СУНЦ УрФУ
Вступительный экзамен по математике для поступающих в 11 МИФ класс 2023 г.

1. *(2 балла)* Решить неравенство $(\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 5)(3 - x)(x - 5) > 0$.

2. *(2 балла)* Вычислить $\log_3^2 15 - \dfrac{\log_3 45}{\log_5 3}$.

3. *(2 балла)* Упростить $\dfrac{a+b}{a\sqrt{-b} + b\sqrt{a}} \cdot (-ab)^{1/2}$.

4. *(2 балла)* Найти значение выражения $\dfrac{7(\sin\alpha + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -3$.

5. *(2 балла)* Найти произведение корней уравнения $(x+4)\sqrt{x^2+3x-6} = 2x+8$.

6. *(3 балла)* Решите уравнение $2^{\sqrt{5x+6}} = \dfrac{1}{2^x}$.

7. *(3 балла)* На полиграфической фабрике страницы тетради пронумерованы числами от 1 до 96. На случайной странице Серёжа, записал число 0 и пронумеровал все страницы далее до конца тетради числами 1, 2, 3,... и т.д., не пропуская ни одной. Затем он вернулся к странице с записанным 0 и пронумеровал страницы тетради назад числами $-1, -2, -3, \ldots$ и т.д. до начала тетради без пропусков. Сумма всех записанных чисел в тетради равна 48. Определите номер страницы фабричной нумерации, на которой Серёжа записал число 0.

8. *(3 балла)* Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$ и $AC = 18$. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр O на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону и длину отрезка BO.

9. *(3 балла)* Катеты прямоугольного треугольника ABC, равны 12 и 16. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причём $CM = 28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

10. *(3 балла)* Вектор $\overrightarrow{p}$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{q} = (3; -5)$, $|\overrightarrow{p}| = 3\sqrt{34}$. Чему равна сумма координат вектора $\overrightarrow{p}$?

11. *(4 балла)* Решить неравенство

$$\left(\frac{13}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (6,5)^{x - \frac{3}{x+1}}.$$

12. *(5 баллов)* При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 7x - 10 - x^2 \geq 0, \\ 2 + 3x - ax \geq 0 \end{cases}$$

не имеет решения?

13. *(5 баллов)* Решите уравнение $6\sin^3 x + \sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}\,; \pi\right]$.

14. *(5 баллов)* В правильной треугольной пирамиде высота основания равна $2\sqrt{3}$, а расстояние от середины стороны основания до противоположного бокового ребра равно 3. Найдите угол между боковыми гранями.

15. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CF пересекает его диагональ BD в точке L.
а) *(2 балла)* Докажите, что $CL \cdot CF = AB \cdot AD$.
б) *(4 балла)* Найдите отношение $CL : LF$, если $\angle BCF = 30^o$.

Решение.

1. Решить неравенство $(\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 5)(3 - x)(x - 5) > 0$.

Поскольку $\operatorname{tg} 5 < \operatorname{tg} 3$, то $\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 5 > 0$. Значит, $(3 - x)(x - 5) > 0$, а $(x - 3)(x - 5) < 0$. Откуда $x \in (3; 5)$.

2.

Вычислить $\log_3^2 15 - \dfrac{\log_3 45}{\log_5 3}$.

Пусть $\log_3 5 = t$, тогда $\log_3^2 15 = (1 + \log_3 5)^2 = (1 + t)^2$; $\log_3 45 = 2 + t$; $\log_5 3 = \frac{1}{t}$. Получаем

$$\log_3^2 15 - \frac{\log_3 45}{\log_5 3} = (1 + t)^2 - (2 + t)t = 1.$$

3. Упростить $\dfrac{a + b}{a\sqrt{-b} + b\sqrt{a}} \cdot (-ab)^{1/2}$.

Пусть $-b = t$, где $t \geq 0$, тогда

$$\frac{a + b}{a\sqrt{-b} + b\sqrt{a}} \cdot (-ab)^{1/2} = \frac{a - t}{a\sqrt{t} - t\sqrt{a}} \cdot (at)^{1/2} = \frac{a - t}{\sqrt{at}(\sqrt{a} - \sqrt{t})} \cdot \sqrt{at} = \sqrt{a} + \sqrt{t} = \sqrt{a} + \sqrt{-b}.$$

Критерии:

1 балл – получен ответ $\frac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{-b}}$;

4. Найти значение выражения $\dfrac{7(\sin\alpha + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -3$.

Воспользуемся формулой тангенса двойного угла $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{3}{4}$. Тогда

$$\frac{7(\sin\alpha + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{7(\operatorname{tg}\alpha + 2)}{(1 - \operatorname{tg}\alpha)} = \frac{7(\frac{3}{4} + 2)}{1 - \frac{3}{4}} = 77.$$

5. Найти произведение корней уравнения $(x + 4)\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2x + 8$.

Уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x + 4 = 0, \\ x^2 + 3x - 6 \geq 0, \end{array}\right. \\ \sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2; \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения $x = -4$, не удовлетворяет неравенству, значит, система не имеет решений. Второе уравнение совокупности равносильно уравнению $x^2 + 3x - 10 = 0$, откуда по теореме Виета получаем, что $x_1 \cdot x_2 = -10$.

6. Решите уравнение $2^{\sqrt{5x+6}} = \dfrac{1}{2^x}$.

$$2^{\sqrt{5x+6}} = \frac{1}{2^x}; \Leftrightarrow 2^{\sqrt{5x+6}} = 2^{-x}; \Leftrightarrow \sqrt{5x+6} = -x; \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 0, \\ 5x + 6 = x^2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \leq 0, \\ x_1 = -1; x_2 = 6. \end{array}\right.$$

Единственным решением системы является $x = -1$.

7. На полиграфической фабрике страницы тетради пронумерованы числами от 1 до 96. На случайной странице Серёжа, записал число 0 и пронумеровал все страницы далее до конца тетради числами 1, 2, 3,... и т.д., не пропуская ни одной. Затем он вернулся к странице с записанным 0 и пронумеровал страницы тетради назад числами $-1, -2, -3, \ldots$ и т.д. до начала тетради без пропусков. Сумма всех записанных чисел в тетради равна 48. Определите номер страницы фабричной нумерации, на которой Серёжа записал число 0.

Пусть Серёжа написал 0 на странице с номером 48. Тогда сумма чисел на страницах с 1 по 95 будет $-47 - 46 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 47 = 0$. Тогда сумма всех чисел равна 48.

8. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 12$, $BC = 15$ и $AC = 18$. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр O на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону и длину отрезка BO.

Поскольку окружность касается сторон треугольника AB и BC, то её центр лежит не биссектрисе угла B. По основному свойству биссектрисы $AO : OC = BA : BC = 12 : 15 = 4 : 5$. Учитывая, что $AC = 18$ получаем, что $AO = 8$, $CO = 10$. По формуле длины биссектрисы угла треугольника $BO^2 = BA \cdot BC - AO \cdot OC = 100$. Откуда $BO = 10$.

Критерии:

+1 балл – за длины отрезков, на которые O делит большую сторону;

+2 балла – за длину отрезка BO.

9. *(3 балла)* Катеты прямоугольного треугольника ABC, равны 12 и 16. Из вершины C прямого угла восставлен к плоскости треугольника ABC перпендикуляр CM, причём $CM = 28$. Найдите расстояние от точки M до гипотенузы AB.

Проведём в треугольнике ABC высоту CH. По обратной теореме о трех перпендикулярах, прямая MH перпендикулярна AB, значит MH – расстояние от M до AB. Высота прямоугольного треугольника равна $CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = 9,6$. По теореме Пифагора $MH = \sqrt{28^2 + (9,6)^2} = 29,6$.

10. Вектор $\overrightarrow{p}$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{q} = (3; -5)$, $|\overrightarrow{p}| = 3\sqrt{34}$. Чему равна сумма координат вектора $\overrightarrow{p}$?

Поскольку вектор $\overrightarrow{p}$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{q} = (3; -5)$, то существует число $k > 0$ такое, что $\overrightarrow{p} = (-3k; 5k)$. Длина вектора $|\overrightarrow{p}| = \sqrt{9k^2 + 25k^2} = 3\sqrt{34}$. Откуда $k^2 = 9$, а при условии $k > 0$, получаем, что $k = 3$. Значит вектор $\overrightarrow{p} = (-9; 15)$. Ответ $-9 + 15 = 6$.

11. Решить неравенство

$$\left(\frac{13}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \left(\frac{2}{3}\right) \cdot (6,5)^{x-\frac{3}{x+1}}.$$

Заметим, что $x - \frac{3}{x+1} = \frac{x^2+x-3}{x+1}$. Разделим обе части неравенства на $(6,5)^{x-\frac{3}{x+1}}$. Получим равносильное неравенство

$$\frac{\left(\frac{13}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}}{(6,5)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}}} \leq \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2+x-3}{x+1}} \leq \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2+x-3}{x+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-4}{x+1} \geq 0.$$

Методом интервалом получаем ответ $[-2; -1) \cup [2; +\infty)$.

Критерии:

+1 балл – верно приведено к показательному неравенству с одинаковыми основаниями с обеих частях;

+1 балл – верно выполнен переход к рациональному неравенству;

+2 балла – правильно решено верное рациональное неравенство.

-1 *балл* – за арифметическую ошибку.

12. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 7x - 10 - x^2 \geq 0, \\ 2 + 3x - ax \geq 0 \end{cases}$$

не имеет решения?

Рассмотрим каждое неравенство системы.

1) $7x - 10 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 10 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 5.$

2) $2 + 3x - ax \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3 - a)x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 3)x \leq 2.$

Рассмотрим 3 случая:

а) если $a - 3 = 0$, т.е. $a = 3$, то $0 \cdot x \leq 2$, значит $x \in \mathbb{R}$;

б) если $a - 3 > 0$, т.е. $a > 3$, тогда $x \leq \dfrac{2}{a-3}$;

в) если $a - 3 < 0$, т.е. $a < 3$, тогда $x \geq \dfrac{2}{a-3}$.

Система не имеет решений, если множество решений 1-го неравенства и 2-го не пересекаются, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a-3} > 5, \\ a < 3; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{a-3} < 2, \\ a > 3. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, а вторая система имеет решения при $a > 4$. Ответ: $a > 4$.

Критерии:

+1 балл – верно решено первое неравенство системы;

+2 балла – рассмотрены случаи во втором неравенстве системы и получен верный ответ в каждом из них;

+2 балла – верно исследованы случаи, когда решения первого и второго неравенства не пересекаются.

13. Решите уравнение $6\sin^3 x + \sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0$ и найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Обозначим $\sin x = t$. Исходное уравнение примет вид $6t^3+t^2-4t+1=0$. Корнями этого уравнения будут числа $t=-1$, $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{3}$. Перейдем к простейшим тригонометрическим уравнениям

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}\,, \\ \sin x = \frac{1}{3}\,; \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, . \end{array}\right.$$

Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ при помощи тригонометрической окружности. В указанный отрезок входят числа $-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{6}\,, \frac{5\pi}{6}\,, \arcsin\frac{1}{3}\,, \pi - \arcsin\frac{1}{3}\,.$

Критерии:

+1 балл – выполнена замена и верно найдены корни кубического уравнения;

+2 балла – выполнена обратная замена и верно решены простейшие тригонометрические уравнения;

+2 балла – проведён верный отбор корней.

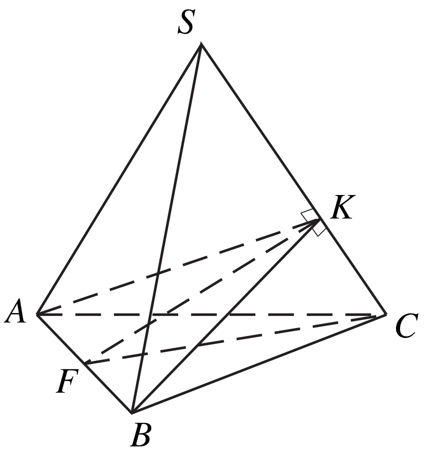

Рис. 1

14. В правильной треугольной пирамиде высота основания равна $2\sqrt{3}$, а расстояние от середины стороны основания до противоположного бокового ребра равно 3. Найдите угол между боковыми гранями.

По условию $SABC$ – правильная пирамида, значит $\triangle ABC$ – равносторонний, а боковые грани равные равнобедренные треугольники. В треугольнике ABC проведем высоту FC. Найдем сторону треугольника ABC: $AB = \dfrac{FC}{\sin 60^o} = \dfrac{2\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = 4$. Точка F – середина AB, тогда $FB = FA = 2$.

Через AB проведем плоскость, перпендикулярную SC, $(AKB) \perp SC$. $\angle AKB$ – линейный угол двугранного угла при ребре SC. Так как $(AKB) \perp SC$, то $FK \perp SC$, т.е. FK – расстояние от точки F до ребра SC, $FK = 3$. Далее, $\angle AKB = 2\angle FKB$, $\operatorname{tg}\angle FKB = \dfrac{FB}{FK} = \dfrac{2}{3}$. Ответ $2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$.

Критерии:

+1 балл – верно найдена сторона основания пирамиды;

+2 балла – обосновано, что угол $\angle AKB$ – искомый;

+2 баллов – верно найден искомый угол.

15. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CF пересекает его диагональ BD в точке L.

а) Докажите, что $CL \cdot CF = AB \cdot AD$.

б) Найдите отношение $CL : LF$, если $\angle BCF = 30^o$.

а) $\triangle BCL \sim \triangle FBC$ по двум углам: $\angle CBL = \angle BDC = \angle BFC = 45^o$; $\angle BCF$ – общий. Из пропорциональности сторон $\dfrac{BC}{FC} = \dfrac{CL}{CB}$ получаем, что $FC \cdot CL = BC \cdot BC$, но $BC = AD = AB$, а значит $CL \cdot CF = AB \cdot AD$.

б) В $\triangle BCL$ и $\triangle FBC$ известны углы: $\angle CBL = 45^o$, $\angle BCL = 30^o$, $\angle BLC = 105^o$, $\angle FBC = 105^o$. Запишем теорему синусов для этих треугольников:

$$\frac{CL}{\sin 45^o} = \frac{BC}{\sin 105^o}; \quad \frac{CF}{\sin 105^o} = \frac{BC}{\sin 45^o}.$$

Найдем $\sin 105^o = \sin(45^o + 60^o) = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$. Тогда $CL = \dfrac{2BC}{1+\sqrt{3}}$, $CF = \dfrac{BC(1+\sqrt{3})}{2}$. Получаем

$$\frac{LF}{CL} = \frac{CF - CL}{CL} = \frac{CF}{CL} - 1 = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{2 \cdot 2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит, $CL : LF = 2 : \sqrt{3}$.

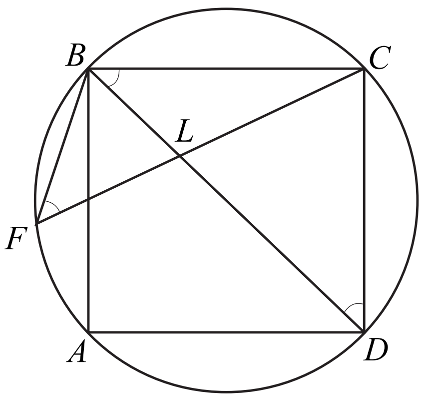

Рис. 2

Критерии:

+2 балла – доказан пункт а);
+4 балла – получен верный ответ в пункте б);
-2 *балла* – если верный ответ в пункте б) содержит $\sin 105^o$.