СУНЦ УрФУ, 2018 год
Решения вступительного экзамена по математике
для поступающих в 9 гуманитарный класс
Вариант 1

Часть 1

1. *(2 балла)* Вычислить $\left(2\frac{1}{2} - \frac{13}{18} : 2\frac{8}{9}\right) : \frac{3}{4}$.

Решение. $\left(2\frac{1}{2} - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26}\right) : \frac{3}{4} = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3$.
Ответ. 3.

2. *(2 балла)* Вычислить $(\sqrt{1,21 \cdot 45} + \sqrt{125}) : \sqrt{5} - 0,5 \cdot (\sqrt{20})^2$.
Решение. $(\sqrt{1,21 \cdot 45} + \sqrt{125}) : \sqrt{5} - 0,5 \cdot (\sqrt{20})^2 = (1,1 \cdot 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}) : \sqrt{5} - 0,5 \cdot 20 =$
$= \frac{1,1 \cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 10 = 3,3 + 5 - 10 = 3,3 - 5 = -1,7$.
Ответ. $-1,7$.

3. *(3 балла)* Сократить дробь $\dfrac{3y^2 - 3x^2 - x - y}{3x - 3y + 1}$.
Решение. Разложим многочлен, стоящий в числителе дроби, на множители и сократим дробь:
$\frac{3(y^2-x^2)-(x+y)}{3x-3y+1} = \frac{3(y-x)(y+x)-(x+y)}{3x-3y+1} = \frac{(x+y)(3y-3x-1)}{3x-3y+1} = -\frac{(x+y)(3x-3y+1)}{3x-3y+1} = -(x+y)$.
Ответ. $-(x+y)$.

4. *(3 балла)* Вычислить $\dfrac{(25 \cdot 9)^2}{125 \cdot 27 \cdot 15}$.
Решение. $\frac{5^4 \cdot 3^4}{5^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{5^4 \cdot 3^4}{5^4 \cdot 3^4} = 1$.
Ответ. 1.

5. *(3 балла)* Решить неравенство $(4 - 2\sqrt{5})(5 - 3x) \leqslant 0$.
Решение. Определим знак числа $4 - 2\sqrt{5}$. Для этого сравним 4 и $2\sqrt{5}$. Их квадраты 16 и 20 соответственно, поэтому $4 < 2\sqrt{5}$, а $4 - 2\sqrt{5} < 0$. Разделив обе части неравенства на $4 - 2\sqrt{5}$, получим $5 - 3x \geqslant 0$, $3x \leqslant 5$, $x \leqslant \frac{5}{3}$.
Ответ. $x \leqslant \frac{5}{3}$.

6. *(3 балла)* В треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что $\angle ABC = 105^\circ$, $BH = AH$, $AB = 2\sqrt{2}$. Найти BC.
Решение. Треугольник ABH прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle ABH = 45^\circ$. Тогда $\angle HBC = 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ и $\angle BCH = 30^\circ$. Пусть $BH = x$, тогда $BC = 2x$, так как BH – катет, лежащий против угла 30°. Применяя теорему Пифагора к треугольнику ABH, получим $x^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2$, $2x^2 = 8$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Отсюда $BC = 2 \cdot 2 = 4$.
Ответ. 4.

7. *(3 балла)* График квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A(2, 11)$ и $B(1, 5)$. Определить p и q.
Решение. Так как точки A и B принадлежат графику функции $y = x^2 + px + q$, составим систему $\begin{cases} 11 = 4 + 2p + q, \\ 5 = 1 + p + q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 7, \\ p + q = 4. \end{cases}$
Решая эту систему, находим, что $p = 3$, $q = 1$.
Ответ. $p = 3$, $q = 1$.

8. *(3 балла)* Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$.

Решение. Разложив квадратный трехчлен на множители, получим $y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = x - 2$ при условии $x \neq -1$. Графиком функции является прямая $y = x - 2$ с «выколотой» точкой $(-1, -3)$.
Ответ. Рис. 1.

9. *(3 балла)* Дана функция $y = \dfrac{5 - 2x}{4}$. Для скольких целых значений аргумента x верно двойное неравенство $-1 \leqslant y \leqslant 0,25$?

Решение. Перепишем двойное неравенство в виде $-1 \leqslant \frac{5-2x}{4} \leqslant 0,25$. Оно равносильно системе $\begin{cases} \frac{5-2x}{4} \leqslant 0,25, \\ \frac{5-2x}{4} \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \leqslant 1, \\ 5-2x \geqslant -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geqslant 4, \\ 2x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 4,5. \end{cases}$ Пересекая множества решений неравенств системы, получим $2 \leqslant x \leqslant 4,5$. Промежуток содержит три целые значения x.

Ответ. 3.

10. *(3 балла)* Найти площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = 2x - 2$, $y = -5x - 2$ и осью OX.

Решение. Построим графики функций $y = 2x - 2$ и $y = -5x - 2$. Искомый треугольник PQR (рис. 2). Найдем его площадь. Длина отрезка $PQ = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$, а высота треугольника OR равна 2. Тогда $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5} \cdot 2 = 1\frac{2}{5}$.

Ответ. $1\frac{2}{5}$.

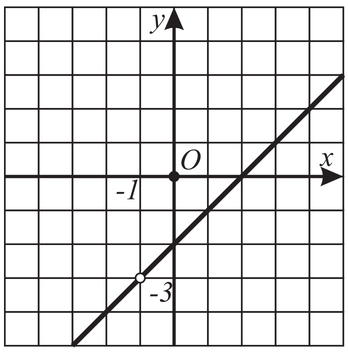

Рис. 1

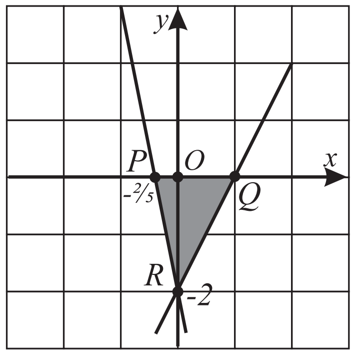

Рис. 2

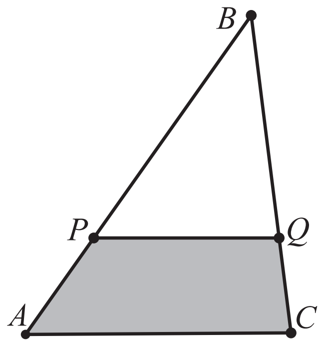

Рис. 3

Часть 2

11. *(7 баллов)* Цену некоторой вещи сначала снизили на 30%, а затем подняли на 42%. В итоге ее цена составила 1988 руб. Какова первоначальная цена вещи?

Решение. Пусть вещь первоначально стоила x рублей. После снижения ее цена составила $\frac{x \cdot 70}{100}$руб, а после повышения она уже составляла $\frac{x \cdot 70}{100} \cdot \frac{142}{100} = \frac{9940x}{100 \cdot 100} = \frac{994x}{1000}$. Новая цена вещи 1988 руб, поэтому $\frac{994x}{1000} = 1988$, $x = \frac{1988 \cdot 1000}{994} = 2 \cdot 1000 = 2000$.

Ответ. 2000.

12. *(8 баллов)* Дан треугольник ABC, в котором $(PQ) \parallel (AC)$. Точка P лежит на стороне AB, а точка Q – на стороне BC, $S_{APQC} = 10$, $AP : PB = 1 : 2$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Треугольники PBQ и ABC подобные (рис. 3), их коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату кооэффициента подобия. В результате получим $\frac{S_{\triangle PBQ}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, а $\frac{S_{APQC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{9}$, $\frac{10}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{9}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{10 \cdot 9}{5} = 18$.

Ответ. 18.

13. *(7 баллов)* Решить уравнение $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x}{x+3} = \frac{36}{(x-3)(x+3)}$. ОДЗ уравнения: $x \neq 3$, $x \neq -3$. Приводя все дроби к общему знаменателю, в числителе получим $(x+3)^2 + x(x-3) = 36 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + x^2 - 3x = 36 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -4{,}5$, $x = 3$. Но $x = 3$ является посторонним корнем.

Ответ. $-4{,}5$.

СУНЦ УрФУ, 2018 год
Решения вступительного экзамена по математике для поступающих в 9 гуманитарный класс
Вариант 2

Часть 1

1. *(2 балла)* Вычислить $\left(1\frac{1}{3}-\frac{14}{15}:5\frac{3}{5}\right):\frac{7}{12}$.
Решение. $\left(1\frac{1}{3}-\frac{14}{15}:5\frac{3}{5}\right):\frac{7}{12}=\left(\frac{4}{3}-\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{28}\right)\cdot\frac{12}{7}=\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{12}{7}=\frac{7}{6}\cdot\frac{12}{7}=2.$
Ответ. 2.

2. *(2 балла)* Вычислить $(\sqrt{1,44\cdot 48}+\sqrt{75}):\sqrt{3}-0,2(\sqrt{50})^2$
Решение. $(\sqrt{1{,}44\cdot 48}+\sqrt{75}):\sqrt{3}-0{,}2(\sqrt{50})^2=(1{,}2\cdot 4\sqrt{3}+5\sqrt{3}):\sqrt{3}-0{,}2\cdot 50=\frac{1{,}2\cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-10=$ $=4{,}8+5-10=4{,}8-5=-0{,}2.$
Ответ. $-0,2$.

3. *(3 балла)* Сократить дробь $\dfrac{2x^2-2y^2-3x-3y}{2y-2x+3}$.
Решение. Разложим многочлен, стоящий в числителе дроби, на множители и сократим дробь $\frac{2(x^2-y^2)-3(x+y)}{2y-2x+3}=\frac{2(x-y)(x+y)-3(x+y)}{2y-2x+3}=\frac{(x+y)(2x-2y-3)}{2y-2x+3}=-\frac{(x+y)(2x-2y-3)}{2x-2y-3}=-(x+y).$
Ответ. $-(x+y)$.

4. *(3 балла)* Вычислить $\dfrac{(49\cdot 8)^2}{(14)^3\cdot 16}$.
Решение. $\frac{7^4\cdot 2^6}{7^3\cdot 2^3\cdot 2^4}=\frac{7^4 2^6}{7^3\cdot 2^7}=\frac{7}{2}=3{,}5.$
Ответ. 3,5.

5. *(3 балла)* Решить неравенство $(4\sqrt{3}-7)(2-3x)\geqslant 0$.
Решение. Определим знак числа $4\sqrt{3}-7$. Их квадраты равны 48 и 49 соответственно, поэтому $4\sqrt{3}<7$, а $4\sqrt{3}-7<0$. Разделив обе части неравенства на $4\sqrt{3}-7$, получим $2-3x\leqslant 0$, $3x\geqslant 2$, $x\geqslant\frac{2}{3}$.
Ответ. $x\geqslant\frac{2}{3}$.

6. *(3 балла)* В треугольнике ABC проведена высота BH. Известно, что $\angle ABC=75^\circ$, $BH=$ $=AH=\sqrt{3}$. Найти BC.
Решение. Треугольник ABH прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle ABH=45^\circ$. Тогда $\angle HBC=75^\circ-45^\circ=30^\circ$. Пусть $CH=x$, тогда $BC=2x$, так как CH – катет, лежащий против угла 30°. По теореме Пифагора $4x^2=x^2+(\sqrt{3})^2$, $3x^2=3$, $x^2=1$, $x=1$. Отсюда $BC=2\cdot 1=2$.
Ответ. 2.

7. *(3 балла)* График функции $y=x^2+px+q$ проходит через точки, $A(2,2)$ и $B(3,5)$. Найдите p и q.
Решение. Так как точки A и B принадлежат графику функции $y=x^2+px+q$, составим систему $\begin{cases}2=4+2p+q,\\5=9+3p+q\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2p+q=-2,\\3p+q=-4.\end{cases}$ Решая эту систему, находим, что $p=-2$, $q=2$.
Ответ. $p=-2$, $q=2$.

8. *(3 балла)* Построить график функции $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$.
Решение. Разложив квадратный трехчлен на множители, получим: $y=\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=x-3$ при условии, что $x\neq 1$. Графиком функции является прямая $y=x-3$ с «выколотой» точкой $(1,-2)$.
Ответ. Рис. 1.

9. *(3 балла)* Дана функция $y=\dfrac{6-3x}{2}$. Для скольких целых значений аргумента x верно двойное неравенство $-4\leqslant y\leqslant -1,5$?
Решение. Перепишем двойное неравенство в виде: $-4\leqslant\frac{6-3x}{2}\leqslant -1,5$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases}\frac{6-3x}{2}\leqslant -1,5,\\\frac{6-3x}{2}\geqslant -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-3x\leqslant -3,\\6-3x\geqslant -8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\geqslant 9,\\3x\leqslant 14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 3,\\x\leqslant\frac{14}{3}.\end{cases}$$

Пересекая множества решений неравенств системы, получим $3 \leqslant x \leqslant 4\frac{2}{3}$. Промежуток содержит два целых значения аргумента x.

Ответ. 2.

10. *(3 балла)* Найти площадь треугольника, ограниченного графиками функций $y = 3x + 2$, $y = -2x + 2$ и осью OX.

Решение. Построим графики функций $y = 3x + 2$ и $y = -2x + 2$. Искомый треугольник MNP (рис. 2). Длина отрезка $MP = 1+\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$, а длина высоты ON равна 2. Тогда $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 2 = 1\frac{2}{3}$.

Ответ. $1\frac{2}{3}$.

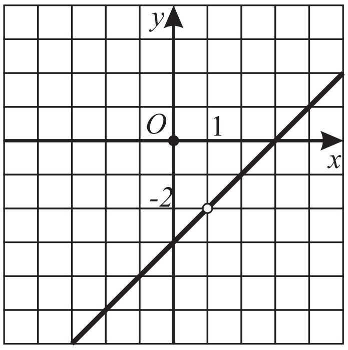

Рис. 1

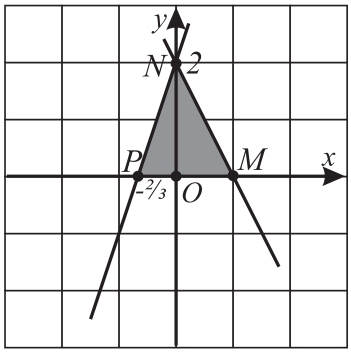

Рис. 2

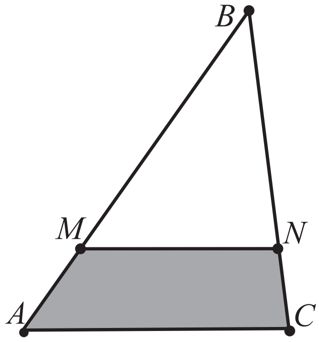

Рис. 3

Часть 2

11. *(7 баллов)* Цену некоторой вещи сначала увеличили на 44%, а потом снизили на 20%. В итоге ее цена составила 1152 рубля. Какова первоначальная цена вещи?

Решение. Пусть вещь стоила xруб. Цена вещи после увеличения стала $\frac{x\cdot 144}{100}$руб, а после снижения она уже составляла $\frac{x\cdot 144}{100}\cdot\frac{80}{100}$руб. Новая цена вещи 1152руб, поэтому $\frac{x\cdot 144\cdot 8}{100\cdot 10} = 1152$, откуда $x = \frac{1152\cdot 1000}{144\cdot 8} = 1000$руб.

Ответ. 1000.

12. *(8 баллов)* Дан треугольник ABC, в котором $(MN) \parallel (AC)$. Точка M лежит на стороне AB, точка N – на стороне BC, причем $AM : MB = 1 : 3$ и $S_{AMNC} = 14\text{см}^2$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Треугольник MBN и ABC подобные (рис. 3), их коэффициент подобия $k = \frac{3}{4}$. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. В результате получим $\frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{9}{16}$, а $\frac{S_{AMNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{7}{16}$, $\frac{14}{S_{\triangle ABC}} = \frac{7}{16}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{14\cdot 16}{7} = 32$.

Ответ. 32.

13. *(7 баллов)* Решить уравнение $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$. ОДЗ уравнения: $x \neq 1$, $x \neq -1$. Приводя все дроби к общему знаменателю, в числителе получим $(x+1)^2 + x(x-1) = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - x = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $x = \frac{1}{2}$. Но $x = -1$ является посторонним корнем.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$.

Критерии оценивания

1–2. *2 балла.*

3–7, 9–10. *3 балла.*
8. *3 балла.* За правильно построенную прямую — 2 балла, за выколотую точку — 1 балл.

11. *7 баллов.*
Найдена цена вещи после первого изменения (снижения или повышения) (2 балла).
Найдена цена вещи после второго изменения (3 балла).
Составлено уравнение (1 балл).
Решено уравнение (1 балл).

12. *8 баллов.*
Доказано подобие треугольников (1 балл).
Найден коэффициент подобия (2 балла).
Применена теорема об отношении площадей подобных треугольников (2 балла).
Установлено отношение площадей четырехугольника и данного треугольника (2 балла).
Получен ответ (1 балл).

13. *7 баллов.*
Применена формула разности квадратов (1 балл).
Найдена область допустимых значений (1 балл).
Все дроби приведены к общему знаменателю, раскрыты скобки, приведены подобные (3 балла).
Решено квадратное уравнение (1 балл).
Учтена область допустимых значений (1 балл).

Ответы, 1 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
3	$-1{,}7$	$-(x+y)$	1	$x \leqslant \frac{5}{3}$	4	$p=3,\ q=1$	Рис. 1	3	$1\frac{2}{5}$	2000	18	$-4{,}5$

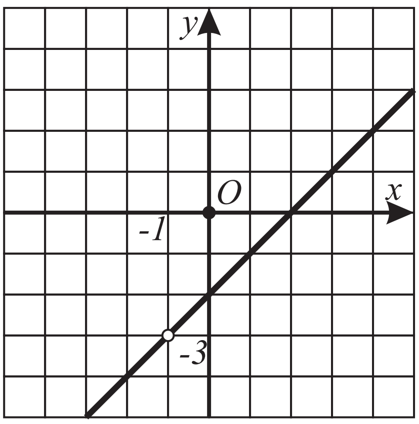

Рис. 1

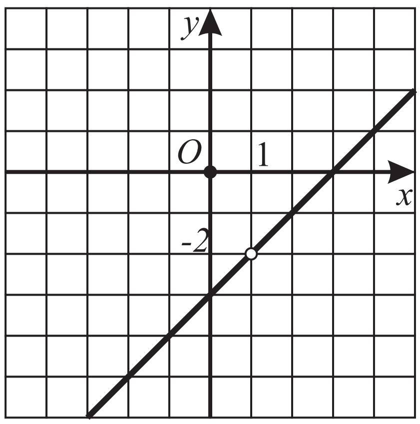

Рис. 2

Ответы, 2 вариант

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
2	$-0{,}2$	$-(x+y)$	$3,5$	$x \geqslant \frac{2}{3}$	2	$p=-2,\ q=2$	Рис. 2	2	$1\frac{2}{3}$	1000	32	0,5