

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в 10 физмат, матинф и физтех классы (2023)

В а р и а н т 1

Часть 1

К задачам 1–11 приведите только ответ (впишите его после слова «Ответ»).

*Решение этих задач в чистовик записывать **не нужно**.*

1. (2 балла) Известно, что все решения уравнения $y = \frac{3x-a}{x-7}$ (то есть точки координатной плоскости Oxy , координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению) лежат на одной прямой. Найдите a .

Ответ: _____

2. (2 балла) Решите уравнение $\frac{3(2x+3)}{x^2} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 - 1$.

Ответ: _____

3. (2 балла) В питомнике живет какое-то количество кроликов и имеется некоторый запас корма для них. 30% кроликов съедают 70% корма за 49 дней (остальные кролики в это время пасутся на лужайке и едят травку). За сколько дней 70% кроликов съели бы 30% корма? (Прожорливость каждого кролика считать одной и той же.)

Ответ: _____

4. (2 балла) Решите неравенство $1 + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{7x-10-x^2} + \sqrt{x^4+1}$.

Ответ: _____

5. (2 балла) Найдите расстояние от точки $O(0,0)$ до прямой, заданной уравнением $y = \frac{4}{3}x + 8$.

Ответ: _____

6. (2 балла) Количество девочек в классе составляет 65% от количества мальчиков. Сколько всего детей в классе, если известно, что их меньше 35?

Ответ: _____

7. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+5} - \sqrt[3]{8x-10} = (8x-10)^5 - (x^2+5)^5$.

Ответ: _____

8. (2 балла) Найдите площадь фигуры, заданной на плоскости Oxy неравенством

$$\sqrt{2-|x|} \cdot \sqrt{3-|y|} \geq 0.$$

Ответ: _____

9. (3 балла) В квадратном уравнении $x^2 + bx + c = 0$ числа b , c и оба корня — целые. Кроме того, оба корня положительны и делятся на 7, а про число c известно, что $50 < c < 100$. Найдите число b .

Ответ: _____

10. (3 балла) На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки R и S (порядок точек: A, R, S, D). Отрезки CR и BS пересекаются в точке K , при этом площади треугольников BKC и RKS равны 12 и 3 соответственно, а площадь четырехугольника $CKSD$ равна 9. Найдите площадь четырехугольника $BKRA$.

Ответ: _____

11. (3 балла) Последовательность $5, 6, 8, 11, 15, \dots$ задана условиями $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n + n$. Найдите x_{400} .

Ответ: _____

Часть 2

Для задач 12–15 запишите в чистовике полные решения.

12. (4 балла) В компьютерной сети имеется 17 компьютеров, но n из них ($0 \leq n \leq 17$) взломаны хакерами. На каждом компьютере запущена программа, показывающая количество взломанных компьютеров из оставшихся 16 (кроме собственного компьютера). Если собственный компьютер взломан, то эта программа показывает неправильное число. В один прекрасный день программист Вася обнаружил, что каждый из 17 компьютеров показывает число 16. Сколько компьютеров взломано на самом деле?

13. (7 баллов) Найдите все такие натуральные числа x , чтобы числа $a = x^2 - 4x - 3$ и $b = x^2 + 8x + 2$ были простыми.

14. (7 баллов) Точки A и B лежат внутри описанного четырехугольника $PQRS$. Расстояния до сторон этого четырехугольника от точки A равны 10, 14, 6 и 2, а от точки B (в том же порядке) — 9, 11, 7 и 5. Найдите радиус вписанной в $PQRS$ окружности.

15. (7 баллов) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , являющаяся решением уравнения

$$(x^2 + y^2 + a^2 - 2(xa + 2))^2 + (|x| - 5)^2 = 0 ?$$

В а р и а н т 2

Часть 1

К задачам 1–11 приведите только ответ (впишите его после слова «Ответ»).

Решение этих задач в чистовик записывать **не нужно**.

1. (2 балла) Известно, что все решения уравнения $y = \frac{2x + b}{x + 13}$ (то есть точки координатной плоскости Oxy , координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению) лежат на одной прямой. Найдите b .

Ответ: _____

2. (2 балла) Решите уравнение $\frac{2(2 - 4x)}{x^2} = \left(2 - \frac{2}{x}\right)^2 - 4$.

Ответ: _____

3. (2 балла) Зимовщики взяли с собой в Антарктиду некоторый запас апельсинового сока. Если бы сок употребляли только 20% зимовщиков, то 80% взятого сока они бы выпили за 64 дня. За сколько дней 80% зимовщиков выпили бы 20% сока? (Предполагается, что каждый зимовщик, употребляющий сок, ежедневно выпивает по одному стакану сока.)

Ответ: _____

4. (2 балла) Решите неравенство $1 + \sqrt{x - 3} \leq \sqrt{5x - 6 - x^2} + \sqrt{x^4 + 7}$.

Ответ: _____

5. (2 балла) Найдите расстояние от точки $O(0, 0)$ до прямой, заданной уравнением $y = 4 - \frac{4}{3}x$.

Ответ: _____

6. (2 балла) В волшебном болоте живут крокодилы и бегемоты. Количество крокодилов составляет 74% от количества бегемотов. Сколько всего животных в волшебном болоте, если известно, что их меньше 100?

Ответ: _____

7. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+3} - \sqrt[3]{10x-21} = (10x-21)^3 - (x^2+3)^3$.

Ответ: _____

8. (2 балла) Найдите площадь фигуры, заданной на плоскости Oxy неравенством

$$\sqrt{7-|y|} \cdot \sqrt{4-|x|} \geq 0.$$

Ответ: _____

9. (3 балла) В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ числа p , q и оба корня — целые. Кроме того, оба корня положительны и делятся на 5, а про число q известно, что $30 < q < 70$. Найдите число p .

Ответ: _____

10. (3 балла) На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q (порядок точек: A, P, Q, D). Отрезки CP и BQ пересекаются в точке M , при этом площади треугольников BMC и PMQ равны 18 и 2 соответственно, а площадь четырехугольника $ABMP$ равна 15. Найдите площадь четырехугольника $DCMQ$.

Ответ: _____

11. (3 балла) Последовательность $3, 4, 6, 9, 13, \dots$ задана условиями $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n + n$. Найдите x_{600} .

Ответ: _____

Часть 2

Для задач 12–15 запишите в чистовике полные решения.

12. (4 балла) За круглым столом сидят 23 человека, n из которых ($0 \leq n \leq 23$) больны новым опасным заболеванием — зеленоухостью. У человека, больного зеленоухостью, уши становятся зелеными и, кроме того, он начинает всегда говорить неправду (здоровые люди всегда говорят правду). Неожиданно каждый из этих 23 человек говорит присутствующим: «Вы все зеленоухие!» Сколько среди присутствующих зеленоухих на самом деле?

13. (7 баллов) Найдите все такие натуральные числа x , чтобы оба числа $a = x^2 - 3x - 2$ и $b = x^2 + 13x + 3$ были простыми.

14. (7 баллов) Точки X и Y лежат внутри описанного четырехугольника $ABCD$. Расстояния до сторон этого четырехугольника от точки X равны 6, 16, 14 и 2, а от точки Y (в том же порядке) — 8, 13, 12 и 6. Найдите радиус вписанной в $ABCD$ окружности.

15. (7 баллов) При каких значениях параметра b существует единственная пара чисел (x, y) , являющаяся решением уравнения

$$(x^2 + y^2 + b^2 - 2(xb + 4) - 1)^2 + (|x| - 7)^2 = 0 ?$$

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ (РЕШЕНИЯ)
для поступающих в 10 физмат, матинф и физтех классы (2023)

В а р и а н т 1

1. (2 балла) Известно, что все решения уравнения $y = \frac{3x-a}{x-7}$ (то есть точки координатной плоскости Oxy , координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению) лежат на одной прямой. Найдите a .

Решение. При $a \neq 21$ графиком функции, заданной указанной в условии формулой, является гипербола, точки которой (x, y) и будут решениями данного уравнения. При $a = 21$ графиком функции (множеством точек — решений уравнения) будет прямая $y = 3$ с «выколотой» точкой $(7, 3)$.

Ответ: 21.

2. (2 балла) Решите уравнение $\frac{3(2x+3)}{x^2} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 - 1$.

Решение. ОДЗ уравнения задается условием $x \neq 0$. После разложения правой части на множители по формуле разности квадратов получим тождество $\frac{3}{x} \cdot \frac{2x+3}{x} = \frac{3}{x} \cdot \left(2 + \frac{3}{x}\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. (2 балла) В питомнике живет какое-то количество кроликов и имеется некоторый запас корма для них. 30% кроликов съедают 70% корма за 49 дней (остальные кролики в это время пасутся на лужайке и едят травку). За сколько дней 70% кроликов съели бы 30% корма? (Прожорливость каждого кролика считать одной и той же.)

Решение. Эти же 30% кроликов съели бы 30% корма за $\frac{49 \cdot 30}{70} = 21$ день. Если кроликов 70%, они съедят корм быстрее, за $\frac{21 \cdot 30}{70} = 9$ дней.

Ответ: за 9 дней.

4. (2 балла) Решите неравенство $1 + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{7x-10-x^2} + \sqrt{x^4+1}$.

Решение. ОДЗ неравенства задается условиями $2-x \geq 0$, $7x-10-x^2 \geq 0$. Этим условиям удовлетворяет единственное значение $x = 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $x = 2$.

5. (2 балла) Найдите расстояние от точки $O(0,0)$ до прямой, заданной уравнением $y = \frac{4}{3}x + 8$.

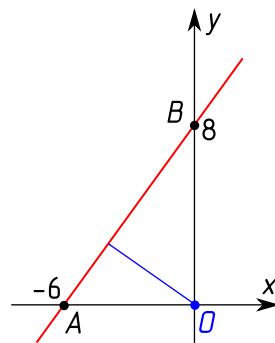
Решение. Найдём координаты точек пересечения данной прямой с осями координат: $A(-6, 0)$, $B(0, 8)$. Искомое расстояние будет равно длине высоты треугольника AOB , проведенной из точки O , то есть $\frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$.

Ответ: 4,8.

6. (2 балла) Количество девочек в классе составляет 65% от количества мальчиков. Сколько всего детей в классе, если известно, что их меньше 35?

Решение. Пусть x — количество мальчиков, тогда количество девочек $0,65x$, а общее количество детей в классе $1,65x = \frac{33x}{20}$. Для того, чтобы это число было целым, необходимо, чтобы x делилось на 20. Но, очевидно, $x < 35$, поэтому $x = 20$, а общее число детей в классе 33.

Ответ: 33.



7. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+5} - \sqrt[3]{8x-10} = (8x-10)^5 - (x^2+5)^5$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{x^2+5} + (x^2+5)^5 = \sqrt[3]{8x-10} + (8x-10)^5$ и рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^5$. Эта функция, как сумма двух строго возрастающих функций, является строго возрастающей, поэтому из $f(a) = f(b)$ следует, что $a = b$, то есть $x^2 + 5 = 8x - 10$, откуда $x \in \{3, 5\}$.

Ответ: $\{3, 5\}$.

8. (2 балла) Найдите площадь фигуры, заданной на плоскости Oxy неравенством

$$\sqrt{2-|x|} \cdot \sqrt{3-|y|} \geq 0.$$

Решение. Произведение двух арифметических квадратных корней всегда неотрицательно, поэтому искомая фигура задается только ОДЗ неравенства, то есть двумя условиями $|x| \leq 2$, $|y| \leq 3$. Эти условия задают прямоугольник с длинами сторон 4 и 6; его площадь равна 24.

Ответ: 24.

9. (3 балла) В квадратном уравнении $x^2 + bx + c = 0$ числа b , c и оба корня — целые. Кроме того, оба корня положительны и делятся на 7, а про число c известно, что $50 < c < 100$. Найдите число b .

Решение. Поскольку по теореме Виета число c равно произведению корней, оно делится на 49. Следовательно, $c = 98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$. Тогда корни уравнения 7 и 14, поэтому $b = -(7 + 14) = -21$.

Ответ: -21.

10. (3 балла) На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки R и S (порядок точек: A, R, S, D). Отрезки CR и BS пересекаются в точке K , при этом площади треугольников BKC и RKS равны 12 и 3 соответственно, а площадь четырехугольника $CKSD$ равна 9. Найдите площадь четырехугольника $BKRA$.

Решение. Треугольники BKC и RKS , очевидно, подобны с коэффициентом 2 (поскольку отношение их площадей равно 4), поэтому отношение длин их высот, проведенных из точки K , равно 2. Если высота треугольника BKC равна $2h$, то высота треугольника RKS равна h и, следовательно, $AB = 3h$. По условию, $S_{BKC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 2h = 12$, откуда $BC \cdot h = 12$, поэтому $S_{ABCD} = BC \cdot AB = BC \cdot 3h = 36$. Тогда $S_{BKRA} = 36 - 12 - 9 - 3 = 12$.

Ответ: 12.

11. (3 балла) Последовательность $5, 6, 8, 11, 15, \dots$ задана условиями $x_1 = 5$, $x_{n+1} = x_n + n$. Найдите x_{400} .

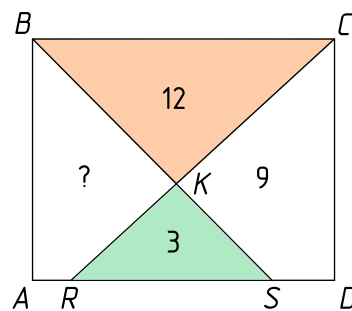
Решение. По условию $x_1 = 5$, $x_2 = 5 + 1$, $x_3 = 5 + 1 + 2$, $x_4 = 5 + 1 + 2 + 3, \dots$, поэтому

$$x_{400} = 5 + (1 + 2 + 3 + \dots + 399) = 5 + \frac{1 + 399}{2} \cdot 399 = 79805.$$

Ответ: 79805.

12. (4 балла) В компьютерной сети имеется 17 компьютеров, но n из них ($0 \leq n \leq 17$) взломаны хакерами. На каждом компьютере запущена программа, показывающая количество взломанных компьютеров из оставшихся 16 (кроме собственного компьютера). Если собственный компьютер взломан, то эта программа показывает неправильное число. В один прекрасный день программист Вася обнаружил, что каждый из 17 компьютеров показывает число 16. Сколько компьютеров взломано на самом деле?

Решение. Если бы все компьютеры были взломаны, то каждый не мог бы показывать число 16 (оно было бы тогда верным, что по условию не может показываться на взломанном компьютере). Следовательно, есть хотя бы один нормальный компьютер. Если остальные 16 компьютеров взломаны, то нормальный компьютер показывает число 16, как и должно быть, а остальные также



показывают 16, что является неверным, то есть условие задачи выполняется. Двух и более нормальных компьютеров быть не может, так как тогда каждый из них должен был бы показывать число, меньшее 16. Таким образом, нормальный компьютер только один, а взломанных 16.

Ответ: 16.

Приведен верный ответ	1
Доказано, что все компьютеры не могут быть взломаны	+1
Доказано, что ровно один нормальный компьютер удовлетворяет условию	+1
Доказано, что двух и более нормальных компьютеров быть не может	+1

13. (7 баллов) Найдите все такие натуральные числа x , чтобы числа $a = x^2 - 4x - 3$ и $b = x^2 + 8x + 2$ были простыми.

Решение. Рассмотрим разность:

$$b - a = (x^2 + 8x + 2) - (x^2 - 4x - 3) = 12x + 5.$$

Она является, как нетрудно заметить, нечетным числом (так как $12x$ всегда четно), поэтому числа a и b имеют разную четность, то есть одно из них обязательно четное. Но если простое число является четным, оно может быть равно только 2. Уравнение $x^2 + 8x + 2 = 2$ натуральных корней не имеет, а уравнение $x^2 - 4x - 3 = 2$ имеет единственный натуральный корень $x = 5$. Подставляя $x = 5$ в трехчлен $x^2 + 8x + 2$, получаем число 67, являющееся простым.

Ответ: $x = 5$.

Приведен лишь верный ответ, найденный подбором	1
Написано, что одно из чисел равно 2	+2
Доказано, что одно из чисел равно 2	+2
Найдено значение x , при котором одно из чисел равно 2	+1
Проверено, что при этом значении x второе число также является простым	+2

14. (7 баллов) Точки A и B лежат внутри описанного четырехугольника $PQRS$. Расстояния до сторон этого четырехугольника от точки A равны 10, 14, 6 и 2, а от точки B (в том же порядке) — 9, 11, 7 и 5. Найдите радиус вписанной в $PQRS$ окружности.

Решение. Докажем сначала, что если h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояния от произвольной точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его сторон с длинами соответственно a, b, c, d , то

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 + dh_4 = 2S,$$

где S — площадь данного четырехугольника. Это следует из того, что площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, показанных на рисунке разными цветами, то есть

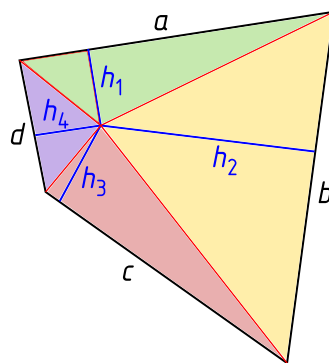
$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ch_3 + \frac{1}{2}dh_4 = S.$$

Пусть теперь a, b, c, d — длины сторон данного четырехугольника, а S — его площадь, тогда по условию

$$\begin{cases} 10a + 14b + 6c + 2d = 2S, \\ 9a + 11b + 7c + 5d = 2S. \end{cases}$$

Домножая второе уравнение на 2 и вычитая из результата первое уравнение, получим $8a + 8b + 8c + 8d = 2S$, откуда $r = \frac{2S}{a + b + c + d} = 8$.

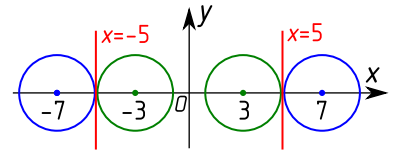
Ответ: 8.



Получена зависимость между длинами сторон, расстояниями от внутренней точки четырехугольника до сторон и площадью	+2
Экзаменуемый знает зависимость между периметром четырехугольника, радиусом вписанной окружности и площадью	+1
Составлена система уравнений, позволяющая получить верный ответ	+2
Система уравнений решена, получен верный ответ	+2

15. (7 баллов) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , являющаяся решением уравнения

$$(x^2 + y^2 + a^2 - 2(xa + 2))^2 + (|x| - 5)^2 = 0 \quad ?$$



Решение. Поскольку сумма квадратов двух чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 4, \\ |x| = 5. \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает окружность радиуса 2 с центром в точке $(a, 0)$, а второе — пару прямых $x = 5$ и $x = -5$. Система имеет единственное решение, когда окружность касается одной из этих прямых; все случаи такого расположения окружности показаны на рисунке. В каждом случае координаты центра окружности (и соответствующие им значения a) очевидны.

Ответ: $a \in \{-7, -3, 3, 7\}$.

Верно и обоснованно найдены все значения параметра	7
Верно и обоснованно найдены два значения параметра	5
Верно и обоснованно найдено одно значение параметра	3
В решении содержатся отдельные верные преобразования или доказанные утверждения, приближающие к верному решению, но ни одно из верных значений параметра не найдено	1

В а р и а н т 2

1. (2 балла) Известно, что все решения уравнения $y = \frac{2x + b}{x + 13}$ (то есть точки координатной плоскости Oxy , координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению) лежат на одной прямой. Найдите b .

Решение. При $b \neq 26$ графиком функции, заданной указанной в условии формулой, является гипербола, точки которой (x, y) и будут решениями данного уравнения. При $b = 26$ графиком функции (множеством точек — решений уравнения) будет прямая $y = 2$ с «выколотой» точкой $(-13, 2)$.

Ответ: 26.

2. (2 балла) Решите уравнение $\frac{2(2 - 4x)}{x^2} = \left(2 - \frac{2}{x}\right)^2 - 4$.

Решение. ОДЗ уравнения задается условием $x \neq 0$. После разложения правой части на множители по формуле разности квадратов получим тождество $\frac{2}{x} \cdot \frac{2 - 4x}{x} = -\frac{2}{x} \cdot \left(4 - \frac{2}{x}\right)$.

Ответ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3. (2 балла) Зимовщики взяли с собой в Антарктиду некоторый запас апельсинового сока. Если бы сок употребляли только 20% зимовщиков, то 80% взятого сока они бы выпили за 64 дня. За сколько дней 80% зимовщиков выпили бы 20% сока? (Предполагается, что каждый зимовщик, употребляющий сок, ежедневно выпивает по одному стакану сока.)

Решение. Эти же 20% зимовщиков выпили бы 20% сока за $\frac{64 \cdot 20}{80} = 16$ дней. Если зимовщиков 80%, они выпьют сок быстрее, за $\frac{16 \cdot 20}{80} = 4$ дня.

Ответ: за 4 дня.

4. (2 балла) Решите неравенство $1 + \sqrt{x-3} \leq \sqrt{5x-6-x^2} + \sqrt{x^4+7}$.

Решение. ОДЗ неравенства задается условиями $x-3 \geq 0$, $5x-6-x^2 \geq 0$. Этим условиям удовлетворяет единственное значение $x=3$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x=3$ является решением исходного неравенства.

Ответ: $x=3$.

5. (2 балла) Найдите расстояние от точки $O(0,0)$ до прямой, заданной уравнением $y = 4 - \frac{4}{3}x$.

Решение. Найдём координаты точек пересечения данной прямой с осями координат: $A(3,0)$, $B(0,4)$. Искомое расстояние будет равно длине высоты треугольника AOB , проведенной из точки O , то есть $\frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4$.

Ответ: 2,4.

6. (2 балла) В волшебном болоте живут крокодилы и бегемоты. Количество крокодилов составляет 74% от количества бегемотов. Сколько всего животных в волшебном болоте, если известно, что их меньше 100?

Решение. Пусть x — количество бегемотов, тогда количество крокодилов $0,74x$, а общее количество животных в болоте $1,74x = \frac{87x}{50}$. Для того, чтобы это число было целым, необходимо, чтобы x делилось на 50. Но, очевидно, $x < 100$, поэтому $x = 50$, а общее число животных в болоте 87.

Ответ: 87.

7. (2 балла) Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2+3} - \sqrt[3]{10x-21} = (10x-21)^3 - (x^2+3)^3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{x^2+3} + (x^2+3)^3 = \sqrt[3]{10x-21} + (10x-21)^3$ и рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3$. Эта функция, как сумма двух строго возрастающих функций, является строго возрастающей, поэтому из $f(a) = f(b)$ следует, что $a = b$, то есть $x^2+3 = 10x-21$, откуда $x \in \{4, 6\}$.

Ответ: $\{4, 6\}$.

8. (2 балла) Найдите площадь фигуры, заданной на плоскости Oxy неравенством

$$\sqrt{7-|y|} \cdot \sqrt{4-|x|} \geq 0.$$

Решение. Произведение двух арифметических квадратных корней всегда неотрицательно, поэтому искомая фигура задается только ОДЗ неравенства, то есть двумя условиями $|x| \leq 4$, $|y| \leq 7$. Эти условия задают прямоугольник с длинами сторон 8 и 14; его площадь равна 112.

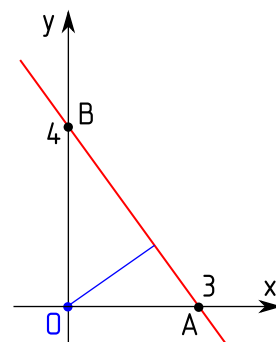
Ответ: 112.

9. (3 балла) В квадратном уравнении $x^2 + px + q = 0$ числа p , q и оба корня — целые. Кроме того, оба корня положительны и делятся на 5, а про число q известно, что $30 < q < 70$. Найдите число p .

Решение. Поскольку по теореме Виета число q равно произведению корней, оно делится на 25. Следовательно, $q = 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$. Тогда корни уравнения 5 и 10, поэтому $p = -(5+10) = -15$.

Ответ: -15.

10. (3 балла) На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q (порядок точек: A, P, Q, D). Отрезки CP и BQ пересекаются в точке M , при этом площади треугольников BMC и



PMQ равны 18 и 2 соответственно, а площадь четырехугольника $ABMP$ равна 15. Найдите площадь четырехугольника $DCMQ$.

Решение. Треугольники BMC и QMP , очевидно, подобны с коэффициентом 3 (поскольку отношение их площадей равно 9), поэтому отношение длин их высот, проведенных из точки M , равно 3. Если высота треугольника BMC равна $3h$, то высота треугольника QMP равна h и, следовательно, $AB = 4h$. Тогда $S_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot 3h = 18$, откуда $BC \cdot h = 12$, поэтому $S_{ABCD} = BC \cdot AB = BC \cdot 4h = 48$. Тогда $S_{DCMQ} = 48 - 18 - 15 - 2 = 13$.

Ответ: 13.

11. (3 балла) Последовательность 3, 4, 6, 9, 13, ... задана условиями $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n + n$. Найдите x_{600} .

Решение. По условию $x_1 = 3$, $x_2 = 3 + 1$, $x_3 = 3 + 1 + 2$, $x_4 = 3 + 1 + 2 + 3$, ..., поэтому

$$x_{600} = 3 + (1 + 2 + 3 + \dots + 599) = 3 + \frac{1 + 599}{2} \cdot 599 = 179703.$$

Ответ: 179703.

12. (4 балла) За круглым столом сидят 23 человека, n из которых ($0 \leq n \leq 23$) больны новым опасным заболеванием — зеленоухостью. У человека, больного зеленоухостью, уши становятся зелеными и, кроме того, он начинает всегда говорить неправду (здоровые люди всегда говорят правду). Неожиданно каждый из этих 23 человек говорит присутствующим: «Вы все зеленоухие!» Сколько среди присутствующих зеленоухих на самом деле?

Решение. Если бы все были зеленоухими, их высказывания были бы правдой, что противоречит условию. Таким образом, среди присутствующих имеется хотя бы один здоровый. Если остальные люди являются зеленоухими, здоровый говорит правду, а зеленоухие говорят неправду, что соответствует условию. Двух или более здоровых быть не может, потому что тогда они бы не могли утверждать, что все остальные зеленоухие. Таким образом, здоровый человек только один, а зеленоухих 22.

Ответ: 22.

Приведен верный ответ	1
Доказано, что все не могут быть зеленоухими	+1
Доказано, что ровно один здоровый человек удовлетворяет условию	+1
Доказано, что двух и более здоровых людей быть не может	+1

13. (7 баллов) Найдите все такие натуральные числа x , чтобы оба числа $a = x^2 - 3x - 2$ и $b = x^2 + 13x + 3$ были простыми.

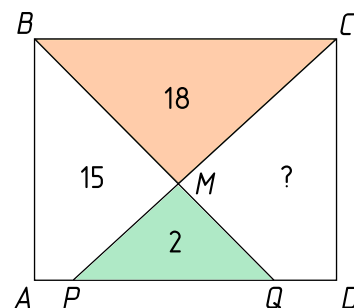
Решение. Рассмотрим разность:

$$b - a = (x^2 + 13x + 3) - (x^2 - 3x - 2) = 16x + 5.$$

Она является, как нетрудно заметить, нечетным числом (так как $16x$ всегда четно), поэтому числа a и b имеют разную четность, то есть одно из них обязательно четное. Но если простое число является четным, оно может быть равно только 2. Уравнение $x^2 + 13x + 3 = 2$ натуральных корней не имеет, а уравнение $x^2 - 3x - 2 = 2$ имеет единственный натуральный корень $x = 4$. Подставляя $x = 4$ в трехчлен $x^2 + 13x + 3$, получаем число 71, являющееся простым.

Ответ: $x = 4$.

Приведен лишь верный ответ, найденный подбором	1
Написано, что одно из чисел равно 2	+2
Доказано, что одно из чисел равно 2	+2
Найдено значение x , при котором одно из чисел равно 2	+1
Проверено, что при этом значении x второе число также является простым	+2



14. (7 баллов) Точки X и Y лежат внутри описанного четырехугольника $ABCD$. Расстояния до сторон этого четырехугольника от точки X равны 6, 16, 14 и 2, а от точки Y (в том же порядке) — 8, 13, 12 и 6. Найдите радиус вписанной в $ABCD$ окружности.

Решение. Докажем сначала, что если h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояния от произвольной точки, лежащей внутри выпуклого четырехугольника, до его сторон с длинами соответственно a, b, c, d , то

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 + dh_4 = 2S,$$

где S — площадь данного четырехугольника. Это следует из того, что площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, показанных на рисунке разными цветами, то есть

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ch_3 + \frac{1}{2}dh_4 = S.$$

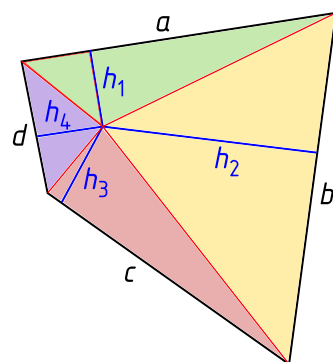
Пусть теперь a, b, c, d — длины сторон данного четырехугольника, а S — его площадь, тогда по условию

$$\begin{cases} 6a + 16b + 14c + 2d = 2S, \\ 8a + 13b + 12c + 6d = 2S. \end{cases}$$

Домножая второе уравнение на 2 и вычитая из результата первое уравнение, получим

$$10a + 10b + 10c + 10d = 2S, \text{ откуда } r = \frac{2S}{a + b + c + d} = 10.$$

Ответ: 10.



Получена зависимость между длинами сторон, расстояниями от внутренней точки четырехугольника до сторон и площадью	+2
Экзаменуемый знает зависимость между периметром четырехугольника, радиусом вписанной окружности и площадью	+1
Составлена система уравнений, позволяющая получить верный ответ	+2
Система уравнений решена, получен верный ответ	+2

15. (7 баллов) При каких значениях параметра b существует единственная пара чисел (x, y) , являющаяся решением уравнения

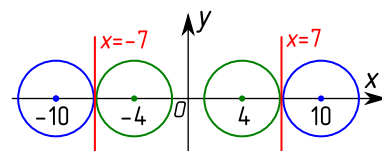
$$(x^2 + y^2 + b^2 - 2(xb + 4) - 1)^2 + (|x| - 7)^2 = 0 ?$$

Решение. Поскольку сумма квадратов двух чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x - b)^2 + y^2 = 9, \\ |x| = 7. \end{cases}$$

Первое уравнение системы задает окружность радиуса 3 с центром в точке $(b, 0)$, а второе — пару прямых $x = 7$ и $x = -7$. Система имеет единственное решение, когда окружность касается одной из этих прямых; все случаи такого расположения окружности показаны на рисунке. В каждом случае координаты центра окружности (и соответствующие им значения b) очевидны.

Ответ: $b \in \{-10, -4, 4, 10\}$.



Верно и обоснованно найдены все значения параметра	7
Верно и обоснованно найдены два значения параметра	5
Верно и обоснованно найдено одно значение параметра	3
В решении содержатся отдельные верные преобразования или доказанные утверждения, приближающие к верному решению, но ни одно из верных значений параметра не найдено	1