

**Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
29 апреля 2023г.
1 вариант**

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{4^{3x+2}}{64^x} : x$ при $x = \frac{1}{7}$.

Ответ: _____

2. (2 балла) Вычислите значение выражения $(36,5^2 - 27,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33 \right)$.

Ответ: _____

3. (2 балла) Свежие фрукты содержат 88% воды, а высушенные – 30%. Сколько потребуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных?

Ответ: _____

4. (2 балла) Упростите сложные радикалы: $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$.

Ответ: _____

5. (2 балла) Найдите сумму первых двадцати членов последовательности, заданной формулой $a_n = 2n + 1$.

Ответ: _____

6. (3 балла) Из точки A , лежащей вне окружности с центром O , проведены к ней касательные AB и AC (B и C – точки касания). Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите длину хорды BC , если радиус окружности равен 2 см.

Ответ: _____

7. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$.

Ответ: _____

8. (3 балла) Решите уравнение $|x - 3| = x^2 - 4x + 1$.

Ответ: _____

9. (3 балла) Решите неравенство $\frac{(2x^2 - 7x + 6)(x^2 + 3x - 10)}{(x + 1)(5 + 4x - x^2)} \leq 0$.

Ответ: _____

10. (3 балла) Найдите площадь трапеции с основаниями 10 и 3 и диагоналями 5 и 12.

Ответ: _____

Часть 2

В заданиях 11–14 привести полные решения.

11. (5 баллов) Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если сначала одна первая бригада будет работать 3 дня, а затем одна вторая 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая одна вторая бригада?

12. (6 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 2x - 8)(x - 2)}{|x - 2|}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y = m$ пересекает график функции в 3 точках.

13. (7 баллов) На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .

б) Найдите площадь четырехугольника $AMBD$, если $AC = 10$, $BC = 8$ и $AB = 6$.

14. (7 баллов) Найдите все значения a , при которых система $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Вступительный экзамен по математике
поступающих в 10 (хим, био и соц-эк) класс
29 апреля 2023г.
2 вариант

Часть 1

В заданиях 1–10 записать ответ в указанном месте. Если получается несколько вариантов, нужно указать их все. Если ответом является дробь, то ее следует привести к несократимой (например, вместо $\frac{24}{18}$ записать $\frac{4}{3}$), в неправильной дроби (т.е. числитель которой больше знаменателя) целую часть можно не выделять. Калькулятором, литературой, шпаргалкой и т.п. пользоваться нельзя.

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{5^{3x+1}}{125^x} : x$ при $x = \frac{1}{13}$.

Ответ: _____

2. (2 балла) Вычислите значение выражения $\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53 \right) : (152,5^2 - 27,5^2)$.

Ответ: _____

3. (2 балла) Свежие фрукты содержат 93% воды, а высушенные – 16%. Сколько потребуется свежих фруктов для приготовления 21 кг высушенных?

Ответ: _____

4. (2 балла) Упростите сложные радикалы: $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$.

Ответ: _____

5. (2 балла) Найдите сумму первых тридцати членов последовательности, заданной формулой $a_n = 3n - 1$.

Ответ: _____

6. (3 балла) Из точки A , лежащей вне окружности с центром O , проведены к ней касательные AB и AC (B и C – точки касания). Известно, что $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите длину хорды BC , если радиус окружности равен 4 см.

Ответ: _____

7. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + x + 6)(x^2 + x - 4) = 144$.

Ответ: _____

8. (3 балла) Решите уравнение $|x - 1| = 2x^2 - 4x + 1$.

Ответ: _____

9. (3 балла) Решите неравенство $\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x - 4)}{(x + 2)(8 + 2x - x^2)} \leq 0$.

Ответ: _____

10. (3 балла) Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

Ответ: _____

Часть 2

В заданиях 11–14 привести полные решения.

11. (5 баллов) Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 часов. Если сначала один первый печник будет работать 2 часа, а затем один второй 3 часа, то они выполнят 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь один первый печник?

12. (6 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 4x + 3)(x - 1)}{|x - 1|}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y = m$ пересекает график функции в 3 точках.

13. (7 баллов) На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .

б) Найдите площадь четырехугольника $AMB D$, если $AC = 15$, $BC = 9$ и $AB = 12$.

14. (7 баллов) Найдите все значения a , при которых система $\begin{cases} y + x = a, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решения и критерии оценивания
Вариант №1

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{4^{3x+2}}{64^x} : x$ при $x = \frac{1}{7}$.

Решение. $\frac{4^{3x+2}}{64^x} : x = \frac{4^{3x+2}}{4^{3x}} : x = 4^{3x+2-3x} : x = 16 : x = 16 : \frac{1}{7} = 16 \cdot 7 = 112$.

Ответ: 112.

2. (2 балла) Вычислите значение выражения $(36,5^2 - 27,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33 \right)$.

Решение.

$$\begin{aligned}(36,5^2 - 27,5^2) : \left(\frac{57^3 + 33^3}{90} - 57 \cdot 33 \right) &= \\ &= (36,5 - 27,5)(36,5 + 27,5) : \left(\frac{(57 + 33)(57^2 - 57 \cdot 33 + 33^2)}{90} - 57 \cdot 33 \right) = \\ &= 9 \cdot 64 : (57^2 - 2 \cdot 57 \cdot 33 + 33^2) = 9 \cdot 64 : (57 - 33)^2 = \frac{9 \cdot 64}{24 \cdot 24} = 1.\end{aligned}$$

Ответ: 1.

3. (2 балла) Свежие фрукты содержат 88% воды, а высушенные – 30%. Сколько потребуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных?

Решение. Сухая часть свежих фруктов составляет 12%, а высушенных – 70% от общей массы. Для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется $\frac{70}{12} \cdot 72 = 420$ кг свежих.

Ответ: 420 кг

4. (2 балла) Упростите сложные радикалы: $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} &= \sqrt{17 - 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})^2}} = \\ &= \sqrt{17 - 4|2 + \sqrt{5}|} = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2.\end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{5} - 2$.

5. (2 балла) Найдите сумму первых двадцати членов последовательности, заданной формулой $a_n = 2n + 1$.

Решение. $a_n = 2n + 1 \Rightarrow a_1 = 3, a_{20} = 41$.

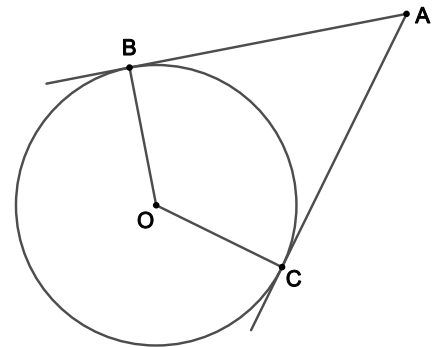
$$S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{3 + 41}{2} \cdot 20 = 440.$$

Ответ: 440.

6. (3 балла) Из точки A, лежащей вне окружности с центром O, проведены к ней касательные AB и AC (B и C – точки касания). Известно, что $\angle ABC = 45^\circ$. Найдите длину хорды BC, если радиус окружности равен 2 см.

Решение. $OB \perp AB$ по теореме о касательной, тогда $\angle OBC = 90^\circ - \angle ABC = 45^\circ$. $\triangle OBC$ – равнобедренный, т.к. $OB = OC = R$, тогда $\angle BCO = 45^\circ$, $\angle BOC = 90^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ – прямоугольный. По теореме Пифагора $BC^2 = BO^2 + OC^2 = 8 \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.



7. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$.

Решение. Введем замену $t = x^2 - 5x$. Тогда $(t+4)(t+6) = 120 \Leftrightarrow t^2 + 10t - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -16, \\ t = 6. \end{cases}$

Возвращаясь обратно к x , получим $\begin{cases} x^2 - 5x = -16, \\ x^2 - 5x = 6. \end{cases}$ Уравнение $x^2 - 5x + 16 = 0$ корней не имеет, а уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$ дает нам корни $x = 6, x = -1$.

Ответ: $x = 6, x = -1$.

8. (3 балла) Решите уравнение $|x - 3| = x^2 - 4x + 1$.

Решение.

$$|x-3| = x^2-4x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-3 = x^2-4x+1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 < 0, \\ -x+3 = x^2-4x+1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 4, \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = 4, x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

9. (3 балла) Решите неравенство $\frac{(2x^2 - 7x + 6)(x^2 + 3x - 10)}{(x+1)(5+4x-x^2)} \leq 0$.

Решение. Найдем корни числителя и корни знаменателя и решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{(2x^2 - 7x + 6)(x^2 + 3x - 10)}{(x+1)(5+4x-x^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x-1,5)(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+1)(x-5)} \geq 0.$$

Корни $x = -1$ и $x = 2$ четной кратности, при переходе через них знаки не меняются.

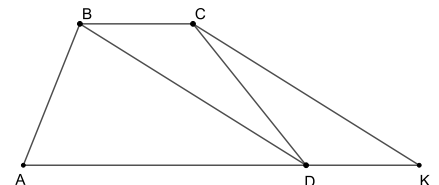
Ответ: $x \in [-5; -1) \cup (-1; 1,5] \cup \{2\} \cup (5; +\infty)$.

10. (3 балла) Найдите площадь трапеции с основаниями 10 и 3 и диагоналями 5 и 12.

Решение. Построим $CK \parallel BD$, $AD \cap CK = K$. Рассмотрим треугольник ACK : $AC = 5$, $CK = BD = 12$, $AK = AD + DK = 13$. Заметим, что $AK^2 = AC^2 + CK^2$, следовательно $\triangle ACK$ – прямоугольный и $S_{ACK} = \frac{1}{2}AC \cdot CK = 30$.

$S_{ABCD} = S_{ACK}$, т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle CDK$ равновелики.

Ответ: 30.



11. (5 баллов) Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если сначала одна первая бригада будет работать 3 дня, а затем одна вторая 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая одна вторая бригада?

Решение. Пусть x дней – время, за которое выполнит всю работу одна первая бригада, а y дней – время за которое выполнит работу одна вторая бригада, объем выполняемой работы возьмем за 1.

Получим систему: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{12} = \frac{3}{4}. \end{cases}$ Решая эту систему, получим $\begin{cases} x = 12, \\ y = 24. \end{cases}$

Ответ: 24

12. (6 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 2x - 8)(x - 2)}{|x - 2|}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y = m$ пересекает график функции в 3 точках.

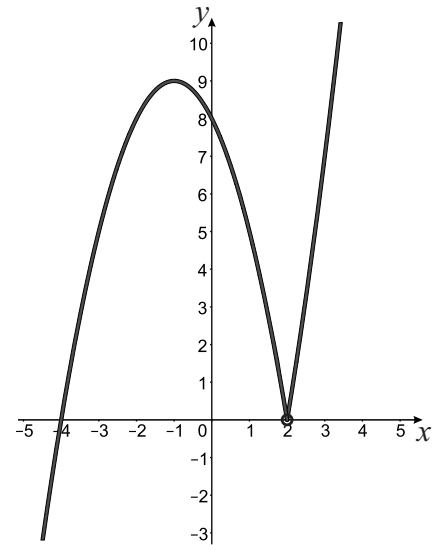
Решение. $y = \begin{cases} \frac{(x^2 + 2x - 8)(x - 2)}{x - 2}, x > 2, \\ \frac{(x^2 + 2x - 8)(x - 2)}{2 - x}, x < 2; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 8, x > 2, \\ -x^2 - 2x + 8, x < 2; \end{cases}$

1) Построим часть параболы $y = x^2 + 2x - 8$ при $x > 2$. Вершина параболы имеет координаты $x_0 = -1, y_0 = -9$, ветви направлены вверх. Граничная точка $(2; 0)$ выколота.

2) Построим часть параболы $y = -x^2 - 2x + 8$ при $x < 2$. Вершина параболы имеет координаты $x_0 = -1, y_0 = 9$, ветви направлены вниз. Граничная точка $(2; 0)$ выколота.

Прямая $y = m$ пересекает построенный график в трех точках при $m \in (0; 9)$.

Ответ: $m \in (0; 9)$.



13. (7 баллов) На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .

б) Найдите площадь четырехугольника $AMBD$, если $AC = 10, BC = 8$ и $AB = 6$.

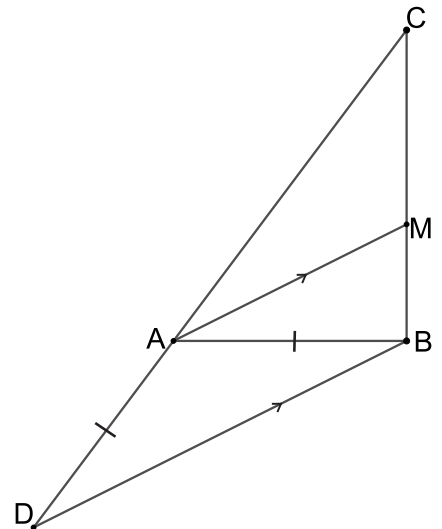
Решение. а) $\angle BAM = \angle ABD$ — как накрест лежащие при $AM \parallel BD$ и секущей AB , $\angle MAC = \angle BDA$ — как соответственные, $\angle ADB = \angle ABD$, т.к. $\triangle ABD$ равнобедренный. Следовательно, $\angle BAM = \angle MAC$ и AM — биссектриса $\triangle ABC$.

б) Заметим, что $AC^2 = AB^2 + BC^2$, следовательно $\triangle ABC$ — прямоугольный, AM — биссектриса, значит $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$, откуда $MC = 5$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 24 \quad \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{8}, \quad S_{AMC} = \frac{5}{8} S_{ABC} = 15.$$

$$\triangle AMC \sim \triangle DCB \text{ с } k = \frac{BC}{MC} = \frac{8}{5}. \text{ Тогда } S_{DBC} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 S_{AMC} = 38,4, \quad S_{AMBD} = S_{DBC} - S_{AMC} = 23,4.$$

Ответ: 23,4.



14. (7 баллов) Найдите все значения a , при которых система $\begin{cases} y - x = a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Выразим $y = x + a$ из первого уравнения системы и подставим во второе. Получим $x^2 + (x + a)^2 = 4$, после раскрытия скобок получаем $2x^2 + 2ax + a^2 - 4 = 0$. Система имеет единственное решение, когда это квадратное уравнение имеет единственный корень, т.е. когда $D = 0$. $D = 4a^2 - 8(a^2 - 4) = -4a^2 + 32$, приравнявая к 0, получаем $a = \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $a = \pm 2\sqrt{2}$.

Решения и критерии оценивания
Вариант №2

1. (2 балла) Найдите значение выражения $\frac{5^{3x+1}}{125^x} : x$ при $x = \frac{1}{13}$.

Решение. $\frac{5^{3x+1}}{125^x} : x = \frac{5^{3x+1}}{5^{3x}} : x = 5^{3x+1-3x} : x = 5 : x = 5 : \frac{1}{13} = 5 \cdot 13 = 65$.

Ответ: 65.

2. (2 балла) Вычислите значение выражения $\left(\frac{97^3 - 53^3}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152,5^2 - 27,5^2)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{(97 - 53)(97^2 + 97 \cdot 53 + 53^2)}{44} + 97 \cdot 53\right) : (152,5 - 27,5)(152,5 + 27,5) = \\ = \frac{97^2 + 2 \cdot 97 \cdot 53 + 53^2}{125 \cdot 180} = \frac{150 \cdot 150}{125 \cdot 180} = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

3. (2 балла) Свежие фрукты содержат 93% воды, а высушенные – 16%. Сколько потребуется свежих фруктов для приготовления 21 кг высушенных?

Решение. Сухая часть свежих фруктов составляет 7%, а высушенных – 84% от общей массы. Для приготовления 72 кг высушенных фруктов требуется $\frac{84}{7} \cdot 21 = 252$ кг свежих.

Ответ: 252 кг.

4. (2 балла) Упростите сложные радикалы: $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}} &= \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}} = \\ &= \sqrt{5 - |2\sqrt{3} + 1|} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{3} - 1$.

5. (2 балла) Найдите сумму первых тридцати членов последовательности, заданной формулой $a_n = 3n - 1$.

Решение. $a_n = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2, a_{30} = 89$.

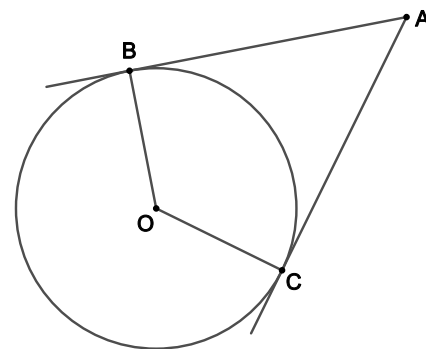
$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{2 + 89}{2} \cdot 30 = 1365.$$

Ответ: 1365.

6. (3 балла) Из точки A, лежащей вне окружности с центром O, проведены к ней касательные AB и AC (B и C – точки касания). Известно, что $\angle ABC = 30^\circ$. Найдите длину хорды BC, если радиус окружности равен 4 см.

Решение. $OB \perp AB$ по теореме о касательной, тогда $\angle OBC = 90^\circ - \angle ABC = 60^\circ$. $\triangle OBC$ – равнобедренный, т.к. $OB = OC = R$, тогда $\angle BCO = 60^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \triangle BOC$ – равносторонний $\Rightarrow BC = OB = 4$.

Ответ: 4.



7. (3 балла) Решите уравнение $(x^2 + x + 6)(x^2 + x - 4) = 144$.

Решение. Введем замену $t = x^2 + x$. Тогда $(t + 6)(t - 4) = 144 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 168 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -14, \\ t = 12. \end{cases}$

Возвращаясь обратно к x , получим $\begin{cases} x^2 + x = -14, \\ x^2 + x = 12. \end{cases}$ Уравнение $x^2 + x + 14 = 0$ корней не имеет, а уравнение $x^2 + x - 12 = 0$ дает нам корни $x = -4, x = 3$.

Ответ: $x = -4, x = 3$.

8. (3 балла) Решите уравнение $|x - 1| = 2x^2 - 4x + 1$.

Решение.

$$|x - 1| = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 = 2x^2 - 4x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0, \\ -x + 1 = 2x^2 - 4x + 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ x = 2, \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ \begin{cases} x = 0, \\ x = 1,5; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 0, x = 2$

9. (3 балла) Решите неравенство $\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x - 4)}{(x + 2)(8 + 2x - x^2)} \leq 0$.

Решение. Найдем корни числителя и корни знаменателя и решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{(3x^2 - 5x + 2)(x^2 + 3x - 4)}{(x + 2)(8 + 2x - x^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x - 1)(x - \frac{2}{3})(x + 4)(x - 1)}{(x + 2)(x + 2)(x - 4)} \geq 0.$$

Корни $x = -2$ и $x = 1$ четной кратности, при переходе через них знаки не меняются.

Ответ: $x \in [-4; -2) \cup \left(-2; \frac{2}{3}\right] \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$.

10. (3 балла) Найдите площадь трапеции с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12.

Решение. Построим $CK \parallel BD$, $AD \cap CK = K$. Рассмотрим треугольник ACK : $AC = 9$, $CK = BD = 12$, $AK = AD + DK = AD + BC = 15$. Заметим, что $AK^2 = AC^2 + CK^2$, следовательно $\triangle ACK$ – прямоугольный и $S_{ACK} = \frac{1}{2}AC \cdot CK = 54$.

$S_{ABCD} = S_{ACK}$, т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle CDK$ равновелики.

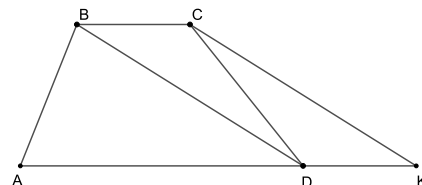
Ответ: 54.

11. (5 баллов) Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 часов. Если сначала один первый печник будет работать 2 часа, а затем один второй 3 часа, то они выполнят 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь один первый печник?

Решение. Пусть x дней – время, за которое выполнит всю работу один первый печник, а y дней – время за которое выполнит работу один второй печник, объем выполняемой работы возьмем за

1. Получим систему: $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{5}. \end{cases}$ Решая эту систему, получим $\begin{cases} x = 20, \\ y = 30. \end{cases}$

Ответ: 20.



12. (6 баллов) Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 4x + 3)(x - 1)}{|x - 1|}$. Найдите все значения m , при которых прямая $y = m$ пересекает график функции в 3 точках.

Решение.

$$y = \begin{cases} \frac{(x^2 - 4x + 3)(x - 1)}{x - 1}, & x > 1, \\ \frac{(x^2 - 4x + 3)(x - 1)}{1 - x}, & x < 1; \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x > 1, \\ -x^2 + 4x - 3, & x < 1; \end{cases}$$

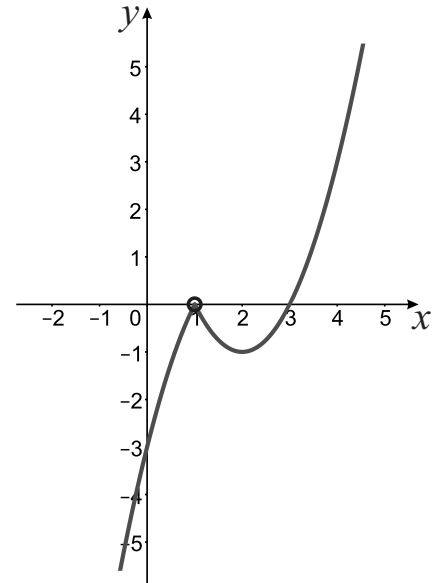
1) Построим часть параболы $y = x^2 - 4x + 3$ при $x > 1$. Вершина параболы имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, ветви направлены вверх. Граничная точка $(1; 0)$ выколота.

2) Построим часть параболы $y = -x^2 + 4x - 3$ при $x < 1$. Вершина параболы имеет координаты $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, ветви направлены вниз. Граничная точка $(1; 0)$ выколота.

рис 3.2

Прямая $y = m$ пересекает построенный график в трех точках при $m \in (-1; 0)$.

Ответ: $m \in (-1; 0)$.



13. (7 баллов) На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отмечена точка D так, что $AD = AB$. Прямая, проходящая через точку A , параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM — биссектриса треугольника ABC .

б) Найдите площадь четырехугольника $AMBD$, если $AC = 15$, $BC = 9$ и $AB = 12$.

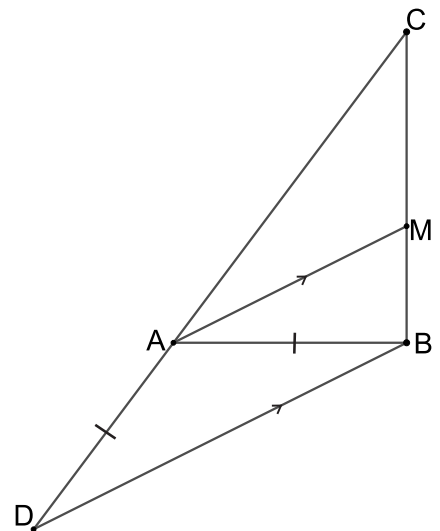
Решение. а) $\angle BAM = \angle ABD$ — как накрест лежащие при $AM \parallel BD$ и секущей AB , $\angle MAC = \angle BDA$ — как соответственные, $\angle ADB = \angle ABD$, т.к. $\triangle ABD$ равнобедренный. Следовательно, $\angle BAM = \angle MAC$ и AM — биссектриса $\triangle ABC$.

б) Заметим, что $AC^2 = AB^2 + BC^2$, следовательно $\triangle ABC$ — прямоугольный, AM — биссектриса, значит $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$, откуда $MC = 5$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 54 \quad \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{5}{9}, \quad S_{AMC} = \frac{5}{9} S_{ABC} = 30.$$

$$\triangle AMC \sim \triangle DCB \text{ с } k = \frac{BC}{MC} = \frac{9}{5}. \text{ Тогда } S_{DBC} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{AMC} = 97,2, \quad S_{AMBD} = S_{DBC} - S_{AMC} = 67,2.$$

Ответ: 67,2.



14. (7 баллов) Найдите все значения a , при которых система $\begin{cases} y + x = a, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Выразим $y = a - x$ из первого уравнения системы и подставим во второе. Получим $x^2 + (a - x)^2 = 9$, после раскрытия скобок получаем $2x^2 - 2ax + a^2 - 9 = 0$. Система имеет единственное решение, когда это квадратное уравнение имеет единственный корень, т.е. когда $D = 0$. $D = 4a^2 - 8(a^2 - 9) = -4a^2 + 72$, приравняв к 0, получаем $a = \pm 3\sqrt{2}$.

Ответ: $a = \pm 3\sqrt{2}$.

Критерии оценивания

Часть 1

Задания 1-3, 5: правильный ответ – 2 балла, в других случаях – 0 баллов.

Задание 4: правильный ответ – 2 балла, ответ без учета знака модуля – 1 балл, в других случаях – 0 баллов.

Задание 6: правильный ответ – 3 балла, в других случаях – 0 баллов.

Задание 7: правильный ответ – 3 балла, в ответе указан только один верный корень или указано множество из четырех чисел, два из которых являются корнями – 1 балл, в других случаях – 0 баллов.

Задание 8: правильный ответ – 3 балла, в ответе указаны 4 корня без учета раскрытия модуля – 1 балл, в других случаях – 0 баллов.

Задание 9: правильный ответ – 3 балла, ответ, отличающийся от верного включением-исключением граничных точек (кроме изолированной) – 2 балла, ответ из верных промежутков без изолированной точки – 1 балл, в других случаях – 0 баллов.

Задание 10: правильный ответ – 3 балла, в других случаях – 0 баллов.

Часть 2

Задание 11:

обоснованный верный ответ – 5 баллов,

приведены верные шаги решения, получен ответ с допущенной арифметической ошибкой или приведен ответ для другого рабочего – 4 балла,
составлена верная система уравнений – 2 балла,
в других случаях – 0 баллов.

Задание 12:

верно построен график с выколотой точкой, верно указан промежуток для параметра – 6 баллов,
верно построен график с выколотой точкой, указан промежуток для параметра, отличающийся от верного включением-исключением граничных точек – 5 баллов,

верно построен график с выколотой точкой, не указан или указан неверный промежуток для параметра или построен график без выколотой точки и верно указано значение параметра – 4 балла,
построен график, отличающийся от верного отсутствием выколотой точки – 2 балла,
верно указано кусочное задание функции, но график не построен или построен неверно – 1 балл,
в других случаях – 0 баллов.

Задание 13 (баллы приведены отдельно по пунктам):

верное доказательство в п.а) – 3 балла,
в п.б) доказано подобие треугольников, дальнейшее решение отсутствует или неверно – 2 балла,
в п.б) приведено верное решение, получен ответ с допущенной арифметической ошибкой – 3 балла.

Задание 14 (баллы приведены по шагам решения, по итогу складываются):

сведение к верному квадратному уравнению или к верному изображению множества точек на координатной плоскости – 2 балла,

записано условие $D = 0$ (сам дискриминант может быть не найден или найден неверно) или указано, что прямая касается окружности – 1 балл,

каждое верное значение a – по 2 балла.