СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЙ УЧЕБНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 11 СГ класс 20 марта 2023г.

Часть 1

1. *(2 балла)* Вычислить: $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-0,625)-1\frac{1}{3}:1,5$.

Решение: $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-0,625)-1\frac{1}{3}:1,5=\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{625}{1000}\right)-\frac{4}{3}:\frac{3}{2}=$

$=\frac{16}{9}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{10}{9}-\frac{8}{9}=-2$.

Ответ: -2.

2. *(2 балла)* Решить уравнение: $\log_5(4+x)=2$.

Решение: $\log_5(4+x)=2$ **;** $4+x=5^2$ **;** $x=21$.

Ответ: 21.

3. *(3 балла)* Вычислить: $\dfrac{7\sqrt[3]{\sqrt[12]{a}}+3\sqrt[18]{\sqrt{a}}}{5\sqrt[4]{\sqrt[9]{a}}}$.

Решение: $\dfrac{7\sqrt[3]{\sqrt[12]{a}}+3\sqrt[18]{\sqrt{a}}}{5\sqrt[4]{\sqrt[9]{a}}}=\dfrac{7(a^{1/12})^{1/3}+3(a^{1/2})^{1/18}}{5(a^{1/9})^{1/4}}=\dfrac{7(a^{1/36})+3(a^{1/36})}{5(a^{1/36})}=\dfrac{10}{5}=2$.

Ответ: 2.

4. *(3 балла)* Вычислить:$\log_{\frac{1}{2}}8-\log_{\frac{1}{3}}27$

Решение: $\log_{\frac{1}{2}}8-\log_{\frac{1}{3}}27=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=-3-(-3)=0$.

Ответ: 0.

5. *(3 балла)* Вычислить: $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{5}{\sqrt{26}},\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

Решение: т.к. $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$ $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{26}}=-\frac{1}{\sqrt{26}}$;

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{\sqrt{26}}:\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)=5$.

Ответ: 5.

6. *(2 балла)* Решить неравенство: $0,25^{2x}\le 8$

Решение: $0,25^{2x}\le 8\,;\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\le 8\,;(2^{-2})^{2x}\le 2^3\,;2^{-4x}\le 2^3\,;-4x\le 3(\text{т.к.}2>1)\,;x\ge-\frac{3}{4}$

Ответ: $x\ge-\frac{3}{4}$.

7. *(2 балла)* Найти координаты точек пересечения графиков функций $y=2x+5$ и $y=-2x^2+2x+7$.

Решение: $2x+5=-2x^2+2x+7\,;-2x^2=-2\,;x^2=1\,;x_1=1,y_1=7\,;x_2=-1,y_2=3$.

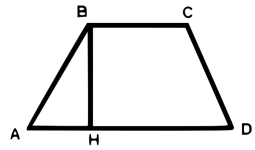
Ответ: $(1;7),(-1;3)$.

Критерии:

1 балл – за одну точку;

8. *(3 балла)* Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 51. Тангенс острого угла равен $\dfrac{5}{11}$. Найдите высоту трапеции.

Решение: Проведем высоту BH. $\operatorname{tg}\angle BAH = \dfrac{BH}{AH}$; $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = 22$;



$BH = AH \cdot \operatorname{tg}\angle BAH = 22 \cdot \dfrac{5}{11} = 10$.

Ответ: 10 **.**

9. *(2 балла)* Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной.

Решение: Вероятность того, что купленная сумка окажется со скрытыми дефектами $P = 8/100 = 0,08$. Вероятность того, что купленная сумка окажется качественной $\overline{P} = 1 - 0,08 = 0,92$.

Ответ: $0,92$ **.**

10. *(2 балла)* Среднее геометрическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $g = \sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 12, 18, 27.

Решение: Среднее геометрическое трёх чисел $g = \sqrt[3]{12 \cdot 18 \cdot 27} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3^3} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: 18 **.**

Часть 2

11. *(5 баллов)* Расстояние между пристанями A и B равно 120 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Решение: Пусть x км/ч - скорость яхты в неподвижной воде.

По течению реки яхта двигалась со скоростью $(x+2)$ км/ч, прошла 120 км. и затратила $\dfrac{120}{x+2}$ч.

Против течения реки яхта двигалась со скоростью $(x-2)$ км/ч, прошла 120 км. и затратила $\dfrac{120}{x-2}$ч.

Плот двигался $24 : 2 = 12$ч., яхта на 1 час меньше.

Составим уравнение: $\dfrac{120}{x+2} + \dfrac{120}{x-2} = 11$.

Решая уравнение, получим $x = 22$.

Ответ: 22 **км/ч .**

Критерии:

1 балл – верно составлена модель задачи;

5 баллов - обосновано получен правильный ответ.

12. *(4 балла)* Упростить выражение: $\dfrac{6}{a-1} - \dfrac{10}{(a-1)^2} : \dfrac{10}{a^2-1} - \dfrac{2a+2}{a-1}$

Решение: $\dfrac{6}{a-1} - \dfrac{10}{(a-1)^2} : \dfrac{10}{a^2-1} - \dfrac{2a+2}{a-1} = \dfrac{6}{a-1} - \dfrac{10 \cdot (a-1)(a+1)}{(a-1)^2 \cdot 10} - \dfrac{2a+2}{a-1} =$

$= \dfrac{6}{a-1} - \dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{2a+2}{a-1} = \dfrac{6-a-1-2a-2}{a-1} = \dfrac{-3a+3}{a-1} = -3$.

Ответ: -3 **.**

Критерии:

1 балл – верно выполнено деление и сокращение второго слагаемого;

3 балла – получен ответ $\frac{-3a+3}{a-1}$;

4 балла - обосновано получен правильный ответ.

13. *(5 баллов)* Решить неравенство: $\dfrac{(2+x-x^2)(x-4)}{(x+3)(x^2-4)} \geq 0$

Решение: $\dfrac{(x+1)(2-x)(x-4)}{(x+3)(x-2)(x+2)} \geq 0$.

Ответ: $x \in (-3;-2) \cup [-1;2) \cup (2;4]$ **.**

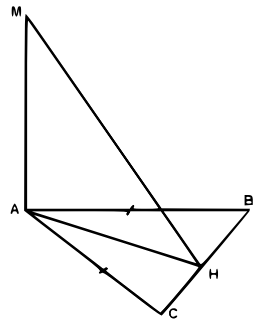
Критерии:
1 балл – верное разложение на множители;
2 балла – верно расставлены знаки в методе интервалов;
5 баллов - обосновано получен правильный ответ.

14. *(5 баллов)* Решить уравнение: $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$
Решение: $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$. Сделаем замену $t = 2^x (t > 0)$. $t^2 + 2t - 8 = 0$;$t = 2$;$x = 1$.

Ответ: $x = 1$ **.**

Критерии:
5 баллов - обосновано получен правильный ответ.

15. *(7 баллов)* Отрезок AM перпендикулярен плоскости треугольника ABC и имеет длину 24 см. Найти расстояние от точки M до прямой BC, если $AB = AC = 20$ см., $BC = 24$ см.



Решение: $AH-$ высота и медиана треугольника ABC .
$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 400 - 144 = 256; AH = 16$. $AM-$ перпендикуляр к плоскости ABC, $MH-$ наклонная к плоскости ABC, $AH-$ проекция MH на плоскость ABC . По теореме о трех перпендикулярах $CB \perp MH$, следовательно $MH-$ расстояние от точки M до прямой BC . Из $\triangle AMH$: $AM \perp ABC, AH \subset ABC$, следовательно $AM \perp AH$, (по определению прямой, перпендикулярной к плоскости). $\triangle AMH$ прямоугольный $MH^2 = AM^2 + AH^2 = 576 + 256 = 832 = 8\sqrt{13}$.

Ответ: $8\sqrt{13}$ **.**

Критерии:
+2 балла – доказательство, что MH искомое расстояние;
+2 балла – верно найдена длина AH;
+3 балла – верно найдена длина MH.