

СУНЦ УрФУ
РАЗБОР вступительного экзамена по математике
для поступающих в 8 ФМ, МИ и ХБ классы, 2023 год
Вариант 1

Часть 1

1. (2 балла) Вычислите $\frac{3 \cdot \left(\frac{7}{30} - 0,125 : 1\frac{1}{8}\right)}{\left(5 : 1,8 - 2\frac{1}{3} : 1,5\right) : 2\frac{2}{3}}$.

Ответ: 0,8.

2. (2 балла) Пусть n — некоторое натуральное число.

Упростите: $(2^{3n+1} - 5 \cdot 2^{3n+2})(5 \cdot 3^n + 3^{n+1}) : 24^{n+1}$.

Решение. $(2^{3n+1} - 5 \cdot 2^{3n+2})(5 \cdot 3^n + 3^{n+1}) : 24^{n+1} = 2^{3n+1}(1 - 5 \cdot 2) \cdot 3^n(5 + 3) : (3^{n+1} \cdot 2^{3n+3}) = 2 \cdot (-9) \cdot 8 : 3 : 8 = -6$

Ответ: -6.

3. (2 балла) Решите уравнение: $\frac{2x-3}{5} + \frac{5x+1}{20} = 3 - x - \frac{x-1}{4}$.

Решение.

$$\frac{2x-3}{5} + \frac{5x+1}{20} = 3 - x - \frac{x-1}{4} \quad | \cdot 20$$

$$8x - 12 + 5x + 1 = 60 - 20x - 5x + 5$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

4. (2 балла) По расписанию рейсовый автобус доезжает до города А в город Б за 7 часов. Но в этот раз, проехав половину пути, он увеличил скорость на 20 км/ч, поэтому приехал на час раньше. Найдите первоначальную скорость автобуса.

Решение. Пусть v скорость автобуса, тогда $7v = 3,5v + 2,5(v + 20)$, откуда получаем, что $v = 50$.

Ответ: 50.

5. (2 балла) Вася и Петя играли на серебряные монетки. Сначала Петя отдал половину своих монет Васе, затем Вася отдал Пете половину того, что у него стало. В итоге у Пети оказалась 21 монетка, а у Васи — 12. По сколько монет было у Васи и Пети до игры?

Решение. Перед последним обменом у Васи было 24, а значит у Пети 9. Тогда до того, как Петя отдал свои монетки, у него было 18, а у Васи 15.

Ответ: 15 и 18.

6. (2 балла) Если Кирилл отдаст Ане 300 рублей, то денег у них станет поровну. Если Аня отдаст Кириллу 40% своих денег, то у нее станет в 3 раза меньше денег, чем у Кирилла. Определите сколько денег у каждого из ребят.

Решение. Пусть у Кирилла x — рублей, а у Ани y . Тогда $x - 300 = y + 300$ и $3 \cdot 0,6y = x + 0,4y$. Откуда получаем $x = y + 600$ и $3 \cdot 0,6y = y + 600 + 0,4y$. Значит $y = 1500$ и $x = 2100$.

Ответ: 2100 и 1500.

7. (3 балла) Решите уравнение: $\frac{25 - 30x + 9x^2}{3x - 5} + \frac{4x^2 - 28x + 49}{7 - 2x} = 3x - 5$.

Решение. $\frac{25 - 30x + 9x^2}{3x - 5} + \frac{4x^2 - 28x + 49}{7 - 2x} = 3x - 5$

$$\frac{(5 - 3x)^2}{3x - 5} + \frac{(2x - 7)^2}{7 - 2x} = 3x - 5$$

$$(3x - 5) + (7 - 2x) = 3x - 5$$

$x = 3, 5$, однако при $x = 3, 5$ в исходном уравнении происходит деление на 0, значит решений нет.

Ответ: нет решений.

8. (2 балла) В треугольнике ABC выполняется: $AB = 10$, медиана $CM = 5$, $\angle CMA = 120^\circ$. Найдите величину угла $\angle CAB$.

Решение. $AM = MB = 5$ значит треугольник AMC — равнобедренный, а значит $\angle CAM = \angle MCA = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$.

Ответ: 30.

9. (3 балла) Найдите число k , если известно, что точки $A\left(-\frac{1}{3}; 7\right)$, $B(3; -3)$ и $C\left(k; \frac{k-1}{2}\right)$ лежат на одной прямой.

Решение. Пусть уравнение прямой, на которой лежат точки $y = tx + b$, тогда, подставив координаты точек A и B , получаем два уравнения: $7 = -\frac{1}{3}t + b$ и $-3 = 3t + b$. Решив эту систему, получаем: $t = -3$, $b = 6$. Значит уравнение прямой: $y = -3x + 6$, подставив координаты точки C , получаем уравнения относительно k : $\frac{k-1}{2} = -3k + 6$. Откуда получаем $k = \frac{13}{7}$.

Ответ: $\frac{13}{7}$.

10. (3 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C пересекаются в точке K , причем $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите величину угла $\angle ABC$.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle BKC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 130^\circ$, откуда получаем $\alpha = 80^\circ$. Тогда $\angle ABH = 10^\circ \Rightarrow \angle BAH = 50^\circ \Rightarrow \angle ABC = 40^\circ$.

Ответ: 40.

Часть 2

11. (5 баллов) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O . Известно, что треугольник ODB — равносторонний и $DC = AO$. Докажите, что треугольник ACB — равнобедренный.

Решение. Отметим на отрезке AO точку F так, что $AF = OD$, $FO = OC$. Тогда треугольник OFC — равносторонний, значит $CF = OC$, $FA = OB$ и $\angle AFC = 120^\circ = \angle COB \Rightarrow \triangle AFC = \triangle COB$ по двум сторонам и углу между ними, откуда следует $CB = AC \Rightarrow \triangle ACB$ — равнобедренный.

12. (5 баллов) Сократите дробь: $\frac{x^2 - 4z^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2 + 4z^2 + 4zx + 4zy}$.

Решение. $\frac{x^2 - 4z^2 + 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2 + 4z^2 + 4zx + 4zy} = \frac{(x + y)^2 - 4z^2}{(x + y)^2 + 4z(x + y) + 4z^2} = \frac{(x + y - 2z)(x + y + 2z)}{(x + y + 2z)^2} = \frac{x + y - 2z}{x + y + 2z}$

Ответ: $\frac{x + y - 2z}{x + y + 2z}$.

13. (6 баллов) Два велосипедиста выехали из горда A в город B , расстояние между которыми равно 2022 км. Первый велосипедист ехал с постоянной скоростью 12 км/ч, второй выехал на час позже и каждый час менял свою скорость — каждый четный час он ехал со скоростью 22 км/ч, а каждый нечетный час — со скоростью 8 км/ч (первый час он ехал со скоростью 8 км/ч). Укажите все моменты времени после выезда второго велосипедиста, когда оба велосипедиста находились в одной точке.

Решение. Спустя первые четыре часа расстояние между велосипедистами будет $12 + 12 + 12 + 12 - 8 - 22 - 8 = 10$ км. После этого за $10/(22 - 12) = 1$ час второй велосипедист догонит первого. Спустя час расстояние между ними $12 - 8 = 4$ км. И наконец через $4/(22 - 12) = 0,4$ часа второй опять догонит первого и уедет от него на расстояние 6 км, т.к. за час первый может лишь на 4 км обогнать второго, то больше велосипедисты не окажутся в одной точке.

Ответ: 4 и 5, 4.

14. (5 баллов) Решите уравнение: $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 2023) = 10120$.

Решение. $x + (x + 1) + (x + 2) + \dots + (x + 2023) = 2024x + (1 + 2 + \dots + 2023) = 2024x + (1 + 2023) + (2 + 2022) + \dots + (1011 + 1013) + 1012 = 2024x + 2024 \cdot 1011 + 1012$.

Таким образом получаем уравнение: $2024x + 2024 \cdot 1011 + 1012 = 10120$. Решив которое, получаем $x = -1006,5$.

Ответ: $-1006,5$.

15. (6 баллов) Найдите все целые a, b, c , удовлетворяющие равенству $abc - bc + ac - c - 1 = 0$.

Решение. $abc - bc + ac - c - 1 = 0$

$$c(ab - b + a - 1) = 1$$

$$c(a - 1)(b + 1) = 1$$

Произведение трех целых чисел равняется 1, если все они равны 1 или два из них -1 и одно равно 1. Если $c = 1$, то либо $a = 2$ и $b = 0$, либо $a = 0$ и $b = -2$. Если $c = -1$, то либо $a = 0$ и $b = 0$, либо $a = 2$ и $b = -2$.

Ответ: $(2; 0; 1), (2; -2; -1), (0; 0; -1), (0; -2; 1)$.

СУНЦ УрФУ
РАЗБОР вступительного экзамена по математике
для поступающих в 8 ФМ, МИ и ХБ классы, 2023 год
Вариант 2

Часть 1

1. (2 балла) Вычислите $\frac{5 \cdot \left(\frac{26}{35} - 3,75 : 8\frac{3}{4} \right)}{\left(13 : 1\frac{2}{3} - 0,3 : \frac{1}{18} \right) \cdot 3\frac{4}{7}}.$

Ответ: $\frac{11}{60}.$

2. (2 балла) Пусть n — некоторое натуральное число.

Упростите: $(3^{3n+1} - 5 \cdot 3^{3n+2})(7 \cdot 2^n + 2^{n+1}) : 54^{n+1}$

Решение. $(3^{3n+1} - 5 \cdot 3^{3n+2})(7 \cdot 2^n + 2^{n+1}) : 54^{n+1} = 3^{3n+1}(1 - 5 \cdot 3) \cdot 2^n(7 + 2) : (2^{n+1} \cdot 3^{3n+3}) = -7$

Ответ: $-7.$

3. (2 балла) Решите уравнение: $\frac{x-2}{5} + \frac{2x-5}{4} = 4 - x - \frac{4x-1}{20}.$

Решение. $\frac{x-2}{5} + \frac{2x-5}{4} = 4 - x - \frac{4x-1}{20} | \cdot 20$

$$4x - 8 + 10x - 25 = 80 - 20x - 4x + 1$$

$$x = 3$$

Ответ: 3.

4. (2 балла) По расписанию рейсовый автобус доезжает до города А в город Б за 5 часов. Но в этот раз, проехав половину пути, он уменьшил скорость на 10 км/ч, поэтому приехал на час позже. Найдите первоначальную скорость автобуса.

Решение. Решение. Пусть v скорость автобуса, тогда $5v = 2,5v + 3,5(v - 10)$, откуда получаем, что $v = 35$.

Ответ: 35.

5. (2 балла) Вася и Петя играли на серебряные монетки. Сначала Петя отдал половину своих монет Васе, затем Вася отдал Пете половину того, что у него стало. В итоге у Пети оказалась 31 монетка, а у Васи — 22. По сколько монет было у Васи и Пети до игры?

Решение. Перед последним обменом у Васи было 44, а значит у Пети 9. Тогда до того, как Петя отдал свои монетки у него было 18, а у Васи 35.

Ответ: 18 и 35.

6. (3 балла) Если Кирилл отдаст Ане 500 рублей, то денег у них станет поровну. Если Аня отдаст Кириллу 25% своих денег, то у нее станет в 2 раза меньше денег, чем у Кирилла. Определите сколько денег у каждого из ребят.

Решение. Пусть у Кирилла x — рублей, а у Ани y . Тогда $x - 500 = y + 500$ и $2 \cdot 0,75y = x + 0,25y$. Откуда получаем $x = y + 1000$ и $2 \cdot 0,75y = y + 1000 + 0,25y$. Значит $y = 4000$ и $x = 5000$.

Ответ: 5000 и 4000.

7. (3 балла) Решите уравнение: $\frac{36 - 60x + 25x^2}{5x - 6} + \frac{16x^2 - 24x + 9}{3 - 4x} = 5x - 6.$

$$\text{Решение. } \frac{36 - 60x + 25x^2}{5x - 6} + \frac{16x^2 - 24x + 9}{3 - 4x} = 5x - 6$$

$$\frac{(6 - 5x)^2}{5x - 6} + \frac{(4x - 3)^2}{3 - 4x} = 5x - 6$$

$$(5x - 6) + (3 - 4x) = 5x - 6$$

$x = 0,75$, однако при $x = 0,75$ в исходном уравнении происходит деление на 0, значит решений нет.

Ответ: решений нет.

8. (2 балла) В треугольнике PQR выполняется: $PQ = 12$, медиана $RM = 6$, $\angle PMR = 70^\circ$. Найдите величину угла $\angle PQR$.

Решение. $PM = MQ = RM = 6$ значит треугольник QMR — равнобедренный, а значит $\angle MQR = \angle MRQ = (180^\circ - (180^\circ - 70^\circ))/2 = 35^\circ$.

Ответ: 35.

9. (2 балла) Найдите число k , если известно, что точки $A\left(-\frac{2}{3}; 5\right)$, $B(2; 13)$ и $C\left(\frac{k+1}{2}; 2k\right)$ лежат на одной прямой.

Решение. Пусть уравнение прямой, на которой лежат точки $y = mx + b$, тогда, подставив координаты точек A и B , получаем два уравнения: $5 = -\frac{2}{3}m + b$ и $13 = 2m + b$. Решив эту систему, получаем: $m = 3$, $b = 7$. Значит уравнение прямой: $y = 3x + 7$, подставив координаты точки C , получаем уравнения относительно k : $2k = 3 \cdot \frac{k+1}{2} + 7$. Откуда получаем $k = 17$.

Ответ: 17.

10. (3 балла) Высоты остроугольного треугольника ABC , проведенные из вершин A и B , пересекаются в точке H , причем $\angle AHB = 110^\circ$, а биссектрисы, проведенные из вершин B и C пересекаются в точке K , причем $\angle BKC = 120^\circ$. Найдите величину угла $\angle ABC$.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle BKC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 120^\circ$, откуда получаем $\alpha = 60^\circ$. Тогда $\angle ABH = 30^\circ \Rightarrow \angle BAH = 40^\circ \Rightarrow \angle ABC = 50^\circ$.

Ответ: 50.

Часть 2

11. (5 баллов) Отрезки KL и MN пересекаются в точке P . Известно, что треугольник PNL — равносторонний и $NM = KP$. Докажите, что треугольник KML — равнобедренный.

Решение. Отметим на отрезке KP точку F так, что $KF = PN$, $FP = MP$. Тогда треугольник MPF — равносторонний, значит $MF = MP$, $FK = PL$ и $\angle MPL = 120^\circ = \angle MFK \Rightarrow \triangle MPL = \triangle MFK$ по двум сторонам и углу между ними, откуда следует $MK = ML \Rightarrow \triangle ACB$ — равнобедренный.

12. (5 баллов) Сократите дробь: $\frac{-x^2 + 4z^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 4z^2 + 4zx - 4zy}$.

$$\text{Решение. } \frac{-x^2 + 4z^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy + y^2 + 4z^2 + 4zx - 4zy} = \frac{-(x - y)^2 + 4z^2}{(x - y)^2 + 4z(x - y) + 4z^2} = \frac{(2z - x + y)(x - y + 2z)}{(x - y + 2z)^2} = \frac{y - x + 2z}{x - y + 2z}$$

Ответ: $\frac{y - x + 2z}{x - y + 2z}$.

13. (6 баллов) Два велосипедиста выехали из горда A в город B , расстояние между которыми равно 2024 км. Первый велосипедист ехал с постоянной скоростью 14 км/ч, второй выехал на час позже и каждый час менял свою скорость — каждый четный час он ехал со скоростью 24 км/ч, а каждый нечетный час — со скоростью 10 км/ч (первый час он ехал со скоростью 10 км/ч). Укажите все моменты времени после выезда второго велосипедиста, когда оба велосипедиста находились в одной точке.

Решение. Спустя первые шесть часов расстояние между велосипедистами будет $14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 - 10 - 24 - 10 - 24 - 10 = 6$ км. После этого за $6/(24 - 14) = 0,6$ часа второй велосипедист догонит первого и уедет на $0,4 \cdot 10 = 4$ км от него. Спустя час расстояние между ними $4 - 14 + 10 = 0$ км и первый велосипедист догонит второго. На следующий час расстояние между ними будет уже 14 км, т.к. за час первый может лишь на 4 км обогнать второго, то больше велосипедисты не окажутся в одной точке.

Ответ: 5, 6 и 7.

14. (5 баллов) Решите уравнение: $x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + (x - 2023) = 10120$.

Решение. $x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + (x - 2023) = 2024x - (1 + 2 + \dots + 2023) = 2024x - ((1 + 2023) + (2 + 2022) + \dots + (1011 + 1013) + 1012) = 2024x - 2024 \cdot 1011 - 1012$.

Таким образом получаем уравнение: $2024x - 2024 \cdot 1011 - 1012 = 10120$. Решив которое, получаем $x = 1016,5$.

Ответ: 1016, 5.

15. (6 баллов) Найдите все целые x, y, z , удовлетворяющие равенству $xyz + xz + yz + z - 1 = 0$.

Решение. $xyz + xz + yz + z - 1 =$

$$z(xy + x + y + 1) = 1$$

$$z(x + 1)(y + 1) = 1$$

Произведение трех целых чисел равняется 1, если все они равны 1 или два из них -1 и одно равно 1. Если $z = 1$, то либо $x = 0$ и $y = 0$, либо $x = -2$ и $y = -2$. Если $z = -1$, то либо $x = 0$ и $y = -2$, либо $x = -2$ и $y = 0$.

Ответ: $(0; 0; 1)$, $(-2; -2; 1)$, $(0; -2; -1)$, $(-2; 0; -1)$.

Ответы

Вариант 1

1. 0, 8. 2. -6 . 3. 2. 4. 50. 5. 15 и 18.
6. 2100 и 1500. 7. нет решений. 8. 30. 9. $\frac{13}{7}$. 10. 40.
11. Доказательство. 12. $\frac{x+y-2z}{x+y+2z}$. 13. 4 и 5, 4. 14. $-1006, 5$.
15. $(2; 0; 1), (2; -2; -1), (0; 0; -1), (0; -2; 1)$.

Критерии проверки

Общие критерии по оцениванию 1 части:

- Верный по модулю ответ, но противоположный по знаку — 1 балл.
- Хотя бы одна верно найденная переменная — 1 балл.
- Получен верный ответ без учета ограничений — 1 балл.

По остальным задачам первой части максимум дается только при условии верного ответа, иначе — 0 баллов.

11. Задача на доказательство, потому либо 5, либо 0.

12. По 2 балла — за верно разложенный на множители числитель или знаменатель.
Ещё 1 балл за верное сокращение дроби.

13. По 2 балла — за верно найденные и обоснованные моменты времени второго велосипедиста, в которых происходит обгон. Если указаны моменты времени для первого, то по 1 баллу за каждый.
2 балла — обоснование того, что после последней встречи встреч не произойдет.
Минус 1 балл за каждую арифметическую ошибку.

14. 4 балла — верно получено линейное уравнение, не содержащее многоточия.
Плюс 1 балл — за верное решение полученного уравнения.

15. 2 балла — верно разложено на множители (два или три) с продвижением о представлении 1 в виде произведения нескольких целых множителей.

По 1 баллу — за обоснованное нахождение каждого решения, либо по 0,5 баллов — за каждое решения подбором.

Ответы

Вариант 2

1. $\frac{11}{60}$. 2. -7 . 3. 3. 4. 35. 5. 18 и 35.
6. 5000 и 4000. 7. Решений нет. 8. 35. 9. 17. 10. 50.
11. Доказательство. 12. $\frac{y-x+2z}{x-y+2z}$. 13. 5, 6 и 7. 14. 1016, 5.
15. $(0; 0; 1)$, $(-2; -2; 1)$, $(0; -2; -1)$, $(-2; 0; -1)$.

Критерии проверки

Общие критерии по оцениванию 1 части:

- Верный по модулю ответ, но противоположный по знаку — 1 балл.
- Хотя бы одна верно найденная переменная — 1 балл.
- Получен верный ответ без учета ограничений — 1 балл.

По остальным задачам первой части максимум дается только при условии верного ответа, иначе — 0 баллов.

11. Задача на доказательство, потому либо 5, либо 0.

12. По 2 балла — за верно разложенный на множители числитель или знаменатель.
Ещё 1 балл за верное сокращение дроби.

13. По 2 балла — за верно найденные и обоснованные моменты времени второго велосипедиста, в которых происходит обгон. Если указаны моменты времени для первого, то по 1 баллу за каждый.
2 балла — обоснование того, что после последней встречи встреч не произойдет.
Минус 1 балл за каждую арифметическую ошибку.

14. 4 балла — верно получено линейное уравнение, не содержащее многоточия.
Плюс 1 балл — за верное решение полученного уравнения.

15. 2 балла — верно разложено на множители (два или три) с продвижением о представлении 1 в виде произведения нескольких целых множителей.

По 1 баллу — за обоснованное нахождение каждого решения, либо по 0,5 баллов — за каждое решение подбором.