x = 2023$ будет верным.

Ответ: _____

2. (3 балла) Произведение двух целых чисел равно 473. Найдите все возможные значения суммы этих чисел. **Ответ:** _____

3. (3 балла) Решите уравнение $x = \sqrt{3x + 18}$. **Ответ:** _____

4. (3 балла) Вычислите $\sqrt{24 - 6\sqrt{15}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{15}}$. **Ответ:** _____

5. (3 балла) Угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, равен 30° . Найдите площадь этого треугольника, если его большая сторона равна 8.

Ответ: _____

6. (3 балла) Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $\frac{10}{3a^2 - 2}$.

Ответ: _____

7. (3 баллов) Один из корней уравнения $3x^2 - px + c = 0$ равен 3, а второй корень совпадает с корнем уравнения $-4x + 2 = p$. Найдите значение p и c .

Ответ: _____

8. (3 балла) Около окружности радиуса 12 описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 100. Найдите основания трапеции. **Ответ:** _____

9. (3 балла) Найдите значение выражения при $m = \sqrt{3}$

$$\left(\frac{m+2}{m+1} - \frac{8m^2-8}{m^3-1} : \frac{4m+4}{m^2+m+1} \right) \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{m-1}.$$

Ответ: _____

10. (3 балла) После смешения двух растворов, один из которых содержал 24г, а другой 10г безводного йодистого калия, получили 100г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго. **Ответ:** _____

Часть 2

В заданиях 11–14 привести полные решения.

11. (5 баллов) а) Постройте фигуру, заданную неравенством $|y - 3| + 2|x| \leq 7$.

б) Найдите её площадь.

12. (5 баллов) Найдите значения параметра a , при которых система неравенств имеет единственное решение

$$\begin{cases} |x - 3| \leq a, \\ |x - 2a| \leq 5. \end{cases}$$

13. (5 баллов) Было 8 калибровочных гирек массами от 1 до 8 г. Одна из них потерялась, а остальные выложили в ряд по убыванию массы. Есть чашечные весы, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы гирек одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какая именно гирька потерялась?

14. (5 баллов) В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

**Критерии проверки вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс, 2023г.**

1 вариант

Часть 1

1. (3 балла) Определим операцию $\#$ (решетка) следующим образом: $a\#b = a - b + a \cdot b$. Определите x , при котором равенство $7\#x = 2023$ будет верным. **Ответ:** 336.

2. (3 балла) Произведение двух целых чисел равно 451. Найдите все возможные значения суммы этих чисел. **Ответ:** 452; -452; 52; -52.

Если указана только одна сумма, то 0 баллов. Если указаны только две суммы, то 1 балл.

3. (3 балла) Решите уравнение $x = \sqrt{10 - 3x}$. **Ответ:** 2.

Если указан лишний корень, то 1 балл.

4. (3 балла) Вычислите $\sqrt{25 - 4\sqrt{21}} + \sqrt{70 - 14\sqrt{21}}$. **Ответ:** 5.

5. (3 балла) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 6. Найдите площадь этого треугольника, если угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, равен 30° . **Ответ:** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

6. (3 балла) Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $\frac{18}{2a^2 + 1}$. **Ответ:** (2; 6).

Если верно указана только одна граница, то 1 балл.

7. (3 балла) Один из корней уравнения $5x^2 + px + c = 0$ равен 2, а второй корень совпадает с корнем уравнения $2x - 3 = p$. Найдите значение p и c . **Ответ:** $p = -5$; $c = -10$.

Если верно указано только значение p или c , то 1 балл. Если указаны две пары значений, то 2 балла.

8. (3 балла) Около окружности описана равнобедренная трапеция, основания которой равны 6 и 24. Найдите радиус окружности и площадь трапеции. **Ответ:** $r = 6$; $S = 180$.

Если верно указано только одно значение, то 1 балл.

9. (3 балла) Найдите значение выражения при $a = 1 - \sqrt{2}$

$$\left(\frac{a-1}{a+1} - \frac{a^3+1}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a^2-a+1} \right) : \frac{a}{a+1}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Если указано $\frac{4}{1-a}$, то 2 балла.

10. (3 балла) После смешения двух растворов, один из которых содержал 48г, а другой 20г безводного йодистого калия, получили 200г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго. **Ответ:** 40; 25.

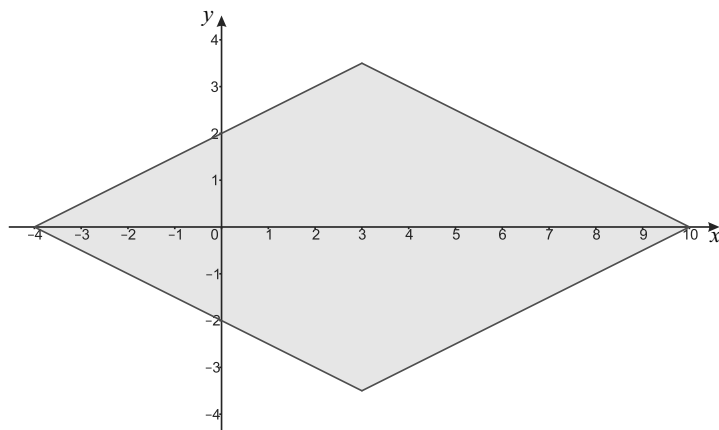
Если верно указано только одно значение, то 1 балл.

Часть 2

11. (5 баллов) а) Постройте фигуру, заданную неравенством $|x - 3| + 2|y| \leq 7$.

б) Найдите её площадь.

Решение: граница фигуры задается уравнением $|x - 3| + 2|y| = 7$. Построенная фигура – ромб, его площадь $S = 49$.



Критерии: Если верно построена фигура, то +4 балла, если построена только часть фигуры, то +2 балла, за нахождение площади +1 балл.

12. (5 баллов) Найдите значения параметра a , при которых система неравенств имеет единственное решение

$$\begin{cases} |x + 2| \leq a, \\ |x + 3a| \leq 4. \end{cases}$$

Решение: преобразуем неравенства относительно переменной

$$|x + 2| \leq a \Rightarrow -a - 2 \leq x \leq a - 2;$$

$$|x + 3a| \leq 4 \Rightarrow -4 - 3a \leq x \leq 4 - 3a.$$

Система данных неравенств имеет единственное решение, если совпадают концы интервалов либо один из интервалов - точка, входящая во второй интервал.

При условии, что $a \geq 0$, получаем $-a - 2 = 4 - 3a$ или $-a - 2 = a - 2$, то есть $a = 3$ или $a = 0$.

Критерии: За решение каждого неравенства по 1 баллу, найдено и проверено каждое из значений параметра - по 1 баллу.

13. (5 баллов) Было 8 грузиков массами 1, 2, ..., 8 г. Один из них потерялся, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть весы с лампочкой, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы грузиков одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какой именно грузик потерялся?

Решение задачи не единственно. Подходит, например, следующий алгоритм. Первым взвешиванием сравним $2 + 3 = 5$. Равенство может наступить, если не хватает грузиков 6, 7, 8 или грузика 3. Если равенство наступило, то проверим $2 + 5 = 7$. Если вновь наступило равенство, то потерян грузик №3 или №8, а значит достаточно будет проверить $1 + 2 = 3$. В случае равенства потерян грузик №8, неравенства - потерян грузик №3. Если $2 + 5 \neq 7$, то проверяем $1 + 5 = 6$. В случае равенства пропал грузик №7, в случае неравенства - грузик №6. Если в результате первого сравнения наступило неравенство, то потерян один из грузиков с номерами 1, 2, 4, 5. Вторым взвешиванием проверим $2 + 5 = 7$. В случае равенства проверим $1 + 3 = 4$. Тогда при равенстве потерян грузик №5, при неравенстве - №4. В случае неравенства при втором взвешивании проверим $1 + 2 = 3$. В случае равенства потерян грузик №2, в случае неравенства - №1.

Критерии: Если замечено, что при потере грузика номер n грузики с номерами, меньшими n , весят столько грамм, каков их номер, а грузики с номером n и больше весят на 1 г больше, чем их номер, то +1 балл. Если замечено, что для потерянного грузика имеется 8 вариантов, и 3 взвешивания могут иметь как раз $2^3 = 8$ исходов, и каждое взвешивание должно сужать количество вариантов для потерянной гирьки вдвое - +1 балл. По 1 баллу за каждую проверку, которая уменьшает число предыдущих вариантов вдвое. За любой верный алгоритм 5 баллов.

14. (5 баллов) Основание треугольника равно a , а высота, опущенная на основание, равна h . В треугольник вписан квадрат, одна из сторон которого лежит на основании треугольника, а две вершины на боковых сторонах. Найдите отношение площади квадрата к площади треугольника.

Решение: изобразим треугольник ABC и квадрат $KLMN$ таким образом, чтобы вершины K и L лежали на стороне BC , а вершины M и N – на сторонах AC и AB соответственно. Высота AH треугольника пересекается со стороной MN квадрата в точке O . Пусть x – сторона квадрата, тогда $AO = AH - HO = AH - ML = h - x$. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{AO}{AH} = \frac{h-x}{h}$, поэтому $MN = \frac{BC \cdot AO}{AH}$, или $x = a \cdot \frac{h-x}{h}$, откуда $x = \frac{ah}{a+h}$. Следовательно, $\frac{S_{KLMN}}{S_{ABC}} = \frac{x^2}{\frac{ah}{2}} = \frac{2ah}{(a+h)^2}$.

Критерии: Доказано подобие треугольников – 1 балл, найден коэффициент подобия $\frac{AO}{AH} = \frac{h-x}{h}$ – 2 балла.

**Рекомендации по проверке вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 (физ-мат, мат-инф, хим-био) класс, 2023г.**

2 вариант

1. (3 балла) Определим операцию $\#$ (решетка) следующим образом: $a\#b = a \cdot b - b + a$. Определите x , при котором равенство $13\#x = 2023$ будет верным. **Ответ:** 167, 5.

2. (3 балла) Произведение двух целых чисел равно 473. Найдите все возможные значения суммы этих чисел. **Ответ:** 474; -474; 54; -54.

Если указаны только две суммы, то 1 балл.

3. (3 балла) Решите уравнение $x = \sqrt{3x + 18}$. **Ответ:** 6.

Если указан лишний корень, то 1 балл.

4. (3 балла) Вычислите $\sqrt{24 - 6\sqrt{15}} - \sqrt{16 - 2\sqrt{15}}$. **Ответ:** -2.

5. (3 балла) Угол между медианой и высотой, проведенными из вершины прямого угла треугольника, равен 30° . Найдите площадь этого треугольника, если его большая сторона равна 8. **Ответ:** $8\sqrt{3}$.

6. (3 балла) Известно, что $1 < a < 2$. Оцените значение выражения $\frac{10}{3a^2 - 2}$. **Ответ:** (1; 10).

Если верно указана только одна граница, то 1 балл.

7. (3 баллов) Один из корней уравнения $3x^2 - px + c = 0$ равен 3, а второй корень совпадает с корнем уравнения $-4x + 2 = p$. Найдите значение p и c . **Ответ:** $p = 6$; $c = -9$.

Если верно указано только значение p или c , то 1 балл. Если указаны две пары значений, то 2 балла.

8. (3 балла) Около окружности радиуса 12 описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 100. Найдите основания трапеции. **Ответ:** 18; 32.

Если верно указано только одно значение, то 1 балл.

9. (3 балла) Найдите значение выражения при $m = \sqrt{3}$

$$\left(\frac{m+2}{m+1} - \frac{8m^2-8}{m^3-1} : \frac{4m+4}{m^2+m+1} \right) \cdot \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m-1} \right).$$

Ответ: 1.

Если указано $\frac{2}{m^2-1}$, то 2 балла.

10. (3 балла) После смешения двух растворов, один из которых содержал 24г, а другой 10г безводного йодистого калия, получили 100г нового раствора. Найдите концентрацию каждого из первоначальных растворов, если концентрация первого раствора была на 15% больше концентрации второго. **Ответ:** 40, 25.

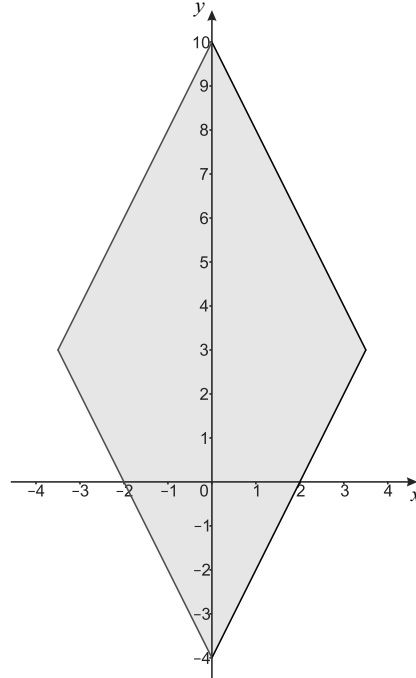
Если верно указано только одно значение, то 1 балл.

11. (5 баллов) а) Постройте фигуру, заданную неравенством $|y - 3| + 2|x| \leq 7$.

б) Найдите её площадь.

Решение: граница фигуры задается уравнением $|y - 3| + 2|x| = 7$. Построенная фигура – ромб, его площадь $S = 49$.

Критерии: Если верно построена фигура, то +4 балла, если построена только часть фигуры, то +2 балла, за нахождение площади +1 балл.



12. (5 баллов) Найдите значения параметра a , при которых система неравенств имеет единственное решение

$$\begin{cases} |x - 3| \leq a, \\ |x - 2a| \leq 5. \end{cases}$$

Решение: решим неравенства относительно переменной

$$|x - 3| \leq a \Rightarrow 3 - a \leq x \leq a + 3;$$

$$|x - 2a| \leq 5 \Rightarrow 2a - 5 \leq x \leq 2a + 5$$

Система неравенств имеет единственное решение, если совпадают концы интервалов либо один из интервалов - точка, входящая во второй интервал. При условии, что $a \geq 0$, получаем $a + 3 = 2a - 5$ или $3 - a = 3 + a$, то есть $a = 8$ или $a = 0$.

Критерии: За решение каждого неравенства по 1 баллу, найдено и проверено каждое из полученных значений параметра – по 1 баллу.

13. (5 баллов) Было 8 калибровочных гирек массами от 1 до 8 г. Одна из них потерялась, а остальные выложили в ряд по убыванию массы. Есть чашечные весы, при помощи которых можно проверить, имеют ли две группы гирек одинаковую массу. Как за 3 проверки определить, какая именно гирька потерялась?

Решение задачи не единственно. Упорядочим гирьки по возрастанию. И сравним, например, следующие суммы: 1) $2 + 4 = 6$, 2) $1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6$, 3) $1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7$. Если все 3 взвешивания верные, то не хватает гирьки №8, если только равенство 3) неверное, то №4, только 2) – №3, только 1) – №6; если только равенство 3) верное, то не хватает гирьки №1, только 2) – №2, только 1) – №7; если все неверные, то не хватает гирьки №5.

Критерии: Если замечено, что при потере грузика номер n грузики с номерами, меньшими n , весят столько грамм, каков их номер, а грузики с номером n и больше весят на 1 г больше, чем их номер, то +1 балл. Если замечено, что для потерянного грузика имеется 8 вариантов, и 3 взвешивания могут иметь как раз $2^3 = 8$ исходов, и каждое взвешивание должно сужать количество вариантов для потерянной гирьки вдвое – +1 балл. По 1 баллу за каждую проверку, которая уменьшает число предыдущих вариантов вдвое. За любой верный алгоритм 5 баллов.

14. (5 баллов) В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие – на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

Решение: изобразим треугольник ABC и квадрат $KLMN$ таким образом, чтобы вершины K и L лежали на стороне BC , а вершины M и N – на сторонах AC и AB соответственно. Высота AP треугольника пересекается со стороной MN квадрата в точке Q . Пусть $BC = a$, сторона квадрата x , а высота $AP = h$. Тогда $AQ = AP - PQ = AP - ML = h - x$. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{AQ}{AP} = \frac{h-x}{h}$, поэтому $MN = \frac{BC \cdot AQ}{AP}$, или $x = a \cdot \frac{h-x}{h}$, откуда $x = \frac{ah}{a+h}$.

Критерии: Доказано подобие треугольников – 1 балл, найден коэффициент подобия $\frac{AQ}{AP} = \frac{h-x}{h}$ – 2 балла.