Задачи вступительных экзаменов по математике в СУНЦ УрГУ (лицей) 1991 – 1998 годы

Екатеринбург 2000

Задачи вступительных экзаменов по математике в СУНЦ УрГУ (лицей) 1991 – 1998 годы

Екатеринбург 2000

Оглавление

Предисловие **7**

1. Вступительные экзамены 1991 года **9**
1.1. Физико-математический класс (март) 9
1.2. Физико-математический класс (май) 9
1.3. Физико-математический класс (июнь) 10
1.4. Естественно-научные классы (май) 10

2. Вступительные экзамены 1992 года **12**
2.1. Физико-математический класс (май) 12
2.2. Физико-математический класс (июнь) 14
2.3. Естественно-научные классы (июнь) 16
2.4. 11 физико-математический класс (июнь) 17
2.5. Историко-филологический класс (июнь) 18
2.6. Философско-экономический класс (июнь) 18

3. Вступительные экзамены 1993 года **20**
3.1. Физико-математический класс (февраль) 20
3.2. Физико-математический класс (май) 20
3.3. Физико-математический класс (июнь) 21
3.4. Естественно-научные классы (июнь) 22
3.5. Экономический класс (июнь) 22
3.6. Химико-биологический класс (июнь) 23

4. Вступительные экзамены 1994 года **25**
4.1. 8 класс (май) 25
4.2. 9 класс (1-й тест, май) 26
4.3. 9 класс (2-й тест, май) 32
4.4. Физико-математический класс (июнь) 33
4.5. Экономический класс (июнь) 34
4.6. Химико-биологический класс (июнь) 35

5. Вступительные экзамены 1995 года **36**
5.1. 8 класс (май) 36
5.2. 9 класс (май) 37

5.3. Физико-математический класс (май) . . . 38
5.4. Химико-биологический класс (май) . . . 39
5.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 39
5.6. Экономический класс (июнь) . . . 40
5.7. Химико-биологический класс (июнь) . . . 41
5.8. Психологический класс (июнь) . . . 42

6. Вступительные экзамены 1996 года 43
6.1. Физико-математический класс (март) . . . 43
6.2. Химико-биологический класс (апрель) . . . 44
6.3. 9 класс (май) . . . 44
6.4. Физико-математический класс (май) . . . 45
6.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 46
6.6. Математико-экономический класс (июнь) . . . 47
6.7. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 47
6.8. Химико-биологический класс (июнь) . . . 48
6.9. Психологический класс (июнь) . . . 49
6.10. Коммерческий класс (июнь) . . . 49

7. Вступительные экзамены 1997 года 51
7.1. 9 класс (май) . . . 51
7.2. Физико-математический класс (июнь) . . . 51
7.3. Математико-экономический класс (июнь) . . . 52
7.4. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 53
7.5. Химико-биологический класс (июнь) . . . 54
7.6. Психологический класс (июнь) . . . 54

8. Вступительные экзамены 1998 года 56
8.1. Физико-математический класс (май) . . . 56
8.2. 11 физико-математический класс (май) . . . 56
8.3. Химико-биологический и психологический классы (май) . . . 57
8.4. Гуманитарный класс (май) . . . 58
8.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 58
8.6. Математико-экономический класс (июнь) . . . 59
8.7. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 60
8.8. Химико-биологический и психологический классы (июнь) . . . 60

9. Решения задач вступительных экзаменов 62
9.1. Экзамены 1991 года . . . 62
1.1. Физико-математический класс (март) . . . 62
1.2. Физико-математический класс (май) . . . 63
1.3. Физико-математический класс (июнь) . . . 65
1.4. Естественно-научные классы (май) . . . 66
9.2. Экзамены 1992 года . . . 67

2.1. Физико-математический класс (май) . . . 67
2.2. Физико-математический класс (июнь) . . . 71
2.3. Естественно-научные классы (июнь) . . . 76
2.4. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 79
2.5. Историко-филологический класс (июнь) . . . 81
2.6. Философско-экономический класс (июнь) . . . 83
9.3. Экзамены 1993 года . . . 86
3.1. Физико-математический класс (февраль) . . . 86
3.2. Физико-математический класс (май) . . . 88
3.3. Физико-математический класс (июнь) . . . 91
3.4. Естественно-научные классы (июнь) . . . 95
3.5. Экономический класс (июнь) . . . 95
3.6. Химико-биологический класс (июнь) . . . 97
9.4. Экзамены 1994 года . . . 99
4.1. 8 класс (май) . . . 99
4.3. 9 класс (2-й тест, май) . . . 101
4.4. Физико-математический класс (июнь) . . . 102
4.5. Экономический класс (июнь) . . . 106
4.6. Химико-биологический класс (июнь) . . . 108
9.5. Экзамены 1995 года . . . 110
5.1. 8 класс (май) . . . 110
5.2. 9 класс (май) . . . 111
5.3. Физико-математический класс (май) . . . 115
5.4. Химико-биологический класс (май) . . . 117
5.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 119
5.6. Экономический класс (июнь) . . . 121
5.7. Химико-биологический класс (июнь) . . . 124
5.8. Психологический класс (июнь) . . . 125
9.6. Экзамены 1996 года . . . 129
6.1. Физико-математический класс (март) . . . 129
6.2. Химико-биологический класс (апрель) . . . 130
6.3. 9 класс (май) . . . 131
6.4. Физико-математический класс (май) . . . 133
6.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 135
6.6. Математико-экономический класс (июнь) . . . 136
6.7. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 137
6.8. Химико-биологический класс (июнь) . . . 139
6.9. Психологический класс (июнь) . . . 139
6.10. Коммерческий класс (июнь) . . . 140
9.7. Экзамены 1997 года . . . 142
7.1. 9 класс (май) . . . 142
7.2. Физико-математический класс (июнь) . . . 143
7.3. Математико-экономический класс (июнь) . . . 145
7.4. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 147

7.5. Химико-биологический класс (июнь) . . . 150
7.6. Психологический класс (июнь) . . . 151
9.8. Экзамены 1998 года . . . 153
8.1. Физико-математический класс (май) . . . 153
8.2. 11 физико-математический класс (май) . . . 155
8.3. Химико-биологический и психологический классы (май) . . . 157
8.4. Гуманитарный класс (май) . . . 158
8.5. Физико-математический класс (июнь) . . . 159
8.6. Математико-экономический класс (июнь) . . . 161
8.7. 11 физико-математический класс (июнь) . . . 163
8.8. Химико-биологический и психологический классы (июнь) . . . 164

10. Ответы **166**
10.1. 1991 год . . . 166
10.2. 1992 год . . . 166
10.3. 1993 год . . . 167
10.4. 1994 год . . . 168
10.5. 1995 год . . . 169
10.6. 1996 год . . . 171
10.7. 1997 год . . . 172
10.8. 1998 год . . . 173

11. Программы по математике **175**
11.1. 9 класс . . . 176
11.2. 10 физико-математический и математико-экономический классы . . . 179
11.3. 10 химико-биологический и психологический классы . . . 181
11.4. 10 гуманитарный класс . . . 184
11.5. 11 физико-математический класс . . . 187

Предисловие

За время существования лицея при Уральском государственном университете накопилось большое количество вариантов заданий по математике для поступающих в 8 – 11-е классы. Настоящий сборник содержит значительную часть этого материала. В него вошли более пятидесяти вариантов заданий, которые предлагались за последние восемь лет по различным специализациям.

Основную часть поступающих в лицей составляют школьники, окончившие девятый класс. Поэтому в названии заданий для них указаны только будущая специализация и месяц проведения экзамена. С 1993 по 1995 год варианты заданий для поступающих в 11-й физико-математический класс совпадают с вариантами заданий для поступающих в 10-й класс той же специализации, по этой причине отдельно они не приводятся. В главе 9 помещены подробные решения практически каждой из более чем четырехсот вошедших в сборник задач, а в главе 10 — ответы к задачам. Используемые в сборнике обозначения стандартны для большинства школьных учебников.

А теперь несколько советов тем, кто всерьез решил заняться подготовкой к будущим испытаниям. Не следует огорчаться, если поначалу правильно решить какую-то задачу не удастся. Во-первых, многие из них довольно трудные, а во-вторых, для того чтобы продолжить свое участие в конкурсном отборе, обычно достаточно решить около половины из предлагающихся задач. Не стоит также забывать, что письменный экзамен строго ограничен временными рамками. Обычно для поступающих в физико-математический класс на выполнение работы дается 4 часа, всем остальным — 3–3,5 часа. Поэтому на заключительных стадиях подготовки полезно себя контролировать и по времени. Многие абитуриенты ошибочно полагают, что главное в решении задачи — правильно ее оформить.

Это не так. Были случаи, когда одна или несколько задач были засчитаны после того, как их правильное решение обнаруживалось в черновике. Посему к предложенным в главе 9 решениям следует относиться творчески: не копировать стиль оформления задачи, а обращать внимание на те математические идеи и приемы, которые там используются. И последнее. Данное пособие не может заменить хороший учебник по математике, поэтому при подготовке к экзамену полезно к школьным учебникам добавить одну или несколько книг из следующего списка:

1. **Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.** Лекции и задачи по элементарной математике. М., 1974.

2. **Потапов М.К., Александров В.В., Пасеченко П.И.** Лекции по алгебре и элементарным функциям. М., 1980.

3. **Клопский В.М., Скопец З.А., Ягодовский М.И.** Геометрия: 9 – 10 классы. М., 1982.

4. **Яковлев Г.Н.** Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1985.

5. **Шарыгин И.Ф.** Решение задач: 10 класс. М.,1994.

6. **Никольская В.Г.** Факультативный курс по математике: 7 – 9 классы. М., 1989.

7. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. М., 1991. Ч. 1.

8. **Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.** Новые встречи с геометрией. М., 1978.

9. **Мельников И.И., Сергеев Н.Н.** Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М., 1990.

10. **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасеченко П.И.** Задачи по математике: Уравнения и неравенства. М., 1987.

11. **Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасеченко П.И.** Задачи по математике: Алгебра. М., 1987.

12. **Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасеченко П.И.** Нестандартные методы решений уравнений и неравенств. М., 1991.

13. **Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.Ф.** Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.

14. **Пойя Д.** Математическое открытие. М., 1976.

Авторам приятно выразить свою признательность сотрудникам кафедры математики СУНЦ УрГУ за большую работу по составлению вариантов задач вступительных экзаменов. Стоит также упомянуть помощь незнакомых читателей предыдущей книги, указавших на некоторые ошибки в ней.

О замеченных в сборнике неточностях и опечатках просьба сообщать по адресу: 620173, г. Екатеринбург, ул. Д.Зверева, 30. СУНЦ УрГУ, кафедра математики.

Глава 1

Вступительные экзамены 1991 года

1.1. Физико-математический класс (март)

1. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y^2-3y}{|y|}-|x+1|\leqslant 1.$$

2. При каких значениях a число 1 является одним из решений неравенства $x^2+2x+a^2-6a-5\geqslant 0$?

3. Дана точка D — середина стороны $[BC]$ треугольника ABC, а также даны прямые, на которых лежат медианы $[BM]$ и $[CK]$ этого треугольника. Требуется восстановить треугольник ABC, пользуясь циркулем и линейкой.

1.2. Физико-математический класс (май)

1. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{2x^2+x-6}{|x+2|}+|y|\leqslant 0.$$

2. Длина основания равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны — 5 см. Найдите длины боковых сторон.

3. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ также простые.

4. Докажите, что уравнение

$$x^5y = xy^5 + 1987$$

не имеет решений в целых числах.

1.3. Физико-математический класс (июнь)

1. Изобразить на координатной плоскости (OXY) множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\text{а) } y + \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} \leqslant 0;$$

$$\text{б) } y + \frac{2x^2 + x - 10}{|x - 2|} \leqslant 0;$$

$$\text{в) } |y| + \frac{2x^2 + x - 10}{|x - 2|} \leqslant 0.$$

2. В прямоугольном треугольнике ABC известны длины катетов: $|AB| = 6$ см и $|BC| = 8$ см. Определить длину медианы $[BD]$.

3. Решить неравенство $25x > x^3$.

4. Доказать, что если при некоторых целых значениях a, b и c число $3a + 5b + c$ делится нацело на 7, то и число $11a + 9b + 13c$ при этих же a, b и c также делится на 7.

5. Известно, что прямая $x = 2$ является осью симметрии квадратного трехчлена $y = ax^2 - (a + 6)x + 3$. Постройте его график.

1.4. Естественно-научные классы (май)

1. Хорда $[AB]$ окружности параллельна диаметру $[MN]$. Найдите площадь фигуры, ограниченной хордами $[MA], [MB]$ и дугой AB, если дуга AB содержит 120^0, а радиус круга равен R.

2. Упростить выражение

$$\frac{a^2 - 2a}{\sqrt{a^2 - 2a + 1} + 1}.$$

3. Изобразить на координатной плоскости (OXY) множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\text{а) } y + \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} \leqslant 0;$$

$$\text{б) } y + \frac{2x^2 + x - 10}{|x - 2|} \leqslant 0;$$

$$\text{в) } |y| + \frac{2x^2 + x - 10}{|x - 2|} \leqslant 0.$$

4. Решить уравнение

$$7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 5.$$

Глава 2

Вступительные экзамены 1992 года

2.1. Физико-математический класс (май)

1. а) Упростить выражение

$$\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4}.$$

б) Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{9+6p+p^2}-\sqrt{9-6p+p^2}}{\sqrt{9+6p+p^2}+\sqrt{9-6p+p^2}}.$$

в) Могут ли числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+1$ быть корнями уравнения $x^2+px+q=0$, если p и q являются целыми числами?

г) Определить знаки a, b и c, если график функции $y=ax^2+bx+c$ изображен на рис. 1.

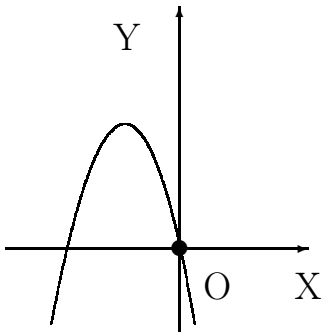


Рис. 1

2. а) Для прямоугольного треугольника ABC (угол C прямой) известен радиус описанной около него окружности. Достаточно ли этих данных для нахождения

(a) длины катета AC?

(b) величины угла при вершине A?

(c) длины гипотенузы AB ?

б) Пусть m, n и N — натуральные числа ($N > n$). Известно, что r и R являются остатками от деления числа m на числа n и N соответственно. Можно ли отсюда сделать вывод, что

(a) $r > R$?

(b) $r < R$?

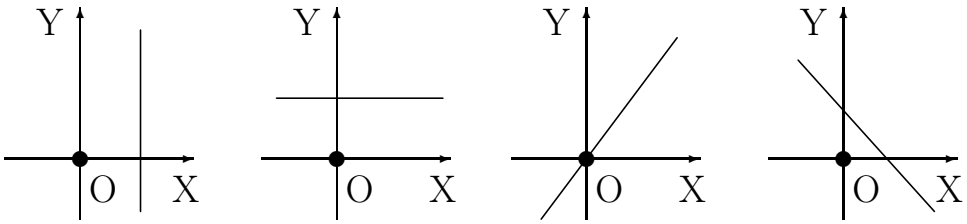
(c) $n + N > r + R$?

в) Известно, что k — нечетное натуральное число. Что можно сказать о числе решений уравнения

$$x^k - 1 = 0?$$

г) Правильные m - и n -угольники вписаны в окружности с одинаковыми радиусами. Известно, что площадь m -угольника больше площади n -угольника. Что можно сказать о числах m и n и о периметрах многоугольников?

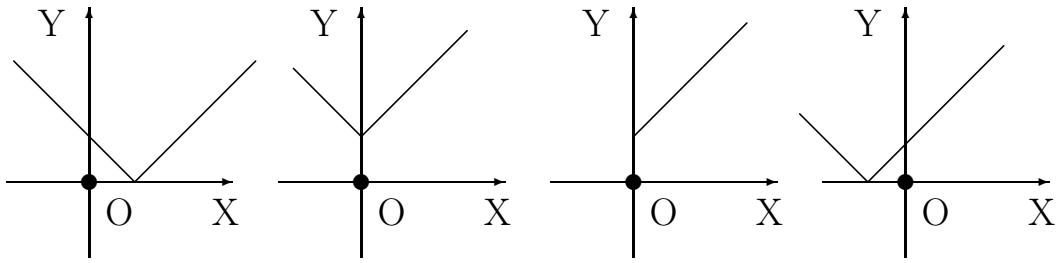
3. а) Какие из следующих графиков (рис. 2) могут быть графиком функции $y = kx + b$, если b не равно нулю?



(a) (b) (c) (d)

Рис. 2

б) Какой из следующих графиков (рис. 3) может быть графиком функции $y = |1 + x|$?



(a) (b) (c) (d)

Рис. 3

4. а) При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 + (a^2 + a)x + a^2 + 20 = 0$ меньше -2, а второй больше, чем -2?

б) Решить уравнение

$$\Big|\,||x + 2| - 3| + 1\,\Big| = 1.$$

5. а) Медианы треугольника ABC к сторонам AB и AC пересекаются под прямым углом. Известно, что длина AB равна 6, а длина AC равна 8. Найти длину третьей стороны треугольника.

б) Находятся ли точки $A(5, 4)$, $B(3, 6)$, $C(101, -80)$ на одной прямой?

в) $ABCD$ — квадрат со стороной 1. Вершины квадрата $EFGH$ лежат на сторонах квадрата $ABCD$ и делят их в отношении $1 : 4$. В квадрат $EFGH$ таким же способом вписан еще один квадрат и т.д. Найти сумму площадей всех таких квадратов.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$x = \frac{2a}{|x - 2|}$$

имеет единственное решение?

2.2. Физико-математический класс (июнь)

1. Решите неравенства:

а) $x^2 - 6x + 4 \geqslant 1$;

б) $x^2 - |6x + 4| \geqslant 1$;
в) $|x^2 - |6x + 4|| \geqslant 1$.

2. а) Найти количество точек пересечения графиков функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = 2x - 2$.

б) Найти, при каких значениях k графики функций $y = x^2 - 4x + 3$ и $y = kx - 2$ пересекаются в одной точке.

в) Записать уравнение прямой, не параллельной оси (OY), пересекающейся с графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ в единственной точке с абсциссой $x_0 = 9$.

3. а) Найдите такое число $a > 0$, чтобы неравенство

$$\frac{12}{x} + \frac{x}{12} \geqslant a$$

выполнялось при всех положительных x.

б) Найдите наибольшее из всех таких чисел.

в) Прямоугольная цветочная клумба должна занимать площадь 96 кв.м. Вдоль длины клумбы должны быть дорожки шириной 2 м, а вдоль ширины — по 3 м. Каковы должны быть размеры клумбы, чтобы площадь дорожек была наименьшей?

4. Заданы две геометрические прогрессии. Первый член и знаменатель первой из них равны соответственно 3 и 32, первый член и знаменатель второй — 48 и 8. В этих условиях решить задачи *а — в*.

а) Найдите наименьшее число, которое одновременно является членом первой и второй прогрессии.

б) Среди первых 1000 членов первой и второй прогрессии сколько общих членов?

в) Найдите сумму этих общих членов.

5. Пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность с центром O и AD — большее основание трапеции. В этих условиях решить задачи *а — г*.

а) Пусть величина угла $\angle CAD$ равна α. Найти величину угла AOB.

б) Докажите, что трапеция является равнобедренной.

в) Пусть известно, что величина угла BAD равна 60^0 и $|BC|$ в два раза меньше $|AD|$. Достроив трапецию до треугольника, докажите, что

(a) полученный треугольник является равносторонним,

(b) BC — средняя линия этого треугольника.

г) Пусть R — радиус описанной окружности. В условиях предыдущей задачи докажите, что AD является диаметром описанной окружности. Вычислите площадь трапеции $ABCD$.

2.3. Естественно-научные классы (июнь)

1. а) Упростить выражение

$$\frac{1-\sqrt{y}}{y^{3/2}-y+y^{1/2}} : \frac{1}{y^2+\sqrt{y}}.$$

б) Выражение

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}}$$

привести к виду $a+\sqrt{b}$.

2. Соотношение металлов в первом сплаве $1:3$, а во втором — $3:2$. Сколько нужно взять того и другого (в соотношении), чтобы в получившемся сплаве металлов было поровну?

3. Построить графики функций в задачах:

$$\text{а)} \quad y=\frac{x^2+x-2}{x+2};$$

$$\text{б)} \quad y=\frac{x^2+x-2}{|x+2|}.$$

4. Решить уравнения:

а) $bx-2=3x$;

б) $3(x-2)^2+(x^2-4x)^2=16$.

5. Решить неравенства:

а) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-9} > 0;$

б) $x^3+3x-4 \leqslant 0.$

6. а) Стороны треугольника равны 3, 5, $\sqrt{23}$ см. Найти величину угла, лежащего против стороны $\sqrt{23}$ см.

б) Построить остроугольный треугольник, зная два его угла и одну из высот.

2.4. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют уравнению

$$8x^2 - 6xy + y^2 = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x+1| = 4y - 4, \\ |y-1| + |x+1| = 5. \end{cases}$$

3. Изобразить на координатной плоскости множество всех точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^2 - 4y + 3 + \cos^2 x = 0.$$

4. Имеет ли корни уравнение

$$x^2 + 5x - 8\sqrt{x} + 20 = 0?$$

5. Решить при $a < 1$ неравенство

$$\frac{ax+1}{x} > 1.$$

6. Два судна движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В начальный момент времени положение судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник стал прямоугольным. Найдите расстояние между судами в начальный момент времени, если в момент прибытия первого судна в порт второму осталось пройти 120 км.

2.5. Историко-филологический класс (июнь)

1. Упростить выражение

$$\frac{1}{z^2+8\sqrt{z}} : \frac{\sqrt{z}-2}{z\sqrt{z}-2z+4\sqrt{z}}.$$

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{4}{x^2-5x+6}+\frac{2x}{x-2}\right) : \frac{3x-2}{3}.$$

3. Построить график функции

$$y=\frac{-2x^2-x+1}{x+1}.$$

4. Найдите с помощью графиков число решений системы

$$\begin{cases} y=1/x, \\ y=-x^2+2x+1. \end{cases}$$

5. Решить неравенство

$$\frac{x^2-x+3}{x^2-9} \geqslant 0.$$

6. Длины оснований равнобедренной трапеции равны 7 и 3 см. Найдите площадь трапеции, если ее острый угол равен 60^0.

7. Из двух пунктов реки навстречу друг другу плывут две моторные лодки, собственные скорости которых равны. Скорость течения реки равна 2 км/ч. До встречи лодка, идущая по течению, шла $0,9$ ч, а другая — 1 ч. Найти собственную скорость лодок, если лодка, идущая по течению, прошла на 2 км больше другой.

2.6. Философско-экономический класс (июнь)

1. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{y}+2}{y\sqrt{y}+2y+4\sqrt{y}} : \dfrac{1}{y^2-8\sqrt{y}};$

б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

2. После двух последовательных повышений зарплата составила $\frac{36}{25}$ от первоначальной. Повышение производилось оба раза на одно и то же число процентов. Найти это число.

3. Построить графики функций:

а) $y = \dfrac{-3x^2-5x+2}{x+2}$;

б) $y = \dfrac{-3x^2-5x+2}{|x+2|}$.

4. Решить уравнения:

а) $-ax = 2x-3$;

б) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$.

5. Решить неравенства:

а) $\dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1} > 0$;

б) $t^3-2t+1 \geqslant 0$.

6. В треугольнике MNP известно, что $|MN| = p$, $\angle M = \alpha$ и $\angle N = \beta$. Найти биссектрису угла $\angle M$.

7. Известно, что $\triangle ABC$ — остроугольный. Постройте $\triangle ABC$, зная два его угла и одну из высот.

Глава 3

Вступительные экзамены 1993 года

3.1. Физико-математический класс (февраль)

1. Пусть

$$f(x) = (\sqrt{9 - x^2})^2 + (\sqrt{x^2 + x - 2})^2.$$

(a) Найти область определения функции $y = f(x)$.

(b) Построить график функции $y = f(x)$.

2. Точки E, F, P, H лежат на сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$, причем $AE = AB/3, BF = BC/3$ и P, H — середины сторон CD и DA. Найти отношение площадей четырехугольника $EFPH$ и параллелограмма $ABCD$.

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x < -1, \\ -2x - 5, & \text{если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

(a) Решить неравенство $f(x) \leqslant x - 5$.

(b) Найти значения a, b, c таким образом, чтобы при всех значениях x было выполнено равенство $f(x) = ax + b - |3x + c|$.

3.2. Физико-математический класс (май)

1. Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}.$$

2. Можно ли число 133 представить в виде суммы некоторых различных натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел было равно 133?

3. Две окружности с радиусами $R = 4.5$ см и $r = 0.5$ см касаются внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной.

4. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения $(a^2+1)x^2 - 4(a+2)x + 3 = 0$ симметричны относительно $x = 1$.

5. Дана система

$$\begin{cases} |y - x| = a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

При всех значениях параметра a

(a) определить количество решений этой системы,

(b) найти решения этой системы.

3.3. Физико-математический класс (июнь)

1. Построить график функции

$$y = \sqrt{\frac{(x^2+x-6)(x^2-6x+8)}{x^2-x-12}}.$$

2. Доказать, что разность

$$\sqrt{|2\sqrt{2}-3|} - \sqrt{2\sqrt{2}+3}$$

является целым числом. Найти это число.

3. а) Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3,-2)$ и $B(4,11)$.

б) Написать уравнения прямых, проходящих через точку $M(0,7)$ и касающихся окружности с центром $A(0,2)$ и радиусом 3.

4. Равнобедренная трапеция $ABCD$ с боковым ребром $AD = 5$ описана около окружности. Из точки D опущены перпендикуляры DK и

DL на сторону AB и на продолжение BC. Найти длину меньшего основания, если отношение площадей четырехугольников $KDLB$ и $ABCD$ равно $\frac{77}{125}$.

5. При каком значении параметра a решение неравенства

$$|2x-4|+x-1 \leqslant a$$

существует и симметрично относительно $x_0 = 1$?

6. Некоторые стороны выпуклого многоугольника красные, остальные — синие. Сумма длин красных сторон меньше половины периметра, и нет ни одной пары соседних синих сторон. Докажите, что в этот многоугольник нельзя вписать окружность.

3.4. Естественно-научные классы (июнь)

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{x-\pi/2} = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|x| \geqslant x+1.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение

$$4x^2 - ax + 4 = 0$$

имеет два корня?

4. Стороны треугольника равны 3, 7, $\sqrt{51}$ см. Найти угол, лежащий против большей стороны.

3.5. Экономический класс (июнь)

1. Построить графики функций:

$$\text{а)} \quad y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x-1};$$

б) $y = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{|x - 1|}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2} \geqslant 0.$$

3. Упростить выражение

$$\cos 3\alpha + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(-2\alpha).$$

4. Зарплата лаборанта в 1985 году составила 100 рублей в месяц. После двух последовательных повышений на одно и то же число процентов она составила 121 рубль. На сколько процентов повысилась зарплата?

5. При каком значении параметра k уравнение $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ имеет не более одного корня.

6. Длина средней линии равнобедренной трапеции равна 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия делит трапецию на части, отношение площадей которых равно $7/13$. Найти высоту трапеции.

3.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 5} > 0.$$

2. При каких значениях a функция

$$y = (a - 2)x^2 + ax + a$$

принимает только отрицательные значения?

3. При условии, что $0 < a < b$, упростить выражение

$$\frac{\sqrt{(a + b)^2 - 4ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны $[AB]$ равна a, величина угла $\angle A$ равна α, а величина угла $\angle B$ равна β. Найти длины всех биссектрис этого треугольника.

5. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B (двигаясь с постоянной скоростью) и повернул обратно. При этом четверть пути автомобиль ехал с той же скоростью, что и вперед, а затем увеличил скорость на 30 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на один час меньше. Найти первоначальную скорость автомобиля, если известно, что расстояние от пункта A до B равно 240 км.

Глава 4

Вступительные экзамены 1994 года

4.1. 8 класс (май)

1. Вычислите куб разности чисел 1.2 и $-1,8$.

2. Какой цифрой оканчивается разность $215^3 + 411^2$?

3. Вычислите

$$\left(2\frac{2}{7} - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0.21.$$

4. Некоторая вещь стоила 30 р. Сначала ее цена поднялась на 20%, а затем упала на 25%.

(a) Сколько стала стоить вещь?

(b) На сколько процентов по сравнению с первоначальной изменилась ее цена?

5. При каких b уравнение $-10/b = y$ имеет корни: а) 2; б) $-\frac{1}{5}$; в) положительные корни; г) не имеет корней?

6. Одна из сторон прямоугольника на $1,5$ см короче другой. Определить стороны этого прямоугольника, если его периметр равен 15 см.

7. Предварительно построив графики левой и правой части, решить уравнение

$$-1.5x - 2 = 0.5x + 4.$$

8. Упростить выражение

$$(xy - 2)^2 - 2(x + 1/x) - xy(xy - 4).$$

9. Найдите значение выражения

$$(x-2y)^2-(x+2y)^2$$

при $x=0.4$ и $y=3\frac{1}{3}$.

10. Что нужно добавить к разности $(2y-3x)$, чтобы получить сумму $(y+a)$?

11. Упростить выражения:

$$\text{а)}\quad \left(-\frac{3}{4}a^2b\right)^3\cdot 16ab^4;$$

$$\text{б)}\quad \left(\frac{2a}{a+1}-1\right):\left(2a-\frac{2a^2}{1+a}\right).$$

12. Решить системы:

$$\text{а)}\quad \begin{cases} 4m+p=7,\\ 2m-p=5; \end{cases} \qquad \text{б)}\quad \begin{cases} a+b=2,\\ b+c=-1,\\ a+c=1. \end{cases}$$

13. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник по данной гипотенузе.

14. Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Точки O и O_1 являются точками пересечения медиан $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно. Известно, что $|OA|=|O_1A_1|$. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

15. Дорожка стадиона имеет форму окружности, ее длина 400 м. Вася пробегает ее за 4 мин, Коля — за 2 мин. Они стартуют в одном месте одновременно и бегут в одну сторону. Кто кого догонит в первый раз и через сколько минут это произойдет?

4.2. 9 класс (1-й тест, май)

1. Если $1/3+1/4+1/n=1$, то n равно

$$(a)\,\frac{12}{5},\quad (b)\,\frac{5}{12},\quad (c)\,\frac{12}{11},\quad (d)\,\frac{11}{12},\quad (e)\,5.$$

2. Если $\frac{5}{b+8} = \frac{3}{b+4}$, то b равно

$$(a)\,\frac{15}{32}, \quad (b)\,\frac{1}{2}, \quad (c)\,\frac{11}{8}, \quad (d)\,2, \quad (e)\,4.$$

3. Если $\frac{1}{x/2} = 1/5$, то x равно

$$(a)\,\frac{1}{5}, \quad (b)\,\frac{2}{5}, \quad (c)\,\frac{11}{5}, \quad (d)\,\frac{5}{2}, \quad (e)\,10.$$

4. Если $\frac{r}{s} = 3$, то $r^2 - 9s^2$ равно

$$(a)\ -9, \quad (b)\,8, \quad (c)\,0, \quad (d)\,9, \quad (e)\,6.$$

5. Если $x : y = 3 : 2$ и $x + 3y = 27$, то меньшее из чисел x и y равно

$$(a)\,3, \quad (b)\,\frac{54}{11}, \quad (c)\,6, \quad (d)\,9, \quad (e)\,18.$$

6. $\sqrt{27} + 2\sqrt{12} - 7\sqrt{3}$ равно

$$(a)\,3 - 3\sqrt{3}, \quad (b)\,0, \quad (c)\,6\sqrt{2} - 4\sqrt{3}, \quad (d)\,4\sqrt{3}, \quad (e)\,10\sqrt{3}.$$

7. Решите уравнение $y^2 = (\sqrt{11}+\sqrt{2})(\sqrt{11}-\sqrt{2})$. Какие из следующих чисел являются его корнями:

$$(a)\ \pm 3, \quad (b)\ \pm 9, \quad (c)\ \pm 2, \quad (d)\,22, \quad (e)\,\sqrt{11}?$$

8. При каких x имеет смысл выражение $\sqrt{-2x}$:

$$(a)\,x \geqslant 0, \quad (b)\,x = 0, \quad (c)\,x \leqslant 0,$$

$$(d)\,\text{ни при каких } x, \quad (e)\,\text{при любых } x?$$

9. При каких x имеет смысл выражение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}:$$

$$(a)\,x > 2, \quad (b)\,x \neq \pm 2, \quad (c)\,x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty),$$

$$(d)\,x > 4, \quad (e)\,x \in (-2, 2)?$$

10. После сокращения дроби

$$-\frac{3\sqrt{3}-a\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{3}}$$

получается

$$(a)\,3+3a\sqrt{3a}+a,\quad (b)\,a-3,\quad (c)\,3-a,\quad (d)\,27-a^3,\quad (e)\,3\sqrt{3}.$$

11. При каком a уравнение $x^2+3ax+a=0$ имеет два одинаковых корня:

$$(a)\,a=0,\quad (b)\,a>0,\quad (c)\,a=4/9, a=0,$$
$$(d)\,a<0,\quad (e)\text{ при любом } a?$$

12. Один из корней уравнения $5x^2+kx-12=0$ равен -3, тогда второй корень равен

$$(a)\,1,\quad (b)\,\frac{4}{5},\quad (c)\,0,\quad (d)\,11,\quad (e)\,3.$$

13. После упрощения выражения

$$\frac{14^{2n}}{2^{n-2}\cdot 7^n}$$

получится

$$(a)\,\frac{7^n}{2^{n+2}},\quad (b)\,7^n\cdot 2^{n+2},\quad (c)\,1,\quad (d)\,\frac{4}{2^{n-2}},\quad (e)\,2^n.$$

14. Сколько целых решений имеет неравенство $|2x+1|<2$:

$$(a)\text{ бесконечно},\quad (b)\text{ одно},\quad (c)\text{ два},\quad (d)\text{ ноль},\quad (e)\text{ пять?}$$

15. Корни уравнения $x^4-26x^2+25=0$ равны:

$$(a)\,x=1,\quad (b)\,x=5,\quad (c)\,x=0,$$
$$(d)\,x=1, x=5,\quad (e)\text{ свой ответ.}$$

16. Решить неравенства:

а) $\dfrac{5+3x}{2} < 1,$

$(a)\, x < 0, \quad (b)\, x > 3, \quad (c)\, x < -4/3,$

$(d)\, x < -1, \quad (e)$ свой ответ;

б) $-1 \leqslant 5 - 2x \leqslant 1,$

$(a)\ -3 \leqslant x \leqslant -2, \quad (b)\, 2 \leqslant x \leqslant 3, \quad (c)\, x \geqslant 3,$

$(d)\, x < 0, \quad (e)$ свой ответ;

в) $x^2 > 25,$

$(a)\, x > 5, \quad (b)\, x > 0, \quad (c)\ -5 < x < 5,$

$(d)\, x > 25, \quad (e)$ свой ответ;

г) $\dfrac{(x-4)(x-10)}{x+12} < 0,$

$(a)\, x > 0, \quad (b)\, x < 10, \quad (c)\, 4 < x < 10, x < -12,$

$(d)\, x > -12, \quad (e)$ свой ответ.

17. Найдите координаты вершин парабол:
а) $y = 2(x-4)^2 + 5,$

$(a)\,(4,-5), \quad (b)\,(4,5), \quad (c)\,(5,-4), \quad (d)\,(0,5), \quad (e)$ свой ответ;

б) $y = 2x^2 + 4x - 1,$

$(a)\,(2,1), \quad (b)\,(1,5), \quad (c)\,(-1,1), \quad (d)\,(-1,-3), \quad (e)$ свой ответ.

18. Найдите ось симметрии параболы $y = 4x^2 + 2x - 3$,

$(a)\, y = 0, \quad (b)\, y = -3, \quad (c)\, x = 1, \quad (d)\, x = -1, \quad (e)\, x = -1/4.$

19. Если Q — середина $[PT]$ (рис. 4), то длина $[RT]$ равна

$(a)\, 13/8, \quad (b)\, 23/12, \quad (c)\, 55/24, \quad (d)\, 55/12, \quad (e)\, 13/2.$

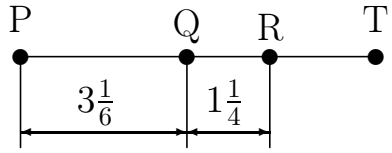


Рис. 4

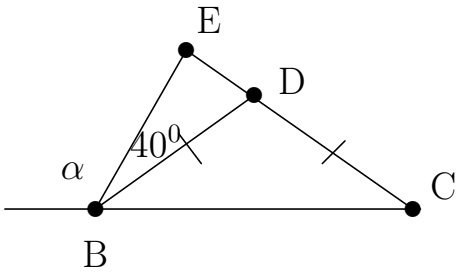


Рис. 5

20. Если $|BE| = |BD| = |DC|$ и $\widehat{DBE} = 40^\circ$ (рис. 5), то величина угла α равна

$$(a)\,35^\circ, \quad (b)\,75^\circ, \quad (c)\,105^\circ, \quad (d)\,115^\circ, \quad (e)\,120^\circ.$$

21. Если операция $*$ определена по формуле $x * y = x - y + x \cdot y$, то $2 * (-2)$ равно

$$(a)\,0, \quad (b)\,-4, \quad (c)\,1, \quad (d)\,4, \quad (e)\,\text{свой ответ.}$$

22. Если $f(x) = (x-1)/x$ и $q(x) = 1/x$, то $f(q(x))$ равно

$$(a)\,\frac{x-1}{x^2}, \quad (b)\,1-x, \quad (c)\,x-1, \quad (d)\,0, \quad (e)\,x^2-1.$$

23. В прямоугольном треугольнике ABC длина гипотенузы $[AC]$ равна 5 и $\sin A = \frac{1}{2}$. Тогда длина $[BC]$ равна

$$(a)\,5, \quad (b)\,\sqrt{75}, \quad (c)\,2.5, \quad (d)\,2\sqrt{5}, \quad (e)\,1.$$

24. Чему равны 3% от 27:

$$(a)\,27, \quad (b)\,3, \quad (c)\,1, \quad (d)\,0.81, \quad (e)\,8.1?$$

25. Какие координаты имеет точка пересечения линий $x\sqrt{2} + 2y = 1$ и $x - y\sqrt{2} = \sqrt{2}$:

$$(a)\,\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right), \quad (b)\,\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right),$$

$$(c)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad (d)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right),$$
$$(e)\ \left(\sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)?$$

26. График какой из функций изображен на рис. 6:

$(a)\, y = (x+2)^2 - 1, \quad (b)\, y = (x-2)^2 - 1,$

$(c)\, y = (x-2)^3, \quad (d)\, y = (x+2)^2+1, \quad (e)\, y = x-2?$

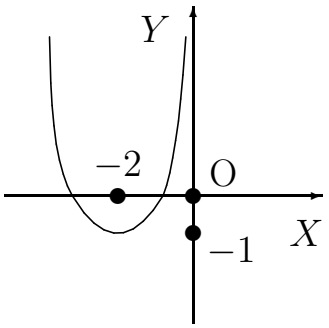


Рис. 6

27. Какой из графиков на рис. 7 является графиком функции $y = |x-2| + 1$?

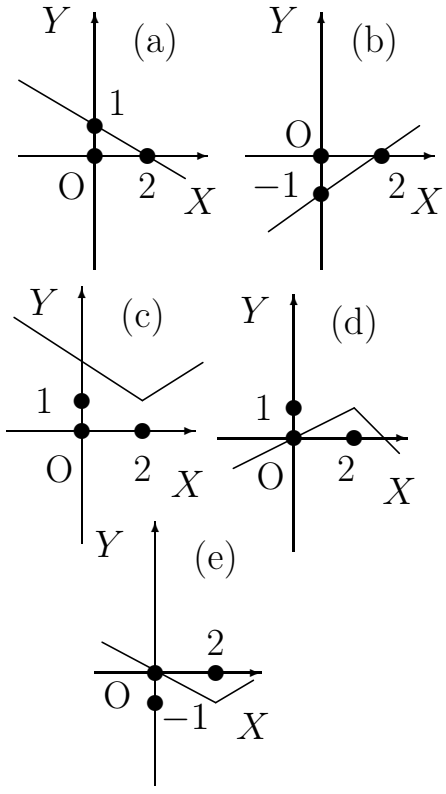


Рис. 7

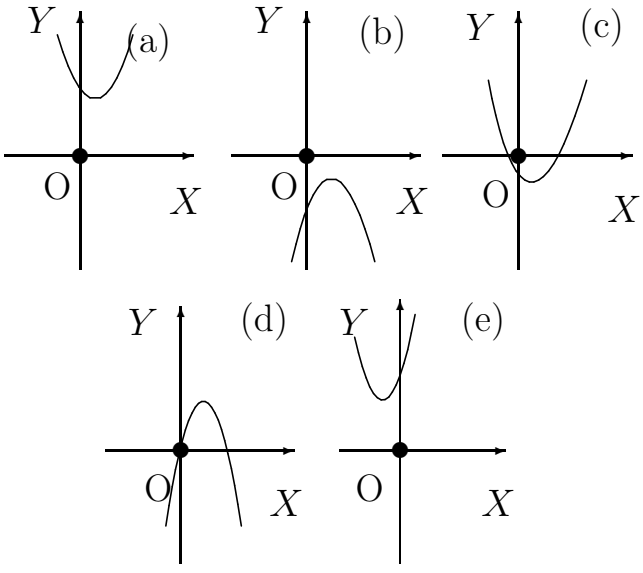


Рис. 8

28. На каком из рис. 8 изображен график функции $y = 72x^2 - 54x + 625$?

29. У трапеции $ABCD$ (рис. 9) три стороны равны, а большее основание на 2 см меньше суммы остальных трех сторон. Если расстояние между параллельными сторонами равно 5 см, то площадь трапеции равна

$$(a)\,5, \quad (b)\,35, \quad (c)\,45, \quad (d)\,125, \quad (e)\,185.$$

30. Фигура (рис. 10) должна быть нарисована без отрыва карандаша от бумаги так, чтобы ни одна из линий не была проведена дважды. Если начать с точки P, то закончить придется в точке

$$(a)\,U, \quad (b)\,T, \quad (c)\,R, \quad (d)\,Q, \quad (e)\,P.$$

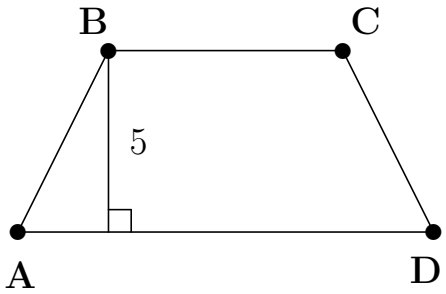


Рис. 9

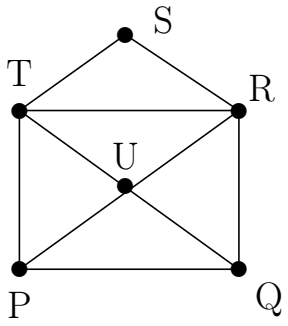


Рис. 10

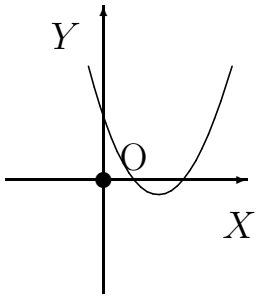


Рис. 11

31. Определить знаки a, b, c, если график функции $y = ax^2 + bx + c$ изображен на рис. 11.

4.3. 9 класс (2-й тест, май)

1. Какой цифрой оканчивается $54^{35} + 28^{21}$?

2. Первая цифра четырехзначного числа равна 7. Если эту цифру переставить на последнее место, то получится число, которое меньше первоначального на 864. Найдите первоначальное число.

3. Написав контрольную работу, ученики Володя, Саша и Андрей сообщили дома:

Володя: “Я написал на “5”,

Саша: “Я написал на “3”,

Андрей: “Я написал не на “5”.

После проверки оказалось, что один из мальчиков получил оценку “5”, другой “4”, третий — “3”. Какую оценку получил каждый, если известно, что двое верно назвали свою оценку, а один ошибся?

4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 - 5x)(2y + 2x) = 0.$$

5. Однажды один математик пришел в гости к другому математику и спросил хозяина, сколько у него детей и какого они возраста. “У меня три мальчика, — ответил тот, — произведение их лет равно 72, а сумма равна номеру нашего дома”. Гость вышел, посмотрел на номер дома, вернулся и сказал:“Задача не определена”. —“Совсем забыл тебе сказать, что мой старший сын — рыжий”,— ответил хозяин. Сколько лет сыновьям математика?

4.4. Физико-математический класс (июнь)

1. а) Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}{|x|} = 2.$$

б) Изобразите график функции

$$y = \frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}{|x|}.$$

2. Точки $A(1, -9)$, $B(5, 3)$ и $C(7, -3)$ отметили на координатной плоскости. Координатные оси и начало координат стерли. Можно ли только с помощью циркуля и линейки восстановить координатные оси и начало координат? Можно ли восстановить масштаб измерения?

3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1. Большие стороны параллелограмма разделены на три равные части, а меньшие — на две. Проведены отрезки, соединяющие точки деления, как это показано на рис.12. Определить площадь заштрихованной фигуры.

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a}=0$$

имеет только один корень? Указать все значения параметра, удовлетворяющие этому условию.

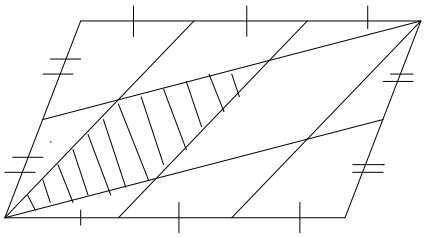


Рис. 12

5. Решите неравенство

$$\frac{x^2-(2a+1)x+2a}{x-a}\leqslant 0.$$

4.5. Экономический класс (июнь)

1. Решить неравенства:

$$\text{а) } 2x-x^2\geqslant 1;$$

$$\text{б) } \frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}<0.$$

2. Построив графики левой и правой части, определить количество решений уравнения

$$|x|=x^2-2.$$

3. Изобразить на координатной плоскости фигуру, ограниченную линиями $y=x$ и $y=x^2-4x+4$.

4. При каких значениях параметра a неравенство

$$ax^2-(a+1)x+2a-1>0$$

выполняется при всех x?

5. В треугольнике ABC угол $C=90^\circ$ и $|BC|=a$, а радиус описанной окружности равен R. В этих условиях решить следующие задачи.

а) Найти площадь $\triangle ABC$.

б) Определить длину высоты, проведенной к гипотенузе.

в) Найти радиус вписанной окружности.

4.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. В сосуде, объем которого равен 10 литрам, содержится 70%-й раствор соли. С ним последовательно производят следующую процедуру, которая называется переливанием: из сосуда выливается 2 литра смеси и добавляется 2 литра воды, после чего раствор перемешивается. Какова будет концентрация соли после первого переливания? После второго переливания?

2. Построить графики функций:

а) $y = 2x^2 - 7x + 3$;

б) $y = |2x^2 - 7x + 3|$;

в) $y = (2x - 1)|x - 3|$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{4 - x^2}(6 + x - x^2) \geqslant 0.$$

Указать все целые решения.

4. Есть ли в треугольнике со сторонами 2, 3 и 4 углы меньше $\pi/4$?

5. Для уравнения $ax^2 + 10x + 8 = 0$ решить задачи *а — в.*

а) Определить, при каких a корни действительны и различны.

б) При каких натуральных a сумма корней является целым числом?

в) Найти все значения параметра a , при которых корни имеют разные знаки.

Глава 5

Вступительные экзамены 1995 года

5.1. 8 класс (май)

1. Выполнить действия:

$$\left(\frac{2}{5}\cdot 67,5-3,75\right):\frac{1}{2}.$$

2. Упростить выражение $(a-2)(a+2)-a(2a+1)+a$. Найти значение этого выражения при $a=-3$.

3. Решить уравнения:

а) $\dfrac{7x-2}{3}-\dfrac{x+3}{5}=3;$

б) $x^2-(x+2)^2=0;$

в) $ax-a=x-1.$

4. Разложить на множители $(m-n)^2+m-n$.

5. Упростить

$$\left(\frac{a^2}{4-a^2}+\frac{a}{a+2}\right)\frac{a-2}{4}.$$

6. График функции $y=kx$ проходит через точку $B(-4;1)$. Определить k.

7. Два треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC. Причем $AB=BC$ и $AD=DC$. Доказать, что $\angle BAD=\angle BCD$.

8. Могут ли два простых числа оказаться идущими подряд? А три?

5.2. 9 класс (май)

1. Найти p и q, если парабола $y = x^2 + px + q$
а) пересекает ось (OX) в точках $x = \frac{2}{3}$ и $x = -\frac{1}{2}$;
б) касается оси (OX) в точке $x = -7$;
в) пересекает ось (OX) в точке $x = 2$, а ось (OY) — в точке $y = -1$.

2. Упростить одно из выражений:

$$\text{а)} \quad \frac{|2x-7|}{3,5-x};$$

$$\text{б)} \quad (x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}}.$$

3. Решить одно из неравенств:
а) $-3x^2 + 5x - 9 < 0$;
б) $(x^2-16)(x-2)^2 \geqslant 0$;

$$\text{в)} \quad \frac{(x+4)^2(x-6)}{3-2x-x^2} \leqslant 0.$$

4. Решить одно из неравенств:
а) $|x| \geqslant 3$;
б) $|5x-2| \geqslant 4$;
в) $|x-3| > a$, где a — действительное число.

5. Построить график одной из функций:
а) $y = x^2 - 5x + 7$;
б) $y = 2x^2 + 4x - 3$.

6. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $DEFK$ так, как это показано на рис. 13. Докажите, что выполняется $DE^2 = BD \cdot CE$.

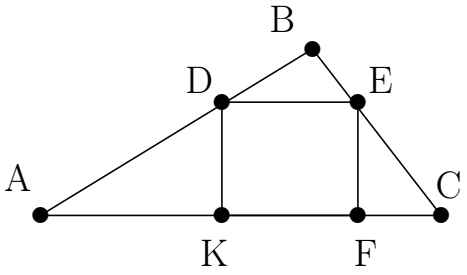


Рис. 13

7. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E так, что $S_{ADE} = S_{ABC}/2$. Отрезок DE пересекает медиану CM в точке O. Докажите, что выполняется $OM \cdot OD = OE \cdot OC$.

8. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B и повернул обратно. При этом первую четверть пути автомобиль ехал с той же скоростью, что и вперед, а затем увеличил скорость на 30 км/ч, и поэтому на обратный путь он затратил на 1 ч меньше. Найти первоначальную скорость автомобиля, если известно, что расстояние от пункта A до B равно 240 км.

5.3. Физико-математический класс (май)

1. а) Построить график функции

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2}.$$

б) При каких a уравнение

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2} = a$$

имеет хотя бы одно решение?

2. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y - 5 = 0, \\ x + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

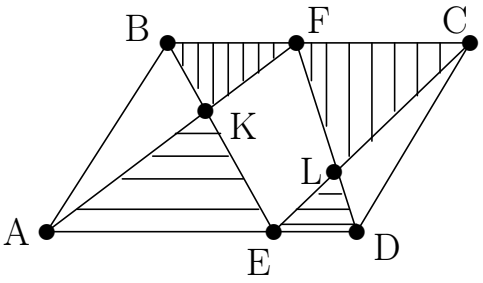


Рис. 14

3. Известно, что точка K лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$. Найти $tg(\angle KAD)$, если $AD = 4$, $AB = \sqrt{3}$, а угол $\angle AKD$ прямой.

4. На противоположных сторонах параллелограмма $ABCD$ лежат точки E и F. Каждую из них соединили с вершинами противоположной стороны. Доказать, что сумма площадей треугольников AEK и ELD (рис. 14) равна сумме площадей треугольников BKF и FLC.

5. Найти все a, при которых уравнение

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x}\sqrt[4]{x^4 - 1}}{\sqrt{a + x}} + |a| = 3$$

имеет решение.

5.4. Химико-биологический класс (май)

1. Построить график одной из функций:

$$\text{а)} \quad y = 1 + \sqrt{(x-3)(x-5)+1};$$

$$\text{б)} \quad y = x^2 + \sqrt{(x-3)(x-5)+1}.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2+x-6} \leqslant 0.$$

3. Для уравнения

$$(p+10)x^2 + x\sqrt{2p+2} + \frac{p}{16} = 0$$

решить следующие задачи.

а) При каких p это уравнение имеет единственный корень?

б) Найти все значения p, при которых корни уравнения действительны и различны.

в) Определить все значения параметра p, при которых один из корней этого уравнения положительный, а другой — отрицательный.

4. В результате плохо организованного хранения влажность некоторой массы ягод в начале хранения составляет 99%, а в конце — 98%. Как изменилась масса хранимого продукта, если в начале хранения ягоды имели массу m?

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен 30^0. Найти радиус окружности с центром в вершине угла в 30^0, делящей данный треугольник на две равновеликие части.

5.5. Физико-математический класс (июнь)

1. Решить неравенства:

а) $-0,5x^2 + 3x - 4 < 0$;

б) $(x-3)\sqrt{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

2. Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| - 1}.$$

3. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ равна 2. Величина угла $\angle CAD$ равна $\pi/6$. Найти площадь параллелограмма, если известно, что прямая CD является касательной к окружности, описанной около треугольника $\triangle ABD$.

4. Найти все целые x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 = 79 + y^2.$$

5. Через произвольную точку P стороны AC треугольника ABC параллельно его медианам AK и CL проведены прямые, пересекающие стороны BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что медианы AK и CL делят отрезок EF на три равные части.

6. $g(x) = |x - 1|$. Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1; \\ -x^2 + x + a, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти все значения параметра a, при которых на отрезке $[0, 2]$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет единственное решение.

5.6. Экономический класс (июнь)

1. Решить неравенство

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} > 1.$$

2. Решить уравнение $|2x - 1| = x^2 - 7$.

3. Построить график функции

$$y = \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}.$$

4. Из макета равнобедренной трапеции вырезан вписанный в нее круг. Найти площадь оставшейся фигуры, если высота трапеции равна h, а разность оснований равна d.

5. При каких значениях p уравнение

$$px^2 + 2\sqrt{3(p+3)}x - p - 3 = 0$$

имеет только положительные корни?

5.7. Химико-биологический класс (июнь)

1. Построить график одной из функций:

$$\text{а)} \quad y = (\sqrt{x-2})^4 - 2x + 5;$$

$$\text{б)} \quad y = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}.$$

2. Решить одно из неравенств:

$$\text{а)} \quad \frac{(x-2)^2}{x^2 - 4x + 3} < 0;$$

$$\text{б)} \quad \frac{(\sqrt{x-2})^4}{x^2 - 4x + 3} < 0.$$

3. В прямоугольном треугольнике катеты равны 4 и 8 см. Найти площадь круга, проходящего через вершину прямого угла, вершину острого угла и середину большего из катетов.

4. Для уравнения

$$f(x) = (p-3)x^2 + 2px - p$$

решить одну из задач:

а) при каких p уравнение $f(x) = 0$ имеет корни?

б) найти все значения параметра p, при которых для всех x выполняется неравенство $f(x) > 0$.

5.8. Психологический класс (июнь)

1. Построить график одной из функций:

$$\text{а)} \quad y = -2x^2 + 8x - 7;$$

$$\text{б)} \quad y = 1 - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4};$$

$$\text{в)} \quad y = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{4 - 4x + x^2}.$$

2. Решить одно из неравенств:

$$\text{а)} \quad \frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0;$$

$$\text{б)} \quad \sqrt{-\frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 4}} \geqslant -2;$$

$$\text{в)} \quad \sqrt{\frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 4}} \geqslant 1.$$

3. Катер проходит путь от A до B по течению реки за a часов, плот проплывает тот же путь за b часов. Сколько часов будет плыть катер от B до A? Предполагается, что собственная скорость катера постоянна в течение всего времени движения.

4. Три окружности с радиусами 2, 3, 10 см попарно касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от центра меньшей окружности до середины отрезка, соединяющего центры двух других окружностей.

5. Для уравнения

$$(p + 1)x^2 - 2x\sqrt{5 - p} + 3 - p = 0$$

решить одну из задач.

а) При каких значениях p это уравнение имеет единственный корень?

б) Найти все значения p, при которых уравнение имеет два корня.

в) Определить все значения параметра p, при которых корни этого уравнения противоположны по знаку.

Глава 6

Вступительные экзамены 1996 года

6.1. Физико-математический класс (март)

1. Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит ближе к вершине большего угла, чем к вершине меньшего угла этого треугольника.

2. а) Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник.

б) Доказать, что диагональ этого прямоугольника равна разности неравных сторон параллелограмма.

3. Доказать, что число

$$A = (\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}) \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

является целым.

4. Доказать, что дробь

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$$

заключена между наименьшей и наибольшей из дробей $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, если $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$.

5. Доказать, что если числа x, y, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ рациональные, то числа $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ тоже рациональные.

6.2. Химико-биологический класс (апрель)

1. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток с 40% содержанием золота. Если же сплавить равные по весу части этих слитков, то получится слиток с 35% содержанием золота. Найти, во сколько раз первый слиток тяжелее второго.

2. Решить неравенство

$$3|x-1| \leqslant x+3.$$

3. Доказать, что число

$$\sqrt{|12\sqrt{5}-29|}-\sqrt{12\sqrt{5}+29}$$

является целым. Найти это число (калькулятором пользоваться нельзя).

4. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади круга, описанного около этого треугольника. Найти длину большей стороны треугольника.

5. Найти все значения параметра b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=b+2, \\ x-y=b, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x^2+xy \leqslant 0$.

6.3. 9 класс (май)

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2-6y+9}=x-3, \\ x^2+|y|=12. \end{cases}$$

2. Известно, что уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 + qx + p = 0,$$

где $p \neq q$, имеют общий корень. Найти зависимость p от q $(p = f(q))$ и изобразить ее графически.

3. В трапеции с основаниями a и b проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий площадь трапеции на две равные части. Найти длину этого отрезка.

4. Доказать, что если $5\sqrt{x} - 3\sqrt{y}$, $2\sqrt{x} - 7\sqrt{y}$ — дроби (т.е. представимы в виде отношений целых чисел), то числа x и y тоже представимы в виде отношений целых чисел.

5. Садовник должен рассадить деревья, число которых меньше 1000. Если он посадит их рядами по 37 штук, то у него останется 8 лишних деревьев; если же он посадит по 43 дерева в ряд, то у него останется 11 лишних деревьев. Сколько деревьев должен рассадить садовник?

6.4. Физико-математический класс (май)

1. Определить все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + a), \\ (x + y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

2. Журнал "ЛицWay" сообщает, что процент лицеистов физико-математических классов, улучшивших свои достижения на математических олимпиадах, заключен в пределах от $1,7$ до $2,9$. Определить минимально возможное количество лицеистов в физико-математических классах.

3. Даны квадрат $ABCD$ и точка O. Известно, что $OB = OD = 13$, $OC = 5\sqrt{2}$ и что площадь квадрата больше, чем 225. Найти длины сторон квадрата и выяснить, где расположена точка O — вне или внутри квадрата.

4. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

5. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x} = a$.

6.5. Физико-математический класс (июнь)

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + 4ax + 8a + 3 = 0$$

имеет два различных корня.

2. Стороны данного треугольника имеют длины: $a = 7$, $b = 9$, $c = 15$. Можно ли составить треугольник, сторонами которого являются высоты данного треугольника?

3. Площадь треугольника, один из углов которого равен разности двух других, равна площади квадрата, сторона которого совпадает с одной из сторон этого треугольника. Найти углы данного треугольника.

4. Решить неравенства:

$$\text{а)}\ (x-5)\sqrt{x^2 - 7x + 10} \leqslant 0;$$

$$\text{б)}\ (x-5)\sqrt{x^2 - 7|x| + 10} \leqslant 0.$$

5. Доказать, что дробь

$$\frac{48n + 1}{56n + 1}$$

несократима ни при каких натуральных значениях n.

6.6. Математико-экономический класс (июнь)

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + 4ax + 7a + 3 = 0$$

имеет два различных корня.

2. Возможен ли треугольник, высоты которого имеют длину: $h_1 = 11$, $h_2 = 13$, $h_3 = 20$?

3. Площадь треугольника, один из углов которого равен сумме двух других, равна площади равностороннего треугольника, сторона которого совпадает с одной из сторон данного треугольника. Найти длину вписанной в исходный треугольник окружности, если площадь описанного вокруг этого треугольника круга равна 9π.

4. Решить неравенства:

$$\text{а})(x-4)\sqrt{x^2-6x+8} \leqslant 0;$$

$$\text{б})(x-4)\sqrt{x^2-6|x|+8} \leqslant 0.$$

5. Доказать, что дробь

$$\frac{28n+15}{13n+7}$$

несократима ни при каких натуральных значениях n.

6.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения:

$$\text{а) } x^2 - 5x + 6 = a;$$

$$\text{б) } |x^2 - 5x + 6| = a.$$

2. Построить график функции

$$y = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{9-x^2} + |1 - \sqrt{9-x^2}|\right).$$

3. Из точки M, расположенной внутри остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MD, ME, MF на стороны AC, BC, AB соответственно. Вычислить площадь треугольника ABC, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $|MD| = k$, $|ME| = l$, $|MF| = m$.

4. Решить неравенство

$$x - 4 \leqslant \sqrt{x+2}.$$

5. На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек, причем число игрушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили бы на 1 игрушку больше, то прежнего количества игрушек не хватило бы. Сколько игрушек было подарено детям, если известно, что число детей на празднике было нечетным.

6.8. Химико-биологический класс (июнь)

1. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие — 20%. Сколько сухих фруктов получится из 20 кг свежих фруктов?

2. Решить неравенства:

$$\text{а)}\ (x+7)\sqrt{x^2+9x+14} \leqslant 0;$$

$$\text{б)}\ (x+7)\sqrt{x^2+9|x|+14} \leqslant 0.$$

3. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найти длину высоты трапеции.

4. Решить уравнение

$$x + 1 = \sqrt{2x^2 - 7x - 21}.$$

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$2x^2 - ax + 2 = 0$$

имеет два корня?

6.9. Психологический класс (июнь)

1. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$ax^2 + 8x + 7 < 0$$

не имеет корней.

2. Решить уравнение

$$x + 6 = \sqrt{2x^2 + 21x + 20}.$$

3. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на части, отношение площадей которых равно $\frac{7}{13}$. Найти длину высоты трапеции.

4. На празднике каждому ребенку было подарено по одинаковому количеству игрушек, причем число игрушек, подаренных каждому ребенку, было на 9 меньше общего числа детей. Если бы на празднике было 9 детей и каждому ребенку дарили бы на 1 игрушку больше, то прежнего количества игрушек не хватило бы. Сколько игрушек было подарено детям, если известно, что число детей на празднике было нечетным?

5. Построить график функции

$$y = \frac{\sqrt{(x^2 - 9x + 14)^2}}{x - 7}.$$

6.10. Коммерческий класс (июнь)

1. Дано соотношение

$$21a^2 - 4ab - b^2 = 0.$$

Выразить a через b.

2. Решить уравнения:

$$\text{а) } x^2 - (\sqrt{x})^2 - 2 = 0;$$

б) $x^2 - \sqrt{x^2} - 2 = 0.$

3. При каких значениях m ровно один из корней уравнения

$$2 \cdot x^2 - mx + 2m^2 - 3m = 0$$

равен нулю?

4. При каких значениях a число 6 является корнем трехчлена $f(x) = -x^2 + ax - a - 4$? При найденном значении a определите второй корень трехчлена, постройте график функции $y = f(x)$, укажите значения x, при которых $f(x) > 0$, $f(x) \leqslant 0$, $-5 \leqslant f(x) < 3$.

5. Основания трапеции равны 5 и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

6. С лыжной базы вышла группа лыжников. Через 20 мин вслед за ней вышел опоздавший лыжник, который догнал ее через 40 мин. С какой скоростью шла группа, если скорость опоздавшего лыжника больше скорости группы на 5 км/ч?

Глава 7

Вступительные экзамены 1997 года

7.1. 9 класс (май)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x^3} - x - 4\sqrt{x} + 4 = 0.$$

2. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 3, ни на 5?

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+3x} \geqslant 0.$$

4. Разрезать данный треугольник на три части, из которых можно было бы составить прямоугольник.

5. Четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, три из которых имеют площади 4, 9 и 12 см^2. Найти площадь оставшегося треугольника, если известно, что она меньше 5.

6. При каком значении параметра a уравнения

$$x^2 - (a-2)x - 3 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + (3a-4)x + 3 = 0$$

имеют общий корень? Найти этот корень.

7.2. Физико-математический класс (июнь)

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-x-12} \geqslant 0.$$

2. Дано двузначное число. Если сумму квадратов его цифр разделить на сумму его цифр, то получится 4 и в остатке 1. Число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, составляет 208% данного числа. Найти данное число.

3. Решить уравнение

$$|x-2|+|3+x|=2x+1.$$

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2+2x+a-1=0$$

имеет ровно один корень?

5. Отрезки AB и CD равны по длине и не параллельны. Найти геометрическое место всех точек M таких, что площадь треугольника AMB равна площади треугольника CMD.

6. В окружности проведена хорда. Через один из концов хорды проходит касательная к окружности. Вычислить угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность в отношении $5:7$.

7.3. Математико-экономический класс (июнь)

1. а) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-9}\leqslant 0.$$

б) Решить то же неравенство при условии $|x-1|\leqslant 2$.

2. Построить график функции

$$y=-x^2-bx+c,$$

если известно, что прямая $x=-1$ является его осью симметрии, а $x=1$ — абсцисса точки пересечения графика с осью Ox.

3. а) При каких a система имеет 3 решения? Найти эти решения.

$$\begin{cases} y+x^2=1,\\ y+|x|=a. \end{cases}$$

б) Решить систему при каждом значении a.

4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ см, $BC = \sqrt{17}$ см, $AC = 4$ см на стороне AC взята точка M, так что $CM = 1$ см. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и BCM.

5. Решить уравнение

$$x^2 - 3x - 3 = 2\sqrt{x^2 - 3x - 4}.$$

7.4. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Известно, что $\cos^2 2\beta + (2a - 5)\sin 2\beta + 10a - 1 = 0$. Укажите допустимые значения параметра a и найдите произведение $\sin(\frac{3\pi}{4} + \beta)\sin(\frac{5\pi}{4} - \beta)$.

2. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 7x + a = 0$, x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 19x + b = 0$, причем числа x_1, x_2, x_3, x_4 составляют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите a и b.

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{x} + 3 \leqslant \sqrt{41 - \frac{16}{x}}.$$

4. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них — белые. Если отложить 3 самых маленьких гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

5. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD и диагоналями BD и AC. Известно, что $AC = 3$, $BD = 4$ и $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найдите площадь трапеции.

6. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найдите площадь треугольника ABM.

7.5. Химико-биологический класс (июнь)

1. Решить неравенство

$$\frac{x}{x-3} \geqslant \frac{2}{x}.$$

2. Решить уравнение

$$2\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{1-2x}=1.$$

3. В трапеции $ABCD$ даны основания $|AD|=8$ и $|BC|=4$. На продолжении стороны BC выбрана такая точка M, что прямая AM отсекает от трапеции треугольник, площадь которого в 4 раза меньше площади трапеции. Найти длину отрезка CM.

4. В треугольнике ABC сторона AB равна 20. Медиана, проведенная к стороне BC, равна 18 и перпендикулярна медиане, проведенной к стороне AC. Найти площадь треугольника.

5. При каких значениях a наибольший корень уравнения $x^2-(a+1)ax+a^3=0$ больше, чем $\frac{1}{2}$?

6. Имеются три колбы с водой: первая вместимостью 500 мл, а во вторую и третью налито 300 и 150 мл соответственно. Если долить первую колбу доверху из второй, то вторая останется заполненной наполовину. Если вместо этого долить вторую колбу доверху из третьей, то последняя останется заполненной на $\frac{1}{4}$. Если же вместо этого долить третью колбу водой доверху из первой, то в первой останется 350 мл воды. Сколько воды было в первой колбе?

7.6. Психологический класс (июнь)

1. Решить уравнение

$$|x^2+4x+2|=\frac{5x+16}{3}.$$

2. Решить неравенство

$$x+3<\sqrt{x+33}.$$

3. У двух выпуклых четырехугольников совпадают середины сторон. Докажите, что площади этих четырехугольников одинаковы.

4. После двух последовательных одинаковых процентных повышений зарплата в 1000000 рублей обратилась в 1254400 рублей. Определить, на сколько процентов повышалась зарплата.

5. В психологический класс лицея поступают как мальчики, так и девочки, причем некоторые из них сдадут экзамен по математике хорошо, а некоторые плохо. Докажите, что найдутся два поступающих в психологический класс лицея, которые отличаются как полом, так и успехами на экзамене по математике.

Глава 8

Вступительные экзамены 1998 года

8.1. Физико-математический класс (май)

1. Решить неравенство

$$(\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x)<0.$$

2. В треугольнике ABC через точку M, лежащую на стороне BC, проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB. Площадь образовавшегося при этом параллелограмма составляет $5/18$ площади треугольника ABC. Найти, в каком отношении точка M делит сторону BC.

3. Решить уравнение

$$\frac{|x+2|+3x+2}{x+1}=4.$$

4. При каких значениях a положительны оба корня уравнения $(a-1)x^2-3x+a+2=0$?

5. Вокруг трапеции описана окружность. Докажите, что это возможно только тогда, когда трапеция равнобедренная.

8.2. 11 физико-математический класс (май)

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}}{x}\leqslant 1.$$

2. Сколько корней имеет квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, если его коэффициенты удовлетворяют неравенству $2q + p + 6 \leqslant 0$?

3. При каких значениях x числа $a_1 = \sin x$, $a_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$, $a_3 = \sin 3x$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой меньше нуля?

4. В урне лежали белые и черные шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу черных как 3:2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных равно 4:3. Сколько шаров лежало в урне?

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны. Точка O — центр описанной окружности. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины стороны CD.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около $\triangle C_1BA_1$.

8.3. Химико-биологический и психологический классы (май)

1. Решить уравнение

$$|\sqrt{x} - 2| + |1 - \sqrt{x}| = 1.$$

2. Решить неравенство

$$\left(x + 1 + \frac{3}{2 - x}\right)^2 \leqslant 1.$$

3. При каких значениях параметра a для всех отрицательных x справедливо неравенство $(a - 1)x^2 - 4x < a + 4$?

4. К смеси 600 г 2%-го и 300 г 5%-го растворов соли добавили некоторое количество дистиллированной воды, в результате чего концентрация соли составила 1%. Сколько воды было добавлено?

5. В трапеции $ABCD$ основание AB вдвое больше основания CD и вдвое больше стороны AD. Диагональ AC равна p, сторона BC равна q. Найти площадь трапеции.

8.4. Гуманитарный класс (май)

1. Решить уравнение

$$\frac{3x}{x+2}+\frac{2}{x^2-4}=\frac{1-3x}{x-2}.$$

2. Решить неравенства:

а) $x^2-4x+3\leqslant 0,$

б) $x^2-25\geqslant 0.$

3. Раскрыть скобки:

$$(3cb^2-2\sqrt{a})^2.$$

4. Выразить b из выражения

$$(b-3)a=\frac{m}{3}.$$

5. Построить график функции

$$y=(x-1)^2-1.$$

6. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 4 см, прилежащий к нему угол $B=60^\circ$. Найти площадь треугольника и медиану, проведенную из угла B.

8.5. Физико-математический класс (июнь)

1. Известно, что $f_1(x)=\sqrt{x^2-2ax+a^2}+x$ и $f_2(x)=6x-x^2-6$.

а) Постройте график функции $f_1(x)$ при $a=1$.

б) При каком значении a графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют единственную общую точку?

2. Докажите, что число $12^{42}+9^{42}$ делится на 15.

3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 и 8, а медиана, заключенная между ними, равна 5.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}\leqslant 1.$$

5. Имеется две кучки камней: в одной — 1998, в другой — 2000. За ход разрешается убрать любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Докажите, что при игре вдвоем первый имеет выигрышную стратегию (т.е. для делающего первый ход можно написать конечный набор правил, следуя которым он обязательно выиграет).

6. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2 - 2ax - 3a \geqslant 0$ содержит отрезок $[3;6]$.

8.6. Математико-экономический класс (июнь)

1. Известно, что $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 4ax + 4a^2}$, $f_2(x) = -(x-1)^2$.

а) Постройте график $f_1(x)$ при $a = 1$.

б) При каких значениях a графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют единственную общую точку.

2. Доказать, что $36^{47} + 24^{21}$ делится на 15.

3. Точка касания вписанной окружности делит гипотенузу прямоугольного треугольника на два отрезка, длины которых 5 и 12 см. Найти площадь треугольника.

4. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 5x - 24}}{x + 2} \geqslant 1.$$

5. В цехе фасуют в коробки печенье, пряники и вафли. 4 коробки печенья и 1 коробка пряников вместе весят столько же, сколько 5 коробок вафель; а по одной самой тяжелой и самой легкой из этих коробок, да еще 1 коробка пряников и 3 коробки вафель весят столько же, сколько 7 коробок печенья. Найти массы коробок с каждым из этих продуктов, если масса самой тяжелой из них на 2 кг больше массы самой легкой?

6. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2 + ax - 7a > 0$ содержит отрезок [1,2].

8.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+\sqrt{16-x^2}} < \sqrt{2x+4}.$$

2. Какую линию описывают вершины парабол

$$y = x^2 + 2px + p^2 + 3p,$$

где $p \in R$?

3. При каких значениях параметра a множество значений функции $y = x^2 - 2x + a$ совпадает с областью определения $y = \sqrt{2x-a}$?

4. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

5. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки E и F — середины меньших дуг AC и BC этой окружности, M и K — точки пересечения хорды EF с катетами AC и BC. Найти площадь четырехугольника $AMKB$.

6. Из первой бочки перелили во вторую некоторое количество воды, и в первой бочке осталось втрое больше воды, чем стало во второй. Затем еще раз из первой бочки перелили во вторую столько же воды, после чего во второй бочке стало вдвое меньше воды, чем осталось в первой. Во сколько раз первоначально было больше воды в первой бочке, чем во второй?

8.8. Химико-биологический и психологический классы (июнь)

1. Решить уравнение

$$x^2 + 2x + 2|x+1| - 3 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x^2+x+3}{1-x} \geqslant 0.$$

3. Решить одну из задач с параметром:

а) найти все a, при которых уравнение

$$x - 2a\sqrt{x} + 3a - 2 = 0$$

имеет два различных корня,

б) решить неравенство при каждом значении a:

$$a^2x - a - 4x + 2 > 0.$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена окружность с центром в точке A радиусом, равным по длине катету AC. Эта окружность пересекает гипотенузу AB в точке D, причем $AD : DB = 5 : 8$. Найти радиус окружности, если $BC = 12$.

5. Десять детей пошли за грибами и вместе нашли 85 штук. При этом оказалось, что каждый из них нашел либо 3, либо 7, либо 9 грибов. Возможно ли такое? Ответ обосновать.

Глава 9

Решения задач вступительных экзаменов

9.1. Экзамены 1991 года

1.1. Физико-математический класс (март)

1. Заметим, что точки с координатой $y = 0$ не входят в область допустимых значений (ОДЗ) этого неравенства. Раскрывая модуль при $y > 0$ и при $y < 0$, получаем

$$\begin{cases} y > 0, \\ y \leqslant |x+1| + 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < 0, \\ y \geqslant 2 - |x+1|. \end{cases}$$

Раскрывая теперь $|x+1|$, окончательно имеем следующие системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} y > 0, \\ x \geqslant -1, \\ y \leqslant x + 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y > 0, \\ x < -1, \\ y \leqslant -x + 3, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} y < 0, \\ x \geqslant -1, \\ y \geqslant 1 - x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < 0, \\ x < -1, \\ y \geqslant 3 + x. \end{cases}$$

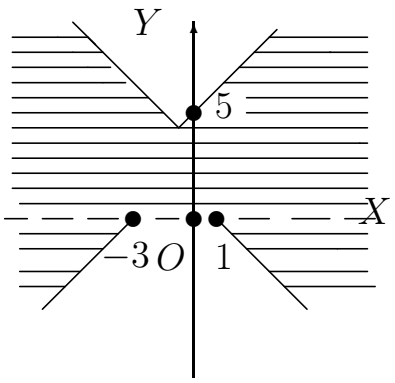


Рис. 15

На рис. 15 изображено объединение решений этих четырех систем.

2. Достаточно подставить $x = 1$ в исходное неравенство и определить, при каких a оно выполняется. Получаем $a^2 - 6a - 2 \geqslant 0$. Так как $a_1 =$

$3-\sqrt{11}$ и $a_2=3+\sqrt{11}$ являются корнями уравнения $a^2-6a-2=0$, то искомыми значениями параметра a будут все элементы множества $(-\infty, 3-\sqrt{11}]\cup[3+\sqrt{11},\infty)$.

3. Обозначим прямые, на которых лежат медианы $[BM]$ и $[CK]$ через b и c соответственно. И пусть O — точка пересечения b и c. Эта точка является точкой пересечения медиан $\triangle ABC$, и, по известному свойству, выполняется равенство $|OA|=2|OD|$. Следовательно, для нахождения точки A достаточно на прямой (OD) от точки O отложить два отрезка $[OD]$ (в сторону, противоположную D). Для нахождения оставшихся вершин B и C отметим точку O_1, симметричную точке O относительно D (достаточно отложить от точки D на прямой (OD) отрезок, равный $[OD]$). Так как D должна быть серединой $[BC]$ и $[OO_1]$, то четырехугольник OBO_1C должен быть параллелограммом. Поэтому через точку O_1 проведем две прямые b_1 и c_1, соответственно параллельные b и c. Пересечения $b_1\cap c$ и $c_1\cap b$ дадут искомые вершины C и B.

Из построения видно, что вершина A находится однозначно. То же самое справедливо и в отношении вершин B и C, если прямые b и c не параллельны. Поэтому осталось доказать, что построенный $\triangle ABC$ является искомым. Очевидно, что D является серединой $[BC]$. Кроме того, прямая b проходит через такую точку O медианы $[AD]$, что $|AO|=2|OD|$. Следовательно, это прямая содержит медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B. Аналогично прямая c содержит оставшуюся медиану треугольника. Итак, построенный треугольник (в случае, когда b не параллельна c, когда построение выполнить невозможно) является искомым и находится однозначно.

1.2. Физико-математический класс (май)

1. Заметим, что точки с координатой $x=-2$ не принадлежат ОДЗ рассматриваемого неравенства. Раскрывая $|x+2|$ при $x>-2$ и при $x<-2$, получим

$$\begin{cases} x>-2, \\ |y|\leqslant 3-2x \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<-2, \\ |y|\leqslant 2x-3. \end{cases}$$

Раскрывая $|y|$ при $y \geqslant 0$ и при $y < 0$, имеем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases} x > -2, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant 3 - 2x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -2, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant 2x - 3, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x > -2, \\ y < 0, \\ y \geqslant 2x - 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < -2, \\ y < 0, \\ y \geqslant 3 - 2x. \end{cases}$$

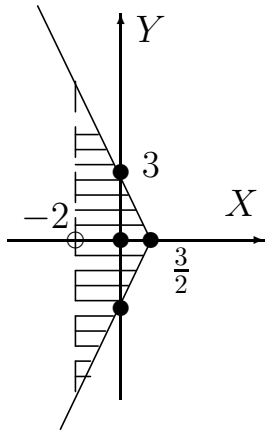


Рис. 16

Объединяя решения этих систем, получим множество, изображенное на рис. 16.

2. Пусть $|AB| = |BC|$ и $[AK]$, $[BM]$, $[CD]$ — медианы данного треугольника. Обозначим через O точку пересечения медиан. Тогда $\triangle AOC$ — равнобедренный, а $\triangle OMC$ — прямоугольный. Поэтому $\cos\angle OCA = |MC|/|OC| = 3\sqrt{2}/5$ (так как по свойству медиан $|OC| = 2|DC|/3$). Используя теорему косинусов, находим, что

$$|AB| = 2|AD| = 2\sqrt{|AC|^2 + |CD|^2 - 2|AC||CD|\cos\angle OCA} = 6.$$

3. Рассматривая остатки при делении чисел p, $p+2$ и $p+4$ на 3, находим, что одно из этих чисел при делении на 3 должно иметь остаток 0, т.е. делиться на 3. Поскольку рассматриваемые числа являются простыми, то число, делящееся на 3, должно быть равно 3. Отсюда следует, что $p = 3$ ($p \neq 1$, так как 1 не является простым числом). Итак, единственной тройкой чисел, удовлетворяющей условию задачи, является $3, 5, 7$.

4. После очевидных преобразований приходим к уравнению $xy(x^4 - y^4) = 1987$. Поскольку 1987 является нечетным числом, каждое из чисел xy и $x^4 - y^4$ также должно быть нечетным. Отсюда получаем, что x и y нечетные. И сразу приходим к противоречию, так как разность нечетных чисел $x^4 - y^4$ четна.

1.3. Физико-математический класс (июнь)

1. а) Заметим, что точки с абсциссой $x = 2$ не входят в ОДЗ рассматриваемого неравенства. При $x \neq 2$ получаем $y \leqslant -2x - 5$. Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, изображено на рис. 17.

б) Раскрывая модуль $|x - 2|$ при $x > 2$ и при $x < 2$, имеем

$$\begin{cases} x > 2, \\ y \leqslant -2x - 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 2, \\ y \leqslant 2x + 5. \end{cases}$$

Объединяя решения систем, получаем в результате множество, изображенное на рис. 18.

в) Продолжая решение предыдущей задачи, раскроем модуль $|y|$ в системах

$$\begin{cases} x > 2, \\ |y| \leqslant -2x - 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 2, \\ |y| \leqslant 2x + 5. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} x > 2, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant -2x - 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 2, \\ y < 0, \\ y \geqslant 2x + 5, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ y \geqslant 0, \\ y \leqslant 2x + 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 2, \\ y < 0, \\ y \geqslant -2x - 5. \end{cases}$$

Объединение решений этих четырех систем изображено на рис. 19.

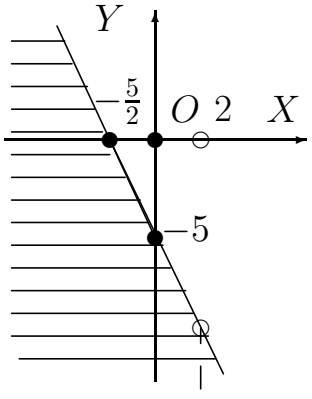


Рис. 17

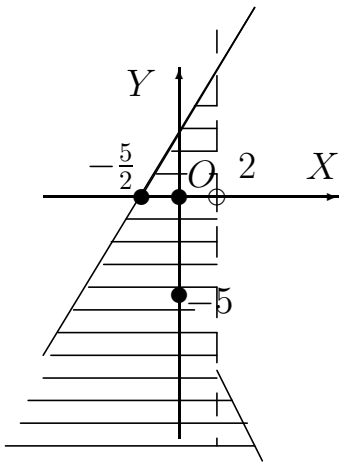


Рис. 18

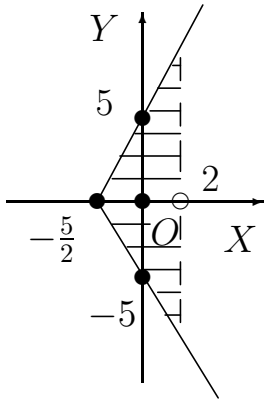


Рис. 19

2. Известно, что центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы. Поэтому длина медианы $[BD]$ равна радиусу описанной окружности или половине длины гипотенузы. Следовательно,

$$|BD| = \frac{\sqrt{6^2+8^2}}{2} = 5.$$

3. Исходное неравенство преобразуется к виду $x(5-x)(5+x) > 0$. Числа $x=-5$, $x=0$ и $x=5$ являются корнями уравнения $x(5-x)(5+x)=0$. Решая теперь данное неравенство методом интервалов, получим, что $x \in (-\infty,-5) \cup (0,5)$.

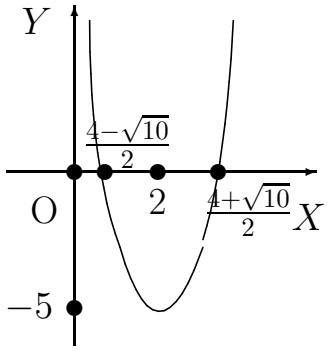


Рис. 20

4. Обозначим $3a+5b+c$ через x и $11a+9b+13c$ — через y. Заметим, что число $x+y=14a+14b+14c$ делится на 7. Так как x и $x+y$ делятся на 7, то и y также делится на 7.

5. Поскольку $x=2$ является осью симметрии параболы, то абсцисса вершины параболы $x_0=2$. Из уравнения $x_0=(a+6)/(2a)$ находим, что $a=2$. Для построения графика $y=2x^2-8x+3$ достаточно заметить, что $x_1=2-\sqrt{5/2}$ и $x_2=2+\sqrt{5/2}$ являются корнями уравнения $2x^2-8x+3=0$. График искомой функции изображен на рис. 20.

1.4. Естественно-научные классы (май)

1. Заметим, что треугольники ABM и AOB имеют одинаковую площадь (у них одно основание и равны высоты, проведенные к этому основанию). Поэтому площадь искомой фигуры совпадает с площадью сектора со сторонами $[OA]$ и $[OB]$. Так как центральный угол этого сектора равен 120^0, то его площадь равна трети от площади всего круга, т.е. $\pi R^2/3$.

2. Заметим, что $|a-1|+1>0$ при любом a. Раскрывая $|a-1|$ при $a \geqslant 1$ и при $a<1$, получаем

$$\frac{a(a-2)}{|a-1|+1} = \begin{cases} a-2 & \text{при } a \geqslant 1, \\ -a & \text{при } a<1. \end{cases}$$

3. Решение приведено в **1.3**.

4. Сделаем замену: $y = x + 1/x$. Тогда $y^2 = x^2 + 1/x^2 + 2$. Таким образом, исходное уравнение преобразуется к виду $7y+2(y^2-2) = 5$ или $2y^2 + 7y - 9 = 0$. Его корнями являются $y = 1$ и $y = -9/2$. Сделав обратную замену, получаем уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ и $2x^2 + 9x + 2 = 0$. Первое из них не имеет решений, корнями второго являются числа

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

9.2. Экзамены 1992 года

2.1. Физико-математический класс (май)

1. а)

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)^2}{a^4-b^4} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a^2+ab-ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{1}{a+b}.$$

б) $$\frac{\sqrt{9+6p+p^2} - \sqrt{9-6p+p^2}}{\sqrt{9+6p+p^2} + \sqrt{9-6p+p^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(3+p)^2} - \sqrt{(3-p)^2}}{\sqrt{3+p)^2} + \sqrt{(3-p)^2}} = \frac{|3+p| - |3-p|}{|3+p| + |3-p|}.$$

Раскрывая модуль, получаем

$$\frac{|3+p| - |3-p|}{|3+p| + |3-p|} = \begin{cases} 3/p, & p \leqslant -3, \\ p/3, & -3 < p \leqslant 3, \\ 3/p, & p > 3. \end{cases}$$

в) Предположим, что числа $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+1$ являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q — целые числа. Тогда по теореме Виета имеем систему

$$\begin{cases} -\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 1 = -p, \\ -\sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p = -1, \\ q = -2 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Так как число $-2-\sqrt{2}$ не является целым, то указанные числа не могут быть корнями уравнения с целыми коэффициентами.

г) $a<0$, так как ветви параболы направлены вниз. Поскольку $x_0=-\frac{b}{2a}<0$, то $b<0$. Заметим, что график проходит через начало координат, поэтому $y(0)=c=0$.

2. а) На рис. 21 приведен пример двух треугольников ABC и ABC_1, удовлетворяющих условию задачи, у которых $|AC|\neq|AC_1|$ и $\angle CAB\neq\angle C_1AB$. Поэтому ответ на первые два вопроса отрицательный. Так как $\widehat{C}=90^0$, то AB является диаметром окружности. Следовательно, $|AB|=2R$.

б) Из определения деления одного натурального числа на другое с остатком следует, что $m=nq+r$, где $0\leqslant r<n$, и $m=Nq_1+R$, где $0\leqslant R<N$. Сразу получаем, что $r+R<n+N$ и ответ положительный на последний вопрос. Для первых двух существуют контрпримеры. Пусть $m=3,n=1,N=2$, тогда $r=0,R=1$ и $R>r$. Если же $m=3,n=2,N=1$, то верно обратное неравенство $R<r$.

в) При нечетном k график функции $y=x^k$ имеет вид, указанный на рис. 22. Прямая $y=1$ пересекает график этой функции в единственной точке. Следовательно, существует единственное решение уравнения $x^k-1=0$.

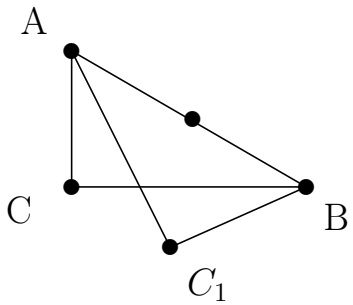


Рис. 21

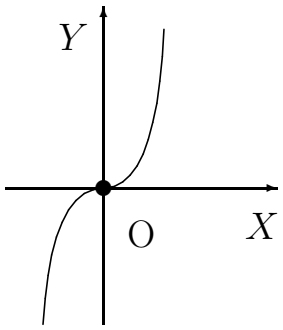


Рис. 22

г) Поскольку строгое решение задачи технически сложно, то правильными считались следующие рассуждения. С увеличением числа сторон площади правильных многоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, все более приближаются к площади ограниченного ею круга. Поэтому условия $m>n$ и $S_m>S_n$ равносильны (где S_m — площадь

правильного вписанного m-угольника). Аналогично при увеличении количества сторон периметры вписанных в одну окружность правильных многоугольников, возрастая, приближаются к длине этой окружности. Поэтому при $m > n$ периметр m-угольника также больше периметра n-угольника.

3. а) В случае (a) прямая не является графиком функции, а в случае (c) прямая проходит через начало координат, поэтому $b = 0$. Правильным ответом будет: (b) и (d).

б) Раскрывая модуль, получаем

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ x+1, & x \geqslant -1. \end{cases}$$

Следовательно, графиком этой функции будет график на рис (d).

4. а) Заметим, что старший коэффициент данного уравнения положителен, поэтому ветви параболы направлены вверх. Следовательно, для выполнения условий $x_1 < -2$ и $x_2 > -2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + (a^2+a)x + a^2 + 20 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант этого уравнения был положителен (тогда корни существуют) и значение функции $f(x) = x^2+(a^2+a)x+a^2+20$ при x $= -2$ было отрицательным. Из этих двух условий требует проверки только $f(-2) < 0$, так как если квадратичная функция $y = f(x)$ принимает отрицательные значения и ее старший коэффициент положителен, то корни уравнения $f(x) = 0$ обязательно существуют. Решаем неравенство

$$f(-2) < 0 \Longleftrightarrow 4 - 2a^2 - 2a + a^2 + 20 < 0 \Longleftrightarrow a^2 + 2a - 24 > 0.$$

Решением этого неравенства будут $a \in (-\infty, -6) \cup (4, \infty)$.

б) Обозначим через A выражение $|x+2|-3$, тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$||A| + 1| = 1.$$

Так как всегда $|A| + 1 > 0$, то, раскрыв модуль, получаем $||A| + 1| = |A| + 1 = 1$. Следовательно, $|A| = 0$. Решая теперь $|x+2| = 3$, находим, что $x = -5$ или $x = 1$. Итак, решением исходного уравнения являются $x = -5$ и $x = 1$.

5. а) Обозначим через B_1 середину $[AC]$ (рис. 23), через C_1 — середину $[AB]$ и через O — пересечение медиан $[BB_1]$ и $[CC_1]$. Введем

вспомогательные переменные $|OB_1| = x$ и $|OC_1| = y$. Так как точка O делит каждую из медиан рассматриваемого треугольника в отношении $2:1$, начиная от вершины, то $|OB| = 2x$ и $|OC| = 2y$. Используя перпендикулярность (BB_1) и (CC_1) и теорему Пифагора, получаем систему

$$\begin{cases} 4y^2 + x^2 = 16, \\ 4x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Заметим, что $|BC|^2 = 4x^2+4y^2$. Складывая уравнения системы, получим $5x^2+5y^2 = 25$ или $x^2 + y^2 = 5$. Следовательно, $|BC|^2 = 4x^2 + 4y^2 = 20$.

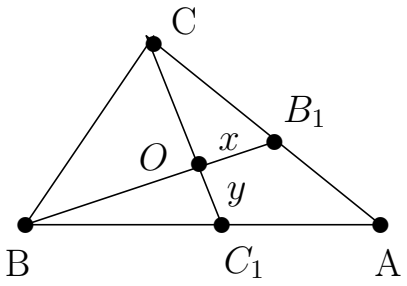


Рис. 23

б) Любая линейная функция имеет вид $y = kx + b$. Определим коэффициенты k и b, зная, что прямая проходит через точки $A(5, 4)$ и $B(3, 6)$. Получаем систему

$$\begin{cases} 4 = 5k + b, \\ 6 = 3k + b. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, находим, что $k = -1$. Отсюда $b = 9$. Теперь легко убедиться в том, что координаты точки $C(101, -80)$ не удовлетворяют уравнению $y = -x + 9$. Следовательно, данные три точки не лежат на одной прямой.

в) Покажем, что площади квадратов, вписанных таким образом, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, и найдем ее сумму по формуле $S = b/(1-q)$, где b — первый член прогрессии и q — ее знаменатель.

Рассмотрим квадрат $ABCD$ со стороной a и впишем в него квадрат $EFGH$ так, что вершины $EFGH$ делят стороны $ABCD$ в отношении $1:4$ (рис 24). Тогда $|BE| = 4a/5$ и $|BF| = a/5$. Отсюда $|EF|^2 = 17a^2/25$. Площадь вписанного квадрата $EFGH$ равна $|EF|^2 = 17a^2/25$. Следовательно, отношение площадей $S_{EFGH} : S_{ABCD}$ равно $17/25$. Если теперь таким же образом вписать квадрат $IJKL$ в квадрат $EFGH$, то снова получим, что $S_{IJKL} : S_{EFGH} = 17/25$ (можно теперь в качестве a взять длину стороны $[EF]$). Итак, $q = 17/25$. По условию задачи

$b = S_{ABCD} = 1$. Подставляя эти значения в формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим, что $S = 25/8$.

6. Областью допустимых значений уравнения $x = 2a/|x-2|$ являются все x, кроме $x = 2$. Поэтому

$$x = \frac{2a}{|x-2|} \Longleftrightarrow \begin{cases} x|x-2| = 2a, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Число решений исходного уравнения совпадает с числом пересечений графика функции $f(x) = x|x-2|, x \neq 2$ с прямой $y = 2a$. Раскрывая модуль, получаем

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x > 2, \\ 2x - x^2, & x < 2. \end{cases}$$

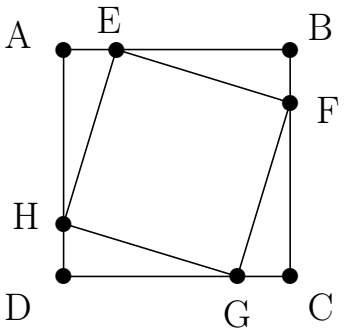


Рис. 24

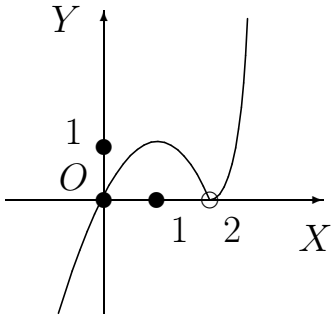


Рис. 25

График $f(x)$ изображен на рис. 25. Легко определить координаты вершины параболы $y = 2x - x^2$. Они равны $(1, 1)$. Поэтому $y = f(x)$ и прямая $y = 2a$ имеют единственное пересечение при $a \leqslant 0$ и при $a > 1/2$ (при $a = 0$ пересечение единственно, так как $x = 2$ не входит в область определения функции $f(x)$).

2.2. Физико-математический класс (июнь)

1. а) $x^2 - 6x + 4 \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2 - 6x + 3 \geqslant 0$. Числа $x_1 = 3 - \sqrt{6}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{6}$ являются корнями уравнения $x^2 - 6x + 3 = 0$. Поэтому $x^2 - 6x + 3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant 3 - \sqrt{6}$ или $x \geqslant 3 + \sqrt{6}$.

б) Учитывая, что

$$|6x + 4| = \begin{cases} 6x + 4, & x \geqslant -2/3, \\ -6x - 4, & x < -2/3, \end{cases}$$

получаем, что решение исходного неравенства является объединением решений следующих двух систем:

$$\begin{cases} x^2-6x-4 \geqslant 1, \\ x \geqslant -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+6x+4 \geqslant 1, \\ x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем первую систему. Числа $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{14}$ являются корнями уравнения $x^2-6x-5=0$. Следовательно, $x^2-6x-4 \geqslant 1 \iff x \leqslant -3-\sqrt{14}$ или $x \geqslant -3+\sqrt{14}$. Учитывая условие $x \geqslant -2/3$, получаем, что $x \geqslant -3+\sqrt{14}$ является решением первой системы.

Аналогично решаем вторую систему. Так, $x^2+6x+3 \geqslant 0 \iff x \leqslant -3-\sqrt{6}$ или $x \geqslant -3+\sqrt{6}$. Сравнивая числа $-3+\sqrt{6}$ и $-2/3$ ($-3+\sqrt{6}$? $-2/3 \iff \sqrt{6}$? $7/3 \iff 6$? $49/9$), находим, что первое из них больше. Таким образом, решением второй системы является промежуток $(-\infty, -3-\sqrt{6}]$. Ответ: $x \leqslant -3-\sqrt{6}$ или $x \geqslant -3+\sqrt{14}$.

в) Раскрывая внешний модуль, получаем

$$|x^2-|6x+4|| \geqslant 1 \iff \begin{cases} x^2-|6x+4| \geqslant 0, \\ x^2-|6x+4| \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-|6x+4| < 0, \\ |6x+4|-x^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

При решении первой системы заметим, что из второго неравенства следует первое, и поэтому достаточно решить второе неравенство. Его решением является ответ к предыдущей задаче.

Вторую систему перепишем в виде

$$\begin{cases} x^2-|6x+4| < 0, \\ x^2-|6x+4| \leqslant -1. \end{cases}$$

Снова каждое решение второго неравенства является решением первого неравенства системы. Раскрывая модуль $|6x+4|$, имеем

$$x^2-|6x+4| \leqslant -1 \iff \begin{cases} x^2-6x-4 \leqslant -1, \\ x \geqslant -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+6x+4 \leqslant -1, \\ x < -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем первую систему. Корнями уравнения $x^2-6x-3=0$ являются числа $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{12}$. Поэтому $x^2-6x-4 \leqslant -1 \iff x \in [3-\sqrt{12}, 3+\sqrt{12}]$. Сравнивая $3-\sqrt{12}$ и $-2/3$ ($3-\sqrt{12}$? $-2/3 \iff 11/3$? $\sqrt{12} \iff 121/9$? 12), получаем, что первое из них больше. Следовательно, $[3-\sqrt{12}, 3+\sqrt{12}]$ является решением первой системы.

При решении второй системы заметим, что $x^2+6x+5=0 \Longleftrightarrow x_1=-5, x_2=-1$. Поэтому $x\in[-5,-1]$ есть решение второй системы. Объединяя решения всех рассматриваемых систем, имеем
$|x^2-|6x+4|| \geqslant 1 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-3-\sqrt{6}]\cup[-5,-1]\cup[3-\sqrt{12},\infty)$.

2. а) Количество точек пересечения графиков функций $y=x^2-4x+3$ и $y=2x-2$ совпадает с количеством решений системы

$$\begin{cases} y=x^2-4x+3,\\ y=2x-2. \end{cases}$$

Подставляя $y=2x-2$ в первое уравнение этой системы, получаем квадратное уравнение относительно x: $2x-2=x^2-4x+3$. Его корнями являются $x_1=1$ и $x_2=5$. Следовательно, графики данных функций пересекаются в двух точках.

б) Графики функций $y=x^2-4x+3$ и $y=kx-2$ пересекаются в одной точке только в случае единственности решения у системы

$$\begin{cases} y=x^2-4x+3,\\ y=kx-2. \end{cases}$$

Следовательно, единственное решение должно иметь уравнение $kx-2=x^2-4x+3$ или $x^2-(4+k)x+5=0$. Приравнивая дискриминант этого уравнения к нулю, получаем $k^2+8k-4=0$. Его корни — $k_1=-4-2\sqrt{5}$ и $k_2=-4+2\sqrt{5}$.

в) Уравнение прямой, которая не параллельна оси (OY), имеет вид $y=kx+b$. Определим значения коэффициентов k и b исходя из условий задачи. Пусть $f(x)=x^2-4x+3$. Тогда $f(9)=48$. Следовательно, прямая должна проходить через точку $(9,48)$. Получаем уравнение $48=9k+b$. Используем теперь условие единственности решения системы

$$\begin{cases} y=x^2-4x+3,\\ y=kx+b. \end{cases}$$

Уравнение $x^2-(4+k)x+3-b=0$ имеет единственное решение $\Leftrightarrow D=(4+k)^2-4(3-b)=0 \Leftrightarrow k^2+8k+4b+4=0$. Имеем систему уравнений относительно k и b:

$$\begin{cases} 9k+b=48,\\ k^2+8k+4b+4=0. \end{cases}$$

Выражая b из первого уравнения и подставляя это значение во второе, получаем $k^2+8k-36k+196=0 \Leftrightarrow k^2-28k+196=0 \Leftrightarrow (k-14)^2=0 \Leftrightarrow k=14$. Отсюда $b=-78$. Следовательно, искомым уравнением будет $y=14x-78$.

3. а) Заметим, что для всех x из промежутка $(0,12]$ выполняется $12/x \geqslant 1$. Если $x \geqslant 12$, то, в свою очередь, $x/12 \geqslant 1$. Поэтому сумма $12/x+x/12$ для положительных x всегда будет больше 1.

б) Если в качестве x взять 12, то значение выражения в левой части неравенства будет равно 2. Поэтому a не может быть больше 2. Осталось доказать, что $a=2$ удовлетворяет поставленному условию, т.е. неравенство $12/x+x/12 \geqslant 2$ выполняется при всех положительных x. После несложных преобразований (поскольку $x>0$, домножим обе части неравенства на $12x$ с сохранением знака неравенства) получаем

$$\frac{12}{x}+\frac{x}{12} \geqslant 2 \Longleftrightarrow 144+x^2 \geqslant 24x \Longleftrightarrow (x-12)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех положительных x.

в) Обозначим длину клумбы через x, ширину — через y и площадь дорожек — через S. Тогда $xy=96$ и $S=4x+6y$. Выражая y из уравнения $xy=96$ и подставляя это значение в формулу для S, получаем, что величина $4x+6\cdot 96/x$ должна принимать наименьшее значение. Заметим, что

$$4x+\frac{6\cdot 96}{x}=48\cdot\frac{x}{12}+48\cdot\frac{12}{x}=48\left(\frac{x}{12}+\frac{12}{x}\right).$$

Из предыдущей задачи известно, что $x/12+12/x \geqslant 2$ при всех положительных x и только при $x=12$ равенство $x/12+12/x=2$. Следовательно, выражение $48(x/12+12/x)$ принимает наименьшее значение только при $x=12$. Из уравнения $xy=96$ находим, что $y=8$.

4. а) Формулы общих членов первой и второй геометрических прогрессий имеют вид: $x_n=3\cdot(32)^{n-1}$ и $y_m=48\cdot(8)^{m-1}$. Найдем, при каких значениях n и m выполняется равенство $x_n=y_m$.

$$3\cdot(32)^{n-1}=48\cdot(8)^{m-1} \Longleftrightarrow 3\cdot(2^5)^{n-1}=3\cdot 2^4\cdot(2^3)^{m-1} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 2^{5n-5}=2^{3m+1} \Longleftrightarrow 5n-5=3m+1 \Longleftrightarrow 5n=3(m+2).$$

Заметим, что правая часть последнего уравнения делится на 3. Следовательно, n также должно делиться на 3, поэтому $n = 3k$, где $k \in N$. Пусть $k = 1$, тогда $n = 3$. Теперь легко найти значение m, при котором выполняется условие $5n = 3(m+2)$. Получаем, что $m = 3$. Итак, первый общий член равен $x_3 = y_3 = 3 \cdot 32^2$.

б) Вернемся к формуле $5n = 3(m+2)$, полученной при решении предыдущей задачи. Из этого уравнения был сделан вывод, что n должно иметь вид $n = 3k$, где $k \in N$. Покажем теперь, для любого натурального k член первой геометрической прогрессии с номером $n = 3k$ является членом и второй прогрессии. Действительно, из уравнения $5 \cdot (3k) = 3(m+2)$ получаем, что член x_{3k} совпадает с членом второй прогрессии с номером $m = 5k - 2$. Из неравенства $3k \leqslant 1000$ и учитывая, что $k \in N$, находим $k \leqslant 333$. Следовательно, среди первых 1000 членов первой прогрессии 333 общих. Аналогично из $5k - 2 \leqslant 1000$ следует, что $k \leqslant 200$. Делаем вывод, что среди первой тысячи членов второй прогрессии только 200 общих. Итак, среди первой 1000 членов первой и второй прогрессий 200 общих.

в) В решении предыдущей задачи было получено, что общие члены x_n и y_m первой и второй прогрессий имеют номера $n = 3k$ и $m = 5k - 2$, где $k \in N$. Поэтому необходимо найти сумму двухсот общих членов, которые также составляют геометрическую прогрессию. Так как среди элементов второй прогрессии выбираются числа с номерами $m = 5k - 2$, то каждый из общих членов имеет вид

$$z_k = 48 \cdot (8)^{5k-3} = 48 \cdot 8^2 \cdot (8^5)^{k-1}.$$

Первый член получившейся прогрессии равен $48 \cdot 8^2$, а знаменатель — 8^5. Сумма двухсот ее первых членов равна

$$S_{200} = \frac{b_1(1 - q^{200})}{1 - q} = \frac{48 \cdot 8^2(1 - 8^{1000})}{1 - 8^5}.$$

5. а) Так как $(AD) \| (BC)$, то $\widehat{CAD} = \widehat{ACB} = \alpha$. Поскольку $\angle AOB$ является центральным углом, опирающимся на $[AB]$ (как и $\angle ACB$), то его величина равна 2α.

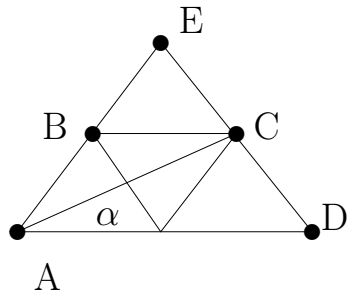


Рис. 26

б) Так как $\widehat{CAD} = \alpha$ и $\widehat{CAD}$ и $\widehat{COD}$ опираются на одну дугу, то $\widehat{COD} = 2\alpha$. Из решения предыдущей задачи имеем $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Поэтому $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$. Следовательно, эти углы опираются на равные хорды, значит, $|CD| = |AB|$.

в) (a) Поскольку вписанная трапеция является равнобедренной, то $\angle BAD = \angle CDA$ (см. решение предыдущей задачи). Следовательно, полученный треугольник (рис. 26) является равнобедренным, но так как величина угла при его основании равна 60°, то он равносторонний.

(b) Пусть E — точка пересечения продолжений сторон AB и CD. Тогда треугольники BCE и ADE подобны, так как $(BC)\|(AD)$. Поскольку $|BC| = |AD|/2$, то коэффициент подобия равен $1/2$, следовательно, B является серединой $[AE]$ и C — середина $[DE]$. Таким образом, $[BC]$ является средней линией треугольника ADE.

г) Так как $\triangle ADE$ равносторонний и B — середина $[AE]$, то $[DB]$ является высотой этого треугольника к стороне $[AE]$. Следовательно, $\widehat{ABD} = 90^\circ$ и $\widehat{AOD} = 180^\circ$. Поэтому AD является диаметром описанной окружности около $ABCD$. Получаем, что $|AD| = 2R$ и $|BC| = R$. Легко заметить, что $\triangle AOB$ и $\triangle OCD$ равносторонние (так как они равнобедренные с углом 60° при основании). В результате получаем, что площадь трапеции $ABCD$ равна

$$3S_{AOB} = 3 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

2.3. Естественно-научные классы (июнь)

1. а) Обозначив $\sqrt{y}$ через x, получаем

$$\frac{1-x}{x^3-x^2+x} : \frac{1}{x^4+x} = \frac{x(1-x)(x^3+1)}{x(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} = 1-x^2.$$

Сделав обратную замену, получим окончательный результат: $1-y$.

б) Возведем обе части уравнения

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = a + \sqrt{b}$$

в квадрат (предполагая, что $a + \sqrt{b} \geqslant 0$). Получим $6 - 4\sqrt{2} = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$. Из этого уравнения имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b = 6, \\ 2a\sqrt{b} = -4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения видно, что $a < 0$. После этого преобразуем это уравнение: $\sqrt{ba^2} = \sqrt{8} \Longrightarrow ba^2 = 8$. Из второго уравнения полученной системы

$$\begin{cases} a^2 + b = 6, \\ ba^2 = 8 \end{cases} \Longrightarrow b = \frac{8}{a^2} \Longrightarrow a^2 + \frac{8}{a^2} = 6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^4 - 6a^2 + 8 = 0 \Longrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0,$$

где $a^2 = t$. По теореме Виета находим, что $t^2 - 6t + 8 = 0 \Longleftrightarrow t_1 = 2$ и $t_2 = 4$. Сделав обратную замену, находим те a, которые удовлетворяют условию $a < 0$: $a_1 = -\sqrt{2}$ и $a_2 = -2$. Отсюда $b_1 = 4$ и $b_2 = 2$. В обоих случаях получаем, что $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$.

2. Если мы возьмем a кг первого сплава, то при этом будет выбрано $a/4$ кг первого металла и $3a/4$ кг — второго. Аналогично взяв b кг второго сплава, будем иметь $3b/5$ кг первого металла и $2b/5$ кг — второго. Чтобы массы первого и второго металла в суммарном сплаве были равны, необходимо, чтобы

$$\frac{a}{4} + \frac{3b}{5} = \frac{3a}{4} + \frac{2b}{5}.$$

Следовательно, $b : a = 5 : 2$.

3. а)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+2}.$$

Заметим, что $f(x)$ не определена в точке $x = -2$. Для всех остальных x она совпадает с $y = x - 1$. Ее график изображен на рис. 27.

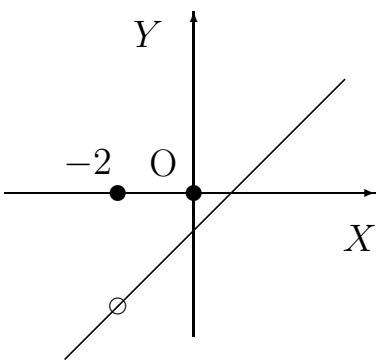


Рис. 27

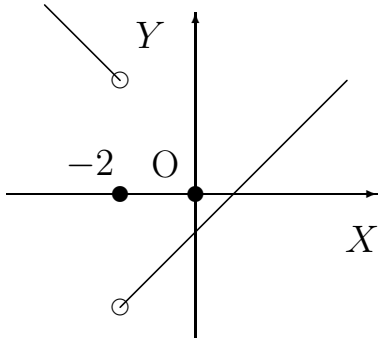


Рис. 28

б)

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{|x+2|}=\frac{(x-1)(x+2)}{|x+2|}.$$

Раскрывая модуль и учитывая, что $f(x)$ не определена в $x=-2$, имеем

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x>-2,\\ 1-x, & x<-2.\end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 28.

4. а) Запишем данное уравнение в виде $(b-3)x=2$. Если $b\neq 3$, то $x=2/(b-3)$. Если $b=3$, то исходное уравнение превращается в $0\cdot x=2$ и поэтому не имеет решений. Итак, $x=2/(b-3)$, если $b\neq 3$; при $b=3$ нет решений.

б) Перенося $16=4^2$ в левую часть данного уравнения и применяя формулу разности квадратов, получаем $3(x-2)^2+(x^2-4x-4)(x^2-4x+4)=0\Longleftrightarrow(x-2)^2(x^2-4x-1)=0\Longleftrightarrow(x-2)^2=0$ или $x^2-4x-1=0\Longleftrightarrow x=2$, или $x=2\pm\sqrt{5}$.

5. а) Решим это неравенство методом интервалов. Поскольку дискриминант уравнения $x^2+2x+3=0$ отрицателен, то для любого x выполняется неравенство $x^2+2x+3>0$. Корнями уравнения $x^2-9=0$ являются $x_{1,2}=\pm 3$. Отмечая найденные значения на числовой прямой и учитывая, что $x=-3$ и $x=3$ не принадлежат области допустимых значений исходного неравенства, определяем знаки левой части на каждом из получившихся интервалов. Итак, решением исходного неравенства является объединение $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

б) Запишем левую часть этого неравенства в виде $x^3-1+3x-3\leqslant 0$. Используя формулу разности кубов, получаем

$$x^3-1+3x-3\leqslant 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)+3(x-1)\leqslant 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)\leqslant 0.$$

Заметим, что $x^2+x+4>0$ для любого x (поскольку $D=-15<0$ и старший коэффициент положителен). Следовательно, $(x-1)(x^2+x+4)\leqslant 0 \Longleftrightarrow$ $x-1\leqslant 0 \Longleftrightarrow x\leqslant 1$.

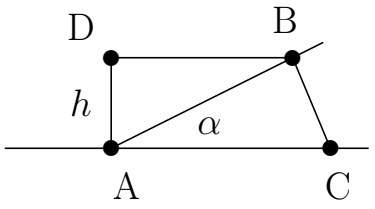


Рис. 29

6. а) По теореме косинусов получаем, что
$23=9+25-30\cos\widehat{C} \Longrightarrow \cos\widehat{C}=11/30 \Longrightarrow \widehat{C}=\arccos 11/30$.

б) Поскольку по двум углам треугольника можно найти величину оставшегося угла, будем считать, что в треугольнике ABC известны $\angle A, \angle C$ и высота, проведенная к (AC). Опишем построение искомого треугольника. Для этого проведем прямую a и произвольно выберем точку $A\in a$ (рис. 29). Отложим угол, равный по величине $\angle A=\alpha$, получим прямую b. Через точку A проведем перпендикулярную к a прямую d и отложим от A отрезок величины h. Получим некоторую точку D. Проведем через D прямую, параллельную a (или перпендикулярную d). Получим точку B в пересечении этой прямой и прямой b. Поскольку величина угла B также известна, то отложим этот угол от прямой b и получим прямую c. Наконец, в пересечении c и a получим точку C — последнюю вершину $\triangle ABC$. Легко доказать, что построенный треугольник искомый.

2.4. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Решая данное уравнение относительно y, получаем, что

$$y_{1,2}=\frac{6x\pm\sqrt{36x^2-32x^2}}{2}=\frac{6x\pm 2x}{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение преобразуется к виду $(y-2x)(y-4x)=0$. Поэтому искомое множество состоит из двух прямых: $y=2x$ и $y=4x$ (рис. 30).

2. Вычитая первое уравнение системы из второго, получаем уравнение $|y-1| = 9-4y$. Раскрывая модуль, имеем

$$\begin{cases} y \geqslant 1, \\ 5y = 10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y < 1, \\ 3y = 8. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений, а решение первой — $y = 2$. Отсюда получаем, что $|x+1| = 4$. Следовательно, $x = -5$ или $x = 3$. Итак, решениями системы являются $(-5, 2)$ и $(3, 2)$.

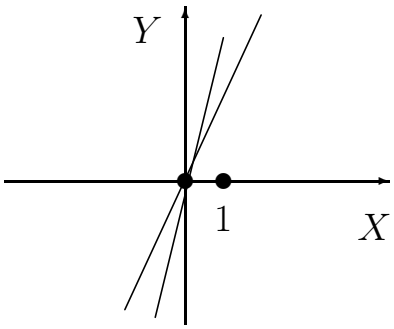


Рис. 30

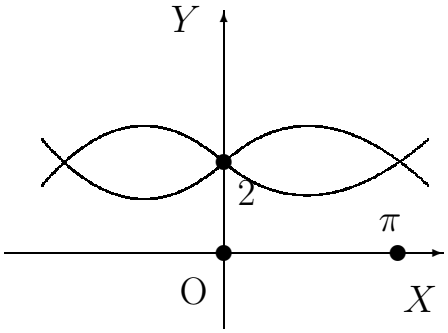


Рис. 31

3. После следующих преобразований: $y^2 - 4y + 3 + \cos^2 x = 0 \iff y^2 - 4y + 4 + \cos^2 x - 1 = 0 \iff (y-2)^2 - \sin^2 x = 0 \iff$
$(y - 2 - \sin x)(y - 2 + \sin x) = 0$ — получаем, что $y - 2 - \sin x = 0$ или $y - 2 + \sin x = 0$. Искомое множество является объединением графиков двух функций: $y = 2 + \sin x$ и $y = 2 - \sin x$. Оно изображено на рис. 31.

4. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$(x^2 + 4x + 4) + (x - 8\sqrt{x} + 16) = (x+2)^2 + (\sqrt{x} - 4)^2 = 0.$$

Так как выражения в скобках не обращаются одновременно в ноль, то выражение $(x+2)^2 + (\sqrt{x}-4)^2$ принимает только положительные значения. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

5. При $a < 1$ неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(a-1)x + 1}{x} > 0 \Longrightarrow \frac{x + 1/(a-1)}{x} < 0.$$

Знак неравенства изменился, так как $a-1<0$. Решая неравенство методом интервалов, находим, что

$$x \in \left(0, \frac{1}{1-a}\right).$$

6. Введем некоторые обозначения. Пусть A, B — начальные расположения первого и второго судов и C — порт, $|AB| = x$. A_1, B_1 — расположение судов после того, как второе судно прошло 80 км. t_1, t_2 — время, за которое первое судно прошло из A до A_1 и из A до C соответственно. И, наконец, обозначим через v_1 и v_2 скорости первого и второго судна. Из условий задачи имеем $|AB| = |AC| = |BC| = x$ и $v_1 > v_2$. Поэтому $|A_1C| < |B_1C|$ и $|A_1C| = 2|B_1C|$ (здесь был использован тот факт, что $\widehat{ABC} = 60^0$, и то, что треугольник A_1CB_1 является прямоугольным). Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} v_2t_1 = 80, \\ 2(x - v_1t_1) = x - 80, \\ v_1t_2 = x, \\ v_2t_2 = x - 120. \end{cases}$$

Исключая t_1 из первых двух уравнений и t_2 из последних двух, получаем

$$\begin{cases} x - 160 \cdot \frac{v_1}{v_2} = -80, \\ x \cdot \frac{v_2}{v_1} = x - 120. \end{cases}$$

Подставляя

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x}{x-120}$$

в первое уравнение, получаем

$$x - 160 \cdot \frac{x}{x-120} = -80.$$

Единственным положительным корнем уравнения $x^2 - 200x - 80 \cdot 120 = 0$ является $x = 240$.

2.5. Историко-филологический класс (июнь)

1.

$$\frac{1}{z^2 + 8\sqrt{z}} : \frac{\sqrt{z} - 2}{z\sqrt{z} - 2z + 4\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}((\sqrt{z})^3 + 8)} \cdot \frac{\sqrt{z}(z - 2\sqrt{z} + 4}{\sqrt{z} - 2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}(\sqrt{z}+2)(z-2\sqrt{z}+4)} \cdot \frac{\sqrt{z}(z-2\sqrt{z}+4)}{\sqrt{z}-2} = \frac{1}{z-4}.$$

2.

$$\left(\frac{x}{x-3} + \frac{4}{x^2-5x+6} + \frac{2x}{x-2}\right) : \frac{3x-2}{3} =$$

$$= \left(\frac{x}{x-3} + \frac{4}{(x-2)(x-3)} + \frac{2x}{x-2}\right) \cdot \frac{3}{3x-2} = \frac{3x^2-8x+4}{(x-3)(x-2)} \cdot \frac{3}{3x-2} =$$

$$= \frac{3(x-2)(x-2/3)}{(x-3)(x-2)} \cdot \frac{3}{3x-2} = \frac{3x-2}{(x-3)} \cdot \frac{3}{3x-2} = \frac{3}{x-3}.$$

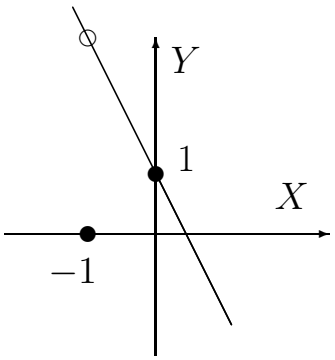


Рис. 32

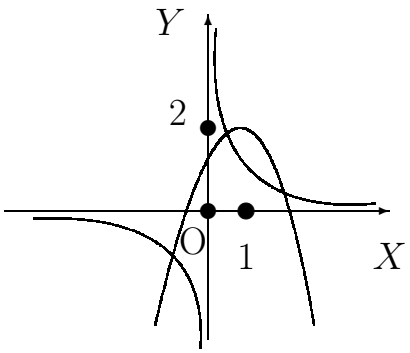


Рис. 33

3. Поскольку $x = -1$ и $x = 1/2$ являются корнями уравнения $-2x^2 - x + 1 = 0$, то исходная функция преобразуется к виду

$$y = \frac{-2x^2-x+1}{x+1} = \frac{-2(x+1)(x-1/2)}{x+1} = -2x+1, \quad x \neq -1.$$

Поэтому достаточно построить график функции $y = -2x + 1$ и удалить из этого графика точку с абсциссой $x = -1$. График данной функции изображен на рис. 32.

4. Изобразив (рис. 33) графики функций $y = 1/x$ и $y = -x^2 + 2x + 1$ (вершина параболы $y = -x^2+2x+1$ имеет координаты $(1, 2)$), замечаем, что графики пересекаются в трех точках. Следовательно, данная система имеет три решения.

5. Дискриминант уравнения $x^2 - x + 3 = 0$ равен $D = -11 < 0$, следовательно, так как старший коэффициент равен 1, неравенство $x^2 - x + 3 > 0$ выполняется при всех действительных x. Осталось решить неравенство $x^2 - 9 > 0$. Окончательно получаем, что $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

6. Пусть $[BM]$ и $[CK]$ — высоты трапеции $ABCD$ (рис. 34). Так как $ABCD$ является равнобедренной трапецией, то $|AM| = (|AD| - |MK|)/2$. Из прямоугольного треугольника ABM находим, что $|BM| = |AM| \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$. Отсюда

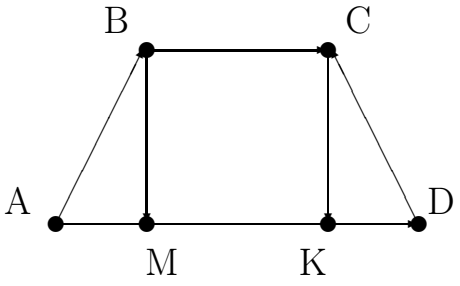


Рис. 34

$$S_{ABCD} = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |BM| =$$

$$= 10\sqrt{3}\text{см}^2.$$

7. Пусть x км/ч — собственная скорость каждой моторной лодки. Тогда $(x + 2) \cdot 0,9$ — расстояние, которая прошла лодка, движущаяся по течению, до встречи со второй лодкой. Аналогично $(x - 2) \cdot 1$ — расстояние, пройденное второй лодкой. Отсюда $(x + 2) \cdot 0,9 = (x - 2) + 2$. Выражая из этого уравнения x, получаем, что $x = 18$ км/ч.

2.6. Философско-экономический класс (июнь)

1. а)

$$\frac{\sqrt{y} + 2}{y\sqrt{y} + 2y + 4\sqrt{y}} : \frac{1}{y^2 - 8\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y} + 2}{\sqrt{y}(y + 2\sqrt{y} + 4)} \cdot \sqrt{y}((\sqrt{y})^3 - 8) =$$

$$= \frac{\sqrt{y} + 2}{\sqrt{y}(y + 2\sqrt{y} + 4)} \cdot \sqrt{y}(\sqrt{y} - 2)(y + 2\sqrt{y} + 4) = y - 4.$$

б) $$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1.$$

2. Пусть x — число процентов, на которые повышалась заработная плата. И пусть также A р. — первоначальная зарплата. Тогда $A+A\cdot x/100 = A(1+x/100)$ — величина заработной платы после первого повышения и $A(1+x/100)(1+x/100)$ — заработная плата после второго повышения. Получаем уравнение

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{36}{25}A.$$

Учитывая, что $1+\frac{x}{100} > 0$, преобразуем уравнение следующим образом:

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = \frac{36}{25}A \Longrightarrow 1+\frac{x}{100} = \frac{6}{5} \Longrightarrow \frac{x}{100} = 1/5.$$

Окончательно находим, что $x = 20\%$.

3. а) Так как числа $x=-2$ и $x=1/3$ являются корнями уравнения $-3x^2-5x+2=0$, то данная функция преобразуется к виду

$$y = \frac{-3x^2-5x+2}{x+2} = \frac{-3(x+2)(x-1/3)}{x+2} = 1-3x, \quad x \neq -2.$$

Исключив из прямой $y=1-3x$ точку с абсциссой $x=-2$, получим искомый график (рис. 35).

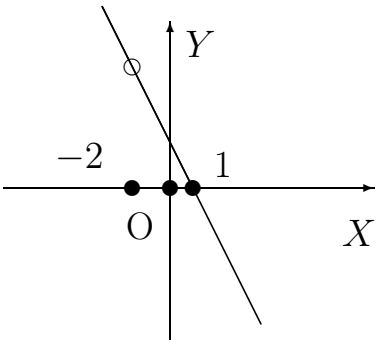


Рис. 35

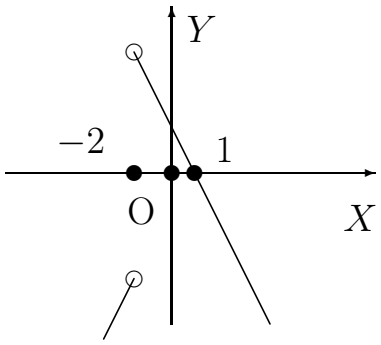


Рис. 36

б) Заметим, что $x=-2$ не принадлежит области определения рассматриваемой функции. Раскрывая $|x+2|$ на интервалах $x>-2$ и $x<-2$ и используя преобразования, сделанные в решении предыдущей

задачи, получаем

$$y = \begin{cases} -3x + 1, & x > -2, \\ 3x - 1, & x < -2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 36.

4. а) Исходное уравнение преобразуется к виду $x(2+a) = 3$. Таким образом, при $a \neq -2$ получаем, что $x = 3/(2+a)$. При $a = -2$ уравнение принимает вид $0 = 3$ и поэтому не имеет решений.

б) Обозначив через $y = x^2 + x + 1$, получаем уравнение $y^2 + y - 12 = 0$. Его корнями являются $y_1 = 4$ и $y_2 = 3$. Сделав обратную замену, приходим к уравнениям $x^2 + x + 5 = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$. Первое из них не имеет действительных корней. Корнями второго являются $x = -2$ и $x = 1$.

5. а) Заметим, что неравенство $2x^2 + x + 3 > 0$ выполняется при всех $x \in R$ (так как дискриминант уравнения $2x^2+x+3 = 0$ равен $D = -11$ и старший коэффициент $2 > 0$). Таким образом, для решения исходного неравенства достаточно решить $x^2 - 1 > 0$. Окончательно получаем, что $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

б) После несложных преобразований имеем

$$t^3 - t + 1 - t \geqslant 0 \Longleftrightarrow t(t-1)(t+1) - (t-1) = (t-1)(t^2+t-1) = 0.$$

Корнями уравнения $(t-1)(t^2+t-1) = 0$ являются $t_1 = 1$ и $t_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Решая методом интервалов, определяем знак левой части на каждом из получившихся промежутков. В результате

$$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1, \infty).$$

.

6. Пусть $[MD]$ — биссектриса угла M. По теореме синусов из $\triangle MNP$ имеем

$$\frac{|MN|}{\sin\angle NPM} = \frac{|MP|}{\sin\angle\beta} \Longrightarrow |MP| = \frac{p\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Аналогично, применяя ту же теорему, но уже для $\triangle MDP$, получаем

$$\frac{|MD|}{\sin\angle DPM} = \frac{|MP|}{\sin\angle MDP}. \quad \text{Следовательно, } |MD| = \frac{p\sin\beta}{\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}.$$

7. Очевидно, что зная два угла $\triangle ABC$, можно найти и его третий угол, поэтому будем считать, что известны углы $\angle A$ и $\angle B$ и высота, проведенная к стороне $[AC]$. Опишем построение. Проведем произвольную прямую a и отметим на ней произвольную точку A. Отложим угол $\angle A$ и проведем прямую l, параллельную прямой a и находящуюся от a на расстоянии h. Точку пересечения l со стороной угла $\angle A$ обозначим через B. Отложим теперь от точки B угол, равный по величине $\widehat{B}$. Пересечение стороны этого угла с прямой a даст точку C — последнюю вершину искомого треугольника. Легко доказать, что построенный треугольник удовлетворяет всем условиям задачи.

9.3. Экзамены 1993 года

3.1. Физико-математический класс (февраль)

1. (a) Областью определения функции $f(x)$ является решение системы

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $9 - x^2 \geqslant 0$ или $x^2 \leqslant 9$ является множество $[-3, 3]$. По теореме Виета находим, что $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ являются корнями уравнения $x^2 + x - 2 = 0$. Следовательно, $x^2 + x - 2 \geqslant 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$. Пересекая найденные решения неравенств (рис. 37), получаем, что $f(x)$ определена на множестве $[-3, -2] \cup [1, 3]$.

(b) На области определения, найденной при решении предыдущей задачи, преобразуем выражение, задающее $f(x)$. Итак, для любого x на множестве $[-3, -2] \cup [1, 3]$ имеем

$$f(x) = (\sqrt{9 - x^2})^2 + (\sqrt{x^2 + x - 2})^2 = 9 - x^2 + x^2 + x - 2 = x + 7.$$

Таким образом, графиком $f(x)$ является объединение двух отрезков прямой $y = x + 7$ (рис. 38).

2. Обозначим площадь параллелограмма $ABCD$ через S, длину стороны $[AB]$ — через a и длину $[AD]$ — через b (рис. 39). Тогда $S = ab \sin \hat{A}$. Заметим, что $S_{EFPH} = S - (S_{AEH} + S_{CFP} + S_{BEF} + S_{DHP})$. Найдем площади каждого из четырех треугольников. $S_{AEH} = 1/2(a/3)(b/2) \sin \hat{A} =$

$S/12$. Аналогично находим, что $S_{CFP} = 1/2(a/2)(2b/3)\sin\hat{A} = S/6$, $S_{BEF} = 1/2(2a/3)(b/3)\sin(180^\circ - \hat{A}) = S/9$ (здесь мы использовали одну из формул приведения $\sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin\hat{A}$). И, наконец, $S_{DHP} = 1/2(a/2)(b/2)\sin(180^\circ - \hat{A}) = S/8$. Таким образом, $S_{EFPH} = 37S/72$. В результате $S_{EFPH} : S_{ABCD} = 37/72$.

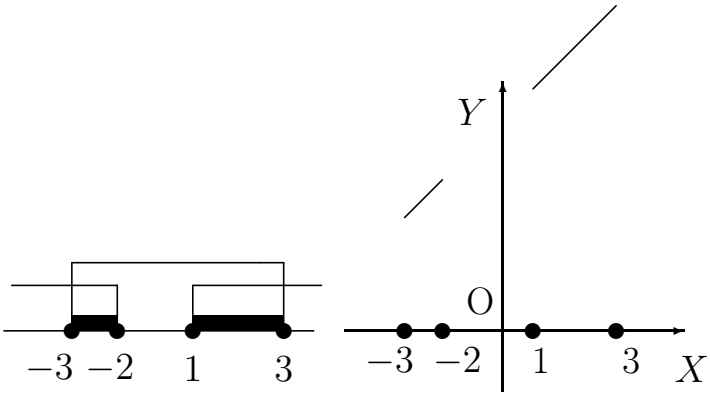


Рис. 37

Рис. 38

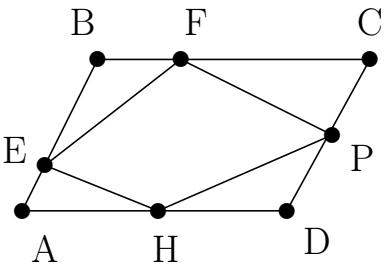


Рис. 39

3. (a) Необходимо решить это неравенство на каждом из промежутков $x < -1$ и $x \geqslant -1$. Получаем

$$\begin{cases} 4x + 1 \leqslant x - 5, \\ x < -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2x - 5 \leqslant x - 5, \\ x \geqslant -1, \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant -2, \\ x < -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

(b) Обозначим через $g(x)$ функцию, стоящую в правой части равенства $f(x) = ax + b - |3x + c|$. Раскрывая модуль, получаем

$$g(x) = \begin{cases} ax + b - 3x - c, & x \geqslant c/3 \\ ax + b + 3x + c, & x < c/3 \end{cases} = \begin{cases} (a-3)x + b - c, & x \geqslant c/3, \\ (a+3)x + b + c, & x < c/3. \end{cases}$$

Сравнивая полученные выражения для $g(x)$ с определением функции $f(x)$, получаем, что для выполнения тождества $f(x) = g(x)$ необходимо,

чтобы соответствующие коэффициенты были равны между собой, т.е.

$$\begin{cases} -c/3 = -1, \\ a - 3 = -2, \\ b - c = -5, \\ a + 3 = 4, \\ b + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 3, \\ a = 1, \\ b = -2. \end{cases}$$

Ответ: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

3.2. Физико-математический класс (май)

1. Преобразуем сначала выражение, задающее функцию $y(x)$. Так как $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ являются корнями уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ и $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, то

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{\sqrt{(x + 2)^2}} = \frac{(x + 2)(x - 3)}{|x + 2|}.$$

Заметим, что областью определения функции $y(x)$ являются все x , за исключением $x = -2$. Раскрывая модуль, получаем

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)(x-3)}{x+2}, & x > -2 \\ \frac{(x+2)(x-3)}{-(x+2)}, & x < -2 \end{cases} = \begin{cases} x - 3, & x > -2, \\ 3 - x, & x < -2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 40.

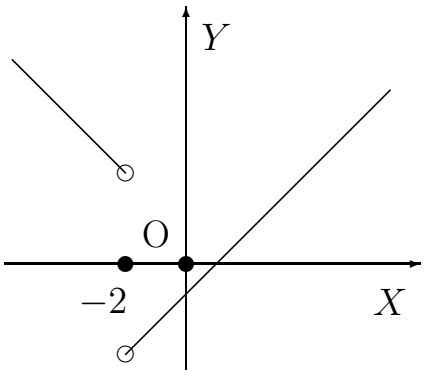


Рис. 40

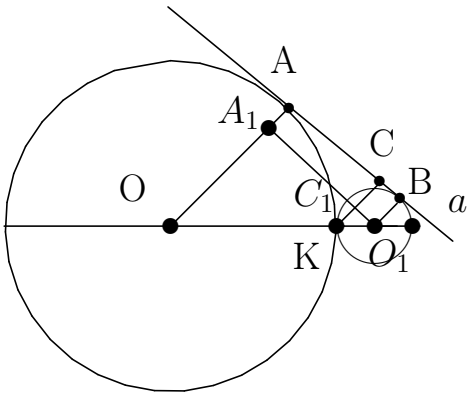


Рис. 41

2. Представим число 133 в виде произведения различных натуральных множителей. Получаем $133 = 1 \cdot 7 \cdot 19 = 1 \cdot 133 = 7 \cdot 19$. Заметим, что число $27 = 1 + 7 + 19$ является максимальным из чисел, не превосходящих 133, которые могут быть получены суммой различных чисел, произведение которых равно 133. Ответ: нет.

3. Существует три общих касательных к данным окружностям. Одна из них проходит через точку K — общую точку этих окружностей. Расстояние от K до этой касательной равно нулю. Две другие касательные симметричны относительно линии центров (прямой (OO_1)), поэтому расстояние от K до этих прямых одинаково. Обозначим через a (рис. 41) одну из общих касательных, не проходящих через K, и найдем расстояние от K до прямой a. Пусть A и B — точки касания прямой a с окружностями $O(R)$ и $O_1(r)$ соответственно. Тогда $(OA) \perp a$ и $(O_1B) \perp a$. Пусть также C — основание перпендикуляра, опущенного из K на a. Необходимо найти $|KC|$. Для этого проведем через O_1 прямую a_1 параллельно a и обозначим через C_1 и A_1 точки пересечения $a_1 \cap (KC)$ и $a_1 \cap (OA)$. Заметим, что $|C_1C| = |O_1B| = r = 0.5$ см (так как C_1CBO_1 — прямоугольник). Кроме того, прямоугольные треугольники KC_1O_1 и OA_1O_1 подобны с коэффициентом подобия $k = |O_1K|/|O_1O| = 1/10$. Следовательно, $|C_1K|/|OA_1| = |C_1K|/(R-r) = |C_1K|/4 = 1/10 \Longrightarrow |C_1K| = 2/5$. Из равенства $|KC| = |CC_1| + |C_1K|$ получаем, что $|KC| = 9/10$.

4. Корни данного уравнения симметричны относительно $x = 1$, если выполнены два условия: они существуют (т.е. дискриминант неотрицательный) и абсцисса вершины параболы равна 1. Получаем систему

$$\begin{cases} D = 16(a+2)^2 - 12(a^2+1) \geqslant 0, \\ x_0 = \frac{4(a+2)}{2(a^2+1)} = 1. \end{cases}$$

Решаем последнее уравнение

$$\frac{2(a+2)}{(a^2+1)} = 1 \Longleftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = -1 \quad \text{или} \quad a_2 = 3.$$

При $a = -1$ неравенство системы не выполняется, а при $a = 3$ оно справедливо. Таким образом, искомым значением параметра является $a = 3$.

5. (а) Хорошо известно, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает на плоскости единичную окружность. Определим теперь множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y - x| = a$. Так как модуль принимает только неотрицательные значения, то при $a < 0$ уравнение $|y - x| = a$ и исходная система не имеют решений. При $a = 0$ получаем $y - x = 0$ или $y = x$. Существуют две точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$. Следовательно, при этом значении параметра система имеет два решения. Пусть теперь $a > 0$. Раскрывая модуль, получаем

$$\begin{cases} y \geqslant x, \\ y - x = a \end{cases} \iff \begin{cases} y \geqslant x, \\ y = x + a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x, \\ x - y = a \end{cases} \iff \begin{cases} y < x, \\ y = x - a. \end{cases}$$

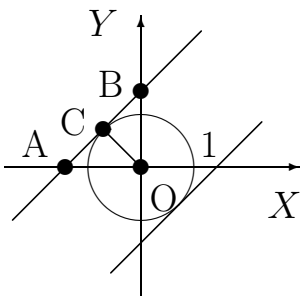


Рис. 42

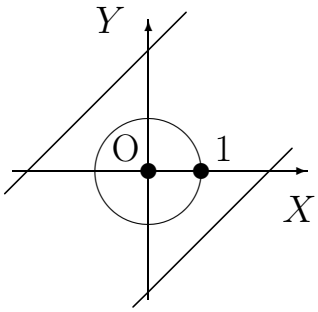


Рис. 43

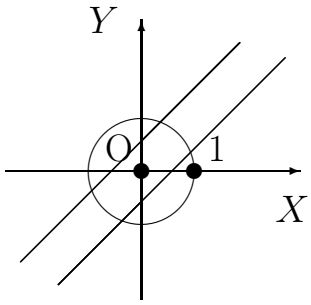


Рис. 44

Таким образом, уравнение $|y - x| = a$ при $a > 0$ задает на плоскости пару параллельных прямых $y = x + a$ и $y = x - a$. Определим, при каких значениях a происходит касание этих прямых и окружности $x^2 + y^2 = 1$. Пусть A, B и C — точки пересечения прямой $y = x + a$ соответственно с (OX), (OY) и единичной окружностью (рис. 42). Тогда $|OA| = |OB| = a$ и $|OC| = 1$. Отсюда находим, что $a^2 = 2$ или $a = \sqrt{2}$. В силу симметричности изображенных на рис. 42 фигур относительно начала координат, при этом же значении a происходит касание и второй прямой (т.е. $y = x - a$) единичной окружности. В результате получаем, что при $a < 0, a > \sqrt{2}$ система не имеет решений (рис. 43), при $a = 0$ и $a = \sqrt{2}$ существует два решения системы, и при всех остальных значениях a система имеет четыре решения (рис. 44).

(b) Продолжая решение предыдущей задачи, найдем координаты точек пересечения прямых и окружности при $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. Если $a = 0$, то точки пересечения имеют координаты $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ и $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. При $a = \sqrt{2}$ точки касания имеют координаты $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ и $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Осталось найти решение системы при $0 < a < \sqrt{2}$. Для этого достаточно решить две системы:

$$\begin{cases} y = x + a, \\ y^2 + x^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - a, \\ y^2 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Решим первую из них. Подставляя y во второе уравнение системы, получаем квадратное уравнение относительно x:

$$(x + a)^2 + x^2 = 1 \iff 2x^2 + 2ax + a^2 - 1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Делая обратную подстановку, находим, что

$$y_{1,2} = x_{1,2} + a = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Аналогично находим решения и второй системы:

$$x_{3,4} = \frac{a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2} \quad \text{и} \quad y_{3,4} = \frac{-a \pm \sqrt{2 - a^2}}{2}.$$

Ответ:

$a < 0, a > \sqrt{2}$	решений нет;
$a = 0$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$;
$a = \sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$;
$0 < a < \sqrt{2}$	$(\frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2})$, $(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2})$, $(\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2})$, $(\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2})$.

3.3. Физико-математический класс (июнь)

1. По теореме Виета числа 2 и -3 являются корнями уравнения $x^2 + x - 6 = 0$. Следовательно, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Аналогично получаем, что $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ и $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$. Таким образом, исходную функцию можно записать в виде

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^2(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-4)}}.$$

Заметим, что область определения данной функции состоит из всех x, кроме $x = -3$ и $x = 4$. На своем ОДЗ функция преобразуется к виду $y = |x - 2|, x \neq -3, x \neq 4$. Раскрывая модуль, получаем, что

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \geqslant 2, \\ 2 - x, & x < 2, \end{cases} \qquad x \neq -3, x \neq 4.$$

График этой функции изображен на рис. 45.

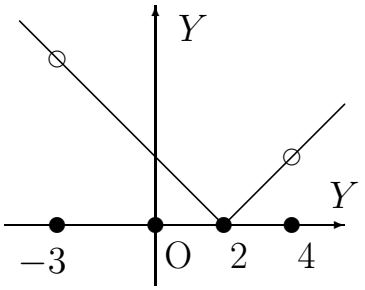


Рис. 45

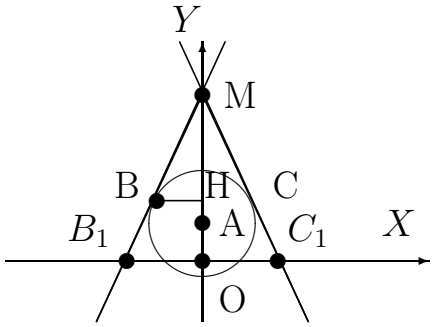


Рис. 46

2. Обозначим $\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|} - \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$ через a. Тогда

$$a^2 = |2\sqrt{2} - 3| - 2\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|(2\sqrt{2} + 3)} + 2\sqrt{2} + 3.$$

Заметим, что $2\sqrt{2} < 3$, поэтому $|2\sqrt{2} - 3| = 3 - 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$a^2 = 3 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} + 2\sqrt{2} + 3 = 6 - 2 = 4.$$

Из уравнения $a^2 = 4$ находим, что $a = -2$ или $a = 2$. Поскольку $\sqrt{|2\sqrt{2} - 3|} < \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$, то $a < 0$. Окончательно находим, что $a = -2$.

3. а) Легко заметить, что прямая (AB) не параллельна оси (OY) (иначе первые координаты точек A и B совпадали бы). Поэтому уравнение прямой (AB) имеет вид $y = kx + b$. Определим коэффициенты k и b, используя то, что координаты A и B удовлетворяют этому уравнению. Получаем систему

$$\begin{cases} -2 = 3k + b, \\ 11 = 4k + b. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, находим, что $k = 13$. Отсюда $b = -41$.

б) Обозначим точки касания искомых прямых и данной окружности через B и C, а точки пересечения этих прямых с осью (OX) соответственно через B_1 и C_1 (рис. 46). Заметим, что $|AB| = 3$ и $|AM| = 5$. По теореме Пифагора находим, что $|BM| = 4$. Прямоугольные треугольники ABM и MOB_1 подобны, поэтому

$$\frac{|AB|}{|OB_1|} = \frac{|BM|}{|OM|} \Longrightarrow |OB_1| = \frac{21}{4}.$$

Отсюда получаем, что точка B_1 имеет координаты $(-21/4, 0)$. Очевидно, что $OMB_1 = OMC_1$, поэтому координаты C_1 равны $(21/4, 0)$. Осталось записать координатные уравнения прямых $a_1 = (B_1M)$ и $a_2 = (C_1M)$. Пусть $y = k_1x + b_1$ является координатным уравнением прямой a_1. Тогда

$$\begin{cases} -21k_1/4 + b_1 = 0, \\ 7 = 0 \cdot k_1 + b_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = 7 \cdot 4/21 = 4/3, \\ b_1 = 7. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $k_1 = 4/3$ и $b = 7$. Аналогично определяются коэффициенты координатного уравнения прямой a_2. В результате уравнения касательных имеют вид $y = 4x/3 + 7$ и $y = -4x/3 + 7$.

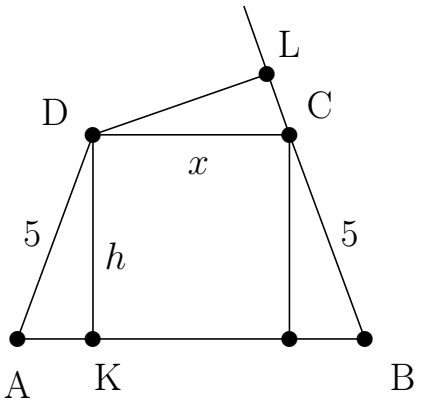


Рис. 47

4. Обозначим длину меньшего основания $[DC]$ (рис. 47) через x ($|DC| < |AB|$, так как основание перпендикуляра из D принадлежит $[AB]$ и трапеция является равнобедренной). Для любого описанного четырехугольника справедливо, что суммы длин его противоположных сторон равны. Поэтому $|AB| + x = 10$. Обозначим длину $|DK|$ через h, тогда $S_{ABCD} = (x + 10 - x)h/2 = 5h$. Так как $S_{KDLB} = S_{KDCB} + S_{DCL}$, то необходимо найти S_{KDCB} и S_{DCL}. Поскольку $|AK| = (10 - x - x)/2 = 5 - x$, то $S_{KDCB} = (10 - x - 5 + x + x)h/2 = (5 + x)h/2$. Для нахождения S_{DCL} заметим, что прямоугольные треугольники DCL и DKA подобны ($\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{LCD}$) с коэффициентом подобия $k = x/5$. Следовательно,

$$S_{DCL} = \frac{x^2}{25}\Big(\frac{1}{2}h(5 - x)\Big).$$

В результате получаем, что

$$\frac{(5+x)h/2 + x^2h(5-x)/50}{5h} = \frac{77}{125} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x^3 - 5x^2 - 25x + 29 = 0.$$

Из этого уравнения легко находится, что $x = 1$. (*Замечание.* Определяя все неотрицательные корни уравнения $x^3 - 5x^2 - 25x + 29 = 0$, можно также найти и $x_2 = 2 + \sqrt{33}$. Но $2 + \sqrt{33} > 5$, и поэтому это число не может быть длиной меньшего основания.)

5. Раскрывая модуль, получаем, что $|2x - 4| + x - 1 \leqslant a \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ 2x - 4 + x - 1 \leqslant a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 2, \\ 4 - 2x + x - 1 \leqslant a, \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant \frac{a+5}{3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \geqslant 3 - a. \end{cases}$$

Первая система имеет решение, если $(a + 5)/3 \geqslant 2$, т.е. при $a \geqslant 1$. Аналогично если $3 - a \leqslant 2$ или $a \geqslant 1$, то существует решение второй системы. Итак, решение исходного неравенства существует только при $a \geqslant 1$ и является объединением $[3 - a, 2] \cup [2, (a + 5)/3]$, т.е. является промежутком $[3 - a, (a + 5)/3]$. Для того чтобы отрезок $[3 - a, (a + 5)/3]$ был симметричен относительно $x = 1$, необходимо, чтобы

$$\left(3 - a + \frac{a+5}{3}\right)/2 = 1 \Longrightarrow 9 - 3a + a + 5 = 6.$$

Следовательно, $a = 4$.

6. Предположим противное: многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ удовлетворяет условию задачи, но в него можно вписать окружность. Обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_n$ точки касания окружности сторон многоугольника ($B_1 \in [A_1A_2]$, $B_2 \in [A_2A_3]$ и т.д.). Рассмотрим одну из синих сторон $[A_iA_{i+1}]$. Тогда из условий задачи следует, что соседние стороны $[A_{i-1}A_i]$ и $[A_{i+1}A_{i+2}]$ являются красными. Кроме того, по свойству касательных $|A_iB_i| = |A_iB_{i-1}|$ и $|A_{i+1}B_i| = |A_{i+1}B_{i+1}|$. Следовательно, $|A_iA_{i+1}| = |A_iB_{i-1}| + |A_{i+1}B_{i+1}|$, т.е. длина синей стороны равна сумме длин отрезков, являющихся частью соседних красных сторон. Так как это справедливо для любой из синих сторон, то сумма их длин меньше или равна сумме длин красных сторон многоугольника. Это противоречит условию задачи.

3.4. Естественно-научные классы (июнь)

1. Областью определения функции $f(x) = \cos x/(x - \pi/2)$ являются все x, кроме $x = \pi/2$. Поэтому

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ x \neq \pi/2. \end{cases}$$

Решая уравнение системы, находим, что $x = \pi/2 + \pi k, k \in Z$. Исключая из этого множества $x = \pi/2$, получаем ответ: $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$, $k \neq 0$.

2. Раскрывая модуль, имеем

$$|x| \geqslant x + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant x + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ -x \geqslant x + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 0 \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant -1/2. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, вторая выполняется при $x \leqslant -1/2$.

3. Квадратное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда его дискриминант положителен. Поэтому решаем неравенство $a^2 - 64 > 0$ или $|a| > 8$. Таким образом, $a < -8$ или $a > 8$.

4. Заметим, что $\sqrt{51} > 7$ (так как $51 > 49$). Следовательно, необходимо найти величину угла α, лежащего против стороны длины $\sqrt{51}$. По теореме косинусов получаем $51 = 9 + 49 - 2 \cdot 21 \cos\alpha \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \cos\alpha = 1/6 \Longrightarrow$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{6}.$$

3.5. Экономический класс (июнь)

1. а) После несложных преобразований получаем

$$y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x - 1} = x^2 - 1, \quad x \neq 1.$$

Удалив из графика функции $y = x^2 - 1$ точку с абсциссой $x = 1$, получим график искомой функции (рис. 48).

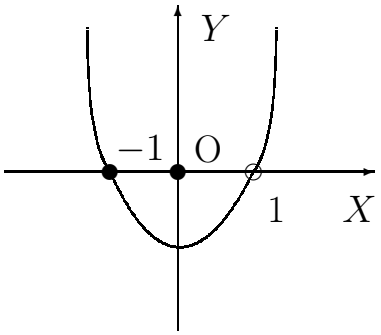


Рис. 48

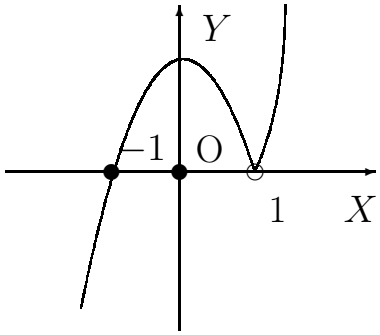


Рис. 49

б) Раскрывая модуль $|x-1|$ и учитывая решение предыдущей задачи, имеем

$$y=\frac{x^3-x^2-x+1}{|x-1|}=\begin{cases}x^2-1, & x>1,\\ 1-x^2, & x<1.\end{cases}$$

Отображая симметрично оси (OX) часть (при $x<1$) графика функции в предыдущей задаче, получим искомый график, изображенный на рис. 49.

2. Находя корни уравнений $x^2-5x+6=0$ и $x^2-2=0$, преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geqslant 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим, что $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2]\cup[3,\infty)$.

3. По формулам приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$. Также учитывая четность функции $y=\cos x$, получаем цепочку равенств

$$\cos 3\alpha+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(-2\alpha)=\cos(\alpha+2\alpha)-\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha-\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha.$$

4. Пусть x — процент повышения заработной платы в каждом из двух случаев. Тогда $100+100x/100=100+x$ — величина зарплаты после

первого повышения. Аналогично находим, что после второго повышения зарплата должна быть равна $100+x+(100+x)x/100$. Решая уравнение $100+x+(100+x)x/100=121$ или равносильное ему уравнение $(100+x)^2=110^2$, находим, что единственным его неотрицательным корнем является $x=10$.

5. Для того чтобы квадратичная функция имела не более одного корня (т.е. один или ни одного), необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения $3x^2-2kx-k+6=0$ был неположительный. Решая неравенство $D/4=k^2+3k-18\leqslant 0$, находим, что $k\in[-6,3]$.

6. Пусть $[MN]$ — средняя линия равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 50) и $[BK]$ является высотой этой трапеции. Из условия, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, получаем $|AB|+|CD|=|BC|+|AD|\Longrightarrow 2|AB|=2|MN|\Longrightarrow |AB|=|MN|=5$. Так как $|AD|+|BC|=2|MN|=10$ и высоты трапеций $MBCN$ и $AMND$ равны, то

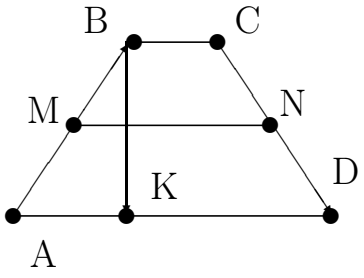


Рис. 50

$$\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}=\frac{|BC|+|MN|}{|MN|+|AD|}=$$

$$=\frac{|BC|+|MN|}{|MN|+|BC|+|AD|-|BC|}=\frac{|BC|+5}{5+10-|BC|}=\frac{7}{13}.$$

Из уравнения $13(|BC|+5)=7(15-|BC|)$ находим, что $|BC|=2$. Следовательно, $|AD|=8$ и $|AK|=(|AD|-|BC|)/2=3$. По теореме Пифагора находим длину высоты $h=\sqrt{|AB|^2-|AK|^2}=4$.

3.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. Заметим, что дискриминант уравнения $x^2-4x+5=0$ отрицателен, поэтому неравенство $x^2-4x+5>0$ выполняется при всех $x\in R$. Таким образом, достаточно решить $x^2-4>0$. Окончательно получаем, что $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

2. Искомые значения параметра a должны удовлетворять двум условиям: $a-2<0$ (старший коэффициент отрицателен) и дискриминант

уравнения $(a-2)x^2+ax+a=0$ также отрицателен (при этом нет пересечений параболы $y=(a-2)x^2+ax+a$ с осью (OX)). Решаем систему

$$\left\{\begin{array}{l} a-2<0, \\ a^2-4a(a-2)<0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-2<0, \\ a(3a-8)>0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a-2<0, \\ a<0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} a-2<0, \\ a>8/3. \end{array}\right.$$

Вторая из двух последних систем решений не имеет, решением первой являются все отрицательные a .

3. Так как при $0<a<b$ значение модуля $|a-b|=b-a$, то верны следующие преобразования:

$$\frac{\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{|a-b|}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=-(\sqrt{b}+\sqrt{a}).$$

4. Пусть $[AA'],[BB']$ и $[CC']$ — биссектрисы углов $\angle A,\angle B$ и $\angle C$ соответственно. По теореме синусов из $\triangle ABA'$ и $\triangle ABB'$ находим, что

$$|AA'|=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha/2)} \quad \text{и} \quad |BB'|=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta/2)}.$$

Чтобы найти $|CC'|$, определим длину $[AC]$ из треугольника ABC . Снова используя теорему синусов, имеем $|AC|=a\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$. Отсюда из $\triangle ACC'$

$$|CC'|=\frac{|AC|\sin\alpha}{\sin\widehat{AC'C}}=\frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}.$$

5. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автомобиля. Тогда $240/x$ — время, затраченное им на путь от A до B , и
$60/x+180/(x+30)$ — время, затраченное им на возвращение из пункта B в A . Из уравнения

$$\frac{240}{x}-\frac{60}{x}-\frac{180}{x+30}=1$$

находим, что $x=60$ км/ч.

9.4. Экзамены 1994 года

4.1. 8 класс (май)

1. $(1.2-(-1.8))^3=3^3=27$.

2. Так как любая натуральная степень числа, оканчивающегося на 5, дает число, которое также оканчивается на 5, то последняя цифра числа 215^3 равна 5. Аналогично 411^2 оканчивается на 1. Следовательно, 215^3+411^2 оканчивается на 6.

3.

$$\left(2\frac{2}{7}-3\frac{1}{3}\right)\cdot 0.21=\left(\frac{16}{7}-\frac{10}{3}\right)\cdot\frac{21}{100}=\frac{-22}{21}\cdot\frac{21}{100}=-\frac{11}{50}.$$

4. (a) В первый раз цена поднялась на $30\cdot 20/100=6$ р. и составила 36 р. Затем цена упала на $36\cdot 25/100=9$ р. и окончательно составила 25 р.

(b) Определим, сколько процентов составляет окончательная цена от первоначальной: $25\cdot 100/30=83\frac{1}{3}\%$. Следовательно, цена уменьшилась на $100-83\frac{1}{3}=16\frac{2}{3}\%$.

5. а) $b\cdot 2=-10\Longrightarrow b=-5$.
б) $b\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-10\Longrightarrow b=50$.
в) $y>0$ при $b<0$.
г) Нет корней только при $b=0$.

6. Пусть a — одна из сторон прямоугольника. Тогда $a-1,5$ — длина второй стороны. Решая уравнение $2a+2(a-1,5)=15$, находим, что $a=4,5$. Отсюда длина второй стороны равна 3.

7. Преобразуем уравнение к виду $-x=3$. Построив графики прямых $y=-x$ и $y=3$ (рис. 51), находим, что абсцисса точки пересечения равна -3.

8.

$$(xy-2)^2-2(x+1/x)-xy(xy-4)=$$

$$=x^2y^2-4xy+4-2x-\frac{2}{x}-x^2y^2+4xy=4-2x-\frac{2}{x}.$$

9. Используя формулу разности квадратов, получаем, что

$$(x-2y)^2-(x+2y)^2=(x-2y+x+2y)(x-2y-x-2y)=-8xy.$$

Подставляя $x=0.4$ и $y=3\frac{1}{3}$, находим, что исходное выражение при этих значениях переменных равно $-10\frac{2}{3}$.

10. $(2y-3x)+A=y+a \Longrightarrow A=y+a-2y+3x=a+3x-y$.

11. а)

$$\left(-\frac{3}{4}a^2b\right)^3\cdot 16ab^4=\left(-\frac{3^3}{4^3}a^6b^3\right)\cdot 4^2ab^4=\frac{-27a^7b^7}{4}.$$

б)

$$\left(\frac{2a}{a+1}-1\right):\left(2a-\frac{2a^2}{1+a}\right)=$$
$$=\frac{a-1}{a+1}:\left(\frac{2a}{1+a}\right)=\frac{a-1}{a+1}\cdot\left(\frac{1+a}{2a}\right)=\frac{a-1}{2a}.$$

12. а) Складывая уравнения данной системы, получим $6m=12$ или $m=2$. Отсюда $p=-1$.

б) Вычитая из первого уравнения второе, получим $a-c=3$. Сложив это уравнение с последним уравнением данной системы, имеем $2a=4$. Отсюда $a=2$, $b=0$ и $c=-1$.

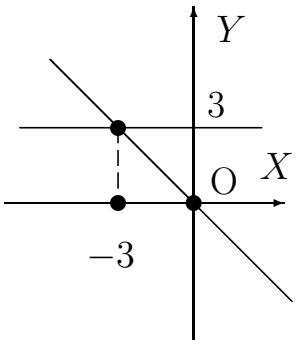


Рис. 51

13. В прямоугольном равнобедренном треугольнике углы при гипотенузе равны 45°. Таким образом, отложив от данного отрезка $[AB]$ углы, равные 45°, найдем некоторую точку C — третью вершину треугольника. Легко доказать, что полученный треугольник удовлетворяет всем условиям задачи.

14. В равностороннем треугольнике его медианы являются серединными перпендикулярами и биссектрисами. Поэтому треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ являются равнобедренными. Таким образом, $|OA|=|OB|=$

$|O_1A_1| = |O_1B_1|$. Так как $\widehat{OAB} = 30^\circ = \widehat{O_1A_1B_1}$, то $\widehat{AOB} = 120^\circ = \widehat{A_1O_1B_1}$. Получаем, что два треугольника AOB и $A_1O_1B_1$ равны между собой (по двум сторонам и углу). Следовательно, $|AB| = |A_1B_1|$. Поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

15. Покажем, что Коля догонит Васю через 4 минуты. В первые 2 минуты Вася пробежит ровно половину дистанции, в то время как Коля пробежит всю дистанцию целиком. В этот момент до финиша Васе останется еще 200 метров, которые он пробежит за 2 минуты. За эти 2 минуты Коля также придет к финишу, закончив свой второй круг. Итак, в первый раз Коля догонит Васю через 4 минуты.

4.3. 9 класс (2-й тест, май)

1. Рассмотрим первое из двух слагаемых — 54^{35}. Легко заметить, что при возведении 54 в любую натуральную степень получится число, последняя цифра которого — 4 или 6. Если показатель n степени четный, то последней цифрой 54^n является 6, если нечетный, то последняя цифра — 4. Следовательно, последней цифрой числа 54^{35} является 4. Аналогично рассуждая для степени 28^{21}, находим, что при $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ последние цифры чисел 28^n соответственно равны $8, 4, 2, 6, 8, \ldots$. Элементы этой последовательности последних цифр повторяются через четыре, поэтому 21-й цифрой в этой последовательности будет 8. Итак, 8 — последняя цифра числа 28^{21}. Отсюда получаем, что последней цифрой числа $54^{35} + 28^{21}$ является цифра 2.

2. Пусть исходное число равно $7abc$, тогда после перестановки старшей цифры получится число $abc7$. Из условия задачи следует, что $7abc - abc7 = 864$. Отсюда находим, что $c = 1$, $b - 1 - c = 6$ (т.е. $b = 8$) и $1a - 8 = 8$ (т.е. $a = 6$). Итак, исходное число равно 7681.

3. Предположим, что Володя ошибся, а Саша и Андрей верно предположили свою оценку. Тогда Саша получил "3", а Андрей — "4". Делаем вывод, что Володя должен был получить "5", т.е. его прогноз также оправдался. Получили противоречие с предположением. Рассуждая аналогично для каждого мальчика, находим, что единственным распределением оценок является такое: Володя получил "5", Саша — "4", Андрей — "3".

4. Из данного уравнения получаем, что либо $2x = 0$, или $x - 5 = 0$,

или $y + x = 0$. Осталось на плоскости изобразить прямые $x = 0$, $x = 5$ и $y = -x$.

5. Разложим 72 на простые множители: $72 = 2^3 3^2$. Рассмотрим теперь все тройки делителей числа 72, которые в произведении дают 72, и найдем их сумму в каждом случае. Получаем

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 1 \cdot 72 & 74 \\ 1 \cdot 2 \cdot 36 & 39 \\ 1 \cdot 3 \cdot 24 & 28 \\ 1 \cdot 4 \cdot 18 & 23 \\ 1 \cdot 6 \cdot 12 & 19 \\ 1 \cdot 8 \cdot 9 & 16 \\ 2 \cdot 2 \cdot 18 & 22 \\ 2 \cdot 3 \cdot 12 & 17 \\ 2 \cdot 4 \cdot 9 & 15 \\ 2 \cdot 6 \cdot 6 & 14 \\ 3 \cdot 3 \cdot 8 & 14 \\ 3 \cdot 4 \cdot 6 & 13. \end{array}$$

Таким образом, задача является неопределенной только в случае, если номер дома (т.е. число, являющееся суммой лет) равен $14 = 2{\cdot}6{\cdot}6 = 3{\cdot}3{\cdot}8$. Так как старший сын один (он рыжий), заключаем, что искомой тройкой является 3, 3, 8.

4.4. Физико-математический класс (июнь)

1. а) Поскольку $x^4+4x^3+4x^2 = x^2(x+2)^2$ и $\sqrt{x^2(x+2)^2} = |x||x+2|$, то исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{|x||x+2|}{|x|} = 2.$$

Заметим, что при $x = 0$ левая часть этого уравнения не определена, поэтому

$$\frac{|x||x+2|}{|x|} = 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ |x+2| = 2. \end{cases}$$

Решая уравнение $|x+2| = 2$, находим $x = 0$ и $x = -4$. Учитывая первое условие системы, получаем, что единственным решением исходного уравнения является $x = -4$.

б) Используя преобразования, сделанные при решении предыдущей задачи, получаем, что

$$y = \frac{\sqrt{x^4 + 4x^3 + 4x^2}}{|x|} = \begin{cases} x \neq 0, \\ |x+2|. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geqslant -2, \\ -x-2, & x < -2, \end{cases}$$

получаем график, изображенный на рис. 52.

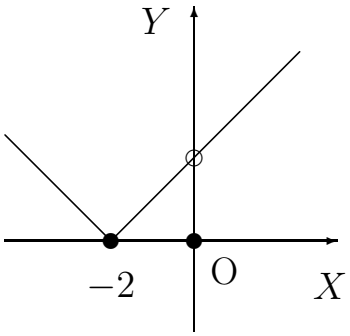


Рис. 52

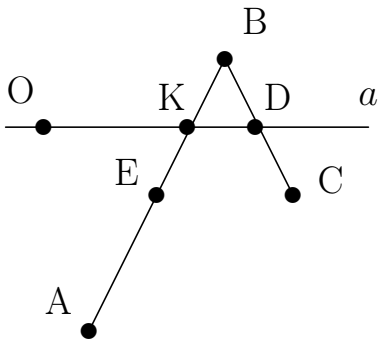


Рис. 53

2. Заметим, что серединой отрезка $[BC]$ является некоторая точка D с координатами $(\frac{5+7}{2}, \frac{3-3}{2})$, т.е. $D(6,0)$. Пусть E — середина $[AB]$, тогда E имеет координаты $(\frac{1+5}{2}, \frac{-9+3}{2})$ или $(3,-3)$. Наконец, середина отрезка $[BE]$, точка K, имеет координаты $(\frac{3+5}{2}, \frac{-3+3}{2})$ или $(4,0)$. Таким образом, точки D и K лежат на оси (OX). Последовательно находя середины указанных отрезков (рис. 53), получаем точки E и K и проводим через них прямую a. Ранее было доказано, что эта прямая является

осью абсцисс. Найдем теперь на этой прямой точку, которая является началом координат. Поскольку $|KD| = 2$, то, отложив от точки K вдоль прямой a два отрезка длины $|KD|$ (в сторону, противоположную от D), получим начало координат, точку O. Построив прямую, перпендикулярную a и проходящую через O, находим вторую координатную ось. Для определения масштаба достаточно разделить отрезок $[KD]$ пополам.

3. Данными параллельными прямыми разобьем $ABCD$ на фигуры и некоторым из этих фигур присвоим номера, как это указано на рис. 54. Последовательным переносом 1-й и 2-й фигур (рис. 55), затем 3-й и 4-й фигур (рис. 56) и, наконец, 5-й фигуры (рис. 57) получим многоугольник, состоящий из пяти равных между собой параллелограммов. Поскольку площадь этого многоугольника также равна единице, то площадь искомого параллелограмма равна $1/5$.

4. По теореме Виета находим, что $x_1 = 1$ и $x_2 = 2a$ являются корнями уравнения $x^2 - (2a+1)x + 2a = 0$. Следовательно, исходное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{(x-1)(x-2a)}{x-a} = 0.$$

Заметим, что только $x = a$ не принадлежит ОДЗ этого уравнения. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень в случае, если уравнение $(x-1)(x-2a) = 0$ имеет единственный корень, отличный от $x = a$, или когда один из корней $(x-1)(x-2a) = 0$ совпадает с $x = a$. Отсюда находим, что или $2a = 1$, или выполняется одно из двух условий: $2a = a$ или $1 = a$. Таким образом, только при $a = 0, a = 1/2, a = 1$ данное уравнение имеет единственный корень.

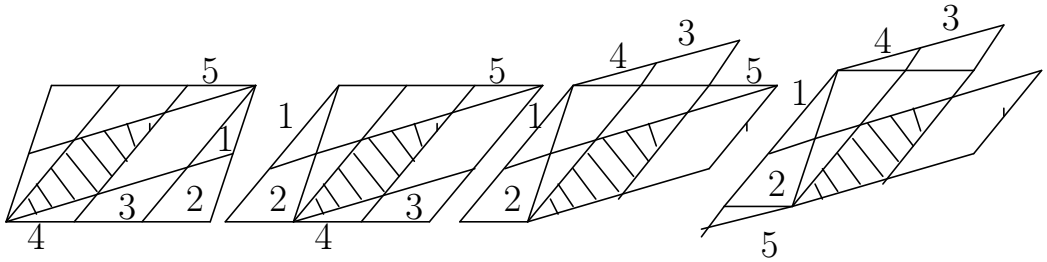


Рис. 54 Рис. 55 Рис. 56 Рис. 57

5. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{(x-1)(x-2a)}{x-a} \leqslant 0.$$

Для решения его методом интервалов отметим на прямой точки $a=0, a=1/2$ и $a=1$. Начнем со случая, когда две из них совпадают (см. решение предыдущей задачи).

Если $a=2a$, то $a=0$ (рис. 58 (a)) и решением неравенства является множество $(-\infty,0)\cup(0,1]$.

Если $1=2a$, то $a=1/2$ (рис. 58 (b)). Следовательно, неравенство выполняется только на множестве $(-\infty,1/2)$.

Аналогично если $a=1$ (рис. 58 (c)), то $(-\infty,1)\cup(1,2]$ — решение исходного неравенства.

Осталось рассмотреть случай, когда числа $1, a, 2a$ попарно различны. Порядок, в котором эти числа расположены на прямой, зависит от того, какие значения принимает a. Обозначим через

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2a)}{x-a}.$$

$\underline{a<0} \Longrightarrow 2a<a<1$ (рис. 58 (d)). Если $x>1$, то все множители числителя и знаменатель положительны, следовательно, для этих x дробь $f(x)$ больше нуля. При $a<x<1$ выражения $x-a$ и $x-2a$ положительны, а $x-1$ отрицательно, следовательно, $f(x)<0$. Аналогично для $2a<x<a$ имеем $f(x)>0$. И, наконец, $f(x)<0$ для $x<2a$. Итак, при $a<0$, $f(x)\leqslant 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,2a]\cup(a,1]$. Кроме того, можно заметить, что степень каждого из множителей в определении функции $f(x)$ нечетна (она равна единице), поэтому знак $f(x)$ будет меняться при прохождении через каждое из чисел $1, a$ и $2a$.

$\underline{0<a<1/2} \Longrightarrow a<2a<1$ (рис. 58 (e)). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим $f(x)\leqslant 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,a)\cup[2a,1]$.

$\underline{1/2<a<1} \Longrightarrow a<1<2a$ (рис. 58 (f)). Находим, что $f(x)\leqslant 0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,a)\cup[1,2a]$.

$\underline{a>1} \Longrightarrow 1<a<2a$ (рис. 58 (g)). Находим, что $f(x)\leqslant 0 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(a,2a]$.

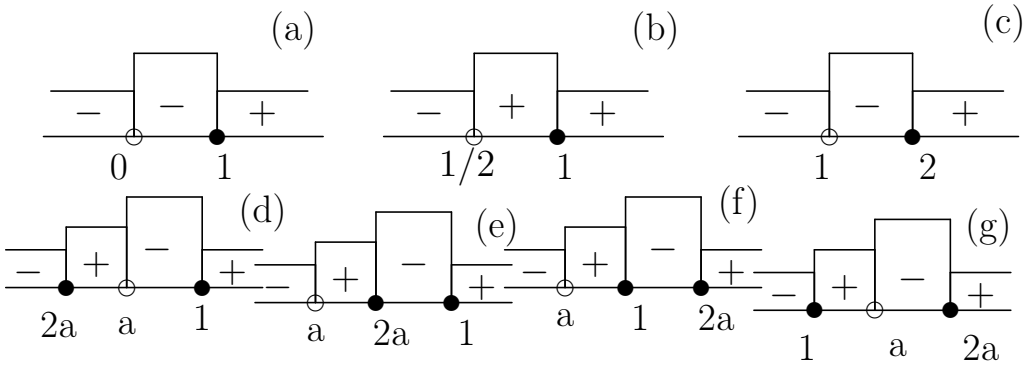


Рис. 58

4.5. Экономический класс (июнь)

1. а)

$$2x - x^2 \geqslant 1 \Longleftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

б) Рассматривая уравнение $x^2 + x + 1 = 0$, находим, что его дискриминант $D = -3 < 0$, поэтому для всех x выполняется $x^2 + x + 1 > 0$. Следовательно,

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 5x + 6} < 0 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0.$$

По теореме Виета находим, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ являются корнями уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Поэтому $x^2 - 5x + 6 < 0 \Longleftrightarrow x \in (2, 3)$.

2. Построив графики $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$, получаем (рис. 59), что они пересекаются в двух точках. Следовательно, исходное уравнение имеет два решения.

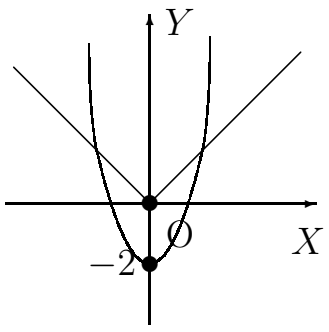


Рис. 59

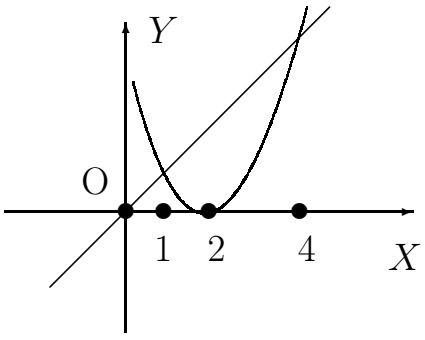


Рис. 60

3. Заметим, что $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Следовательно, парабола $y=x^2-4x+4$ пересекает ось (OX) в единственной точке с абсциссой $x_0=2$. Фигура, ограниченная этой параболой и прямой $y=x$, имеет вид как на рис. 60. Абсциссы точек пересечения этих графиков находятся из уравнения $x=x^2-4x+4$. Они равны $x_1=1$ и $x_2=4$.

4. В общем случае квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех x, если парабола $y=ax^2+bx+c$ не пересекает оси (OX) и лежит в первом и втором координатном квадрате, т.е. одновременно выполняются условия $a>0$ и $D<0$, где D — дискриминант уравнения $ax^2+bx+c=0$. Для исходного неравенства получаем систему

$$\begin{cases} a>0, \\ (a+1)^2-4a(2a-1)<0 \end{cases} \iff \begin{cases} a>0, \\ 7a^2-6a-1>0. \end{cases}$$

Корни уравнения $7a^2-6a-1=0$ равны $a_1=-1/7$ и $a_2=1$. Поэтому решением неравенства $7a^2-6a-1>0$ является объединение $(-\infty,-1/7)\cup(1,\infty)$. Окончательно имеем $a>1$.

5. а) Пусть O — середина AB, $[OH]$ — средняя линия треугольника ABC, параллельная CB (рис. 61). Поэтому $[OH]$ является одновременно медианой и высотой треугольника AOC. Следовательно, $\triangle AOC$ — равнобедренный. Таким образом, $|AO|=|BO|=|CO|$ и O является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности. Поэтому $|AB|=2R$. Отсюда находим, что $|AC|=\sqrt{4R^2-a^2}$. В результате

$$S_{ABC}=|AC|\cdot|CB|/2=\frac{a}{2}\sqrt{4R^2-a^2}.$$

б) Так как $S_{ABC}=h\cdot|AB|/2$, то, используя результат предыдущей задачи, получаем

$$h=\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}.$$

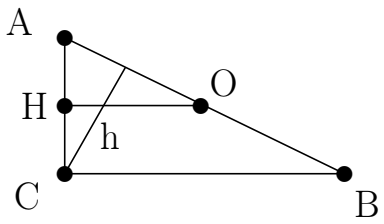


Рис. 61

в) Известно, что $S_{ABC}=pr$, где p — полупериметр $\triangle ABC$ и r — радиус вписанной окружности. Отсюда находим, что

$$r=S_{ABC}/p=\frac{a\sqrt{4R^2-a^2}}{a+2R+\sqrt{4R^2-a^2}}.$$

4.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. В 8 л 70%-го раствора соли (именно столько оказалось после выливания 2 л смеси) содержится $8 \cdot \frac{70}{100} = \frac{28}{5}$ кг соли и $8 \cdot \frac{30}{100} = \frac{12}{5}$ л воды. Добавив 2 л воды, получим раствор, состоящий из $\frac{22}{5}$ л воды и $\frac{28}{5}$ кг соли. Таким образом, соль будет составлять $\frac{28}{50}$ кг $\cdot 100 = 56\%$ всего полученного раствора. Аналогично в 8 л 56%-го раствора соли содержится $8 \cdot \frac{56}{100}$ кг соли и $8 \cdot \frac{44}{100}$ л воды. Поэтому $8 \cdot \frac{56}{100}$ кг соли в десятилитровом растворе составляют $8 \cdot \frac{56}{100 \cdot 10}$ кг $\cdot 100 = 44,8\%$.

2. а) Находим, что $x_1 = 1/2$ и $x_2 = 3$ являются корнями уравнения $y = 2x^2 - 7x + 3$. Следовательно, график $y = 2x^2 - 7x + 3$ имеет вид как на рис. 62.

б) Так как

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0, \end{cases}$$

то отрицательная часть графика $y = 2x^2 - 7x + 3$ (т.е. расположенная ниже оси (OX)) отображается симметрично относительно (OX). Используя решение предыдущей задачи, получаем график, изображенный на рис. 63.

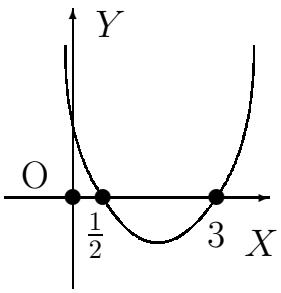


Рис. 62

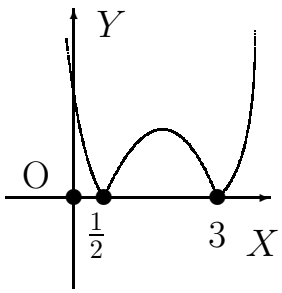


Рис. 63

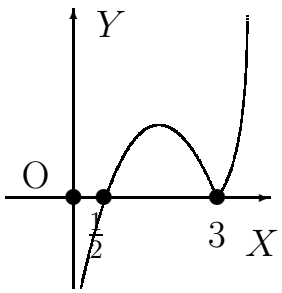


Рис. 64

в) Раскрывая модуль, имеем

$$y = (2x - 1)|x - 3| = \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3, & \text{если } x \geqslant 3, \\ -(2x^2 - 7x + 3), & \text{если } x < 3. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 64.

3. Заметим, что ОДЗ неравенства $\sqrt{4-x^2}(6+x-x^2) \geqslant 0$ состоит из тех x, для которых $4-x^2 \geqslant 0$, т.е. $|x| \leqslant 2$ или $x \in [-2,2]$. На этом множестве решим исходное неравенство методом интервалов. Корнями уравнения $\sqrt{4-x^2}=0$ являются $x_1=-2$ и $x_2=2$. Корни уравнения $6+x-x^2=0$ легко находятся по теореме Виета: $x_3=-2$ и $x_4=3$. Отметим найденные значения на координатной прямой и определим знаки исходного неравенства на каждом из получившихся промежутков (он, кстати, один, так как $3 \notin [-2,2]$). В результате неравенство выполняется только для $x \in [-2,2]$.

4. Как известно, меньший угол в треугольнике лежит против его меньшей стороны. Поэтому определим косинус угла α, находящегося против стороны длины 2. По теореме косинусов $4 = 9+16-24\cos\alpha$. Отсюда $\cos\alpha = 21/24$. Сравнивая числа $21/24$ и $\sqrt{2}/2$ ($\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$), находим, что $\cos\alpha > \cos 45^\circ$. Поэтому $\alpha < 45^\circ$. В результате в треугольнике ABC против стороны длины 2 находится угол, меньший 45°.

5. а) Корни данного уравнения действительны и различны, если выполняется система

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ D > 0, \end{cases}$$

где D является дискриминантом данного уравнения. Решая систему

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ 100-32a > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a < 25/8, \end{cases}$$

находим, что при $a \in (-\infty,0) \cup (0,25/8)$ корни уравнения существуют и различны.

б) Если x_1, x_2 — корни $ax^2+10x+8=0$, то по теореме Виета $x_1+x_2 = -10/a$. Отсюда находим, что $-10/a \in Z$ при натуральных a, только если a является делителем 10, т.е. $a = 1, 2, 5, 10$.

в) Оба корня имеют разные знаки, если они существуют (т.е. дискриминант $D > 0$), и их произведение отрицательно. Решая систему

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ 100-32a > 0, \\ 8/a < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 0, \\ a < 25/8, \\ a < 0, \end{cases}$$

находим, что только при $a < 0$ корни данного уравнения имеют различные знаки.

9.5. Экзамены 1995 года

5.1. 8 класс (май)

1.

$$\left(\frac{2}{5}\cdot 67,5-3,75\right)\cdot 2=\frac{2}{5}\cdot 135-7,5=54-7,5=46,5.$$

2. $(a-2)(a+2)-a(2a+1)+a=a^2-4-2a^2-a+a=-4-a^2$. При $a=-3$ получаем -13.

3. а) Умножая обе части уравнения на 15, имеем

$$35x-10-3x-9-45=0\iff 32x-64=0\iff x=2.$$

б) Используя формулу разности квадратов, получаем $x^2-(x+2)^2=(x-x-2)(x+x+2)=0\iff 2x+2=0\iff x=-1$.

в) Последовательно вынося за скобки a и $(x-1)$, получим $a(x-1)=x-1\iff (x-1)(a-1)=0$. Если $a=1$, то исходное уравнение выполняется при любом x. Если же $a\neq 1$, то, разделив обе части уравнения на $(a-1)$, находим, что $x=1$.

4. $(m-n)^2+m-n=(m-n)(m-n+1)$.

5. Преобразовывая выражение в скобках, получим

$$\frac{a^2}{4-a^2}+\frac{a}{a+2}=\frac{a^2+a(2-a)}{(2-a)(2+a)}=\frac{2a}{(2-a)(2+a)}.$$

Умножая это выражение на $(a-2)/4$, приходим к

$$-\frac{a}{4+2a},\qquad a\neq 2.$$

6. Подставляя координаты точки $B(-4,1)$ в уравнение $y=kx$, находим, что $k=-1/4$.

7. Для расположения треугольников ABC и ADC возможны два случая, указанные на рис. 65 и 66. Так как $\triangle ABC$ равнобедренный ($|AB|=|BC|$), то $\angle BAC=\angle BCA$. Аналогично для $\triangle ADC$ имеем $\angle DAC=\angle DCA$. В первом случае (рис. 65) получаем, что $\widehat{DAB}=$

$|\widehat{DAC} - \widehat{BAC}| = |\widehat{DCA} - \widehat{BCA}| = \widehat{BCD}$. Во втором случае (рис. 66) выполняется $\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{BAC} = \widehat{DCA} + \widehat{BCA} = \widehat{BCD}$.

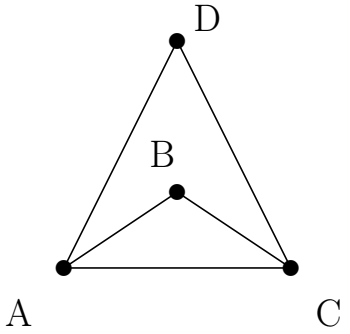


Рис. 65

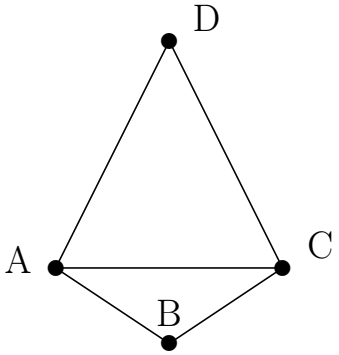


Рис. 66

8. Да, например, 2 и 3. Нет, так как в тройке $n, n+1, n+2$ $(n > 1)$ обязательно найдется четное число, отличное от двойки. Такое число не является простым.

5.2. 9 класс (май)

1. а) Из условий задачи следует, что $x_1 = 2/3$ и $x_2 = -1/2$ являются корнями уравнения $y = x^2 + px + q$. Поэтому $x^2 + px + q = (x - 2/3)(x + 1/2)$. Отсюда получаем, что $p = -1/6$ и $q = -1/3$.

б) Если парабола $y = x^2 + px + q$ касается оси (OX), то корни $x^2 + px + q = 0$ совпадают между собой. Следовательно, $x_1 = x_2 = -7$. Поэтому $x^2 + px + q = (x + 7)^2$. Отсюда $p = 14$ и $q = 49$.

в) Так как 2 является корнем $x^2 + px + q = 0$, то $x^2 + px + q = (x - 2)(x - a)$ для некоторого $a \in R$. Найдем значение a, используя тот факт, что $(0, -1)$ принадлежит графику функции $y = x^2 + px + q$. Получаем, что $(0 - 2)(0 - a) = -1 \Longrightarrow a = -1/2$. Таким образом,

$$x^2 + px + q = (x - 2)(x + 1/2) \Longrightarrow p = -3/2, q = -1.$$

2. а) Так как

$$|2x - 7| = \begin{cases} 2x - 7, & x \geqslant 3,5, \\ 7 - 2x, & x < 3,5, \end{cases}$$

то, учитывая, что при $x = 3,5$ исходное выражение не определено, получаем

$$\frac{|2x-7|}{3,5-x} = \begin{cases} 2(x-3,5)/(3,5-x), & x > 3,5 \\ 2(3,5-x)/(3,5-x), & x < 3,5 \end{cases} = \begin{cases} -2, & x > 3,5, \\ 2, & x < 3,5. \end{cases}$$

б) Поскольку

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}} = \sqrt{\frac{1}{(x-3)^2}} = \frac{1}{|x-3|},$$

исходное выражение можно привести к эквивалентному виду

$$(x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}} = \frac{x-3}{|x-3|}.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, получаем

$$\frac{x-3}{|x-3|} = \begin{cases} 1, & x > 3, \\ -1, & x < 3. \end{cases}$$

3. а) Решая уравнение $-3x^2+5x-9=0$, находим, что $D = 25-108 < 0$. Следовательно, парабола не пересекает ось (OX). Так как $-3 < 0$, то ветви параболы направлены вниз и исходное неравенство выполняется при всех x.

б) Легко заметить, что $x = 2, x = \pm 4$ являются корнями уравнения $(x^2-16)(x-2)^2 = 0$. Решая исходное неравенство методом интервалов, определяем знаки на каждом из получившихся промежутков (рис. 67). Следовательно, $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ и $x = 2$ является решением исходного неравенства.

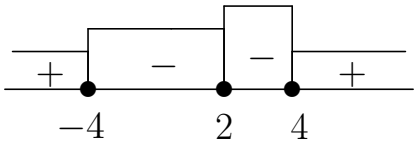


Рис. 67

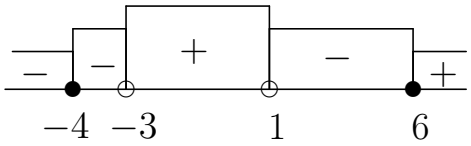


Рис. 68

в) Заметим, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$ являются корнями уравнения

$x^2+2x-3=0$. Решая неравенство

$$\frac{(x+4)^2(x-6)}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$$

методом интервалов (рис. 68), получаем, что $x \in (-3,1) \cup [6,\infty)$ или $x=-4$.

4. а) Так как

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

то

$$|x| \geqslant 3 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 0, \\ x \geqslant 3 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ -x \geqslant 3. \end{array}\right.$$

Окончательно имеем, что $|x| \geqslant 3 \Longleftrightarrow x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$.

б) Поскольку

$$|5x-2| = \begin{cases} 5x-2, & x \geqslant 2/5, \\ 2-5x, & x < 2/5, \end{cases}$$

$$|5x-2| \geqslant 4 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2/5, \\ 5x-2 \geqslant 4 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x < 2/5, \\ 2-5x \geqslant 4. \end{array}\right.$$

Объединяя решения полученных систем, находим ответ: $x \in [6/5,\infty) \cup (-\infty,-2/5]$.

в) Раскрывая модуль, имеем

$$|x-3| > a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 3, \\ x > a+3 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x < 3-a. \end{array}\right.$$

Решим первую систему. Если $a+3 \geqslant 3$ (т.е. $a \geqslant 0$), то $x > a+3$. Иначе, при условии $a < 0$, получаем, что $x \geqslant 3$ является решением первой системы. Вторая система решается аналогично. Если $a \geqslant 0$, то $x < 3-a$, если же $a < 0$, то $x < 3$. Объединяя решения обеих систем, получим:

$$\begin{array}{ll} \text{если} & a \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, 3-a) \cup (a+3, \infty); \\ \text{если} & a < 0 \Longrightarrow x \in R. \end{array}$$

5. а) Так как дискриминант уравнения $x^2-5x+7=0$ равен $-3<0$, то парабола $y=x^2-5x+7$ не пересекает ось (OX). Построим ее график, определив координаты вершины этой параболы. Используя формулу

$x_0 = -b/(2a)$, находим, что $x_0 = 5/2$. Отсюда $y_0 = y(x_0) = 3/4$. Кроме того, $y(0) = 7$. График данной функции изображен на рис. 69.

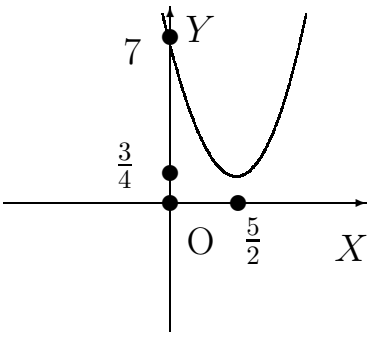


Рис. 69

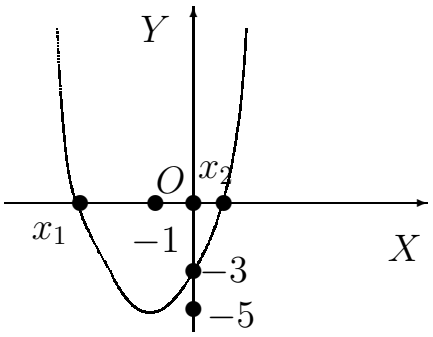


Рис. 70

б) Заметим, что $x_0 = -4/4 = -1$ является абсциссой вершины параболы $y = 2x^2 + 4x - 3$. И $y_0 = y(x_0) = -5$ — ордината вершины. Точка пересечения параболы с осью (OY) имеет координаты $(0, -3)$. В свою очередь, пересечение $y = 2x^2 + 4x - 3$ с осью (OX) имеют координаты $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, где $x_1 = -1 - \sqrt{5/2}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{5/2}$ — решения уравнения $2x^2 + 4x - 3 = 0$. График данной функции изображен на рис. 70.

6. Легко заметить, что $\widehat{BCA} = \widehat{BED}$. Следовательно, прямоугольные треугольники DBE и ECF подобны. Отсюда получаем, что $|DE|/|BD| = |CE|/|EF|$. Так как $|EF| = |DE|$, то из $|DE||EF| = |CE||BD|$ находим, что $|DE|^2 = |CE||BD|$.

7. Поскольку $[CM]$ является медианой треугольника ABC, то $S_{AMC} = S_{ABC}/2$. Из равенства

$$S_{ADE} = S_{AMOE} + S_{MOD} = S_{AMOE} + S_{COE} = S_{AMC}$$

получаем, что $S_{MOD} = S_{COE}$. Обозначим через $\alpha = \widehat{BOC}$. Так как $S_{MOD} = \frac{1}{2}|OM||OD|\sin\alpha$ и $S_{COE} = \frac{1}{2}|OC||OE|\sin\alpha$, то $\frac{1}{2}|OM||OD|\sin\alpha = \frac{1}{2}|OC||OE|\sin\alpha$ или $|OM||OD| = |OC||OE|$.

8. Пусть C — та точка, которая соответствует четверти пути от B до A. Обозначим через v км/ч скорость автомобиля от A до B и от B

до C. Тогда оставшуюся часть пути от C до A автомобиль двигался со скоростью $v+30$ км/ч. Заметим, что на путь от C до B и на обратный путь от B до C автомобиль затратил одинаковое время (его скорость на этих отрезках была равна v км/ч). Следовательно, на путь от C до A автомобиль затратил на один час меньше, чем от A до C. Так как длина пути от A до C равна 180 км, получаем уравнение

$$\frac{180}{v} = \frac{180}{v+30} + 1.$$

Решая $180(v+30) = 180v + v(v+30)$ или $v^2 + 30v - 5400 = 0$, находим, что $v_{1,2} = -15 \pm 75$. Выбирая неотрицательное значение, окончательно получаем $v = 60$ км/ч.

5.3. Физико-математический класс (май)

1. а) Поскольку

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \frac{(x^2+1)^2}{x^2} \quad \text{и} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \frac{(x^2-1)^2}{x^2},$$

выражение, задающее данную функцию, можно преобразовать к виду

$$y = \frac{|x^2+1|}{|x|} - \frac{|x^2-1|}{|x|} = \frac{|x^2+1| - |x^2-1|}{|x|}.$$

Так как выражения под модулями обращаются в ноль только при $x = -1, x = 0$ и $x = 1$, то раскрываем модули на промежутках $x \leqslant -1, -1 < x < 0, 0 < x \leqslant 1$ и $x > 1$ (при $x = 0$ данная функция не определена). В результате получим

$$y = \begin{cases} -2/x, & x \leqslant -1, \\ -2x, & -1 < x < 0, \\ 2x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2/x, & x > 1. \end{cases}$$

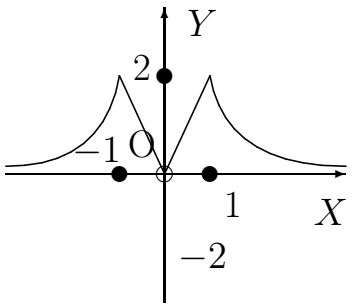


Рис. 71

График этой функции изображен на рис. 71.

б) Из решения предыдущей задачи видно, что прямая $y = a$ пересекает график функции

$$y = \frac{|x^2+1| - |x^2-1|}{|x|},$$

только если $a \in (0, 2]$.

2. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$x^2 - y^2 + y - x = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Поэтому достаточно решить две следующие системы:

$$\begin{cases} y = x, \\ x + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 1 - x, \\ x + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решим первую систему. Подставляя $y = x$ во второе уравнение, получаем $x^2+x-5 = 0$ или $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{21})/2$. Следовательно, $y_{1,2} = (1 \pm \sqrt{21})/2$. Решаем вторую систему: $x^2 - x - 4 = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{17})/2$. Отсюда находим

$$y_{3,4} = (1 \mp \sqrt{17})/2.$$

3. Обозначим длины отрезков $[BK]$ и $[KC]$ через x и y соответственно. Тогда $x + y = 4$. Используя теорему Пифагора, получаем $16 = |AK|^2 + |KD|^2 = 3 + x^2 + 3 + y^2$. Из системы

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

находим, что $x = 3, y = 1$ или $x = 1, y = 3$. Решения соответствуют рис. 72 и 73. Так как $\widehat{KAD} = \widehat{AKB}$ и $\operatorname{tg} \angle AKB = \sqrt{3}/x$, то в первом случае получаем $\operatorname{tg} \angle KAD = \sqrt{3}/3$, а во втором — $\operatorname{tg} \angle KAD = \sqrt{3}$.

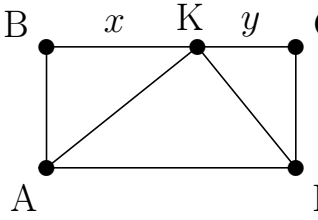


Рис. 72

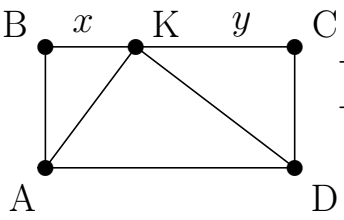


Рис. 73

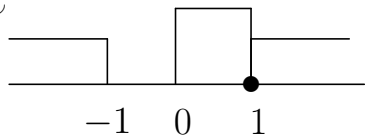


Рис. 74

4. Заметим, что площади треугольников AFD и BEC равны между собой (эти треугольники имеют равные основания и высоты, проведенные к этим основаниям). Так как

$$S_{AFD} = S_{AKE} + S_{ELD} + S_{EKFL} = S_{BKF} + S_{FLC} + S_{EKFL} = S_{BEC},$$

то $S_{AKE} + S_{ELD} = S_{BKF} + S_{FLC}$.

5. Область допустимых значений исходного уравнения определяется из системы

$$\begin{cases} -x^2 + x \geqslant 0, \\ x^4 - 1 \geqslant 0, \\ a + x \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \geqslant 1 \quad \text{или} \quad x \leqslant -1, \\ a + x \geqslant 0. \end{cases}$$

На рис. 74 изображено пересечение решений первых двух неравенств системы. Оно состоит из единственной точки — $x = 1$. При этом значении x уравнение превращается в уравнение относительно a, а именно, $|a| = 3$. Отсюда получаем, что $a = \pm 3$. Заметим, что при $a = -3$ условие $a + x \geqslant 0$ не выполняется. Следовательно, только при $a = 3$ уравнение имеет решение.

5.4. Химико-биологический класс (май)

1. а) Поскольку $(x-3)(x-5) + 1 = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$, то исходная функция преобразуется к виду $y = 1 + |x - 4|$. Раскрывая модуль, получаем

$$y = \begin{cases} x - 3, & x \geqslant 4, \\ 5 - x, & x < 4. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 75.

б) Используя решение предыдущей задачи, имеем

$$y = x^2 + \sqrt{(x-3)(x-5)+1} = x^2 + |x-4| = \begin{cases} x^2 + x - 4, & x \geqslant 4, \\ x^2 - x + 4, & x < 4. \end{cases}$$

График этой функции построен на рис. 76.

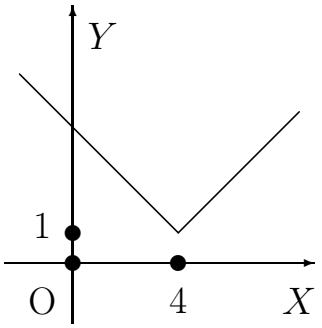


Рис. 75

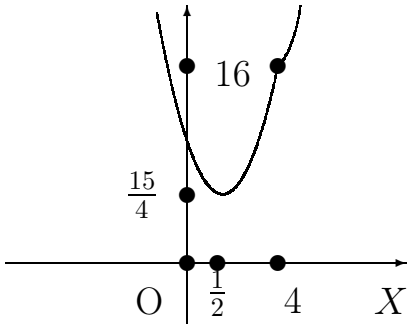


Рис. 76

2. Заметим, что ОДЗ данного неравенства состоит из всех x, для которых $9 - x^2 \geqslant 0$ и $x^2 + x - 6 \neq 0$. Поскольку арифметический корень принимает только неотрицательные значения, то исходное неравенство выполняется для всех корней $9 - x^2 = 0$ из ОДЗ или когда выполняется система

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 6 < 0. \end{cases}$$

По теореме Виета находим, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$ являются корнями уравнения $x^2 + x - 6 = 0$. Поэтому $x^2 + x - 6 < 0 \iff -3 < x < 2$. Следовательно, окончательным ответом будет: $x \in (-3, 2)$ или $x = 3$.

3. а) Параметр p данного уравнения может принимать только те значения, при которых $2p + 2 \geqslant 0 \Longrightarrow p \geqslant -1$. Следовательно, старший коэффициент $p + 10$ будет всегда отличен от нуля. Таким образом, чтобы исходное уравнение имело единственный корень, необходимо, чтобы $D = 2p + 2 - p(p + 10)/4 = 0 \Longrightarrow p^2 + 2p - 8 = 0 \Longrightarrow p = -4$ или $p = 2$. Заметим, что условию $p \geqslant -1$ удовлетворяет только $p = 2$.

б) Корни этого уравнения действительны и различны, если выполняются оба условия системы:

$$\begin{cases} D = p^2 + 2p - 8 > 0, \\ p \geqslant -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p < -4, \\ p \geqslant -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p > 2, \\ p \geqslant -1. \end{cases}$$

Решение имеет только вторая система. Окончательно получаем, что только при $p > 2$ корни действительны и различны.

в) Используя теорему Виета, получаем, что $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{16(p+10)}$. Поэтому корни исходного уравнения существуют и имеют разные знаки, только

когда выполняется система

$$\begin{cases} D = p^2 + 2p - 8 > 0, \\ p \geqslant -1, \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p > 2, \\ \frac{p}{16(p+10)} < 0. \end{cases}$$

Так как при $p > 2$ дробь в левой части второго уравнения системы положительна, то не существует таких значений p, при которых корни данного уравнения различаются по знаку.

4. Обозначим через m_c массу сухих ягод, т.е. влажность которых составляет 0%. Тогда если m — масса ягод в начале хранения и m_1 — их масса в конце, то $m_c = m/100$ и $m_c = 2m_1/100$. Отсюда получаем, что $m/100 = 2m_1/100$ или $m = 2m_1$. Таким образом, масса ягод уменьшилась в два раза.

5. Пусть $\widehat{A} = 30^\circ$, тогда из условий задачи следует, что длины катетов $[BC]$ и $[AC]$ соответственно равны $c/2$ и $c\sqrt{3}/2$. Поэтому площадь $\triangle ABC$ равна $c^2\sqrt{3}/8$. Пусть $O(A, R)$ — круг с центром в A и радиусом R, делящий площадь $\triangle ABC$ пополам. Тогда часть $\triangle ABC$, заключенного внутри этого круга, является сектором с центральным углом в 30°. Следовательно, его площадь равна $\pi R^2/12$. Из уравнения

$$\frac{\pi R^2}{12} = c^2\sqrt{3}/16 \quad \text{находим, что } R = \frac{c}{2}\sqrt{3\sqrt{3}/\pi}.$$

5.5. Физико-математический класс (июнь)

1. а) Исходное неравенство преобразуется к виду $x^2 - 6x + 8 > 0$. Числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$ являются корнями уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$. Следовательно, решением исходного неравенства является объединение $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$.

б) Заметим, что ОДЗ данного неравенства состоит из всех таких x, что $x^2 - 3x - 4 \geqslant 0$. Корнями уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$ являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$. Поэтому на множестве $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ достаточно решить неравенство $x - 3 \geqslant 0$ и добавить к этому решению все корни уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$. В результате получаем $x \geqslant 4$ или $x = -1$.

2. Область определения функции состоит из всех x, что $|x| \neq 1$, т.е. из всех x, за исключением $x = -1$ и $x = 1$. На своей области определения

данную функцию можно преобразовать к виду

$$y = \frac{x^2 - 2|x| + 1}{|x| - 1} = \frac{(|x| - 1)^2}{|x| - 1} = |x| - 1.$$

Удалив из множества точек графика функции $y = |x| - 1$ точки с абсциссами $x = -1$ и $x = 1$, получим график исходной функции (рис. 77).

3. Обозначим через O центр описанной около $\triangle ABD$ окружности (рис. 78). Так как (CD) — касательная к этой окружности, то точка D является точкой касания и $(OD) \perp (CD)$. Из условия $(CD)\|(AB)$ и того, что точка O лежит на серединном перпендикуляре отрезка $[AB]$, следует, что именно (OD) является серединным перпендикуляром к стороне $[AB]$ треугольника ABD. Поэтому $|AD| = |BD| = 2$. Пусть E — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, тогда $|ED| = 1$. По теореме синусов $1/\sin 30^\circ = 2/\sin AED \Longrightarrow \widehat{AED} = 90^\circ$. Следовательно, $ABCD$ является ромбом. Окончательно получаем, что

$$S_{ABCD} = 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

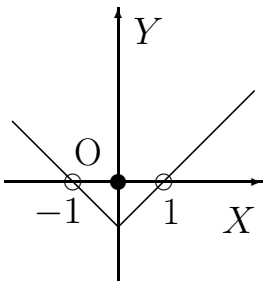


Рис. 77

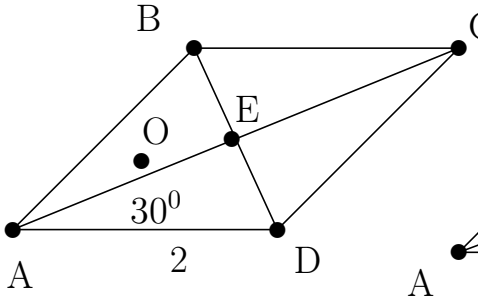


Рис. 78

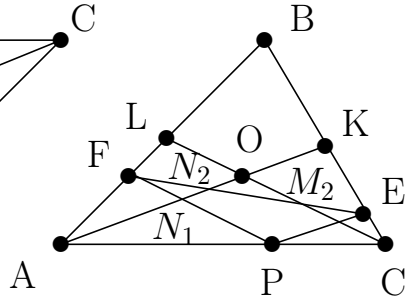


Рис. 79

4. Перепишем исходное уравнение в виде $(x - y)(x + y) = 79$. Так как 79 является простым числом, то целыми делителями 79 являются только ± 1 и ± 79. Поэтому для нахождения целочисленных решений достаточно рассмотреть следующие системы:

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = -79, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -79, \\ x + y = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 79, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 79, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решая подстановкой каждую из систем, получаем такие пары решений: $(-40,-39)$, $(-40,39)$, $(40,39)$ и $(40,-39)$.

5. Пусть O — точка пересечения медиан $[AK]$ и $[CL]$ (рис. 79). Обозначим также через N_1 и N_2 соответственно точки пересечения с медианой $[AK]$ отрезков $[PF]$ и $[EF]$. Аналогично M_1 и M_2 — точки пересечения $[CL]$ с $[PE]$ и $[EF]$. Так как $(CL)\|(EF)$ и $|OL|=|CL|/3$, то $|N_1F|=|PF|/3$. Треугольники FN_1N_2 и FPE подобны с коэффициентом $k=|FN_1|/|FP|=1/3$. Следовательно, $|FN_2|/|FE|=1/3$. Аналогично можно доказать, что $|M_2E|/|FE|=1/3$. Отсюда следует, что $[AK]$ и $[CL]$ делят $[EF]$ на три равные части.

6. Раскрывая модуль, получаем, что

$$g(x)=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

Определим сначала, при каких значениях параметра a уравнение $g(x)=f(x)$ имеет решение на $[0,1)$, а затем решим это уравнение на отрезке $[1,2]$. На промежутке $[0,1)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $1-x=x+a$ или $x=(1-a)/2$. Так как x должен удовлетворять условию $0\leqslant x<1$, то $0\leqslant(1-a)/2<1\Longrightarrow 0\leqslant 1-a<2\Longrightarrow -1\leqslant -a<1\Longrightarrow -1<a\leqslant 1$. Итак, при $a\in(-1,1]$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет на $[0,1)$ единственное решение, равное $x=(1-a)/2$. На множестве $[1,2]$ исходное уравнение превращается в $x-1=-x^2+x+a$ или $x^2=a+1$. При $a\geqslant -1$ получаем $x_{1,2}=\pm\sqrt{a+1}$. Корень $-\sqrt{a+1}$ не попадает в промежуток $[1,2]$. Определим теперь, при каких a выполняется $1\leqslant\sqrt{1+a}\leqslant 2$. Так как все числа, входящие в двойное неравенство, положительны, то возводим каждое из них в квадрат с сохранением знаков неравенств. Получаем $1\leqslant 1+a\leqslant 4$ или $0\leqslant a\leqslant 3$. Итак, при $a\in[0,3]$ уравнение $f(x)=g(x)$ имеет на отрезке $[1,2]$ единственное решение: $x=\sqrt{a+1}$. В результате получаем, что уравнение $f(x)=g(x)$ имеет на отрезке $[0,2]$ единственное решение только при $a\in(-1,0)\cup(1,3]$.

5.6. Экономический класс (июнь)

1. После очевидных преобразований получаем

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}>0.$$

Числа $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$ являются корнями уравнения $x^2+3x+2 = 0$. Поэтому исходное неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x+1} > 0.$$

Его левая часть равна $x+2$, если $x \neq -1$. Поэтому окончательным ответом будет: $x \in (-2,-1) \cup (-1,\infty)$.

2. Раскрывая модуль, имеем

$$|2x-1| = x^2-7 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 1/2, \\ 2x-1 = x^2-7 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} x < 1/2, \\ 1-2x = x^2-7. \end{array} \right.$$

Решая уравнение $x^2-2x-6 = 0$, находим $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$. При этом только $x = 1+\sqrt{7}$ удовлетворяет условию $x \geqslant 1/2$ и является единственным решением первой системы. Аналогично находим, что $x_3 = -4$ и $x_2 = 2$ являются корнями уравнения $x^2+2x-8 = 0$, но только $x = -4$ удовлетворяет условию $x < 1/2$. Итак, $x = -4$ или $x = 1+\sqrt{7}$.

3. Преобразуя выражение, задающее функцию, получаем

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{\sqrt{(x+1)^2}} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{|x+1|} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} x^2-x+1, & x > -1, \\ -x^2+x-1, & x < -1. \end{array} \right.$$

Заметим только, что $x = -1$ не входит в область определения данной функции. Координаты вершины параболы $y = x^2-x+1$ равны $x_0 = 1/2$ и $y_0 = 3/4$. Исключив из параболы $y = x^2-x+1$ точку с абсциссой $x = -1$ и отобразив симметрично относительно (OX) часть параболы при $x < -1$, получим график исходной функции (рис. 80).

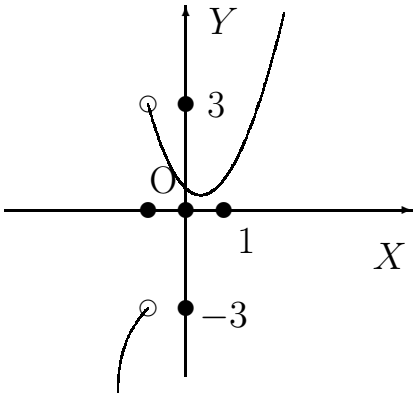


Рис. 80

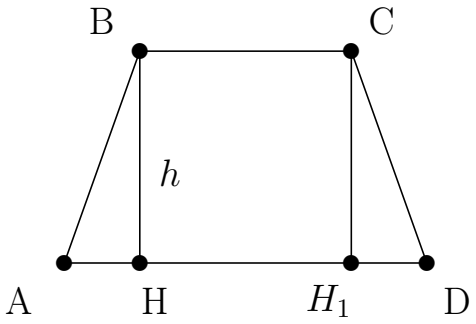


Рис. 81

4. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция и $[AD]$ — ее большее основание (рис. 81). Из условий задачи следует, что радиус вписанной окружности равен $h/2$. Отсюда легко находится и площадь вписанного круга — $\pi h^2/4$. Вычислим теперь площадь трапеции. Пусть $[BH], [CH_1]$ — высоты трапеции, тогда $|AH| = (|AD| - |BC|)/2$ (так как трапеция равнобедренная, то $|AH| = |H_1D|$). Следовательно, $|AH| = d/2$. По теореме Пифагора находим, что $|AB| = \sqrt{h^2 - d^2/4}$. Так как четырехугольник $ABCD$ описанный, то $|AD| + |CD| = 2|AB|$. Поэтому полусумма длин оснований $(|AD| + |CD|)/2$ равна $\sqrt{h^2 - d^2/4}$. Отсюда $S_{ABCD} = h \cdot \sqrt{h^2 - d^2/4}$. Итак, площадь оставшейся фигуры равна $h \cdot \sqrt{h^2 - d^2/4} - \pi h^2/4$.

5. Заметим, что данное уравнение может рассматриваться только при тех значениях p, при которых $p + 3 \geqslant 0$, т.е. $p \geqslant -3$. Разберем сначала случай, когда данное уравнение становится линейным, т.е. когда $p = 0$. Получаем $6x - 3 = 0$ или $x = 1/2 > 0$. Итак, $p = 0$ — одно из искомых значений параметра. В общем случае корни x_1 и x_2 некоторого квадратного уравнения с дискриминантом D существуют и положительны, если выполняются три условия: $D > 0, x_1 + x_2 > 0$ и $x_1 \cdot x_2 > 0$. Используя теорему Виета, получаем систему

$$\left\{\begin{array}{l} 12(p+3) + 4(p+3)p > 0, \\ -2\sqrt{3(p+3)}/p > 0, \\ -\frac{p+3}{p} > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (p+3)^2 > 0, \\ 1/p > 0, \\ \frac{p+3}{p} < 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} p \neq -3, \\ p > 0, \\ \frac{p+3}{p} < 0. \end{array}\right.$$

Второе и третье неравенства системы одновременно не выполняются ни

при каком p. Поэтому единственным искомым значением p будет $p = 0$.

5.7. Химико-биологический класс (июнь)

1. а) Областью определения данной функции являются все x, для которых $x - 2 \geqslant 0$ или $x \geqslant 2$. На своей области определения функция преобразуется к виду $y = (x-2)^2 - 2x + 5 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, $x \geqslant 2$. Ее график изображен на рис. 82.

б) Так как $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, то данная функция определена всюду, кроме $x = 3$. Учитывая, что $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$ и раскрывая модуль, получаем

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}} = \frac{x^2(x-3) + x - 3}{|x-3|} = \frac{(x-3)}{|x-3|} \cdot (x^2 + x - 3) =$$

$$= \begin{cases} x^2 + x - 3, & x > 3, \\ -(x^2 + x - 3), & x < 3. \end{cases}$$

Изобразив параболу $y = x^2 + x - 3$ и отобразив ее часть при $x < 3$ относительно (OX), получаем график исходной функции. Он изображен на рис. 83.

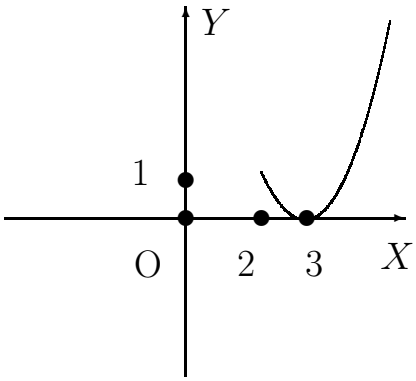


Рис. 82

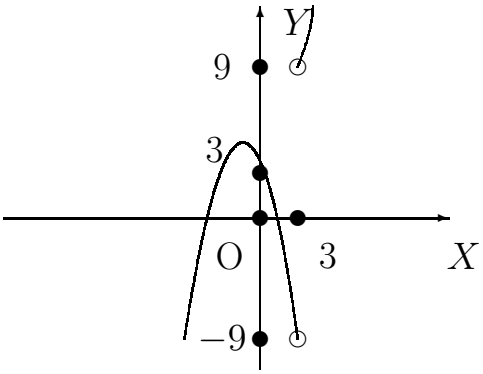


Рис. 83

2. а) Так как $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются корнями $x^2 - 4x + 3 = 0$, то данное неравенство преобразуется к виду

$$\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-3)} < 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем $x \in (1,2) \cup (2,3)$.

б) ОДЗ данного неравенства являются все x из промежутка $[2,\infty)$. Ограничивая решение предыдущего неравенства данным ОДЗ, получаем такое решение: $x \in (2,3)$.

3. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC ($\widehat{C} = 90^\circ$) $[BC]$ — больший из катетов и D — его середина. Найдем радиус R окружности, описанной около прямоугольного треугольника ACD. Так как он равен половине гипотенузы $[AD]$, то $R = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2} = 2\sqrt{2}$. Площадь круга, ограниченного этой окружностью, равна 8π см^2.

4. а) Разбирая случай, когда $f(x)$ является линейной функцией, т.е. когда $p-3=0$, получаем $6x=3$ или $x=1/2$ ($p=3$). Если теперь $p \neq 3$, то находим корни исходного уравнения по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{2p^2-3p}}{p-3}.$$

Эти числа действительны, если $2p^2-3p \geqslant 0$, т.е. $p \in (-\infty,0] \cup [3/2,\infty)$, $p \neq 3$.

б) Очевидно, что если $p=3$, то линейная функция $y=6x-3$ не удовлетворяет условию задачи. Пусть теперь $p \neq 3$. Тогда условие $f(x)>0$ выполняется при всех x, если парабола не пересекает оси (OX) и находится в первом и втором координатных углах, т.е. когда $D<0$ и $p-3>0$. Решаем систему

$$\begin{cases} p>3, \\ 2p^2-3p<0. \end{cases}$$

Решением второго неравенства является промежуток $(0,3/2)$. Пересекая его с множеством решений первого неравенства, получаем, что не существует таких значений p, чтобы $f(x)>0$ выполнялось при всех x.

5.8. Психологический класс (июнь)

1. а) Дискриминант уравнения

$$-2x^2+8x-7=0$$

равен $D = 64 - 56 = 8$. Поэтому числа $x_{1,2} = (4 \pm \sqrt{2})/2$ являются корнями этого уравнения. Для построения графика осталось заметить, что ветви параболы направлены вниз и координаты вершины этой параболы равны $(2, 1)$ (рис. 84).

б) Поскольку $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$, то исходная функция преобразуется к виду

$$y = 1 - 2|x-2| = \begin{cases} 5 - 2x, & x \geqslant 2, \\ 2x - 3, & x < 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 85.

в) После несложных преобразований функция принимает следующий вид: $y = \sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = |x+3| - |2-x|$. Так как подмодульные выражения обращаются в ноль только при $x = -3$ и $x = 2$, то раскроем модуль на промежутках $x \leqslant -3$, $-3 < x \leqslant 2$ и $x > 2$. Получаем, что

$$y = \begin{cases} -5, & x \leqslant -3, \\ 2x + 1, & -3 < x \leqslant 2, \\ 5, & x > 2. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рис. 86.

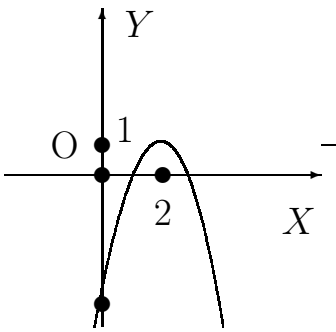


Рис. 84

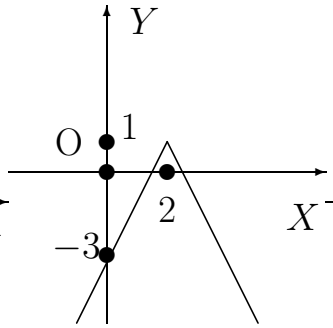


Рис. 85

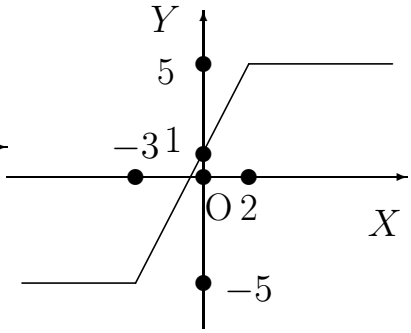


Рис. 86

2. а) Решая данное неравенство методом интервалов, найдем корни уравнений $2x^2 - 8x + 7 = 0$ и $x^2 - 4x + 4 = 0$. Для первого уравнения корни были определены в решении задачи 1 *а*; они равны $x_{1,2} = (4 \pm \sqrt{2})/2$. Единственным корнем второго уравнения является $x = 2$. Определяя

знаки на каждом из получившихся промежутков, находим, что неравенство выполняется только для $x \in [(4-\sqrt{2})/2, (4+\sqrt{2})/2], \quad x \neq 2$.

б) Заметим, что ОДЗ данного неравенства состоит только из тех x, для которых

$$-\frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+4} \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+4} \leqslant 0.$$

Поскольку корень принимает только неотрицательные значения (которые, конечно, больше -2), то любое x из ОДЗ является решением неравенства. Решая неравенство $\frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+4} \leqslant 0$, получаем (см. 2 *а*), что $x \in [(4-\sqrt{2})/2, (4+\sqrt{2})/2], \quad x \neq 2$.

в) Заметим, что $\sqrt{a} \geqslant 1$ только при $a \geqslant 1$ (последнее неравенство получается с помощью возведения в квадрат). Поэтому достаточно решить неравенство

$$\frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+4} \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+4} \geqslant 0.$$

Числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются корнями уравнения $x^2-4x+3=0$. Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем, что $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

3. Введем некоторые обозначения. Пусть l — длина пути от A до B; v км/ч — скорость катера в неподвижной воде и v_0 км/ч — скорость течения реки. Тогда $a = l/(v+v_0)$ и $b = l/v_0$. Необходимо найти $x = l/(v-v_0)$. Проще определить значение $1/x$. Так,

$$\frac{1}{x} = \frac{v-v_0}{l} = \frac{v+v_0-2v_0}{l} = \frac{v+v_0}{l} - 2\frac{v_0}{l} = \frac{1}{a} - 2\frac{1}{b} = \frac{b-2a}{ab}.$$

Отсюда $x = \frac{ab}{b-2a}$.

4. Пусть O_1 — центр окружности радиуса 2, O_2 — центр окружности с радиусом 3 и O_3 — центр оставшейся окружности. Тогда $|O_1O_2| = 5$, $|O_1O_3| = 12$ и $|O_2O_3| = 13$. Так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, то треугольник $O_1O_2O_3$ является прямоугольным. Отсюда следует, что медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна радиусу описанной около этого треугольника окружности и равна при этом половине гипотенузы. Следовательно, длина искомого отрезка равна $6,5$.

5. а) Для того чтобы коэффициенты данного уравнения были действительными, необходимо, чтобы $5-p \geqslant 0$ или $p \leqslant 5$. Рассмотрим сначала случай, когда исходное уравнение становится линейным. Это происходит при $p=-1$. Решая $2x\sqrt{6}=-4$, находим, что $x=-\sqrt{6}/3$ при $p=-1$. Пусть теперь $p \leqslant 5$ и $p \neq -1$. Чтобы корень существовал и был единственным, необходимо, чтобы дискриминант уравнения был равен нулю. Получаем систему

$$\begin{cases} 4(5-p)-4(p+1)(3-p)=0, \\ p \leqslant 5, \\ p \neq -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p^2-3p+2=0, \\ p \leqslant 5, \\ p \neq -1 \end{cases} \iff$$

$\iff p=1,\ p=2$. Ответ: $p=-1, p=1$ и $p=2$.

б) Учитывая ограничение на параметр (см. 5 *а*), необходимо решить неравенство $D>0$. Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} p^2-3p+2>0, \\ p \leqslant 5, \\ p \neq -1. \end{cases}$$

Объединение $(\infty,1]\cup[2,\infty)$ является решением первого неравенства этой системы. Пересекая это множество с решением двух оставшихся неравенств этой системы, окончательно получаем $p \in (-\infty,-1) \cup (-1,1] \cup [2,5]$.

в) Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. Тогда они противоположны по знаку, если $x_1 \cdot x_2 < 0$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = (3-p)/(p+1)$. Таким образом, учитывая ограничение на p (см. 5 *а* и 5 *б*), получаем систему неравенств

$$\begin{cases} p^2-3p+2>0, \\ p \leqslant 5, \\ p \neq -1, \\ (3-p)/(p+1)<0. \end{cases}$$

Первые три условия системы выполнены, если $p \in (-\infty,-1) \cup (-1,1] \cup [2,5]$. Пересечем это множество с решением последнего неравенства $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$. Окончательно получаем, что только при $p \in (-\infty,-1) \cup (3,5]$ корни исходного неравенства противоположны по знаку.

9.6. Экзамены 1996 года

6.1. Физико-математический класс (март)

1. Пусть O — центр вписанной окружности в треугольник ABC, а угол $\angle A$ больше угла $\angle B$. Докажем, что $|OA| < |OB|$. Для этого рассмотрим треугольник AOB. Так как $[AO)$ и $[BO)$ — биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle B$, то $\angle OAB > \angle OBA$. Как известно, против большего угла лежит большая сторона, отсюда $|OB| > |OA|$.

2. а) Четырехугольник, образованный пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма $ABCD$, обозначим через $KLMN$ (рис. 87). Пусть также $\alpha = \widehat{A}/2$ и $\beta = \widehat{B}/2$. Тогда $\angle NKL = \angle AKB = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$. Используя равенство накрест лежащих углов $\angle AED$ и $\angle EDC$, получаем $(KN)\|(LM)$. Аналогично доказывается параллельность (MN) и (KL). Таким образом, $KLMN$ является прямоугольником.

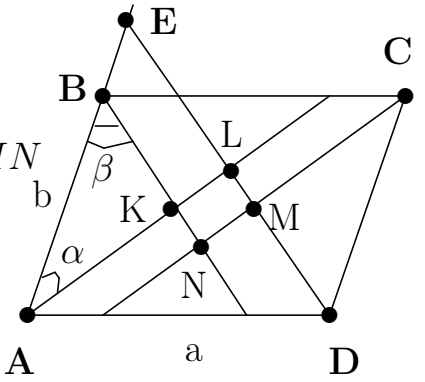


Рис. 87

б) Сохраним обозначения предыдущей задачи. Пусть также $|AD| = a$ и $|AB| = b$. Тогда из прямоугольных треугольников AKB и BCN находим, что $|BK| = b\sin\alpha$ и $|BN| = a\sin\alpha$. Отсюда $|KN| = (a-b)\sin\alpha$. А из треугольников CDM и BCN получаем, что $|CM| = b\cos\alpha$ и $|CN| = a\cos\alpha$. Поэтому $|MN| = (a-b)\cos\alpha$ и диагональ $|KM| = \sqrt{|KN|^2 + |MN|^2} = a - b$.

3. Заметим, что $9 + 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2+\sqrt{5})^2$. Поэтому

$$A = 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 2\sqrt[3]{4-5} = -2.$$

4. Будем считать, что $\frac{a_1}{b_1}$ — наименьшая из дробей. Следовательно, $\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_3}{b_3}$ или $a_1b_2 \leqslant a_2b_1$ и $a_1b_3 \leqslant a_3b_1$ (так как по условию b_1, b_2 и b_3 положительны). Сложив два последних неравенства, приходим к $a_1b_2 + a_1b_3 \leqslant a_2b_1 + a_3b_1$. Теперь докажем, что

$$\frac{a_1}{b_1} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Умножив на общий знаменатель, получим сначала $a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 \leqslant a_1b_1 + a_2b_1 + a_3b_1$, а затем $a_1b_2 + a_1b_3 \leqslant a_2b_1 + a_3b_1$. Справедливость последнего неравенства уже установлена. Также доказывается и вторая часть утверждения.

5. Очевидно, что $x-y = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. Так как числа $x-y$ и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ рациональны, то разность $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ также рациональна. Поэтому $\sqrt{x}$ — рациональное число, являющееся суммой двух рациональных чисел: $\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ и $\frac{1}{2}(\sqrt{x}-\sqrt{y})$. Следовательно, $\sqrt{y} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})-\sqrt{x}$ также является рациональным числом.

6.2. Химико-биологический класс (апрель)

1. Обозначим через M кг и m кг — массы первого и второго слитков соответственно, а через $M_з$ кг и $m_з$ кг — количество золота, которое они содержат. Перепишем условие задачи в виде уравнений $M_з : M = 2,5 \cdot m_з : m$ и $(m_з+M_з)/(m+M) = 4/10$. Из первого уравнения получаем $M_з = 2,5 \cdot m_з \cdot \frac{M}{m}$. Поэтому m кг первого слитка содержит $2,5 \cdot m_з$ кг золота. Последнее условие задачи дает $(m_з + 2,5 \cdot m_з)(m+m) = 35/100$. Отсюда получаем $m_з : m = 1:5$ и $M_з : M = 1:2$. И, наконец,

$$\frac{\frac{m}{5}+\frac{M}{2}}{m+M} = \frac{4}{10} \Longrightarrow 2m + 5M = 4m + 4M \Longrightarrow M = 2m.$$

2. Раскрывая модуль, получаем

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3x - 3 \leqslant x + 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 1, \\ 3 - 3x \leqslant x + 3. \end{cases}$$

Решением первой системы является отрезок $[1,3]$, второй — полуинтервал $[0,1)$. Объединяя решения, получим $[0,3]$.

3. Заметим, что $29 > 12\sqrt{5}$, поэтому $|12\sqrt{5} - 29| = 29 - 12\sqrt{5}$. Выделяя полные квадраты $29 - 12\sqrt{5} = 4 \cdot 5 - 12\sqrt{5} + 9 = (2\sqrt{5}-3)^2$ и $29 + 12\sqrt{5} = (2\sqrt{5}+3)^2$, получаем, что данное число равно
$2\sqrt{5} - 3 - (2\sqrt{5}+3) = -6$.

4. Будем считать, что $\angle A = \angle C - \angle B$. Отсюда $\angle C = \angle A + \angle B$ и $180^\circ = \angle C + \angle C \Longrightarrow \angle C = 90^\circ$. Пусть a, b, c — катеты и гипотенуза прямоугольного треугольника ABC и $b = 1$. Тогда условия задачи можно

переписать в виде системы

$$\begin{cases} c^2 + a^2 = 2\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2, \\ 1 + a^2 = c^2. \end{cases}$$

Выражая a^2 из второго уравнения системы и подставляя в первое, решаем уравнение относительно c^2:

$$2c^2 - 2\pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 1 \Longrightarrow c^2 = \frac{2}{4-\pi} \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{2}{4-\pi}}.$$

5. Сложив уравнения исходной системы, приходим к $3x = 2b + 2$ или $x = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}$. Из второго уравнения системы $y = x - b = -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}$. Теперь определим, при каких значениях параметра b выполняется неравенство $x(x+y) \leqslant 0$. Для этого достаточно решить неравенство

$$\left(\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}b + \frac{4}{3}\right) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad (b+1)(b+4) \leqslant 0.$$

В результате получаем, что $b \in [-4, -1]$.

6.3. 9 класс (май)

1. Поскольку $\sqrt{y^2 - 6y + 9} = |y - 3|$, то исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} |y-3| = x - 3, \\ x^2 + |y| = 12. \end{cases}$$

Прежде чем раскрыть модули, заметим, что из первого уравнения следует $x - 3 \geqslant 0$, а из второго — $12 - x^2 \geqslant 0$. Двойное неравенство $3 \leqslant x \leqslant 4$ приводит к оценкам $|y-3| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 3$, откуда получаем, что y одновременно удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant y-3 \leqslant 1$ и $-3 \leqslant y \leqslant 3$, т.е. $2 \leqslant y \leqslant 3$. Раскрывая оба модуля для y из промежутка $[2,3]$, получаем систему

$$\begin{cases} 3 - y = x - 3, \\ x^2 + y = 12. \end{cases}$$

Выражая y из второго уравнения, получим $x^2 - x - 6 = 0$, корни которого — $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Условию $3 \leqslant x \leqslant 4$ удовлетворяет только x_2. Подставляя $x = 3$ в первое уравнение системы, определяем y ($y = 3$).

2. Пусть x_0 — общий корень исходных уравнений, тогда выполняется $x_0^2 + px_0 + q = 0$ и $x_0^2 + qx_0 + p = 0$. Вычитая из первого уравнения второе, приходим к $x_0(p-q) - (p-q) = 0$ или $(x_0 - 1)(p-q) = 0$. Поскольку $p \neq q$, то получаем $x_0 = 1$. Непосредственной подстановкой $x = 1$ в исходные уравнения убеждаемся, что это значение удовлетворяет условиям задачи. Множество точек (p, q), удовлетворяющих полученному уравнению $1 + p + q = 0$, изображено на рис. 88.

3. Пусть отрезок $[MN]$ параллелен основаниям трапеции $ABCD$ (где $(AD) \| (BC)$) и делит ее площадь пополам. Обозначим через c длину $[MN]$ и через h_1 и h_2 — высоты трапеций $MBCN$ и $AMND$ соответственно. Тогда условия задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} (c+b)h_1 = (c+a)h_2, \\ 2(c+b)h_1 = (a+b)(h_1+h_2). \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $h_2 : h_1 = (c+b) : (c+a)$. Разделив на h_1 обе части второго уравнения системы, получаем

$$2(c+b) = (a+b)\left(1 + \frac{c+b}{c+a}\right) \Longrightarrow 2(c+b)(c+a) = (a+b)(2c+a+b) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2c^2 + 2ab - (a+b)^2 = 0 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

4. Существуют такие целые числа n, m, k и l, что

$$\begin{cases} 5\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = \frac{n}{m}, \\ 2\sqrt{x} - 7\sqrt{y} = \frac{k}{l}. \end{cases}$$

Чтобы уравнять коэффициенты при $\sqrt{x}$, умножим первое уравнение на 2, второе – на 5. Вычитая затем из первого уравнения второе, получаем $29\sqrt{y} = \frac{2n}{m} - \frac{5k}{l}$. Поэтому $\sqrt{y}$ и y являются рациональными числами. Из первого уравнения системы следует, что $\sqrt{x}$ и x также рациональны.

5. Пусть садовник должен рассадить n деревьев, тогда найдутся такие натуральные k и l, что

$$\begin{cases} n = 37k + 8, \\ n = 43l + 11, \\ n < 1000. \end{cases}$$

Из неравенств $37k+8<1000$ и $43l+11<1000$ получаем оценки для k и l: $k\leqslant 26$ и $l<23$. Рассмотрим теперь уравнение $37k+8=43l+11$ или равносильное ему $37(k-l)=3(2l+1)$. Заметим, что левая часть последнего уравнения делится на 37, поэтому и $3(2l+1)$ делится на 37. Так как 3 и 37 взаимно просты (т.е. нет кроме единицы других общих натуральных делителей), то $2l+1$ должно делиться на 37, т.е. $2l+1=37$ или $2l+1=101$ ($2l+1\neq 74$, так как $2l+1$ — нечетное число) и т.д. Решениями этих уравнений будут $l=18$, $l=50$ и т.д. Ограничению $l<23$ удовлетворяет только $l=18$. Подставляя найденное значение l во второе уравнение системы, находим, что $n=785$.

6.4. Физико-математический класс (май)

1. Легко заметить, что при $a<-1$ первое уравнение системы не имеет решений. Пусть теперь $a\geqslant -1$. При этом множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, является окружностью с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{2(1+a)}$. Второе уравнение выполняется, если $x+y=\sqrt{14}$ или $x+y=-\sqrt{14}$. Поэтому второе уравнение задает на плоскости пару параллельных прямых, удаленных от начала координат на одно и то же расстояние, равное $\sqrt{14}\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{28}/2=\sqrt{7}$. Система имеет два решения в том и только в том случае, когда прямые касаются окружности, т.е. $\sqrt{2(1+a)}=\sqrt{7}$. Отсюда находим $a=5/2$.

2. Обозначим через x число лицеистов физико-математических классов. Пусть также a из них принимали участие в олимпиаде и b улучшили свои достижения. Определим минимальное значение x исходя из условий задачи. Очевидно, что $a\leqslant x$ и для минимальности x необходимо, чтобы $a=x$. Из неравенства $1,7\%\leqslant\frac{b}{x}\cdot 100\%\leqslant 2,9\%$ получаем, что $b\leqslant 2,9\cdot x/100$. Так как $b\neq 0$, то минимальное x мы получим из условия $b=1$, т.е. $1\leqslant 2,9\cdot x/100$ или $x>34\Longrightarrow x=35$. Нетрудно заметить, что при этом значении x неравенство $1,7\%\leqslant\frac{b}{x}\cdot 100\%$ также выполняется.

3. Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна x, тогда его диагональ равна $x\sqrt{2}$. Так как $|OB|=|OD|$, то точка O лежит на серединном перпендикуляре отрезка $[BC]$, т.е. на прямой (AC). Предположим теперь,

что точка O находится внутри квадрата. Обозначим точку пересечения диагоналей через M и рассмотрим прямоугольный треугольник BOM (рис.89). Поскольку $|BO| = 13$, $|OM| = \frac{x\sqrt{2}}{2} - 5\sqrt{2}$ и $|BM| = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, то

$$\left(\frac{x\sqrt{2}}{2} - 5\sqrt{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} = 13^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x-10)^2 + \frac{x^2}{2} = 169.$$

После несложных преобразований получаем квадратное уравнение $x^2 - 10x - 119 = 0$, корнями которого являются $x_1 = -7$ и $x_2 = 17$. Из условия $x^2 > 225$ имеем $x > 15$. Таким образом, $x = 17$ — искомая длина стороны и точка O при этом расположена внутри квадрата.

4. Запишем условие задачи в виде системы неравенств

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c < 1, \\ f(1) = a + b + c > -1, \\ f(3) = 9a + 3b + c < -4. \end{cases}$$

Из двух последних неравенств получаем $f(3) - f(1) < -3$ или $8a + 2b < -3$, а из первых двух — $f(1) - f(-1) > -2$ или $2b > -2$. Перепишем неравенство $8a + 2b < -3$ в виде $8a < -2b - 3$, а поскольку $-2b < 2$, то $-2b - 3 < 0$. Таким образом, $8a < 0$ или $a < 0$.

5. Заметим, что при $a < 0$ данное уравнение не имеет решений. При $a \geqslant 0$ преобразуем уравнение $2|x| - x^2 = a^2$ к виду $a^2 + (|x| - 1)^2 = 1$. Раскрывая модуль, получим

$$\begin{cases} a \geqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ a^2 + (x-1)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \geqslant 0, \\ x < 0, \\ a^2 + (x+1)^2 = 1. \end{cases}$$

Учитывая, что уравнения $a^2 + (x-1)^2 = 1$ и $a^2 + (x+1)^2 = 1$ задают окружности на плоскости xOa, изобразим решение систем на плоскости xOa (рис. 90). Таким образом, при $a < 0$ и $a > 1$ исходное уравнение не имеет решений, при $a = 0$ будет три решения, при $0 < a < 1$ — четыре решения и, наконец, при $a = 1$ уравнение имеет два корня.

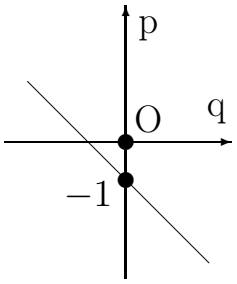


Рис. 88

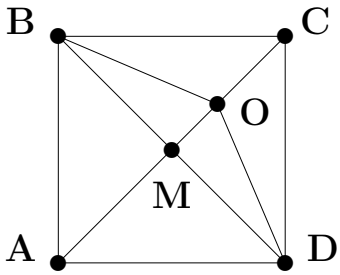


Рис. 89

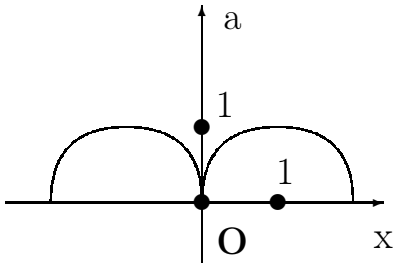


Рис. 90

6.5. Физико-математический класс (июнь)

1. Уравнение $x^2 + 4ax + 8a + 3 = 0$ имеет два различных корня $\Longleftrightarrow D = 16a^2 - 4(8a + 3) > 0$. Получаем (после сокращения на общий множитель 4) $4a^2 - 8a - 3 > 0$, откуда $a < 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ или $a > 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

2. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты данного треугольника, проведенные к сторонам a, b, c соответственно. Тогда $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S_\triangle$, откуда

$$h_c = \frac{ah_a}{c} = \frac{7}{15}h_a; \quad h_b = \frac{ah_a}{b} = \frac{7}{9}h_a.$$

Таким образом, из трех отрезков h_a, h_b, h_c отрезок h_a — наибольший, кроме того,

$$h_b + h_c = \frac{56}{45}h_a > h_a,$$

поэтому из отрезков h_a, h_b, h_c можно составить треугольник.

3. Пусть α, β, γ — углы данного треугольника и пусть $\alpha = \beta - \gamma$. Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, получаем $\gamma - \beta + \beta + \gamma = \pi$, откуда $\gamma = \pi/2$, т.е. данный треугольник является прямоугольным.

Обозначим через a, b, c — длины сторон, противолежащих углам α, β, γ соответственно. Тогда $S_\triangle = ab/2$. По условию выполняется одно из трех равенств: $S_\triangle = a^2$, или $S_\triangle = b^2$, или $S_\triangle = c^2$. Однако $S_\triangle = ab/2 < cc/2 < c^2$, поэтому $S_\triangle = a^2$ или $S_\triangle = b^2$. Пусть для определенности $S_\triangle = a^2$. Отсюда $a^2 = ab/2$, т.е. $b = 2a$. Кроме того, $a^2 + b^2 = c^2$, поэтому $5a^2 = c^2$, т.е. $a = c/\sqrt{5}$, $b = 2c/\sqrt{5}$, отсюда $\sin\alpha = a/c = 1/\sqrt{5}$, $\sin\beta = b/c = 2/\sqrt{5}$.

4. а) При любом x из ОДЗ справедливо $\sqrt{x^2-7x+10} \geqslant 0$. Поэтому данное неравенство выполняется, если

$$\begin{cases} x^2-7x+10 \geqslant 0, \\ x-5 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решая систему

$$\begin{cases} (x-2)(x-5) \geqslant 0, \\ x-5 \leqslant 0, \end{cases}$$

получаем $x \in (-\infty, 2] \cup \{5\}$.

б) Так как при $x \geqslant 0$ неравенство (4 *б*) превращается в неравенство (4 *а*), имеем $x \in [0;2] \cup \{5\}$. Пусть теперь $x < 0$, тогда $|x| = -x$, $x-5<0$, поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+7x+10 \geqslant 0, \\ x<0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)(x+5) > 0, \\ x<0, \end{cases}$$

откуда $x \leqslant -5$ или $-2 \leqslant x < 0$. Объединяя множества решений, полученные при $x \geqslant 0$ и при $x<0$, получаем $x \in (-\infty;-5] \cup [-2;2] \cup \{5\}$.

5. Заметим, что числитель данной дроби (впрочем, как и знаменатель) — нечетное число. С другой стороны, так как

$$56(48n+1) - 48(56n+1) = 56-48 = 8,$$

то общими делителями чисел $48n+1$ и $56n+1$ могут быть только делители числа 8. Таким образом, единственным общим делителем чисел $48n+1$ и $56n+1$ служит число 1, что и означает несократимость дроби $\frac{48n+1}{56n+1}$.

6.6. Математико-экономический класс (июнь)

Решения задач аналогичны решениям задач предыдущего варианта (физико-математический класс, июнь).

6.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. а) Число решений уравнения $x^2-5x+6=a$ совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} y=a, \\ y=x^2-5x+6. \end{cases}$$

График функции $y=x^2-5x+6$ изображен на рис. 91. Вершина этого графика имеет следующие координаты: $x_0=5/2$ и $y_0=-1/4$. Рассматривая различные случаи взаимного расположения прямой $y=a$ и графика функции $y=x^2-5x+6$, получаем, что при $a<-1/4$ система не имеет решений, при $a=-1/4$ решение единственно, а при $a>-1/4$ получается два решения.

б) Как и в предыдущей задаче, определяем количество точек пересечения графиков функций $y=|x^2-5x+6|$ (рис. 92) и $y=a$. Заметим, что $y(5/2)=|-1/4|=1/4$. Окончательно имеем, что при $a<0$ уравнение $|x^2-5x+6|=a$ не имеет решений, при $a=0$ и при $a>1/4$ уравнение имеет два корня, при $a\in(0,1/4)$ — четыре решения, а при $a=1/4$ — три корня.

2. Областью определения данной функции являются все x, удовлетворяющие неравенству $9-x^2\geqslant 0$, т.е. $x\in[-3,3]$. Найдем, при каких $x\in[-3,3]$ выражение $1-\sqrt{9-x^2}$ будет положительным. Имеем $1-\sqrt{9-x^2}\geqslant 0\iff 9-x^2\leqslant 1\iff x^2\geqslant 8\iff x\in[-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3]$. Раскрывая $|1-\sqrt{9-x^2}|$ при $x\in[-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3]$ и при $x\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$, преобразуем исходную функцию к виду

$$y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{9-x^2}+|1-\sqrt{9-x^2}|)=\begin{cases} 1, & x\in[-3,-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2},3]; \\ \sqrt{9-x^2}, & x\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 93.

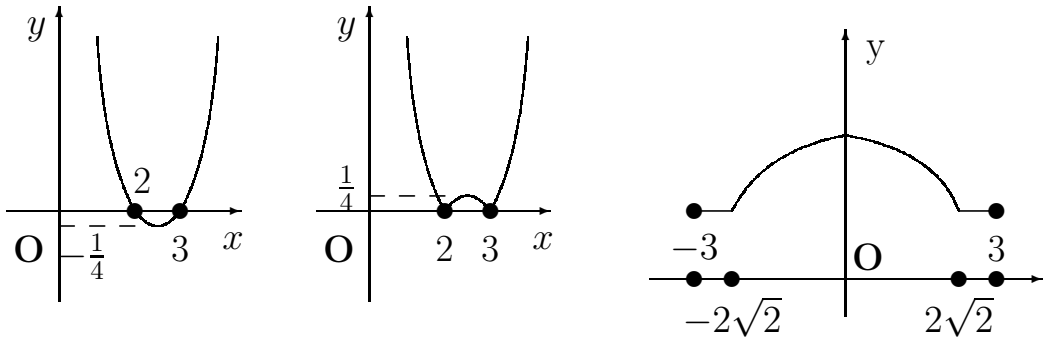


Рис. 91 Рис. 92 Рис. 93

3. Рассмотрим четырехугольник $ADMF$. Из условия $\widehat{ADM}+\widehat{AFM} = 180^\circ$ следует, что $ADMF$ вписан в некоторую окружность радиуса R_1 и $\widehat{DMF} = 180^\circ - \alpha$. Легко заметить, что $[AM]$ является диаметром этой окружности, т.е. $2R_1 = |AM|$. По теореме косинусов из треугольника DMF находим, что $|DF| = \sqrt{k^2+m^2+2km\cos\alpha}$. Применяя теорему синусов к треугольнику ADF, получаем $|DF|/\sin\alpha = 2R_1 = |AM|$. Вычисляем длину отрезка $[AD]$:

$$|AD| = \sqrt{|AM|^2 - k^2} = \sqrt{k^2\sin^2\alpha + m^2 + 2km\cos\alpha}/\sin\alpha.$$

Аналогично определяем длину $[CD]$:

$$|CD| = \sqrt{|CM|^2 - k^2} = \sqrt{k^2\sin^2\gamma + l^2 + 2kl\cos\gamma}/\sin\gamma.$$

Обозначим через $b = |AD| + |CD|$ и $c = |AB|$. По теореме синусов $c = b\sin\gamma/\sin\beta$. Подставляя найденные значения в формулу $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, определяем площадь треугольника ABC.

4. ОДЗ данного неравенства является множество $x \geqslant -2$. Если $x - 4 \leqslant 0$, то данное неравенство выполняется для всех x из ОДЗ. Получаем первую часть решений: $-2 \leqslant x \leqslant 4$. При $x - 4 \geqslant 0$ приходим к

$$\begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ (x-4)^2 \leqslant x + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geqslant 4, \\ x^2 - 9x + 14 \leqslant 0 \end{cases} \iff x \in [4, 7].$$

Объединяя решения, получаем $x - 4 \leqslant \sqrt{x+2} \iff x \in [-2, 7]$.

5. Обозначим через a число детей и через b — количество игрушек, подаренных каждому ребенку. Тогда условия задачи можно записать в виде

$$\begin{cases} a \text{ — нечетное число}, \\ b = a - 9, \\ 9(b+1) > a \cdot b. \end{cases}$$

Подставляя $b = a - 9$ в неравенство системы, приходим к

$$a(a-9) < 9(a-8) \Longrightarrow a^2 - 18a + 72 < 0.$$

Решением последнего неравенства являются $a \in (6, 12)$. Выбирая нечетные числа, получаем $a \in \{7, 9, 11\}$. Из условия задачи также следует, что $a > 9$. Поэтому $a = 11$ и $a \cdot (a-9) = 22$ — общее число игрушек.

6.8. Химико-биологический класс (июнь)

1. Обозначим через m_c массу фруктов, не содержащих воду, а через $m_{\text{в}}$ — массу воды. Первоначально масса фруктов была равна $m_1 = m_c + m_{\text{в}}$, причем $m_c = 28m_1/100$. Затем было получено m_2 кг сухих фруктов и $m_2 = m_c + m_{\text{в}'}$, где $m_c = 80m_2/100$. Откуда

$$\frac{80}{100}m_2 = \frac{28}{100}m_1 \Longrightarrow m_2 = \frac{28}{80}m_1.$$

Подставляя $m_1 = 20$ кг в последнее уравнение, находим $m_2 = 7$ кг.

2. а) ОДЗ данного неравенства состоит из всех x, для которых выполняется неравенство $x^2 + 9x + 14 \geqslant 0$, т.е. для $x \in (-\infty, -7] \cup [-2, \infty)$. Поскольку $\sqrt{x^2 + 9x + 14} \geqslant 0$, то на ОДЗ достаточно решить неравенство $x + 7 \leqslant 0$ и добавить к полученным решениям корни уравнения $x^2 + 9x + 14 = 0$. В итоге получаем $x \leqslant -7$ или $x = -2$.

б) Заметим, что при $x \geqslant 0$ неравенство $(x + 7)\sqrt{x^2 + 9|x| + 14} \leqslant 0$ не имеет решений, поэтому раскроем модуль только для $x < 0$. Получим неравенство $(x + 7)\sqrt{x^2 - 9x + 14} \leqslant 0$. Его решениями являются все $x \leqslant -7$.

3. См. решение задачи 6 из **3.5**.

4. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0, \\ x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 7x - 21 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x^2 - 9x - 22 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = 11.$$

5. Достаточно решить неравенство $D = a^2 - 16 > 0$. Получаем $a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.

6.9. Психологический класс (июнь)

1. Заметим, что при $a = 0$ неравенство $8x + 7 < 0$ имеет решения. Рассмотрим данное неравенство при $a \neq 0$. Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + 8x + 7$ принимает только неотрицательные значения, если имеют место

$$\begin{cases} a > 0, \\ D = 64 - 4 \cdot 7 \cdot a \leqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \geqslant \frac{8}{7} \end{cases} \Longleftrightarrow a \geqslant \frac{8}{7}.$$

2. Достаточно найти решения следующей системы:

$$\begin{cases} x \geqslant -6, \\ x^2 + 9x - 16 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{-9 + \sqrt{145}}{2}.$$

3. См. решение задачи 6 из **3.5**.

4. См. решение задачи 5 из **6.7**.

5. Поскольку $\sqrt{(x^2 - 9x + 14)^2} = |x^2 - 9x + 14|$, данная функция преобразуется к виду

$$y = \frac{|x^2 - 9x + 14|}{x - 7} = \frac{|(x-7)(x-2)|}{x-7} = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \leqslant 2 \text{ или } x > 7; \\ 2 - x, & \text{если } 2 < x < 7. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 94.

6.10. Коммерческий класс (июнь)

1. Решая квадратное уравнение $21a^2 - 4ab - b^2 = 0$ относительно a, имеем

$$a_{1,2} = \frac{4b \pm \sqrt{16b^2 + 84b^2}}{42} = \frac{4b \pm 10b}{21} \Longrightarrow a_1 = -\frac{1}{7}b,\ a_2 = \frac{1}{3}b.$$

2. а) ОДЗ данного уравнения состоит из неотрицательных x. Поэтому достаточно найти неотрицательные корни уравнения $x^2 - x - 2 = 0$. Получаем, что $x = 2$.

б) Заметим, что $\sqrt{x^2} = |x|$. Преобразуем данное уравнение к виду $|x|^2 - |x| - 2 = 0$. Сделав замену $y = |x|$, находим, что $y = -1$ или $y = 2$. Уравнение $|x| = -1$ не имеет решений, а корнями $|x| = 2$ являются $x = \pm 2$.

3. Решая уравнение $f(0) = 0$, где $f(x) = 2 \cdot x^2 - mx + 2m^2 - 3m$, получаем $2m^2 - 3m = 0 \Longrightarrow m = 0$ или $m = 3/2$. При $m = 0$ оба корня уравнения $2x^2 = 0$ равны нулю, поэтому искомым значением является $m = 3/2$.

4. Подставляя $x_1 = 6$ в выражение для $f(x)$, имеем $f(6) = -36 + 6a - a - 4 = 0 \Longrightarrow a = 8$. Откуда $f(x) = -x^2 + 8x - 12$.

Второй корень уравнения $-x^2+8x-12=0$ определяется из условия $6\cdot x_2=12$ (по теореме Виета), т.е. $x_2=2$.

Для построения графика заметим, что ветви параболы $f(x)=-x^2+8x-12$ направлены вниз и вершина имеет координаты $x_0=4$ и $y_0=4$ (рис. 95).

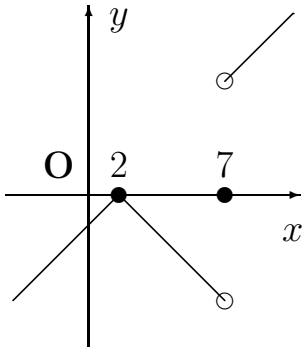


Рис. 94

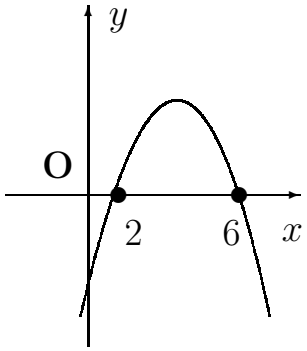


Рис. 95

Решением неравенства $f(x)=-x^2+8x-12>0$ или $x^2-8x+12<0$ являются $x\in(2,6)$.

Аналогично решая неравенство $x^2-8x+12\geqslant 0$, получим $x\in(-\infty,2]\cup[6,\infty)$.

Двойное неравенство $-5\leqslant -x^2+8x-12<3$ можно преобразовать к виду $0<x^2-8x+15\leqslant 8$ и решить систему

$$\begin{cases} x^2-8x+15>0, \\ x^2-8x+15\leqslant 8 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x\in[1,3)\cup(5,7].$$

5. Пусть основания трапеции $ABCD$ равны $|AD|=8$ и $|BC|=5$. Обозначим $|BM|$ через x и $|CM|$ — через y. Из подобия треугольников BCM и ADM получаем, что

$$\frac{x}{x+3,6}=\frac{5}{8} \quad\text{и}\quad \frac{y}{y+3,9}=\frac{5}{8}.$$

Откуда находим $x=6$ и $y=6,5$.

6. Обозначим скорость группы лыжников через v, тогда $v+5$ — скорость догоняющего лыжника. Так как расстояние, которое прошла группа

за один час, равно расстоянию, которое прошел опоздавший лыжник за 40 мин, то

$$v \cdot 1 = (v+5) \cdot \frac{40}{60} \Longrightarrow v = \frac{2}{3}(v+5) \Longrightarrow v = 10.$$

9.7. Экзамены 1997 года

7.1. 9 класс (май)

1. Обозначив через $t = \sqrt{x}$, получим уравнение $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$. После группировки имеем $t^2(t-1) - 4(t-1) = 0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = -2$. Очевидно, что t_3 — посторонний корень. Окончательно получаем, что $x = 1$ или $x = 4$.

2. Обозначим через A, B и C соответственно количество натуральных чисел, меньших тысячи, которые делятся на 3, на 5, на 15. Тогда $A = 333$, $B = 199$ и $C = 66$. Поэтому среди натуральных чисел, меньших тысячи, будут ровно $A + B - C = 466$ чисел, которые делятся на 3 или на 5. Искомое число — $999 - 466 = 533$.

3. ОДЗ данного неравенства является множество всех x, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + 2 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x \neq 0, \end{cases}$$

т.е. $x \geqslant -2$ и $x \neq 0$. Поскольку $\sqrt{x+2} \geqslant 0$, достаточно на ОДЗ решить неравенство $x^2+3x > 0$ и добавить к нему корни уравнения $\sqrt{x+2} = 0$. В результате получим $x > 0$ или $x = -2$.

4. Приведем одно из возможных решений этой задачи. Пусть $[MN]$ — средняя линия данного треугольника ABC. Опустим перпендикуляр $[NH]$ из точки N на сторону AB (рис. 96). Отобразив треугольник BNH относительно точки N (рис. 97), получим прямоугольную трапецию $ACH'H$ (здесь мы используем равенство $|BN| = |NC|$). Осталось отобразить четырехугольник $MCH'N$ относительно точки M (рис. 98).

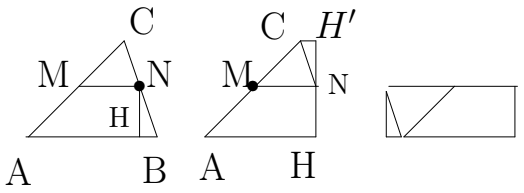


Рис. 96 Рис. 97

Рис. 98

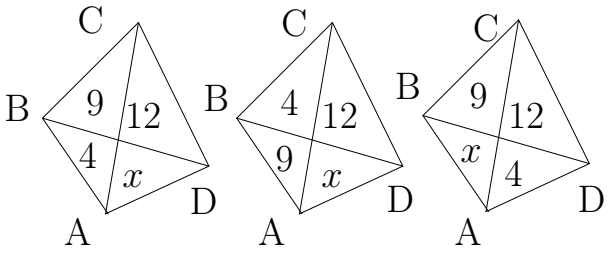


Рис. 99 Рис. 100 Рис. 101

5. Обозначим через O точку пересечения диагоналей данного четырехугольника $ABCD$ и через x — искомую площадь. Сразу заметим, что треугольники AOB и BOC имеют одинаковую высоту, поэтому их площади относятся как длины их оснований — $|AO|$ и $|OC|$. Теперь рассмотрим три случая (рис. 99–101). В первых двух случаях 12 и x являются площадями соседних треугольников (т.е. имеющих общую сторону). Благодаря сделанному замечанию в первом случае получаем $x_1 = 4 \cdot 12/9 = 16/3$, а во втором — $x_2 = 9 \cdot 12/4 = 27$. И, наконец, в последнем случае находим $x_3 = 9 \cdot 4/12 = 3$. Из трех найденных значений только x_3 удовлетворяет неравенству $x < 5$.

6. Пусть $f(x) = x^2 - (a-2)x - 3$ и $g(x) = x^2 + (3a-4)x + 3$. Если x_0 одновременно удовлетворяет условиям $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$, то $f(x_0) + g(x_0) = 2x_0^2 + (2a-2)x_0 = 0$. Отсюда $x_0 = 0$ или $x_0 = 1-a$. Очевидно, что $x_0 = 0$ не является корнем уравнения $f(x) = 0$. Поэтому подставим $x = 1 - a$ в уравнение $g(x) = 0$. После очевидных преобразований получаем $5a - 2a^2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $a = 0$ и $a = 5/2$. Подставляя найденные значения a, получаем, что при $a = 0$ общим корнем уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ является $x = 1$, а при $a = 5/2$ общий корень $x = -3/2$.

7.2. Физико-математический класс (июнь)

1. ОДЗ данного неравенства являются все x, для которых одновременно $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$ и $x^2 - x - 12 \neq 0$, т. е. $x \in (-\infty; -3) \cup [1; 4) \cup (4; \infty)$. Решая теперь на этом множестве неравенство методом интервалов, получаем, что при $x \in (-\infty; -3)$, а также при $x \in (4; \infty)$ неравенство выполнено, поскольку на этом промежутке числитель и знаменатель положительны. Значение $x = 1$ является решением, поскольку в этой точке числитель обращается в нуль, а знаменатель ненулевой, и, следователь-

но, вся дробь равна нулю. На интервале $(1;4)$ решений нет, так как на этом промежутке числитель положителен, а знаменатель отрицателен. В результате $x \in (-\infty;-3) \cup \{1\} \cup (4;\infty)$.

2. Пусть x — первая цифра числа, а y — вторая. Тогда само число равно $10x+y$, а число, записанное теми же числами, но в обратном порядке, равно $10y+x$. Условия задачи дают систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 4(x+y)+1, \\ 10y+x = 208(10x+y)/100. \end{cases}$$

Из второго уравнения после приведения подобных получаем $y = 5x/2$, а после подстановки этого значения y в первое уравнение и приведения подобных получаем квадратное уравнение $29x^2-56x-4=0$. Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2/29$. Но значение x должно быть целым неотрицательным числом, меньшим 10. Поэтому $x = 2$, а $y = 5$.

3. Рассмотрим промежуток $x < -3$. На этом множестве $x+3<0$ и $x-2<0$, поэтому $|x+3| = -x-3$ и $|x-2| = 2-x$. Следовательно, в этом случае уравнение принимает вид $-1-2x = 2x+1$, откуда $x = -1/2$. Найденное значение не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому при $x<-3$ уравнение решений не имеет.

При $-3 \leqslant x < 2$ имеем $|x+3| = x+3$ и $|x-2| = 2-x$, поэтому уравнение имеет на этом промежутке вид $5 = 2x+1$, откуда $x = 2$. И полученное значение не входит в рассматриваемый промежуток, следовательно, при $-3 \leqslant x < 2$ данное уравнение также не имеет решения.

Пусть $x \geqslant 2$. Тогда $|x+3| = x+3$ и $|x-2| = x-2$, и уравнение принимает вид $2x+1 = 2x+1$. Это равенство очевидно выполнено при любом x, поэтому все числа из рассматриваемого промежутка являются решениями.

Итак, $x \in [2,\infty)$.

4. При $a = 1$ уравнение имеет вид $2x = 0$ и, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$. Если $a \neq 1$, то данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при тех значениях параметра, при которых дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю, получаем уравнение относительно параметра a

$$4a^2-8a = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 2$.

В результате уравнение имеет единственный корень при $a \in \{0; 1; 2\}$.

5. Пусть O — точка пересечения прямых (AB) и (CD). Обозначим через l прямую, содержащую биссектрису угла AOC, а через m — прямую, перпендикулярную l и проходящую через точку O (т.е. l и m — прямые, содержащие биссектрисы вертикальных углов, образующихся при пересечении прямых (AB) и (CD)). Искомым геометрическим местом точек будет объединение прямых l и m без точки O. В самом деле, для любой точки M, лежащей на одной из биссектрис, расстояние от нее до прямых (AB) и (CD) одинаково, следовательно, высоты треугольников AMB и CMD равны, а основания AB и CD равны по условию. Поэтому площади треугольников AMB и AMD равны. Для произвольной точки M, не лежащей ни на одной из биссектрис, площади треугольников AMB и CMD не равны, так как в этом случае у этих треугольников равные основания, но разные высоты. Точка O не принадлежит искомому геометрическому месту точек, так как если точка M совпадает с точкой O, то треугольники не образуются.

6. Пусть O — центр данной окружности и AB — ее хорда. Обозначим через x $1/5$ угловой величины меньшей из дуг с концами в точках A и B. Тогда величина большей из дуг равна $7x$, а так как объединение этих двух дуг есть полная окружность, $5x + 7x = 360^\circ$, откуда $x = 30^\circ$. Следовательно, величина меньшего из углов AOB равна 150°, а тогда из рассмотрения равнобедренного треугольника ABO получаем, что угол BAO равен 15°. Касательная к окружности, проходящая через точку A, перпендикулярна радиусу OA и, следовательно, образует с хордой AB угол 75°.

7.3. Математико-экономический класс (июнь)

1. а) ОДЗ данного неравенства являются все x, для которых $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$ и $x^2 - 9 \neq 0$, т. е. $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1] \cup [2; 3) \cup (3; \infty)$. Заметим, что дробь отрицательна при отрицательном знаменателе и равна нулю при $x = 1$ и $x = 2$. Пересекая эти условия с ОДЗ, получим $x \in (-3; 1] \cup [2; 3)$.

б) Раскрывая модуль, получим $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2$, т.е. $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

Пересекая этот отрезок с множеством $(-3;1]\cup[2;3)$, имеем $x\in[-1;1]\cup[2;3)$.

2. Сразу находим значение b из уравнения $x_0=b/(-2)=-1$ (вершина параболы $y=-x^2-bx+c$ лежит на прямой $x=-1$). Теперь легко определить c из уравнения $y(1)=-1-2+c=0$. График функции $y=-(x^2+2x-3)$ изображен на рис. 102.

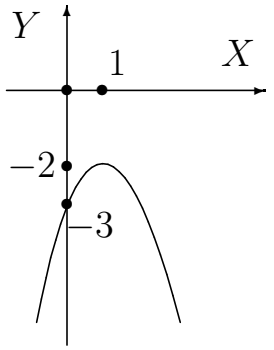


Рис. 102

3. а) Выразим y из второго уравнения и подставим в первое уравнение системы. Получим уравнение

$$x^2-|x|+a-1=0. \tag{1}$$

Сделав замену $t=|x|$, имеем квадратное уравнение

$$t^2-t+a-1=0. \tag{2}$$

Уравнение (1) имеет три корня, если корнями уравнения (2) являются $t_1=0$ и $t_2>0$ (если $b>0$, уравнение $|x|=b$ всегда имеет два корня $x_{1,2}=\pm b$). Подставляя $t=0$ во второе уравнение, находим $a=1$ и $t_2=1$. Итак, искомым значением параметра является $a=1$, а $x\in\{-1,0,1\}$.

б) Корнями уравнения (2) из 3 a, если $D=5-4a\geqslant 0$, являются

$$t_1=\frac{1-\sqrt{5-4a}}{2},\quad t_2=\frac{1+\sqrt{5-4a}}{2}.$$

Легко заметить, что $t_2>0$, поэтому $x_{1,2}=\pm t_2$. Теперь определим, при каких значениях параметра a будет выполняться $t_1\geqslant 0$. Решая неравенство $t_1\geqslant 0$, после несложных преобразований получим $a\geqslant 1$. Таким образом, при $a\in[1,5/4]$ находим $x_{3,4}=\pm t_1$. Соответствующие значения y легко определяются из второго уравнения системы.

Ответ: при $a<1$ $\Big((1+\sqrt{5-4a})/2,(2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$, $\Big(-(1+\sqrt{5-4a})/2,(2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$;

при $a \in [1, 5/4]$ $\Big((1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big(-(1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big((1-\sqrt{5-4a})/2, (2a-1+\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big(-(1-\sqrt{5-4a})/2, (2a-1+\sqrt{5-4a})/2\Big)$.

4. По теореме косинусов имеем $17 = 25 + 16 - 40\cos\hat{A}$. Отсюда $\cos\hat{A} = 3/5$ и $\sin\hat{A} = 4/5$. По теореме синусов $5/\sin\hat{C} = \sqrt{17}/\sin\hat{A}$, откуда $\sin\hat{C} = 4/\sqrt{17}$. Применяя для треугольника ABM теорему косинусов, находим $BM = \sqrt{1+25-6} = 2\sqrt{5}$. Обозначим через O_1, R_1 и O_2, R_2 центры и радиусы окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и CBM. Значения $R_1 = 5\sqrt{5}/4$ и $R_2 = \sqrt{85}/4$ легко определяются из уравнений $2R_1 = 2\sqrt{5}/\sin\hat{A}$ и $2R_2 = 2\sqrt{5}/\sin\hat{C}$ (снова используем теорему синусов для треугольников ABM и CBM). Пусть K — середина отрезка BM (рис. 103) и a — серединный перпендикуляр к этому отрезку. Тогда $K, O_1, O_2 \in a$ и $O_1O_2 = O_1K + KO_2$. Длины отрезков O_1K и KO_2 находим из прямоугольных треугольников O_1MK и O_2MK:

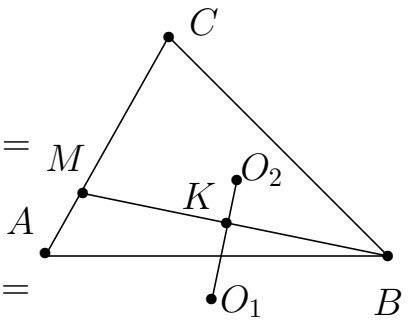


Рис. 103

$$O_1K = \sqrt{\frac{125}{16} - 5} = \frac{3}{4}\sqrt{5}, \quad KO_2 = \sqrt{\frac{85}{16} - 5} = \frac{1}{4}\sqrt{5}.$$

Ответ: $O_1O_2 = \sqrt{5}$ см.

5. Обозначив через $y = x^2 - 3x - 3$, решим уравнение $y = 2\sqrt{y-1}$. При $y \geqslant 0$ получаем $y^2 - 4y + 4 = 0$, единственным корнем которого является $y = 2$. Решая теперь уравнение $x^2 - 3x - 3 = 2$, находим $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{29})/2$.

7.4. 11 физико-математический класс (июнь)

1. Используя основное тригонометрическое тождество, приходим к уравнению $\sin^2\beta - (2a-5)\sin 2\beta - 10a = 0$. Сделаем замену $t = \sin 2\beta$

и выясним, при каких значениях параметра a хотя бы один из корней уравнения $t^2-(2a-5)t-10a=0$ лежит в отрезке $[-1;1]$. Поскольку дискриминант $D=4a^2+20a+25=(2a+5)^2$, корни равны $t_1=-5$ и $t_2=2a$. Условие $2a\in[-1;1]$ выполняется, если $a\in[-1/2;1/2]$. При этих значениях параметра $\sin 2\beta=2a$.

Учитывая, что $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$, найдем значение выражения $\sin(3\pi/4+\beta)\sin(5\pi/4-\beta)=\Big(\cos(2\beta-\pi/2)-\cos 2\pi\Big)/2=(\sin 2\beta-1)/2$. Подставляя теперь $\sin 2\beta=2a$, заключаем, что искомое выражение равно $a-1/2$.

2. Пусть d — разность арифметической прогрессии, которую составляют x_1, x_2, x_3 и x_4. Тогда $x_2=x_1+d$, $x_3=x_1+2d$, $x_4=x_1+3d$. Используя теорему Виета, получаем систему

$$\begin{cases} x_1+x_2=2x_1+d=7,\\ x_3+x_4=2x_1+5d=19. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, находим $d=3$ и $x_1=2$. Отсюда $x_2=5$, $x_3=8$ и $x_4=11$. Применяя теперь теорему Виета к свободным коэффициентам данных квадратных уравнений, получаем $a=x_1\cdot x_2=10$ и $b=x_3\cdot x_4=88$.

3. Решая неравенство $(41x-16)/x\geqslant 0$ методом интервалов, находим, что ОДЗ этого неравенства являются все $x\in(-\infty;0)\cup[16/41;\infty)$. Теперь найдем, при каких x левая часть данного неравенства неположительна. Решением неравенства $(2+3x)/x\leqslant 0$ является множество $[-2/3;0)$. Легко заметить, что при всех $x\in[-2/3;0)$ исходное неравенство выполняется (левая часть неположительная, правая — неотрицательная). При всех $x\in(-\infty;-2/3)\cup[16/41;\infty)$ (т.е. когда обе части неотрицательны) возведем данное неравенство в квадрат. После несложных преобразований приходим к неравенству

$$\frac{8x^2-7x-1}{x^2}\geqslant 0.$$

Достаточно решить неравенство $8x^2-7x-1\geqslant 0$ на множестве $(-\infty;-2/3)\cup[16/41;\infty)$. Учитывая, что $x_1=-1/8$ и $x=1$ являются корнями уравнения $8x^2-7x-1=0$, получаем $x\in(-\infty;-2/3)\cup[1;\infty)$. Объединяя найденные решения, получим в результате $x\in(-\infty;0)\cup[1;\infty)$.

4. Пусть x — количество белых и y — число остальных грибов. Тогда $x+y \leqslant 70$ и $x/(x+y) = 52/100$. Из последнего уравнения получаем $12x = 13y$. Таким образом, x должно делиться на 13. Поэтому возможными решениями будут пары $x_1 = 13$, $y_1 = 12$; $x_2 = 26$, $y_2 = 24$; $x_3 = 39$, $y_3 = 36$ и т.д. Легко заметить, что все пары, начиная с x_3, y_3, не удовлетворяют условию $x+y \leqslant 70$. Кроме того, пара x_2, y_2 не удовлетворяет последнему условию задачи: отбирая нечетное количество грибов, мы не можем уравнять количество белых и число остальных грибов. Итак, $x = 13$, $y = 12$ и $x+y = 25$.

5. Пусть X — такая точка прямой (AD), что прямая (XB) параллельна (AC) (рис. 104). В треугольнике XBD имеем: $|XB| = 3$, $|BD| = 4$, $\angle AXB = 2\angle BDA = 2\alpha$. Записывая для этого треугольника теорему синусов, получаем

$$\frac{4}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{3}{\sin\alpha} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

Легко заметить, что угол между диагоналями трапеции равен 3α. Вспоминая, что $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, находим $\cos 3\alpha = -22/27$ и $\sin 3\alpha = 7\sqrt{5}/27$. Поскольку площадь $ABCD$ равна $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\sin 3\alpha$ (формула справедлива для любого четырехугольника), искомое значение равно $14\sqrt{5}/9$.

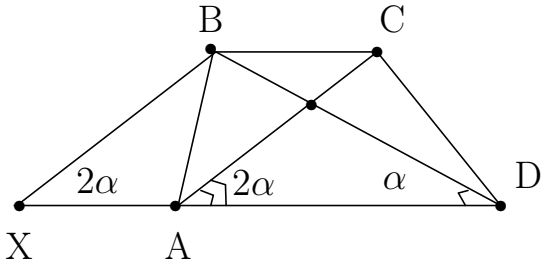


Рис. 104

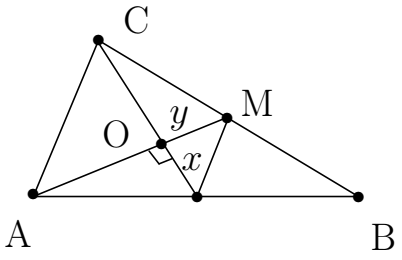


Рис. 105

6. Обозначим через O точку пересечения медиан треугольника ABC (рис. 105) и через x и y — длины отрезков $[OL]$ и $[OM]$ соответственно. Тогда $|OC| = 2x$, $|AO| = 2y$. Площадь треугольника AML составляет половину от искомой площади треугольника AMB. Поэтому $S_{AMB} = 2\cdot(3y)x/2 = 3xy$. Применяя теперь теорему Пифагора к треугольникам COM и AOC, получим

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = a^2/4, \\ 4x^2 + 4y^2 = b^2 \end{cases} \Longrightarrow x^2 = \frac{a^2-b^2}{12},\ y^2 = \frac{4b^2-a^2}{12} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow xy = \frac{\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}}{12}.$$

Отсюда $S_{AMB} = \sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}/4$.

7.5. Химико-биологический класс (июнь)

1. После несложных преобразований получаем

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{x(x-3)} \geqslant 0.$$

Дискриминант уравнения $x^2 - 2x + 6 = 0$ отрицателен, поэтому $x^2 - 2x + 6 > 0$ при всех $x \in R$. Решая неравенство $x(x-3) > 0$, получим $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.

2. ОДЗ данного неравенства является множество всех $x \leqslant 1/2$. Заметим, что $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x - 1|$. На ОДЗ $|2x - 1| = 1 - 2x$. В результате исходное уравнение преобразуется к виду $\sqrt{1 - 2x} = 4x - 1$. Возводим в квадрат обе части уравнения при $x \in [1/4; 1/2]$. Получаем $8x^2 - 3x = 0$. Условию $x \in [1/4; 1/2]$ удовлетворяет только корень $x = 3/8$.

3. Обозначим точку пересечения прямой (AM) со стороной $[CD]$ через K и через S — площадь данной трапеции. По условию площадь треугольника AKD равна $S/4$, поэтому площадь четырехугольника $ABCK$ равна $3S/4$. Треугольники ABC и ACD имеют одинаковую высоту, поэтому отношение их площадей равно $S_{ABC}/S_{ACD} = |BC|/|AD| = 4/8 = 1/2$. Отсюда $S_{ABC} = S/3$ и $S_{ACK} = S_{ABCK} - S_{ABC} = 3S/4 - S/3 = 5S/12$. Отношение площадей треугольников ACK и ADK (у них общая высота из точки A) равно $(5S/12) : (S/4) = 5/3 = |CK|/|KD|$. Треугольники CKM и AKD подобны, причем коэффициент подобия равен $5/3$. Значит $|CM| = 8 \cdot 5/3 = 40/3$.

4. Пусть O — центр масс треугольника ABC (т.е. точка пересечения его медиан). Пусть $|AM| = 18$, тогда $|AO| = 18 \cdot \frac{2}{3} = 12$. Из прямоугольного треугольника AOB находим $|BO| = 16$. Отсюда $S_{AOB} = 96$. Легко заметить, что площадь треугольника ABC в три раза больше площади треугольника AOB (так как высота из точки C в три раза больше дли-

ны перпендикуляра, опущенного из точки O на сторону $[AB]$). Поэтому $S_{ABC} = 288$.

5. Дискриминант данного уравнения равен $D = a^2((a+1)^2 - 4a) = a^2(a-1)^2$. Поэтому необходимо решить неравенство
$2x_2 = a(a+1)+|a(a-1)| > 1$. Раскрываем модуль отдельно на множестве $a \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty)$ и на промежутке $a \in (0; 1)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty), \\ a^2 + a + a^2 - a > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in (-\infty; 0] \cup [1; \infty), \\ a \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, \infty) \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup [1; \infty).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0; 1), \\ a^2 + a - a^2 + a > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \in (0; 1), \\ a \in (1/2, \infty) \end{array} \right. \Longrightarrow a \in (1/2; 1).$$

Объединяя найденные решения, получим $a \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup [1/2; \infty)$.

6. Введем несколько переменных. Пусть v_1, v_2, v_3 соответственно обозначают вместимость первой, второй и третьей колб, x — количество налитой в первую колбу воды. Тогда условия задачи можно переписать в виде системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 500, \\ v_1 = x + (300 - v_2/4), \\ v_2 = 300 + (150 - v_3/4), \\ v_3 = 150 + (x - 350) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 200 = x - v_2/4, \\ v_2 = 450 - v_3/4, \\ v_3 = x - 200. \end{array} \right.$$

Подставляя v_3 во второе уравнение последней системы и затем v_2 — в первое уравнение, получим $450 = 9x/8$. Отсюда $x = 400$ мл.

7.6. Психологический класс (июнь)

1. Корнями уравнения $x^2+4x+2 = 0$ являются числа $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Раскрываем модуль на множестве $x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}; \infty)$ и на интервале $x \in (-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}; \infty), \\ 3x^2 + 12x + 6 = 5x + 16 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty; -2 - \sqrt{2}] \cup [-2 + \sqrt{2}; \infty), \\ x = 1 \text{ или } x = -10/3 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 1.$$

Действительно, легко проверить, что $x = -10/3$ является посторонним корнем (предположив, что $-10/3 \leqslant -2 - \sqrt{2}$, мы быстро получаем противоречивое неравенство $2 \leqslant 16/9$). На оставшемся промежутке имеем

$$\begin{cases} x \in (-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}), \\ 3x^2 + 17x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}), \\ x = -2 \text{ или } x = -11/3 \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

Поэтому искомыми значениями являются $x = -2$ и $x = 1$.

2. ОДЗ данного неравенства являются все $x \geqslant -33$. На множестве $[-33; -3)$ левая часть неравенства отрицательна, поэтому неравенство выполняется. На множестве $[-3; \infty)$ возведем обе части неравенства в квадрат. Решая неравенство $x^2 + 5x - 24 < 0$ на множестве $x \in [-3; \infty)$, получим $x \in [-3, 3)$. Объединяя найденные решения, окончательно находим $x \in [-33, 3)$.

3. Пусть K, L, M, N — середины сторон некоторого четырехугольника $ABCD$ ($K \in [AB]$, $L \in [BC]$, $M \in [CD]$, $N \in [DA]$). Тогда отрезки $[KL]$ и $[MN]$, являясь средними линиями в треугольниках ABC и ADC, параллельны диагонали $[AC]$ и равны ее половине. Похожий результат справедлив для отрезков $[KN]$, $[LM]$ и диагонали $[BD]$. Согласно известной формуле, площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \sin\alpha$, где α — угол между диагоналями. Поэтому $S_{ABCD} = 2S_{KLMN}$. Отсюда площадь любого четырехугольника, серединами сторон которого являются точки K, L, M, N, равна удвоенному значению S_{KLMN}.

4. Искомое количество процентов обозначим через $x \cdot 100\,\%$. Тогда после первого повышения зарплата равнялась $1000000 + x \cdot 1000000 = 1000000(1+x)$, после второго — $1000000(1+x) + 1000000(1+x) \cdot x = 1000000(1+x)^2$. Решая уравнение $1000000(1+x)^2 = 1254400$, находим $x + 1 = 120/100$, т.е. искомое значение — 20%.

5. Будем считать, что МХ — число мальчиков, хорошо сдавших экзамен в психологический класс. Похожим образом введем сокращения МП, ДХ и ДП. Рассмотрим два случая: $\text{МХ} \neq 0$ и $\text{МХ} = 0$.

Первый случай. $\text{МХ} \neq 0$. Если $\text{ДП} \neq 0$, то утверждение доказано. Пусть теперь $\text{ДП} = 0$. Следовательно, $\text{МП} \neq 0$ (иначе все сдали экзамен хорошо). Таким образом, $\text{ДХ} \neq 0$ и $\text{МП} \neq 0$, что также доказывает утверждение.

Второй случай. МХ $= 0$. Значит, МП $\neq 0$ и ДХ $\neq 0$ (иначе все сдали экзамен плохо). Поскольку одновременно МП $\neq 0$ и ДХ $\neq 0$, утверждение также справедливо.

9.8. Экзамены 1998 года

8.1. Физико-математический класс (май)

1. ОДЗ этого неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих системе (модуль сразу раскрываем благодаря первому условию системы)

$$\begin{cases} x \geqslant -10, \\ |x+14| - 2x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant -10, \\ 14 - x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in [-10;14) \cup (14;\infty).$$

Решая неравенство методом интервалов, найдем нули числителя. При $x \geqslant 0$ возведем в квадрат обе части уравнения $\sqrt{x+10} = 3x$. Единственным неотрицательным корнем уравнения $9x^2 - x - 10 = 0$ является $x = 10/9$. Определяя знаки выражения $(\sqrt{x+10} - 3x)/(14-x)$ на промежутках $(-10;10/9)$, $(10/9;14)$, $(14;\infty)$, находим, что искомым множеством является интервал $(10/9;14)$.

2. Пусть площадь параллелограмма $AKML$ ($K \in [AB]$, $L \in [AC]$) равна $5S/18$, где S — площадь треугольника ABC (рис. 106). Обозначим через S_1 и S_2 соответственно площади треугольников KBM и CML, а через k — отношение $|BM|/|MC|$ (т.е. коэффициент подобия треугольников KBM и CML). Определим k. Заметим, что отношение площадей треугольников KBM и AKL равно отношению их оснований (одинаковая высота к прямой (AB)), т.е. $S_1/S_{AKL} = |BK|/|AK| = |BK|/|ML| = k$. Аналогично получаем, что $S_2/S_{AKL} = |CL|/|AL| = |CL|/|KM| = 1/k$. Очевидно, что $S_1 + S_2 = 13S/18$, поэтому

$$\frac{S_1+S_2}{S_{AKML}} = \frac{13}{5} = \frac{S_1}{2S_{AKL}} + \frac{S_2}{2S_{AKL}} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2k}.$$

Решая квадратное уравнение $5k^2 - 26k + 5 = 0$, находим $k_1 = 1/5$ и $k_2 = 5$.

3. При $x \neq -1$ получаем уравнение $|x+2| - x - 2 = 0$. Раскрывая

модуль на промежутках $(-\infty;-2)$ и $[-2;\infty)$, получим

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-2), \\ -x-2-x-2=0 \end{cases} \Longrightarrow x\in\varnothing;$$

$$\begin{cases} x\in[-2;\infty),\ x\neq -1, \\ x+2-x-2=0 \end{cases} \Longrightarrow x\in[-2;\infty),\ x\neq -1.$$

В результате $x\in[-2;\infty)$, $x\neq -1$.

4. Дискриминант данного квадратного уравнения (если $a\neq 1$) равен $D=9-4(a-1)(a+2)=17-4a^2-4a$. Условие $D>0$ выполняется, если $a\in\Big((-1-3\sqrt{2})/2;(-1+3\sqrt{2})/2\Big)$. Используя теорему Виета, приходим к системе

$$\begin{cases} D>0, \\ x_1+x_2=\frac{3}{a-1}>0, \\ x_1\cdot x_2=\frac{a+2}{a-1}>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a\in\left(\frac{-1-3\sqrt{2}}{2};\frac{-1+3\sqrt{2}}{2}\right),\ a\neq 1, \\ a>1, \\ a\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a\in\left(\frac{-1+3\sqrt{2}}{2};1\right).$$

Корни различны и положительны, если $a\in\Big((-1+3\sqrt{2})/2;1\Big)$.

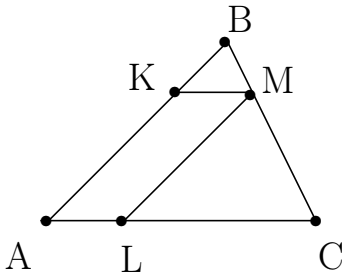


Рис. 106

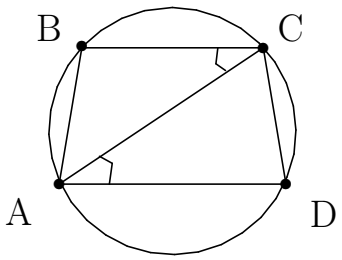


Рис. 107

5. Пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность (рис. 107). Углы $\angle ACB$ и $\angle CAD$ равны между собой (они являются накрест лежащими). Поскольку эти углы равны и вписаны в одну окружность, то равны между собой хорды, на которые опираются эти углы, т.е. $[AB]=[CD]$.

Предположим теперь, что трапеция равнобедренная, тогда из двух равенств $\angle B=\angle C$ и $\angle A+\angle B=180^\circ$ следует, что $\angle A+\angle C=180^\circ$. Это означает, что вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

8.2. 11 физико-математический класс (май)

1. Преобразуем подкоренные выражения: $x-1+2\sqrt{x-2}=$ $x-2+2\sqrt{x-2}+1=(\sqrt{x-2}+1)^2$, $x-1-2\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}-1)^2$. Поскольку ОДЗ данного неравенства являются все $x\geqslant 2$, умножив на x обе части неравенства, приходим к равносильному на ОДЗ неравенству

$$|\sqrt{x-2}+1|-|\sqrt{x-2}-1|\leqslant x.$$

Первое подмодульное выражение положительно, поэтому рассмотрим только два случая: $\sqrt{x-2}\geqslant 1$ и $\sqrt{x-2}<1$.

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x-2}\geqslant 1,\\ \sqrt{x-2}+1-\sqrt{x-2}+1\leqslant x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x\geqslant 3,\\ x\geqslant 2\end{array}\right. \iff x\geqslant 3.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{x-2}<1,\\ \sqrt{x-2}+1+\sqrt{x-2}-1\leqslant x\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x<3,\ x\geqslant 2\\ x^2-4x+8\geqslant 0\end{array}\right. \iff x\in[2;3).$$

Объединяя решения, получим $x\in[2;\infty)$.

2. Дискриминант данного квадратного уравнения равен $D=p^2-4q$. Докажем, что при условии $q\leqslant -3-p/2$ дискриминант положителен (т.е. $4q<p^2$). Поскольку $4q\leqslant -12-2p$, достаточно проверить, что $-12-2p<p^2$ справедливо при всех p. Последнее очевидно, так как неравенство $p^2+2p+12>0$ выполняется при всех p. Итак, при условии $2q+p+6\leqslant 0$ уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два корня.

3. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке) с отрицательной разностью, если одновременно выполняются условия $(a_1+a_3)/2=a_2$ и $a_2-a_1<0$. Решаем систему

$$\left\{\begin{array}{l}\sin x+\sin 3x=\sin 2x,\\ \sin 2x-2\sin x<0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\sin x\cos x(2\cos x-1)=0,\\ 2\sin x(\cos x-1)<0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x\in\left\{\frac{\pi}{2}k:\ k\in Z\right\}\cup\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k:\ k\in Z\right\},\\ \sin x>0,\ \cos x\neq 1\end{array}\right. \iff$$

$$\iff x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k:\ k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k:\ k\in Z\right\}.$$

4. Обозначим через x количество белых, через y — количество черных шаров. Тогда $2x=3y$ и $x+y\leqslant 55$. Поскольку $4/3<3/2$, белых

шаров из урны вынули больше. Стало быть, либо $(x-3)/(y-1)=4/3$, либо $(x-4)/y=4/3$. Решая системы

$$\begin{cases} 2x=3y, \\ 3x-9=4y-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x=3y, \\ 3x-12=4y, \end{cases}$$

находим $x=15$, $y=10$ или $x=36$, $y=24$. Условию $x+y\leqslant 55$ удовлетворяет только пара $x=15$, $y=10$.

5. Опустим перпендикуляры $[OL]$ и $[OK]$ на стороны $[AB]$ и $[CD]$ соответственно (рис. 108). Достаточно доказать равенство треугольников AOL и COK. Поскольку гипотенузы этих треугольников равны радиусу окружности, докажем равенство $\angle BAO=\angle COK$. Заметим, что $\angle COK=\frac{1}{2}\angle COD=\angle CAD$, поэтому осталось доказать равенство $\angle OAD=\angle BAC$. Обозначим величину угла $\angle OAD$ через α, тогда $\angle ACD=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}(180^\circ-2\alpha)=90^\circ-\alpha$. Цепочка равенств $\angle BAC=90^\circ-\angle ABD=90^\circ-\angle ACD=\alpha$ завершает доказательство.

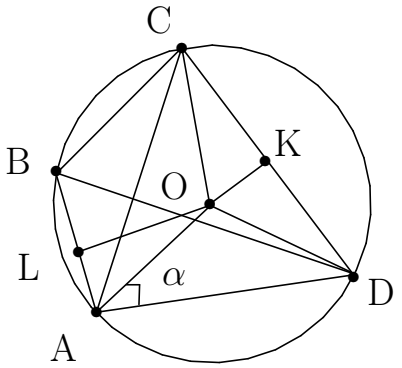


Рис. 108

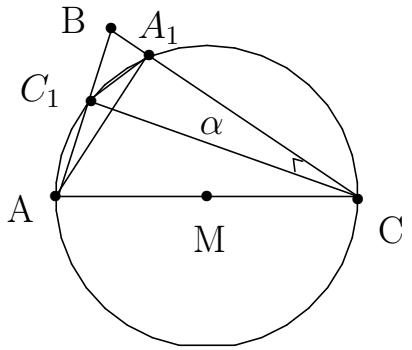


Рис. 109

6. Очевидно, что величина угла $\angle ABC$ равна $90^\circ-\alpha$. Найдем длину отрезка $[A_1C_1]$. Пусть M — середина отрезка AC (рис. 109). Для этого сначала заметим, что точки A_1 и C_1 лежат на окружности с центром M и радиусом $1/2$ (так как отрезок $[AC]$ — диаметр этой окружности). Применив теорему синусов к треугольнику CA_1C_1, получим $|A_1C_1|/\sin\alpha=2\cdot\frac{1}{2}=1$. Отсюда $|A_1C_1|=\sin\alpha$. Теперь найдем R — радиус искомой окружности. Снова используя теорему синусов, но уже к треугольнику BA_1C_1, получаем $2R=|A_1C_1|/\sin(90^\circ-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому искомая площадь равна $\pi R^2=\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$.

8.3. Химико-биологический и психологический классы (май)

1. Обозначив через $t=\sqrt{x}$, приходим к уравнению $|t-2|+|1-t|=1$. Теперь рассмотрим три случая:

$$\begin{cases} t<1, \\ 2-t+1-t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow t\in\varnothing;$$

$$\begin{cases} 1\leqslant t\leqslant 2, \\ 2-t-1+t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow t\in[1;2];$$

$$\begin{cases} t>2, \\ t-2+t-1=1 \end{cases} \Longleftrightarrow t\in\varnothing.$$

В результате $t\in[1;2]$. Решив неравенство $1\leqslant\sqrt{x}\leqslant 2$, получим, что $x\in[1;4]$.

2. Поскольку неравенство $t^2\leqslant 1$ равносильно $-1\leqslant t\leqslant 1$, преобразуем данное неравенство к виду

$$-1\leqslant x+1+\frac{3}{2-x}\leqslant 1\Longleftrightarrow 0\leqslant x+2+\frac{3}{2-x}\leqslant 2\Longleftrightarrow\begin{cases}\frac{7-x^2}{2-x}\geqslant 0,\\ \frac{3+2x-x^2}{2-x}\leqslant 0.\end{cases}$$

Каждое неравенство системы решаем методом интервалов. Их решения изображены на рис. 110. Общим решением этих неравенств будет множество $[-\sqrt{7};-1]\cup[\sqrt{7};3]$.

3. Сразу разберем случай, когда данное неравенство не является квадратным. При $a=1$ получим $x>-5/4$, что противоречит условию задачи. При $a\neq 1$ рассмотрим квадратичную функцию $f(x)=(a-1)x^2-4x-(a+4)$. Из свойств квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом заключаем, что при $a>1$ неравенство $f(x)<0$ не может выполняться на неограниченном множестве (т.е. сразу при всех $x\leqslant 0$). Поэтому $a<1$. Дискриминант уравнения $f(x)=0$ равен $D=4a(a+3)$. Заметим, что если $D<0$ и $a<1$, то неравенство $f(x)<0$ выполняется сразу для всех $x\in R$, поэтому $a\in(-3;0)$ удовлетворяют условиям задачи. Если же $D\geqslant 0$ и $a<1$, решением неравенства $f(x)<0$ являются $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $f(x)=0$. Множество $(-\infty;0]$ содержится

в $(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$, если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. По теореме Виета корни уравнения $f(x) = 0$ положительны, если одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} D > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{4}{a-1} > 0, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{a+4}{a-1} > 0. \end{cases}$$

Нет необходимости решать систему, поскольку условие $a < 1$ противоречит второму неравенству системы. Итак, при $a < 1$ система не имеет решений. Ответом будет множество $a \in (-3; 0)$.

4. В 600 г 2%-го раствора содержится 12 г соли, а в 300 г 5%-го раствора — 15 г. Их сумма — 27 г — составляет 1% в 2700 г раствора. Поэтому необходимо добавить 1600 г дистиллированной воды.

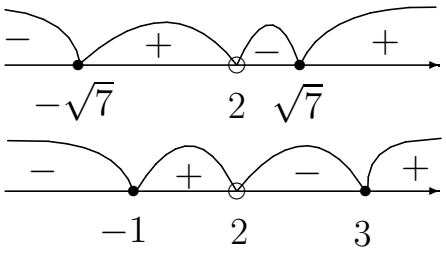


Рис. 110

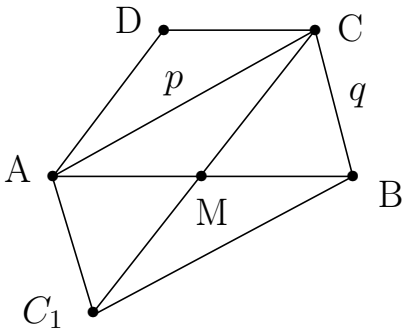


Рис. 111

5. Пусть M — середина основания $[AB]$ (рис. 111). Тогда $ADCM$ — ромб (прямые (AB) и (DC) параллельны, и $|AM| = |DC| = |AD|$), а отрезок $[CM]$ является медианой в треугольнике ACB. Обозначим через C_1 точку, симметричную точке C относительно точки M (т.е. M — середина отрезка $[CC_1]$). В четырехугольнике $ACBC_1$ диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $ACBC_1$ — прямоугольник со сторонами p и q. Его площадь равна pq. Отсюда площадь треугольника CBM равна $pq/4$. Поскольку $S_{CBM} = S_{ACM} = S_{ACD}$, площадь трапеции равна $3pq/4$.

8.4. Гуманитарный класс (май)

1. После очевидных преобразований приходим к

$$\frac{3x(x-2) + 2 + (3x-1)(x+2)}{x^2-4} = 0 \Longleftrightarrow \frac{6x^2 - x}{x^2-4} = 0.$$

Корнями последнего уравнения являются $x = 0$ и $x = 1/6$.

2. а) Корнями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ являются $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Поэтому решением неравенства $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ является промежуток $[1; 3]$.

б) Записывая данное неравенство в виде $x^2 \leqslant 25$, приходим к $|x| \leqslant 5$. Решением последнего неравенства будут все $x \in [-5; 5]$.

3. $(3cb^2 - 2\sqrt{a})^2 = 9c^2b^4 - 12cb^2\sqrt{a} + 4a.$

4. Если $a \neq 0$, то $b - 3 = m/(3a)$, поэтому $b = (9a + m)/3a$. Если же $a = 0$, то при $m = 0$ переменная b может принимать любые значения, а при $m \neq 0$ решений нет.

5. Координаты вершины параболы $y = (x - 1)^2 - 1$ равны $x_0 = 1$ и $y_0 = -1$. Числа $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ являются корнями уравнения $(x - 1)^2 - 1 = 0$. График искомой функции изображен на рис. 112.

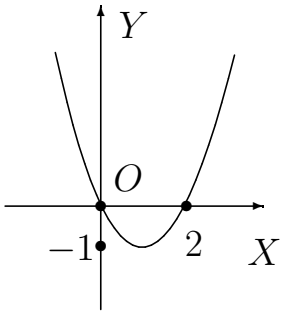


Рис. 112

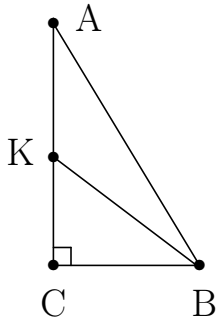


Рис. 113

6. Пусть $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $|BC| = 4$, K — середина $[AC]$ (рис. 113). Тогда $\angle A = 30°$ и $|AB| = 8$. По теореме Пифагора $|AC| = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. Отсюда $|CK| = 2\sqrt{3}$. Применяя теорему Пифагора уже к треугольнику BCK, находим $|BK| = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}$. Площадь ABC равна $8\sqrt{3}$.

8.5. Физико-математический класс (июнь)

1. а) Преобразуем $f_1(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \sqrt{(x - a)^2} + x = |x - a| + x = \begin{cases} a, & x < a; \\ 2x - a, & x \geqslant a. \end{cases}$$

График этой функции при $a = 1$ изображен на рис. 114.

б) Сразу отметим, что графики функций $y = kx + b$ и $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) пересекаются в единственной точке тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $kx + b = ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень. Используя представление f_1 из 1 a, приравняем

дискриминант уравнения $a = 6x - x^2 - 6$ к нулю. Из уравнения $36 - 24 - 4a = 0$ получаем $a = 3$. Проделав то же самое с уравнением $2x - a = 6x - x^2 - 6$, найдем $a = 2$. Нетрудно убедиться, что эти значения параметра удовлетворяют условиям задачи.

2. Достаточно доказать, что это число $A = 12^{42} + 9^{42}$ делится на 3 и на 5. Первое очевидно, поскольку 12 и 9 кратны трем. Проверим теперь, что A оканчивается на 5. Из представления $12^{42} = 144^{21} = 144^{20} \cdot 144$ заключаем, что последней цифрой 12^{42} является 4 (144^{20} оканчивается на 6). Последняя цифра числа $9^{42} = 81^{21}$ равна 1. Поэтому сумма 12^{42} и 9^{42}, т.е. число A, кратно 5. Утверждение доказано.

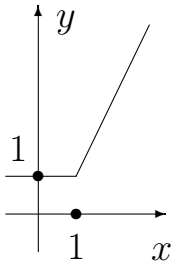


Рис. 114

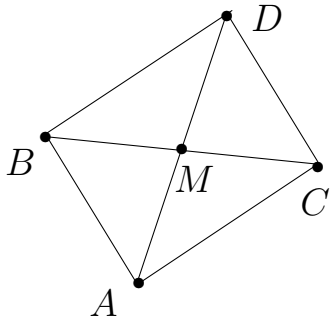


Рис. 115

3. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC и $|AB| = 6$, $|AC| = 8$ и $|AM| = 5$. Достроим данный треугольник до параллелограмма $ABDC$ (рис. 115). Из равенства треугольников AMC и BMD получаем $S_{ABC} = S_{ABD}$. Треугольник ABD прямоугольный, поскольку $6^2 + 8^2 = 10^2$. Отсюда искомая площадь равна 24.

4. ОДЗ этого неравенства составляют отличные от нуля решения неравенства $24 - 2x - x^2 \leqslant 0$, т.е. ОДЗ есть множество $[-6; 0) \cup (0; 4]$. Теперь заметим, что при отрицательных x левая часть данного неравенства отрицательна, поэтому неравенство выполняется. Для $x \in (0; 4]$ исходное неравенство преобразуется к виду $24 - 2x - x^2 \leqslant x^2$. Отсюда $x \in [3; 4]$. Ответ: $x \in [-6; 0) \cup [3; 4]$.

5. Первым своим ходом первый игрок должен уравнять количество камней в кучках, т.е. взять два камня из второй кучки. Затем на любой ход соперника он должен отвечать "симметричным" ходом — брать столько же камней, сколько и соперник, но только из другой кучки. Нетрудно заметить, что эта стратегия обеспечит выигрыш первого игрока при

условии, если второй игрок за каждый свой ход будет брать ненулевое количество камней из какой-либо кучки.

6. Первая координата вершины параболы $f(x) = x^2 - 2ax - 3a$ равна $x_0 = a$. Из свойств квадратичной функции условие $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[3; 6]$ равносильно совокупности трех систем:

$$\begin{cases} a \leqslant 3, \\ f(3) = 9 - 9a \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 < a < 6, \\ D = 4a^2 + 12a \leqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \geqslant 6, \\ f(6) = 36 - 15a \geqslant 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является множество $(-\infty, 1]$. Вторая и третья системы решений не имеют.

8.6. Математико-экономический класс (июнь)

1. а) Поскольку $f_1(x) = \sqrt{(x + 2a)^2} = |x + 2a|$, осталось изобразить график функции $y = |x + 2|$ (рис. 116).

б) Легко заметить, что неравенства $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \leqslant 0$ выполняются при всех $x \in R$. Поэтому графики этих функций пересекаются, если одновременно $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$, т.е. $x = -2a$ и $x = 1$. Отсюда $a = -1/2$. Очевидно, что при этом значении параметра графики пересекаются только в одной точке.

2. Пусть $A = 36^{47} + 24^{21}$, тогда достаточно доказать, что A делится на 3 и на 5. Первое очевидно, так как 36 и 24 делятся на 3. Докажем теперь, что последняя цифра A — ноль. Число 36^{47} оканчивается на 6, а последней цифрой числа $24^{21} = 24 \cdot 24^{20} = 24 \cdot 576^{10}$ является 4. Поэтому A оканчивается на 0.

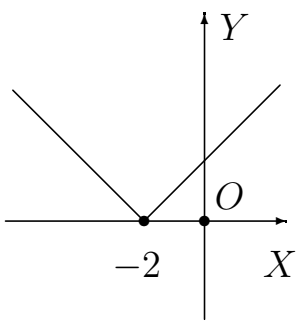


Рис. 116

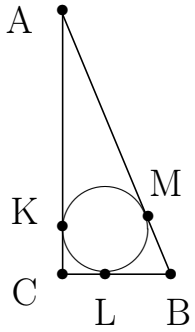


Рис. 117

3. Обозначим через M точку касания вписанной окружности с гипотенузой (рис. 117), а через K и L — точки касания вписанной окружности с катетами ($K \in [AC]$, $L \in [BC]$). Пусть $|AM| = 12$, $|BM| = 5$ и r — радиус вписанной окружности. Тогда $|AC| = 12+r$ и $|BC| = 5+r$. Из теоремы Пифагора получаем $17^2 = (12+r)^2 + (5+r)^2$. Единственным неотрицательным корнем уравнения $r^2 + 17r - 60 = 0$ является $r = 3$. Отсюда $|AC| = 15$, $|BC| = 8$ и площадь ABC равна 60 см^2.

4. ОДЗ данного неравенства составляют все $x \in (-\infty, -3] \cup [8, \infty)$. Сразу заметим, что при $x \leqslant -3$ левая часть неравенства отрицательна, поэтому на множестве $(-\infty, -3]$ нет решений. На множестве $x \in [8, \infty)$ обе части неравенства можно умножить на $x+2$ и возвести в квадрат. После несложных преобразований приходим к неравенству $9x \leqslant -28$, которое не имеет решений на множестве $[8, \infty)$. Итак, решений нет.

5. Обозначим соответственно через $m_{\text{печ}}$, $m_{\text{в}}$, $m_{\text{пр}}$, $m_{\text{л}}$, $m_{\text{т}}$ массы коробок с печеньями, вафлями, пряниками и самой легкой и самой тяжелой коробок. Тогда условия задачи можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 4m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}} = 5m_{\text{в}}, \\ m_{\text{л}} + m_{\text{т}} + m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 7m_{\text{печ}}, \\ m_{\text{т}} - m_{\text{л}} = 2. \end{cases}$$

Заметим сразу, что из первого уравнения системы следует, что $m_{\text{в}} \neq m_{\text{т}}$ и $m_{\text{в}} \neq m_{\text{л}}$, поэтому $m_{\text{л}} + m_{\text{т}} = m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}}$ и второе уравнение превращается в уравнение $2m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 6m_{\text{печ}}$. Из только что полученного уравнения следует, что $m_{\text{печ}} = m_{\text{л}}$. Это означает, что $m_{\text{пр}} = m_{\text{т}}$ и $m_{\text{пр}} - m_{\text{печ}} = 2$. Решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4m_{\text{печ}} + m_{\text{пр}} = 5m_{\text{в}}, \\ 2m_{\text{пр}} + 3m_{\text{в}} = 6m_{\text{печ}}, \\ m_{\text{пр}} - m_{\text{печ}} = 2 \end{cases}$$

является тройка $m_{\text{печ}} = 5,2$ кг, $m_{\text{в}} = 5,6$ кг, $m_{\text{пр}} = 7,2$ кг.

6. Пусть $f(x) = x^2 + ax - 7a$. Первая координата вершины параболы $y = f(x)$ равна $x_0 = -a/2$, а дискриминант уравнения $f(x) = 0$ равен $D = a^2 - 28a$. Из свойств квадратичной функции с положительным старшим коэффициентом следует, что отрезок $[1;2]$ содержится во множестве решений, если выполняется хотя бы одна из трех систем:

$$\begin{cases} -a/2 < 1, \\ f(1) = 1 - 6a > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \leqslant -a/2 \leqslant 2, \\ D = a^2 - 28a < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 < -a/2, \\ f(2) = 4 - 5a > 0. \end{cases}$$

Решением первой системы являются все $a \in (-2; 1/6)$, вторая система не имеет решений, а решение последней — это множество всех $a \in (-\infty; -4)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; 1/6)$.

8.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. ОДЗ данного неравенства являются все x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0, \\ 2x + \sqrt{16 - x^2} \geqslant 0, \\ 2x + 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Пересечением решений первого и третьего неравенств является множество $[-2; 4]$. Возводя в квадрат на множестве $[-2; 0]$ неравенство $\sqrt{16 - x^2} \geqslant -2x$, получаем $5x^2 \leqslant 16$, отсюда $x \in [-4\sqrt{5}/5; 0]$. Решаем данное неравенство на множестве $[-4\sqrt{5}/5; 4]$. Дважды возводя в квадрат исходное неравенство, приходим к неравенству $-x^2 < 0$, решением которого являются все $x \neq 0$. Ответ: $x \in [-4\sqrt{5}/5; 4]$, $x \neq 0$.

2. Обозначим через $f(x) = x^2 + 2px + p^2 + 3p$. Первая координата вершины параболы $y = f(x)$ равна $x_0 = -p$. Вторая — $y_0 = f(x_0) = 3p$. Поэтому $y_0 = -3x_0$. Итак, вершины данного семейства парабол составляют на плоскости (XOY) прямую $y = -3x$.

3. Абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 - 2x + a$ равна $x_0 = 1$, ордината — $y_0 = f(x_0) = a - 1$. Поэтому множеством значений $f(x)$ будет луч $[a-1, \infty)$. Область определения $y = \sqrt{2x - a}$ — это множество $x \geqslant a/2$. Множества $[a-1, \infty)$ и $[a/2, \infty)$ совпадают, если $a - 1 = a/2$, т.е. $a = 2$.

4. См. **7.6**, решение задачи 3.

5. Пусть O — середина гипотенузы $[AB]$ (центр описанной окружности) и точки P и Q — пересечение отрезков $[OE]$ и $[OF]$ с катетами треугольника (рис. 118). Докажем, что P и Q являются серединами этих сторон. Действительно, поскольку точка E является серединой дуги AC, выполняется $\angle COP = \angle AOP$, это означает, что $[OP]$ — биссектриса (и медиана) в треугольнике AOC. Аналогично Q — середина $[BC]$. Отсюда $[OP]$ и $[OQ]$ — средние линии треугольника ABC, поэтому $\angle FOE = 90^\circ$ и $\angle OFE = \angle OEF = 45^\circ$. Из равенств $|OF| = 6,5$ и $|OQ| = 2,5$ следует, что $|FQ| = 4$. Осталось заметить, что $|CK| = |CM| = |CQ| - |QM| = |CQ| - |FQ| = 6 - 4 = 2$. В результате площадь четырехугольника $ABKM$ равна $S_{ABC} - S_{CMK} = 30 - 2 = 28$.

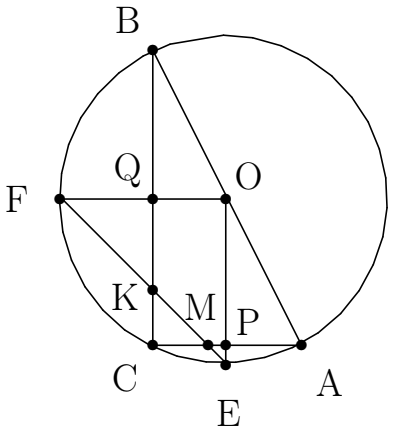


Рис. 118

6. Обозначим через v_1 и v_2 количество воды в первой и второй бочках в начальный момент времени, и через x — количество воды, которую перелили из первой бочки в первый раз. Найдем v_1/v_2. Условия задачи можно записать в виде системы

$$\begin{cases} v_1 - x = 3(v_2 + x), \\ v_1 - 2x = 2(v_2 + 2x) \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 - 3v_2 = 4x, \\ v_1 - 2v_2 = 6x. \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, приходим к $(v_1 - 3v_2)/(v_1 - 2v_2) = 2/3$. Отсюда $v_1 = 5v_2$, т.е. $v_1/v_2 = 5$.

8.8. Химико-биологический и психологический классы (июнь)

1. При $x \geqslant -1$ получим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 2 = 0$. Его корнями являются $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$. Условию $x \geqslant -1$ удовлетворяет только $x = -2 + \sqrt{6}$. Теперь раскроем модуль при $x < -1$. Получим $x^2 - 4 = 0$. Условию $x < -1$ удовлетворяет $x = -2$. Ответ: $x = -2 + \sqrt{6}$ или $x = -2$.

2. Поскольку дискриминант уравнения $x^2 + x + 3 = 0$ отрицателен, выражение $x^2 + x + 3$ всегда положительно. Поэтому достаточно решить неравенство $1 - x > 0$. Ответ: $x < 1$.

3. а) Обозначив через $t = \sqrt{x}$, определим, при каких значениях параметра a уравнение $t^2 - 2at + 3a - 2 = 0$ имеет два различных неотрицательных корня. По теореме Виета получаем

$$\left\{\begin{array}{l} D = 4a^2 - 12a + 8 > 0, \\ t_1 + t_2 = 2a \geqslant 0, \\ t_1 \cdot t_2 = 3a - 2 \geqslant 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty), \\ a \geqslant 0, \\ a \geqslant 2/3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow a \in [2/3; 1) \cup (2; \infty)$.

б) Преобразуем данное неравенство к виду $(a^2-4)x > a-2$. Заметим, что при $a = 2$ это неравенство не имеет решений, а при $a = -2$ оно выполняется при всех $x \in R$. Теперь рассмотрим два случая: $a^2 - 4 > 0$ и $a^2 - 4 < 0$.

При $a^2 - 4 > 0$ (т.е. при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$) получим $x > (a-2)(a^2-4) = 1/(a+2)$.

При $a^2 - 4 < 0$ (т.е. при $a \in (-2; 2)$) получим $x < (a-2)(a^2-4) = 1/(a+2)$.

4. Обозначив через $5x$ длину $[AD]$, сразу приходим к равенствам $|BD| = 8x$ и $|AC| = 5x$. Из теоремы Пифагора следует соотношение $12^2 + (5x)^2 = (5x + 8x)^2$, неотрицательным корнем которого является $x = 1$. Итак, радиус окружности равен 5.

5. Обозначим через x, y и z количество детей, которые нашли соответственно 3, 7 и 9 грибов. Тогда условия задачи можно записать в виде системы

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 7y + 9z = 85, \\ x + y + z = 10. \end{array}\right.$$

Выразим x из второго уравнения и подставим полученное значение в первое уравнение системы. Получим $4y + 6z = 55$. Это уравнение не выполняется ни при каких x и y, так как числа в правой и левой части этого уравнения отличаются четностью.

Глава 10

Ответы

10.1. 1991 год

1.1. Физико-математический класс (март)

2. $a \in (-\infty, 3-\sqrt{11}] \cup [3+\sqrt{11}, \infty)$.

1.2. Физико-математический класс (май)

2. 6 см. **3.** $p = 3$.

1.3. Физико-математический класс (июнь)

2. 5 см. **3.** $x \in (-\infty, -5) \cup (0, 5)$.

1.4. Естественно-научные классы (май)

1. $\pi R^2/3$. **2.** $a-2$, если $a \geqslant 1$; $-a$, если $a < 1$.
4. $x_{1,2} = (-9 \pm \sqrt{65})/4$.

10.2. 1992 год

2.1. Физико-математический класс (май)

1. а) $\frac{1}{a+b}$; б) $3/p$, если $p \leqslant -3$; $p/3$, если $-3 < p \leqslant 3$; $3/p$, если $p > 3$; в) нет; г) $a < 0, b < 0, c = 0$. **2.** а) (a)Нет, (b)нет, (c)да; б) (a) нет, (b) нет, (c) да; в) решение единственно; г) $m > n$ и $P_m > P_n$. **3.** а) (b) и (d); б) (d). **4.** а) $a \in (-\infty, -6) \cup (4, \infty)$; б) $x = -5$ и $x = 1$. **5.** а) $2\sqrt{5}$; б) данные точки не лежат на одной прямой; в) $3\frac{1}{8}$. **6.** $a \in (-\infty, 0] \cup (1/2, \infty)$.

2.2. Физико-математический класс (июнь)

1. а) $(-\infty, 3-\sqrt{6}]\cup[3+\sqrt{6}, \infty)$; б) $(-\infty, -3-\sqrt{6}]\cup[-3+\sqrt{14}, \infty)$; в) $(-\infty, -3-\sqrt{6}]\cup[-5, -1]\cup[3-\sqrt{12}, \infty)$. 2. а) Две точки пересечения; б) $k_1 = -4-2\sqrt{5}, k_2 = -4+2\sqrt{5}$; в) $y = 14x - 78$. **3.** а) $a = 1$; б) $a = 2$; в) длина $= 12$ и ширина $= 8$. **4.** а) $3 \cdot 32^2$; б) 200; в) $\frac{48\cdot 8^2(8^{1000}-1)}{8^5-1}$. **5.** а) 2α; г) $3R^2\sqrt{3}/4$.

2.3. Естественно-научные классы (июнь)

1. а) $1-y$; б) $2-\sqrt{2}$. **2.** $2:5$. **4.** а) $x = 2/(b-3), b \neq 3$; б) $x = 2$, $x = 2 \pm \sqrt{5}$. **5.** а) $(-\infty, -3)\cup(3, \infty)$; б) $x \leqslant 1$. **6.** а) $\cos\widehat{C} = 11/30$.

2.4. 11 физико-математический класс (июнь)

2. $(-5, 2), (3, 2)$. **5.** $x \in (0, 1/(1-a))$. **6.** $x = 240$.

2.5. Историко-филологический класс (июнь)

1. $1/(z-4)$. **2.** $3/(x-3)$. **4.** Три точки пересечения. **5.** $x \in (-\infty, -3)\cup(3, \infty)$. **6.** $10\sqrt{3}$ см^2. **7.** 18 км/ч.

2.6. Философско-экономический класс (июнь)

1. а) $y-4$; б) $\sqrt{3}-1$. **2.** $x = 20\%$. **4.** а) $x = 3/(2+a)$, если $a \neq -2$; нет решений при $a = -2$; б) $x = -2, x = 1$. **5.** а) $x \in (-\infty, -1)\cup(1, \infty)$; б) $x \in [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]\cup[1, \infty)$. **6.** $p\sin\beta/\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})$.

10.3. 1993 год

3.1. Физико-математический класс (февраль)

1. (a) $[-3, -2]\cup[1, 3]$. **2.** $37/72$. **3.** (a) $(-\infty, -2]\cup[0, \infty)$; (b) $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$.

3.2. Физико-математический класс (май)

2. Нет. **3.** $0, 9$. **4.** $a = 3$. **5.** (a) Нет решений при $a < 0$ или $a > \sqrt{2}$; два решения при $a = 0$ или $a = \sqrt{2}$; четыре решения, если

$0 < a < \sqrt{2}$;

(b) $a < 0, a > \sqrt{2}$ решений нет;
$a = 0$ $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$;
$a = \sqrt{2}$ $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$;
$0 < a < \sqrt{2}$ $(\frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2})$, $(\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} \frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2})$,
$(\frac{a-\sqrt{2-a^2}}{2}, \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2})$, $(\frac{a+\sqrt{2-a^2}}{2} \frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2})$.

3.3. Физико-математический класс (июнь)

2. $a = -2$. **3.** а) $y = 13x - 41$; б) $y = \frac{4}{3}x + 7$ и $y = -\frac{4}{3}x + 7$. **4.** 1. **5.** $a = 4$.

3.4. Естественно-научные классы (июнь)

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, k \neq 0$. **2.** $x \leqslant -1/2$. **3.** $a < -8$ или $a > 8$. **4.** $\cos\alpha = 1/6$.

3.5. Экономический класс (июнь)

2. $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2] \cup [3, \infty)$. **3.** $-\sin\alpha \sin 2\alpha$. **4.** 10%. **5.** $-6 \leqslant k \leqslant 3$. **6.** $h = 4$.

3.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. **2.** $a < 0$. 3. $-(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

4. $$\frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}.$$

5. 60 км/ч.

10.4. 1994 год

4.1. 8 класс (май)

1. 27. **2.** 6. **3.** $-\frac{11}{50}$. **4.** а) 25 р.; б) $16\frac{2}{3}$%. **5.** а) $b = -5$; б) $b = 50$; в) $b < 0$; г) $b = 0$. **6.** 3. **7.** $x = -3$. **8.** $2(2-x-1/x)$. **9.** $-10\frac{2}{3}$. **10.** $a+3x-y$. **11.** а) $-\frac{27a^7b^7}{4}$; б) $\frac{a-1}{2a}$.

12. а) $p=-1, m=2$; б) $a=2, b=0, c=-1$. **15.** Коля догонит Васю через 4 мин.

4.2. 9 класс (1-й тест, май)

1. a. **2.** d. **3.** e. **4.** c. **5.** c. **6.** b. **7.** a. **8.** b,c. **9.** a,c,d. **10.** a. **11.** c. **12.** b. **13.** b. **14.** c. **15.** Свой ответ: $x=\pm 1$, $x=\pm 5$. **16.** а) d; б) b; в) свой ответ: $x>5, x<-5$; г) c. **17.** а) b; б) d. **18.** e. **19.** b. **20.** c. **21.** a. **22.** b. **23.** c. **24.** d. **25.** b. **26.** a. **27.** c. **28.** a. **29.** d. **30.** d. **31.** $a>0, c>0, b<0$.

4.3. 9 класс (2-й тест, май)

1. 2. **3.** Володя — "5", Саша — "4", Андрей — "3". **5.** $3, 3, 8$.

4.4. Физико-математический класс (июнь)

1. а) $x=-4$. **3.** $1/5$. **4.** $a=0, a=1, a=1/2$. **5.** Если $a\leqslant 0$, то $x\in(-\infty, 2a]\cup(a, 1]$; если $0<a\leqslant 1/2$, то $x\in(-\infty, a)\cup[2a, 1]$; если $1/2<a\leqslant 1$, то $x\in(-\infty, a)\cup[1, 2a]$; если $a>1$, то $x\in(-\infty, 1)\cup(a, 2a]$.

4.5. Экономический класс (июнь)

1. а) $x=1$; **б)** $x\in(2, 3)$. **2.** Две точки пересечения. **4.** $a>1$. **5. а)** $\frac{a}{2}\sqrt{4R^2-a^2}$; **б)** $\frac{a}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$; **в)** $\frac{a\sqrt{4R^2-a^2}}{a+2R+\sqrt{4R^2-a^2}}$.

4.6. Химико-биологический класс (июнь)

1. 56 и $44,8\%$. **3.** $[-2, 2]$. **4.** Да. **5. а)** $a\in(-\infty, 0)\cup(0, 25/8)$; **б)** $a=1, 2, 5, 10$; **в)** $a<0$.

10.5. 1995 год

5.1. 8 класс (май)

1. $46,5$. **2.** $-4a-a^2$; -13. **3.** а) $x=2$; б) $x=-1$; в) при $a=1$ любые x, если $a\neq 1$, то $x=1$. **4.** $(m-n)(m-n+1)$. **5.** $-a/(4+2a), a\neq 2$. **6.** $k=-1/4$. **8.** Да; нет.

5.2. 9 класс (май)

1. а) $p=-1/6, q=-1/3$; б) $p=14, q=49$; в) $p=-3/2, q=-1$. **2.** а) -2, если $x>3,5$; 2, если $x<3,5$; б) 1, если $x>3$, -1, если $x<3$. **3.** а) $(-\infty,\infty)$; б) $x=2$ или $x\in(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$; в) $x=-4$ или $x\in(-3,1)\cup[6,\infty)$. **4.** а) $x\in(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$; б) $x\in(-\infty,-2/5]\cup[6/5,\infty)$; в) если $a\geqslant 0$, то $x\in(-\infty,3-a)\cup(a+3,\infty)$; если $a<0$, то x — любое. **8.** 60 км/ч.

5.3. Физико-математический класс (май)

1. б) $a\in(0,2]$. **2.** $x_{1,2}=(1\pm\sqrt{21})/2, y_{1,2}=(1\pm\sqrt{21})/2$; $x_{3,4}=(1\pm\sqrt{17})/2, y_{3,4}=(1\mp\sqrt{17})/2$. **3.** $\sqrt{3}/3$ и $\sqrt{3}$. **5.** $a=3$.

5.4. Химико-биологический класс (май)

2. $x\in(-3,2)$ или $x=3$. **3.** а) $p=2$; б) $p>2$; в) не существует p, удовлетворяющих условию задачи. **4.** Уменьшилась в два раза. **5.** $\frac{c}{2}\sqrt{3\sqrt{3}/\pi}$.

5.5. Физико-математический класс (июнь)

1. а) $x\in(-\infty,2)\cup(4,\infty)$; б) $x\geqslant 4$ или $x=-1$. **3.** $2\sqrt{3}$. **4.** $(-40,-39),(-40,39),(40,39),(40,-39)$. **6.** $a\in(-1,0)\cup(1,3]$.

5.6. Экономический класс (июнь)

1. $x\in(-2,-1)\cup(-1,\infty)$. **2.** $x=-4$, $x=1+\sqrt{7}$. **4.** $\frac{1}{2}h\sqrt{4h^2-d^2}-\pi h^2/4$. **5.** $p=0$.

5.7. Химико-биологический класс (июнь)

2. а) $x\in(1,2)\cup(2,3)$; б) $x\in(2,3)$. **3.** 8π см^2.
4. а) $p\in(-\infty,0]\cup[3/2,\infty)$; б) не существует таких значений p, удовлетворяющих условию задачи.

5.8. Психологический класс (июнь)

2. а) $x\in[(4-\sqrt{2})/2,2)\cup(2,(4+\sqrt{2})/2]$; б) $x\in[(4-\sqrt{2})/2,2)\cup(2,(4+\sqrt{2})/2]$; в) $x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty)$. **3.** $\frac{ab}{b-2a}$. **4.** $6,5$. **5.** а) $p=-1, p=1, p=2$; б) $p\in(-\infty,-1)\cup(-1,1]\cup[2,5]$; в) $p\in(-\infty,-1)\cup(3,5]$.

10.6. 1996 год

6.1. Физико-математический класс (март)

3. $A = -2$.

6.2. Химико-биологический класс (апрель)

1. $M = 2m$. **2.** $[0, 3]$. **3.** -6. **4.** $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$. **5.** $[-4, -1]$.

6.3. 9 класс (май)

1. $x = 3$, $y = 3$. **2.** $p = -q - 1$. **3.** $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. **5.** 785.

6.4. Физико-математический класс (май)

1. $5/2$. **2.** 35. **3.** 17, O расположена внутри квадрата. **4.** $a < 0$. **5.** При $a < 0$ и $a > 1$ — нет решений, при $a = 0$ — три решения, при $0 < a < 1$ — четыре решения, при $a = 1$ — два решения.

6.5. Физико-математический класс (июнь)

1. $a < 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$ или $a > 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$. **2.** Можно составить треугольник. **3.** $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin\beta = 2/\sqrt{5}$, $\gamma = 90°$. **4.** а) $(-\infty, 2] \cup \{5\}$; б) $(-\infty; -5] \cup [-2; 2] \cup \{5\}$.

6.6. Математико-экономический класс (июнь)

1. $a < \frac{7-\sqrt{97}}{8}$ или $a > \frac{7+\sqrt{97}}{8}$. **2.** Можно составить треугольник. **3.** $6\pi\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2+\sqrt{3})-1\right)$. **4.** а) $(-\infty, 2]\cup\{4\}$; б) $(-\infty; -4]\cup[-2; 2]\cup\{4\}$.

6.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. а) При $a < -1/4$ — нет решений, при $a = -1/4$ решение единственно, при $a > -1/4$ — два решения; б) при $a < 0$ — нет решений, при $a = 0$ и при $a > 1/4$ — два корня, при $a \in (0, 1/4)$ — четыре решения, при $a = 1/4$ — три корня. **4.** $[-2, 7]$. **5.** 22.

6.8. Химико-биологический класс (июнь)

1. 7 кг. **2.** а) $x \leqslant -7$ или $x = -2$; б) $x \leqslant -7$. **3.** 4. **4.** $x = 11$. **5.** $a \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$.

6.9. Психологический класс (июнь)

1. $a \geqslant \frac{8}{7}$. **2.** $\frac{-9+\sqrt{145}}{2}$. **3.** 4. **4.** 22.

6.10. Коммерческий класс (июнь)

1. $a_1 = -\frac{1}{7}b,\ a_2 = \frac{1}{3}b$. **2.** а) 2; б) $x = \pm 2$. **3.** $m = 3/2$.
4. $a = 8$, $x_2 = 2$, $x \in (2,6)$, $x \in (-\infty, 2] \cup [6, \infty)$, $x \in [1,3) \cup (5,7]$.
5. 6 и $6,5$. **6.** 10.

10.7. 1997 год

7.1. 9 класс (май)

1. $x = 1$ или $x = 4$. **2.** 533. **3.** $x > 0$ или $x = -2$. **5.** 3.
6. При $a = 0$ $x = 1$; при $a = 5/2$ $x = -3/2$.

7.2. Физико-математический класс (июнь)

1. $x \in (-\infty; -3) \cup \{1\} \cup (4; \infty)$. **2.** 25. **3.** $x \in [2, \infty)$. **4.** $a \in \{0; 1; 2\}$. **5.** Пусть l и m — прямые, содержащие биссектрисы вертикальных углов, образующихся при пересечении прямых (AB) и (CD), точка O — точка пересечения прямых (AB) и (CD). Искомым геометрическим местом точек будет объединение прямых l и m без точки O.
6. 75°.

7.3. Математико-экономический класс (июнь)

1. а) $x \in (-3; 1] \cup [2; 3)$. б) $x \in [-1; 1] \cup [2; 3)$. **3.** а) При $a = 1$ $x \in \{-1, 0, 1\}$; б) при $a < 1$ $\Big((1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big(-(1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$;
при $a \in [1, 5/4]$ $\Big((1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big(-(1+\sqrt{5-4a})/2, (2a-1-\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big((1-\sqrt{5-4a})/2, (2a-1+\sqrt{5-4a})/2\Big)$,
$\Big(-(1-\sqrt{5-4a})/2, (2a-1+\sqrt{5-4a})/2\Big)$.
4. $\sqrt{5}$ см. **5.** $(3 \pm \sqrt{29})/2$.

7.4. 11 физико-математический класс (июнь)

1. $a \in [-1/2; 1/2]$, $a - 1/2$. **2.** $a = 10$, $b = 88$. **3.** $x \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty)$. **4.** 25. **5.** $14\sqrt{5}/9$. **6.** $\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}/4$.

7.5. Химико-биологический класс (июнь)

1. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$. **2.** $3/8$. **3.** $40/3$. **4.** 288. **5.** $a \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup [1/2; \infty)$. **6.** 400 мл.

7.6. Психологический класс (июнь)

1. $x = -2$ или $x = 1$. **2.** $x \in [-33, 3)$. **4.** 20%.

10.8. 1998 год

8.1. Физико-математический класс (май)

1. $x \in (10/9; 14)$. **2.** $1/5$, 5. **3.** $x \in [-2; \infty)$, $x \neq -1$. **4.** $a \in \left((-1 + 3\sqrt{2})/2; 1\right)$.

8.2. 11 физико-математический класс (май)

1. $x \in [2; \infty)$. **2.** Два корня. **3.** $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in Z\right\}$. **4.** 25. **6.** $\frac{\pi}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha$.

8.3. Химико-биологический и психологический классы (май)

1. $x \in [1; 4]$. **2.** $[-\sqrt{7}; -1] \cup [\sqrt{7}; 3]$. **3.** $a \in (-3; 0)$. **4.** 1600 г. **5.** $3pq/4$.

8.4. Гуманитарный класс (май)

1. $x = 0$ или $x = 1/6$. **2.** а) $[1; 3]$; б) $x \in [-5; 5]$. **3.** $9c^2b^4 - 12cb^2\sqrt{a} + 4a$. **4.** Если $a \neq 0$, то $b = (9a + m)/3a$. Если $a = 0$, то при $m = 0$ переменная b может принимать любые значения; при $m \neq 0$ решений нет. **6.** $8\sqrt{3}$.

8.5. Физико-математический класс (июнь)

1. б) $a = 2$ или $a = 3$. **3.** 24. **4.** $x \in [-6; 0) \cup [3; 4]$. **6.** $a \in (-\infty, 1]$.

8.6. Математико-экономический класс (июнь)

1. б) $a = -1/2$. **3.** 60 см^2. **4.** Решений нет. **5.** $m_{\text{печ}} = 5,2$ кг, $m_{\text{в}} = 5,6$ кг, $m_{\text{пр}} = 7,2$ кг. **6.** $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; 1/6)$.

8.7. 11 физико-математический класс (июнь)

1. $x \in [-4\sqrt{5}/5; 4]$, $x \neq 0$. **2.** Вершины данного семейства парабол составляют на плоскости (XOY) прямую $y = -3x$. **3.** $a = 2$. **5.** 28. **6.** В 5 раз.

8.8. Химико-биологический и психологический классы (июнь)

1. $x = -2 + \sqrt{6}$ или $x = -2$. **2.** $x < 1$. **3.** а) $a \in [2/3; 1) \cup (2; \infty)$; б) при $a = 2$ нет решений; при $a = -2$ выполняется при всех $x \in R$; при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ $x > 1/(a+2)$; при $a \in (-2; 2)$ $x < 1/(a+2)$. **4.** 5. **5.** Нет.

Глава 11

Программы по математике

Фактов всегда достаточно — не хватает фантазии.

Д. Блохинцев

Успешное овладение курсом математики требует от поступивших в СУНЦ УрГУ определенной суммы математических знаний, определенного набора математических навыков и достаточно высокого уровня математической культуры.

Для проверки необходимой математической подготовки абитуриентам, желающим поступить в 10-е физико-математический, математико-экономический, химико-биологический классы СУНЦ УрГУ, а также в 11-й физико-математический класс предлагаются следующие испытания по математике: вступительный письменный экзамен в летнюю школу (сроки проведения: май-июнь), обучение в летней школе (конец июня), письменный выпускной экзамен летней школы. Желающие поступить в 9-й класс или в 10-е психологический, гуманитарный, коммерческий классы сдают вступительный письменный экзамен.

Все необходимые для успешной сдачи вступительного экзамена в летнюю школу сведения содержатся в стандартных школьных учебниках математики.

Основанием для зачисления в летнюю школу лиц, обучающихся в заочной школе при СУНЦ УрГУ, служат результаты письменных экзаменов по математике в зимней школе.

Участники областной или Соросовской олимпиады зачисляются в летнюю школу по результатам собеседования. Призеры этих олимпиад, а также призеры Открытой лицейской олимпиады по математике и курча-

товской физико-математической олимпиады зачисляются в летнюю школу без экзаменов.

Ниже приводятся программы вступительных экзаменов по математике (по существу, это список основных школьных тем); перечисляются основные навыки, уверенное владение которыми может помочь на вступительном экзамене.

11.1. 9 класс

Алгебра

1. Натуральные числа. Арифметические операции. Признаки делимости (на 2, 5, 3, 9). Простые и составные числа, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Деление с остатком.

2. Преобразование арифметических и алгебраических выражений. Обыкновенные и десятичные дроби, действия с дробями. Пропорции, свойства пропорций. Проценты, основные задачи на проценты. Одночлены и многочлены, преобразование суммы и разности многочленов (приведение "подобных"). Умножение многочленов, формулы сокращенного умножения: $(a+b)^2$, a^2-b^2 , $(a+b)^3$, a^3+b^3 . Дробные выражения, тождественные преобразования суммы и разности, произведения и частного дробей.

3. Действительные числа. Числовая прямая. Изображение действительных чисел на числовой прямой. Модуль числа, свойства модулей.

4. Корни, степени с натуральными показателями. Степени с натуральными показателями , свойства степеней ($(ab)^p$, $(a/b)^p$, a^{p+q} , a^{pq}). Квадратные корни и их свойства. Преобразование алгебраических выражений, содержащих знаки корней: выделение полного квадрата, умножение на сопряженное выражение, избавление от иррациональности в знаменателе.

5. Уравнения. Основные способы преобразования уравнений: приведение подобных членов, возведение в степень, разложение на многочлены, замена переменной. Решение линейных уравнений и уравнений, приводящихся к линейным. Квадратные уравнения: формулы корней квадратного уравнения, теорема Виета, определение знаков корней квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Простей-

шие иррациональные уравнения. Уравнения, содержащие модули. Системы уравнений.

6. Функции и графики. Числовая функция: определение числовой функции, область определения и множество значений числовой функции, график числовой функции. Линейная функция $y = ax + b$ и ее график. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график. Функция $y = k/x$ и ее график. Основные способы преобразования графиков функции, преобразование графиков функции, содержащих знак модуля.

7. Неравенства. Основные свойства неравенств, действия с неравенствами, основные способы преобразования неравенств. Решение линейных неравенств. Решение квадратных неравенств. Решение неравенств, содержащих модули. Решение неравенств, содержащих иррациональности. Системы неравенств. Уравнения и неравенства с параметрами.

8. Текстовые и логические задачи.

Геометрия

1. Аксиомы и теоремы геометрии. Понятие об аксиоматическом методе в геометрии.

2. Основные геометрические фигуры (точка, прямая, луч, отрезок, угол, полуплоскость). Откладывание и измерение отрезков и углов. Смежные и вертикальные углы и их свойства.

3. Треугольник и его элементы. Виды треугольников, свойства равнобедренного треугольника. Медиана, высота, биссектриса треугольника и их свойства. Средняя линия треугольника. Признаки равенства треугольников.

4. Параллельные прямые. Аксиома о параллельных прямых. Признаки параллельности прямых. Сумма углов треугольника.

5. Перпендикулярность прямых. Построение перпендикуляра к прямой. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора. Вычисление площади треугольника.

6. Геометрические построения циркулем и линейкой. Деление пополам отрезка и угла. Построение угла, равного данному. Построение треугольника по его элементам. Построение перпендикуляра к прямой. Построение прямой, параллельной данной прямой.

7. Четырехугольники. Основные виды четырехугольников (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция). Признаки параллелограмма, свойства диагоналей параллелограмма и ромба, площадь параллелограмма. Средняя линия трапеции, формула площади трапеции.

8. Окружность и круг. Центр и радиус окружности. Секущая и касательная к окружности и их свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, вписанная в треугольник. Окружность, описанная вокруг треугольника. Четырехугольники, вписанные в окружность и описанные вокруг окружности.

9. Подобие треугольников. Признаки подобия.

Основные математические навыки

1. Приводить полные обоснования рассуждений при решении задач, используя теоретические сведения.

2. Решать текстовые задачи методом уравнений.

3. Решать простейшие логические задачи.

4. Выполнять арифметические действия с числами (точными и приближенными).

5. Вычислять приближенные значения с использованием калькулятора.

6. Выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений.

7. Выражать функциональные зависимости между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

8. Строить графики функций, указанных в программе.

9. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, указанных в программе видов.

10. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы фигуры на чертеже.

11. Применять алгебраические формулы к решению геометрических задач.

11.2. 10 физико-математический и математико-экономический классы

Алгебра

1. Преобразование арифметических выражений. Формулы сокращенного умножения $((a \pm b)^2, a^2 - b^2, a^3 \pm b^3, (a \pm b)^3)$. Признаки делимости. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного натуральных чисел. Деление с остатком.

2. Числовые функции, область определения и множество значений функции, ее график. Способы преобразования графиков функций. Основные свойства функций: четность и нечетность, монотонное возрастание и убывание, периодичность.

3. Линейная функция и ее свойства. Системы линейных уравнений.

4. Квадратичная функция и ее свойства. Корни квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного уравнения. Квадратичное неравенство.

5. Обратно пропорциональная зависимость $y = k/x$, ее свойства, график.

6. Модуль числа. Свойства модуля. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Преобразования графиков функций, содержащих знак модуля.

7. Арифметический квадратный и кубический корни. Их свойства. Преобразования арифметических выражений, содержащих знаки корней (выделение полного квадрата, умножение на сопряженное, избавление от иррациональности в знаменателе). Иррациональные уравнения и неравенства.

8. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена прогрессий, суммы первых членов.

9. Целая и дробная части чисел. Графики функций $[x], \{x\}$.

10. Решение неравенств. Метод интервалов.

11. Решение уравнений. Основные способы преобразования уравнений: приведение подобных, возведение в степень, разложение на множители, замена переменной.

12. Системы уравнений. Основные способы преобразования систем: метод подстановки, линейное преобразование, переход к совокупности нескольких систем, замена переменных.

13. Уравнения и неравенства с параметрами. Аналитический и графический способы решения.

14. Решение текстовых задач. Логические задачи. Основные задачи на проценты.

Геометрия

1. Неопределяемые понятия в геометрии. Основные определения. Аксиомы и теоремы в геометрии.

2. Треугольник. Основные теоремы о треугольнике: теорема Пифагора, теорема о сумме углов в треугольнике, теорема синусов и косинусов, свойства равнобедренного треугольника. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников. Средняя линия треугольника и ее свойства. Вычисление площади треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты в треугольнике. Их свойства. Вписанная и описанная окружности.

3. Четырехугольник. Вычисление его площади через диагонали и угол между ними. Вписанный и описанный четырехугольники.

4. Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Вычисление площади параллелограмма.

5. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства.

6. Трапеция, вычисление площади трапеции. Средняя линия трапеции и ее свойства.

7. Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Секущая к окружности и ее свойства. Измерение вписанных углов. Вычисление длины окружности и площади круга.

8. Прямоугольная система координат на плоскости. Нахождение расстояния между двумя точками. Уравнение прямой и окружности.

9. Векторы. Операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

10. Задачи на построение. Основные геометрические места точек: множество точек, равноудаленных от концов данного отрезка; множество точек, равноудаленных от сторон данного угла; множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Основные математические навыки

1. Приводить полные обоснования решений задач, используя теоретические сведения.

2. Решать текстовые задачи.

3. Решать простейшие логические задачи.

4. Выполнять арифметические действия с числами (точными и приближенными).

5. Выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений.

6. Вычислять приближенные значения функций с использованием калькулятора.

7. Выражать функциональную зависимость между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

8. Строить графики функций, указанных в программе.

9. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств указанных в программе видов.

10. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы на чертеже.

11. Применять алгебраические и тригонометрические формулы, векторный и координатный методы к решению геометрических задач.

11.3. 10 химико-биологический и психологический классы

Алгебра

1. Преобразование арифметических выражений. Формулы сокращенного умножения. Признаки делимости (на 2, 3, 5, 9, 11). Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Деление с остатком. Пропорции, свойства пропорций. Проценты, основные задачи на проценты.

2. Функции и графики. Определение числовой функции, область определения и множество значений числовой функции, график числовой функции.

3. Линейная функция $y = ax + b$, ее свойства и график. Линейные уравнения и неравенства. Системы линейных уравнений и неравенств.

4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график. Корни квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного уравнения. Квадратичное неравенство.

5. Модуль числа, свойства модулей. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля. Преобразование графиков функций, содержащих знак модуля.

6. Арифметический квадратный и кубический корни. Их свойства. Преобразование арифметических выражений, содержащих знаки корней (выделение полного квадрата, умножение на сопряженное выражение, избавление от иррациональности в знаменателе). Иррациональные уравнения и неравенства.

7. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена прогрессии, суммы первых n членов. Формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

8. Решение неравенств. Метод интервалов.

9. Решение уравнений. Основные способы преобразования уравнений: приведение подобных, возведение в степень, разложение на множители, замена переменной.

10. Системы уравнений. Основные способы преобразования систем: метод подстановки, линейное преобразование, переход к совокупности нескольких систем, замена переменных.

11. Уравнения и неравенства с параметрами. Аналитический и графический способы решения.

12. Текстовые задачи на проценты, смеси, сплавы. Задачи с целочисленными данными.

13. Простейшие логические задачи.

Геометрия

1. Неопределяемые понятия в геометрии. Основные определения. Аксиомы и теоремы в геометрии.

2. Треугольник. Основные теоремы о треугольнике: теорема Пифагора, теорема о сумме углов в треугольнике, теоремы синусов и косинусов,

свойства равнобедренного треугольника, соотношение между сторонами и углами треугольника. Вычисление площади треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты в треугольнике. Их свойства. Средняя линия треугольника. Вписанная и описанная окружности.

3. Признаки равенства треугольников.

4. Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

5. Четырехугольник. Вычисление его площади через диагонали и угол между ними. Вписанные и описанные четырехугольники.

6. Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Вычисление площади параллелограмма.

7. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства.

8. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Вычисление площади трапеции.

9. Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Вписанные и центральные углы.

10. Прямоугольная система координат на плоскости. Нахождение расстояния. Уравнение прямой и окружности.

11. Векторы. Операции над векторами. Скалярное произведение. Угол между векторами.

Основные математические навыки

1. Приводить полные обоснования рассуждений при решении задач, используя теоретические сведения.

2. Решать текстовые задачи на смеси, сплавы, проценты методом уравнений.

3. Решать простейшие логические задачи.

4. Выполнять арифметические действия с числами (точными и приближенными).

5. Вычислять приближенные значения функций (в частности, квадратных корней), в том числе с использованием калькулятора.

6. Выполнять тождественные преобразования алгебраических выражений.

7. Выражать функциональные зависимости между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

8. Строить графики функций, указанных в программе.

9. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, указанных в программе видов.

10. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы фигуры на чертеже.

11. Применять алгебраические формулы, векторный и координатный методы к решению геометрических задач.

12. Доказывать указанные в программе математические утверждения.

11.4. 10 гуманитарный класс

Алгебра

1. Натуральные числа и действия над ними. Сложение и законы сложения. Вычитание. Умножение и законы умножения. Деление. Признаки делимости на 2, 5, 3, 9. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Числовые выражения, “порядок действий”.

2. Обыкновенные и десятичные дроби. Правильные и неправильные дроби. Основное свойство дроби. Сложение и вычитание обыкновенных дробей. Умножение и деление обыкновенных дробей. Десятичные дроби. Обращение конечной десятичной дроби в обыкновенную дробь и обыкновенной в десятичную. Действия с десятичными дробями. Пропорции, свойства пропорций. Проценты, основные задачи на проценты. Возведение дробей в степень с натуральным показателем, свойства степени с натуральным показателем.

3. Выражения с переменными. Одночлены и многочлены. Преобразование суммы и разности многочленов (приведение “подобных”). Умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен. Формулы сокращенного умножения для выражений: $(a+b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, a^3+b^3. Дробные выражения, тождественные преобразования суммы и разности, произведения и частного дробей.

4. Действительные числа. Числовая прямая. Иррациональные числа. Модуль числа.

5. Степени и корни. Корень n-й степени, его свойства. Степень с дробным показателем. Степень с отрицательным показателем. Степени $(ab)^p$, $(a/b)^p$, a^{p+q}, a^{pq} и их свойства.

6. Уравнения с одной переменной. Тождественные преобразования уравнений. Линейные уравнения и уравнения, приводящиеся к линейным. Квадратные уравнения, формула корней квадратного уравнения, разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

7. Функции и графики. Числовая функция. Определение числовой функции. Область определения и множество значений, график числовой функции. Линейная функция $y = ax + b$ и ее график. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ и ее график. Функция $y = k/x$ и ее график.

8. Неравенства. Основные свойства неравенств, действия с неравенствами. Решение линейных неравенств. Решение квадратных неравенств. Системы неравенств.

9. Числовые последовательности. Арифметическая прогрессия: определение, формулы n-го члена, суммы первых n членов. Геометрическая прогрессия: определение, знаменатель прогрессии, формулы n-го члена, суммы первых n членов.

10. Начала тригонометрии. Градусное и радианное измерение угловых величин. Тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества; соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы сложения $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, формулы двойного угла. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Геометрия

1. Аксиомы и теоремы геометрии. Понятие об аксиоматическом методе в геометрии.

2. Основные геометрические фигуры (точка, прямая, луч, отрезок, угол, полуплоскость). Откладывание и измерение отрезков и углов. Смежные и вертикальные углы и их свойства.

3. Треугольник и его элементы. Виды треугольников, свойства равнобедренного треугольника. Медиана, высота, биссектриса треугольника и их свойства. Средняя линия треугольника. Признаки равенства треугольников.

4. Параллельные прямые. Аксиома о параллельных прямых. Признаки параллельности прямых. Сумма углов треугольника. Теорема Фалеса.

5. Перпендикулярность прямых. Построение перпендикуляра к прямой. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора. Тригонометрические функции острых углов прямоугольного треугольника. Решение прямоугольных треугольников. Значение тригонометрических функций для углов 30, 45, 60°. Вычисление площади треугольника.

6. Геометрические построения циркулем и линейкой. Деление пополам отрезка и угла. Построение угла, равного данному. Построение треугольника по его элементам. Построение перпендикуляра к прямой и прямой, параллельной данной.

7. Четырехугольники. Основные виды четырехугольников (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция). Признаки параллелограмма, свойства диагоналей параллелограмма и ромба, площадь параллелограмма. Средняя линия трапеции, формула площади трапеции.

8. Подобие фигур. Признаки подобия треугольников.

9. Решение треугольников. Теорема косинусов. Теорема синусов.

10. Окружность, ее элементы. Секущая и касательная к окружности. Центральные и вписанные углы. Окружность, вписанная в треугольник. Окружность, описанная вокруг треугольника. Длина окружности, длина дуги окружности. Площадь круга, площадь сектора.

11. Векторная алгебра, координатный метод. Понятие вектора. Сложение векторов, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов. Координатная плоскость, координаты вектора, координаты точки. Длина отрезка в системе координат. Уравнение окружности.

Основные математические навыки

1. Выполнять арифметические действия с числами.

2. Вычислять приближенные значения функций с использованием калькулятора.

3. Выполнять тождественные преобразования алгебраических и тригонометрических выражений.

4. Выражать функциональные зависимости между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

5. Строить графики функций, указанных в программе.

6. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств указанных в программе видов.

7. Решать текстовые задачи методом уравнений.

8. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы фигуры на чертеже.

9. Применять векторный и координатный методы к решению геометрических задач.

10. Применять алгебраические и тригонометрические формулы к решению геометрических задач.

11. Доказывать указанные в программе математические утверждения.

12. Приводить обоснования решений задач, используя теоретические сведения.

11.5. 11 физико-математический класс

Алгебра

1. Преобразование арифметических выражений. Формулы сокращенного умножения: $(a \pm b)^2, a^2 - b^2, a^3 \pm b^3, (a \pm b)^3$. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного натуральных чисел. Деление с остатком. Пропорции и их свойства. Проценты, решение основных задач на проценты.

2. Функции и графики. Определение числовой функции; область определения и множество значений числовой функции; график числовой функции. Некоторые свойства числовых функций: четность и нечетность, монотонное возрастание и монотонное убывание, периодичность. Основные способы преобразования графиков функций.

3. Линейная функция $y = kx + b$ и ее свойства. Решение линейных уравнений и систем линейных уравнений.

4. Квадратичная функция и ее свойства. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Определение знаков корней квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Решение квадратных неравенств.

5. Модуль числа. Свойства модуля. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

6. Арифметический корень n-й степени и его свойства. Преобразования арифметических выражений, содержащих знаки корней (выделение полного квадрата, умножение на сопряженное выражение, избавление от иррациональности в знаменателе). Решение иррациональных уравнений и неравенств.

7. Функция $y = \frac{k}{x}$, ее свойства и график.

8. Функции целой и дробной части чисел, их свойства и графики.

9. Степенная функция, ее свойства и график.

10. Показательная функция, ее свойства и график.

11. Логарифм числа. Свойства логарифмов. Десятичные и натуральные логарифмы. Формула перехода к логарифму по новому основанию.

12. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, ее свойства и график. Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

13. Тригонометрические функции, их свойства и графики. Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

14. Решение тригонометрических уравнений и неравенств.

15. Основные тригонометрические тождества. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения. Формулы сложения $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$; формулы двойного и половинного аргументов. Преобразование тригонометрических выражений в произведение и произведений тригонометрических функций в сумму.

16. Решение уравнений. Основные способы преобразования уравнений: приведение подобных членов, возведение в степень, разложение на множители, замена переменной.

17. Системы уравнений. Основные способы преобразования систем: метод подстановки, линейные преобразования, переход к совокупности нескольких систем, замена переменных.

18. Решение неравенств. Метод интервалов.

19. Уравнения и неравенства с параметрами. Аналитический и графический способы их решения.

20. Решение текстовых задач на составление уравнений, систем уравнений и неравенств.

21. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена прогрессий и суммы первых n членов.

22. Решение простейших логических задач.

Геометрия

1. Неопределяемые понятия в геометрии. Основные определения. Аксиомы и теоремы в геометрии.

2. Треугольник. Основные теоремы о треугольнике: теорема Пифагора, теорема о сумме углов в треугольнике, теоремы синусов и косинусов, свойства равнобедренного треугольника. Вычисление площади треугольника. Биссектрисы, медианы и высоты в треугольнике. Их свойства. Вписанная и описанная окружности. Средняя линия треугольника и ее свойства.

3. Четырехугольник. Вычисление его площади через диагонали и угол между ними. Вписанный и описанный четырехугольники.

4. Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Вычисление площади параллелограмма.

5. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства.

6. Трапеция, вычисление ее площади, средняя линия трапеции и ее свойства.

7. Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Секущая к окружности. Измерение центральных и вписанных углов. Вычисление длины окружности и площади круга.

8. Прямоугольная система координат на плоскости. Нахождение расстояния между двумя точками. Уравнения прямой и окружности.

9. Векторы. Операции над векторами. Скалярное произведение векторов.

10. Аксиомы стереометрии.

11. Прямые и плоскости в пространстве, их взаимное расположение. Признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

12. Угол между двумя скрещивающимися прямыми, прямой и плоскостью. Двугранные углы. Линейные углы двугранных углов.

13. Теорема о трех перпендикулярах.

Основные математические навыки

1. Приводить полные обоснования решений задач, используя теоретические сведения.

2. Решать текстовые задачи.

3. Решать простейшие логические задачи.

4. Выполнять арифметические действия с числами (точными и приближенными).

5. Вычислять приближенные значения функций с использованием калькулятора.

6. Выполнять тождественные преобразования алгебраических и тригонометрических выражений.

7. Выражать функциональные зависимости между величинами, находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком.

8. Решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, указанных в программе видов.

9. Строить графики функций, указанных в программе.

10. Изображать геометрические фигуры, выделять необходимые элементы на чертеже.

11. Применять алгебраические и тригонометрические формулы, векторный и координатный методы к решению геометрических задач.

Для заметок

Для заметок

Сергей Александрович Ануфриенко

Елена Михайловна Соколова

Задачи вступительных экзаменов по математике в СУНЦ УрГУ (лицей) 1991 – 1998 гг.

Редактор Т.А. Сасина
Технический редактор Э.А. Максимова
Компьютерный набор и верстка С.А. Ануфриенко

ЛР т 020257 от 22.11.96.

Подписано в печать 12.03.99. Формат $60 \times 84\ 1/16$.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Уч.-изд.л. 9,5. Усл.печ.л. 11,39. Зак. . Тираж 1000 экз.
Уральский государственный университет им. А.М. Горького.
Екатеринбург, пр. Ленина, 51.